수학 Ⅰ

01 지수함수와 로그함수

정답 본문 8~17쪽

01 ⑤	02 ①	03 ④	04 ④	05 ①
06 ②	07 ①	08 ⑤	09 ⑤	10 ③
11 ②	12 ④	13 ⑤	14 ①	15 ②
16 5	17 5	18 8	19 ⑤	20 ③
21 9	22 8	23 ①	24 5	25 ②
26 69	27 ③	28 ④	29 ⑤	30 ④

01

$$\frac{\sqrt{\sqrt[3]{6}\times\sqrt[6]{9}}}{\sqrt[6]{2}}=\frac{\sqrt{\sqrt[3]{6}\times\sqrt[6]{3^2}}}{\sqrt[6]{2}}=\frac{\sqrt{\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{3}}}{\sqrt[6]{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{\sqrt[3]{6\times3}}}{\sqrt[6]{2}}=\frac{\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}}=\sqrt[6]{\frac{18}{2}}$$
$$=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[3]{3}$$

답 ⑤

02

$-n^2+23n+24$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수가 2이려면 n이 짝수이어야 하고, $-n^2+23n+24>0$이어야 한다.

즉, $n^2-23n-24<0$에서

$(n-24)(n+1)<0$

$-1<n<24$

따라서 구하는 자연수 n은 2, 4, 6, $\cdots$, 22의 11개이다.

답 ①

03

$x>1$인 실수 x의 제곱근 중 음수인 것이 $f(x)$이므로

$f(x)=-\sqrt{x}$

$x>1$인 실수 x의 세제곱근 중 실수인 것이 $g(x)$이므로

$g(x)=\sqrt[3]{x}$

$(f\circ g)(x)=f(\sqrt[3]{x})=-\sqrt{\sqrt[3]{x}}=-\sqrt[6]{x}$

이므로 $(f\circ g)(x)$의 값이 정수가 되려면 실수 x는 어떤 정수의 여섯제곱이어야 한다.

따라서 1보다 큰 실수 x의 최솟값은

$2^6=64$

답 ④

04

$$5^0\times27^{\frac{5}{6}}\div\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=1\times(3^3)^{\frac{5}{6}}\div(3^{-1})^{-2}$$
$$=3^{\frac{5}{2}-2}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

답 ④

05

$a^3=2\sqrt{2}=2^{\frac{3}{2}}$이고 a는 양수이므로

$a=\sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}}}=2^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[3]{b^2}=4^{-1}$에서 $b^{\frac{2}{3}}=2^{-2}$이고 b는 양수이므로

$b=2^{-3}$

따라서 $ab=2^{\frac{1}{2}}\times2^{-3}=2^{-\frac{5}{2}}=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

답 ①

06

밑면의 넓이가

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(18^{\frac{1}{4}})^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\times3^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^2}\times2^{\frac{1}{2}}\times3$$
$$=3^{\frac{1}{2}+1}\times2^{\frac{1}{2}-2}=3^{\frac{3}{2}}\times2^{-\frac{3}{2}}$$

이므로 삼각기둥의 부피는

$$(\text{밑면의 넓이})\times(\text{높이})=\left(3^{\frac{3}{2}}\times2^{-\frac{3}{2}}\right)\times36\sqrt{6}$$
$$=3^{\frac{3}{2}}\times2^{-\frac{3}{2}}\times(2\times3)^{\frac{5}{2}}$$
$$=3^{\frac{3}{2}}\times2^{-\frac{3}{2}}\times2^{\frac{5}{2}}\times3^{\frac{5}{2}}$$
$$=3^{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}\times2^{-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}$$
$$=3^4\times2^1=162$$

답 ②

07

$\sqrt[3]{4}=X$라 하면

$\log_3(2\sqrt[3]{2}-1)-\log_3(\sqrt[3]{4}+1)+\log_3(2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1)$

$=\log_3(X^2-1)-\log_3(X+1)+\log_3(X^2+X+1)$

$=\log_3\dfrac{X^2-1}{X+1}+\log_3(X^2+X+1)$

$=\log_3(X-1)+\log_3(X^2+X+1)$

$=\log_3(X-1)(X^2+X+1)$

$=\log_3(X^3-1)$

$=\log_3\{(\sqrt[3]{4})^3-1\}$

$=\log_3 3=1$

답 ①

08

방정식 $3x^2-6x+1=0$의 두 실근이 $\log\alpha$, $\log\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log\alpha+\log\beta=2$

$\log\alpha\beta=2$

따라서 $\alpha\beta=10^2=100$

답 ⑤

09

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(\log_4 a,\ 0)$, $(\log_4 b,\ 0)$을 지나므로

$f(x)=(x-\log_4 a)(x-\log_4 b)$라 할 수 있다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$$\frac{\log_4 a+\log_4 b}{2}=1$$

$\log_4 ab=2$

$ab=4^2=16$

이때 a, b는 $a>b>1$인 정수이므로

$a=8$, $b=2$

$f(x)=(x-\log_4 8)(x-\log_4 2)=\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은

$f(1)=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

답 ⑤

10

$\log_2\sqrt{10}\times\log_9 8\times\log 27$

$$=\frac{\frac{1}{2}\log 10}{\log 2}\times\frac{\log 2^3}{\log 3^2}\times\log 3^3$$

$$=\frac{1}{2\log 2}\times\frac{3\log 2}{2\log 3}\times 3\log 3$$

$$=\frac{9}{4}$$

답 ③

11

$\frac{3}{\log_2 a}=\frac{2+\log_3 a}{\log_9 a}$에서

$$\frac{3}{\frac{1}{\log_a 2}}=\frac{2+\frac{1}{\log_a 3}}{\frac{1}{\log_a 9}}$$

$3\log_a 2=2\log_a 9+\frac{\log_a 9}{\log_a 3}$

$\log_a 2^3=\log_a 9^2+\log_3 9$

$\log_a 2^3-\log_a 9^2=\log_3 3^2$

$\log_a \frac{8}{81}=2$

$a^2=\frac{8}{81}$

$a>0$이므로 $a=\frac{2\sqrt{2}}{9}$

답 ②

12

이웃한 두 변의 길이가 각각 a, b인 직사각형의 둘레의 길이 l과 넓이 S는 각각

$l=2(a+b)$, $S=ab$

한 변의 길이가 l인 정사각형의 넓이가 $16S$이므로

$l^2=16S$

$4(a+b)^2=16ab$

$(a+b)^2=4ab$

$a^2-2ab+b^2=0$

$(a-b)^2=0$

즉, $a=b$

따라서 $\log_{b^2}\sqrt[3]{ab}=\log_{b^2} b^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\log_b b=\frac{1}{3}$

답 ④

13

곡선 $y=4^{3-x}-5$를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 곡선은 $y=4^{3-x}-5+k$이다.

곡선 $y=4^{3-x}-5+k$는 곡선 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 $-5+k$만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$의 점근선이 직선 $y=0$이므로 곡선 $y=4^{3-x}-5+k$의 점근선은 직선 $y=-5+k$이다.

따라서 $-5+k=1$이므로 $k=6$

답 ⑤

14

1보다 큰 모든 실수 a에 대하여 $a^0=1$이다. 1보다 큰 실수 a에 대하여 곡선 $y=a^{6-4x}+3$이 a의 값에 관계없이 지나는 점은 $\mathrm{A}\left(\frac{3}{2},\ 4\right)$이고, 곡선 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^{2x-3}-1$이 a의 값에 관계없이 지나는 점은 $\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=4$이고 선분 AB를 밑변으로 하는 삼각형 AOB의 높이는 $\frac{3}{2}$이므로 삼각형 AOB의 넓이는

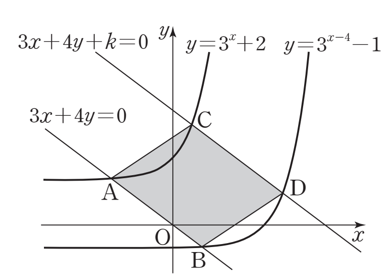
$\frac{1}{2}\times4\times\frac{3}{2}=3$

답 ①

15

곡선 $y=3^{x-4}-1$은 곡선 $y=3^x+2$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 곡선 $y=3^x+2$ 위의 점 $(a,\ b)$를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점 $(a+4,\ b-3)$은 곡선 $y=3^{x-4}-1$ 위의 점이다.

이 두 점 $(a,\ b)$, $(a+4,\ b-3)$을 지나는 직선의 기울기가 $\frac{(b-3)-b}{(a+4)-a}=-\frac{3}{4}$이고, 두 직선 $3x+4y=0$, $3x+4y+k=0$의 기울기도 모두 $-\frac{3}{4}$이므로 그림과 같이 직선 $3x+4y=0$이 두 곡선 $y=3^x+2$, $y=3^{x-4}-1$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $3x+4y+k=0$이 두 곡선 $y=3^x+2$, $y=3^{x-4}-1$과 만나는 점을 각각 C, D라 하면 두 점 A, C를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점이 각각 두 점 B, D와 같다.



그러므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}=5$이고, 곡선 $y=3^x+2$ 중 두 점 A, C를 이은

부분을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면 곡선 $y=3^{x-4}-1$ 중 두 점 B, D를 이은 부분과 같다.
따라서 두 곡선 $y=3^x+2$, $y=3^{x-4}-1$과 두 직선 $3x+4y=0$, $3x+4y+k=0$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 평행사변형 ABDC의 넓이와 같다.
선분 AB를 밑변으로 하는 평행사변형 ABDC의 높이는 직선 $3x+4y=0$ 위의 점 $(0,\ 0)$과 직선 $3x+4y+k=0$ 사이의 거리와 같고 $k<0$이므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{-k}{5}$$

이때 $\overline{\text{AB}}=5$이고, 평행사변형 ABDC의 넓이가 20이므로 평행사변형 ABDC의 높이는 4이다.
따라서 $-\frac{k}{5}=4$이므로
$k=-20$

답 ②

16

$2^{5-2x}=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}+14$에서
$2^5\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}=4\times\left(\frac{1}{4}\right)^x+14$
$(32-4)\times\left(\frac{1}{4}\right)^x=14$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}=\frac{1}{2}$, $2x=1$, $x=\frac{1}{2}$
따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$이므로 $10\alpha=5$

답 5

17

$9^{f(x)-1}\geq\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$에서
$3^{2f(x)-2}\geq3^{1-x}$
$2f(x)-2\geq1-x$
$f(x)\geq\frac{3-x}{2}$
주어진 그래프에서 부등식을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는 $1\leq x\leq5$이므로 정수 x는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

답 5

18

$(g\circ f)(x)=1$이므로 $g(f(x))=1$
$\{f(x)\}^3-10\{f(x)\}^2+21f(x)+1=1$
$f(x)\{f(x)-3\}\{f(x)-7\}=0$
$f(x)=0$ 또는 $f(x)=3$ 또는 $f(x)=7$
(i) $f(x)=0$인 경우
$2^{x-1}-1=0$에서 $2^{x-1}=2^0$
$x=1$
(ii) $f(x)=3$인 경우
$2^{x-1}-1=3$에서 $2^{x-1}=2^2$
$x=3$
(iii) $f(x)=7$인 경우
$2^{x-1}-1=7$에서 $2^{x-1}=2^3$
$x=4$
(i), (ii), (iii)에서 방정식 $(g\circ f)(x)=1$의 실근은 1 또는 3 또는 4이므로 모든 실근의 합은
$1+3+4=8$

답 8

19

$y=\log_3(9x+1)=\log_3 9+\log_3\left(x+\frac{1}{9}\right)=\log_3\left(x+\frac{1}{9}\right)+2$
이므로 함수 $y=\log_3(9x+1)$의 그래프는 함수 $y=\log_3(x+1)$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{8}{9}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다.
따라서 $m=\frac{8}{9}$, $n=2$이므로
$m+n=\frac{26}{9}$

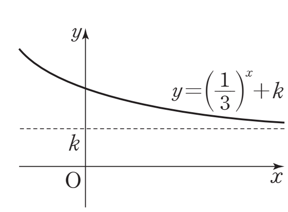
답 ⑤

20

$y=\log_{\frac{1}{a}}x=-\log_a x$이므로 곡선 $y=\log_{\frac{1}{a}}x$는 곡선 $y=\log_a x$와 x축에 대하여 대칭이다.
직선 $x=3$이 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점이 $\text{A}(3,\ \log_a 3)$이므로 $\text{B}(3,\ -\log_a 3)$이다.
점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_{\frac{1}{a}}x$와 만나는 점 C의 y좌표가 $\log_a 3$이므로 x좌표를 c라 하면
$\log_{\frac{1}{a}}c=\log_a 3$
$\log_a c=-\log_a 3=\log_a\frac{1}{3}$, $c=\frac{1}{3}$
즉, $\text{C}\left(\frac{1}{3},\ \log_a 3\right)$이므로 $\text{D}\left(\frac{1}{3},\ -\log_a 3\right)$이다.
사각형 ACDB가 정사각형이므로
$\log_a 3-(-\log_a 3)=3-\frac{1}{3}$
$2\log_a 3=\frac{8}{3}$, $\log_a 3=\frac{4}{3}$
따라서 $a^{\frac{4}{3}}=3$이므로
$a=3^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{27}$

답 ③

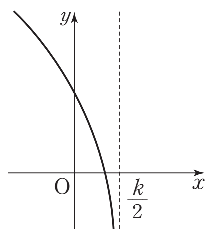
21



[그림 1]

[그림 1]과 같이 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x+k$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감

소하고 곡선 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x+k$의 점근선이 직선 $y=k$이므로 $t>3$인 모든 실수 t에 대하여 원과 만나지 않으려면 $f(t)+1\le k$이어야 한다.
이때 $f(t)<1$이므로 $k\ge 2$일 때 $t>3$인 모든 실수 t에 대하여 곡선 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x+k$는 원과 만나지 않는다.



[그림 2]

[그림 2]와 같이 함수 $y=\log(k-2x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하고 곡선 $y=\log(k-2x)$의 점근선이 직선 $x=\frac{k}{2}$이므로 $t>3$인 모든 실수 t에 대하여 원과 만나지 않으려면 $\frac{k}{2}\le t-1$이어야 한다.
이때 $t>3$이므로 $\frac{k}{2}\le 2$일 때 $t>3$인 모든 실수 t에 대하여 곡선 $y=\log(k-2x)$는 원과 만나지 않는다.
조건을 만족시키는 실수 k의 값의 범위는 $2\le k\le 4$이므로 정수 k는 2, 3, 4이다.
따라서 모든 정수 k의 값의 합은
$2+3+4=9$

답 9

22

$\log_2\frac{x}{4}+\log_4\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}$에서

$\log_2 x-\log_2 4+\log_{2^2} x^2-\log_{2^2} 2=\frac{1}{2}$

$\log_2 x-2+\log_2 x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$2\log_2 x=3$

$\log_2 x=\frac{3}{2}$

따라서 로그의 정의에 의해
$x=\alpha=2^{\frac{3}{2}}$이므로 $\alpha^2=2^3=8$

답 8

23

$\log_2|x|+\log_2(x+20)\le 6$에서 진수의 조건에 의해
$|x|>0,\ x+20>0$
$-20<x<0$ 또는 $x>0$
(i) $-20<x<0$인 경우
$\log_2(-x)(x+20)\le 6$
$-x^2-20x\le 2^6$
$x^2+20x+64\ge 0$
$(x+4)(x+16)\ge 0$
$x\le -16$ 또는 $x\ge -4$
이때 $-20<x<0$이므로
$-20<x\le -16$ 또는 $-4\le x<0$
(ii) $x>0$인 경우
$\log_2 x(x+20)\le 6$
$x^2+20x\le 2^6$
$x^2+20x-64\le 0$
$-10-2\sqrt{41}\le x\le -10+2\sqrt{41}$
이때 $x>0$이므로
$0<x\le -10+2\sqrt{41}$
(i), (ii)에서 부등식을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는
$-20<x\le -16$ 또는 $-4\le x<0$ 또는 $0<x\le -10+2\sqrt{41}$
이때 $12<2\sqrt{41}<13$이므로 부등식을 만족시키는 정수 x는
$-19,\ -18,\ -17,\ -16,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2$이다.
따라서 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 10이다.

답 ①

24

$\log\{f(x)+2\}=\log\frac{f(x)\{g(x)\}^2+8}{\{f(x)\}^2-2f(x)+4}$에서

$f(x)+2=\frac{f(x)\{g(x)\}^2+8}{\{f(x)\}^2-2f(x)+4}$

$\{f(x)\}^3+8=f(x)\{g(x)\}^2+8$

$f(x)\{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)\}=0$

$f(x)=0$ 또는 $f(x)=-g(x)$ 또는 $f(x)=g(x)$
이고 진수의 조건에 의해

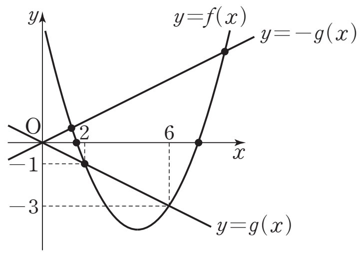
$f(x)+2>0$ …… ㉠

$\frac{f(x)\{g(x)\}^2+8}{\{f(x)\}^2-2f(x)+4}>0$

이때 모든 실수 x에 대하여
$\{f(x)\}^2-2f(x)+4>0$이므로
$f(x)\{g(x)\}^2+8>0$ …… ㉡
(i) $f(x)=0$인 경우
$f(x)=0$인 실수 x는 ㉠, ㉡을 모두 만족시키고, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수가 2이므로 $f(x)=0$인 실수 x의 개수는 2이다.
(ii) $f(x)=-g(x)$인 경우
함수 $y=-g(x)$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=-g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수는 2이다.
즉, $f(x)=-g(x)$인 실수 x의 개수는 2이고, 이 두 실수에 대하여 $f(x)>0$이므로 ㉠, ㉡을 모두 만족시킨다.
(iii) $f(x)=g(x)$인 경우
함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수는 2이다.
즉, $f(2)=g(2)=-1,\ f(6)=g(6)=-3$
이때 $x=2$는 ㉠, ㉡을 모두 만족시키고, $x=6$은 ㉠, ㉡을 모두 만족시키지 않으므로 $f(x)=g(x)$인 실수 x의 개수는 1이다.
(i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는
$2+2+1=5$

답 5

참고



그림과 같이 (i)에서 구한 두 실근과 (ii)에서 구한 두 실근, (iii)에서 구한 한 실근이 모두 다르다.

25

함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(2,\ 1)$을 지나고, 함수 $g(x)$가 함수 $f(x)$의 역함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(1,\ 2)$를 지난다.
즉, $2=5^1+k$이므로 $k=-3$
함수 $f(x)=5^x-3$의 역함수는 $g(x)=\log_5(x+3)$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-3$이다.
즉, $\frac{1}{3}x+1=0$
따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=0$이므로
$a+b=\frac{1}{3}$

답 ②

26

두 함수 $f(x)=2^{x-a}$, $g(x)=\log_2 x+a$는 서로 역함수 관계이고, x의 값이 증가하면 $f(x)$, $g(x)$의 값이 각각 증가하므로 두 함수 $f(x)=2^{x-a}$, $g(x)=\log_2 x+a$의 그래프가 만나는 점은 직선 $y=x$ 위에 있다.
이때 교점의 x좌표가 4이므로 교점의 좌표는 $(4,\ 4)$이다.
즉, $f(4)=4$이므로 $2^{4-a}=2^2$에서 $a=2$
따라서 $f(x)=2^{x-2}$, $g(x)=\log_2 x+2$이므로
$f(8)+g(8)=2^{8-2}+\log_2 8+2$
$=64+3+2=69$

답 69

27

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=-x+12$와 점 $\mathrm{A}(2,\ f(2))$에서 만나므로 $f(2)=10$
즉, $3^{2a-2}+1=10$에서 $2a-2=2$
$a=2$
$f(x)=3^{2x-2}+1$이므로 $f(x)$는 $g(x)=\log_9(x-1)+1$의 역함수이다.
즉, 두 함수 $f(x)=3^{2x-2}+1$, $g(x)=\log_9(x-1)+1$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 직선 $y=-x+12$와 직선 $y=x$는 서로 수직이므로 점 B는 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이다.
따라서 점 B의 좌표가 $(10,\ 2)$이므로 선분 AB의 길이는
$\sqrt{(10-2)^2+(2-10)^2}=8\sqrt{2}$

답 ③

28

$f(x)=\log_2\frac{x}{4}-\log_{\frac{1}{2}}x^2$
$=\log_2 x-\log_2 4+2\log_2 x$
$=3\log_2 x-2$
$\frac{1}{4}\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$는 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가하므로 $x=4$일 때 최대이다.
따라서 $\frac{1}{4}\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은
$f(4)=3\log_2 4-2=3\times 2-2=4$

답 ④

29

$f(x)=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$이므로 $0\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 -3을 가지고, $x=0$일 때 최댓값 1을 갖는다.
즉, $0\le x\le 3$에서 $-3\le f(x)\le 1$
함수 $g(x)=2^{3-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$은 x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값은 감소하므로 $0\le x\le 3$에서 함수 $(g\circ f)(x)$는 $f(x)=-3$일 때 최대이다.
따라서 함수 $(g\circ f)(x)$의 최댓값은
$2^{3-(-3)}=2^6=64$

답 ⑤

30

이웃한 두 변의 길이가 각각 $\log_{\sqrt{3}}x$, $\log_3\frac{81}{x}$인 직사각형의 넓이는
$\log_{\sqrt{3}}x\times\log_3\frac{81}{x}=2(\log_3 x)(\log_3 81-\log_3 x)$
$=2(\log_3 x)(4-\log_3 x)$
이때 두 변의 길이는 모두 양수이므로 $0<\log_3 x<4$
$\log_3 x=t\ (0<t<4)$라 하면
$2t(4-t)=-2t^2+8t=-2(t-2)^2+8$
직사각형의 넓이는 $t=2$일 때 최댓값 $M=8$을 갖는다.
즉, $\log_3 a=2$에서 $a=9$
따라서 $a+M=9+8=17$

답 ④

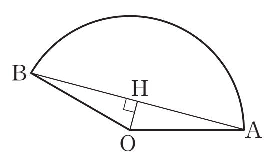
02 삼각함수

정답 본문 20~29쪽

01 ⑤	02 ②	03 ④	04 ①	05 ②
06 ③	07 ②	08 ④	09 ④	10 ③
11 ④	12 ④	13 ③	14 ②	15 ①
16 ⑤	17 ④	18 ④	19 ④	20 ③
21 ④	22 ⑤	23 65	24 ⑤	25 9
26 ⑤	27 9	28 ⑤	29 ③	30 ②

01

점 O에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AB}=2\times\overline{AH}=2\times\overline{OA}\sin(\angle HOA)=6\sin(\angle HOA)$

이때 $\overline{AB}=6\sin\frac{5}{12}\pi$이고, $0<\angle HOA<\frac{\pi}{2}$이므로

$\angle HOA=\frac{5}{12}\pi$

부채꼴 OAB의 중심각의 크기는

$\angle BOA=2\times\angle HOA=\frac{5}{6}\pi$

따라서 부채꼴 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 3^2\times\frac{5}{6}\pi=\frac{15}{4}\pi$

답 ⑤

02

원뿔의 밑면인 원의 반지름의 길이를 r, 옆면의 전개도인 부채꼴의 반지름의 길이를 R라 할 때, 원의 둘레의 길이와 부채꼴의 호의 길이가 같으므로

$2\pi r=R\times\frac{2}{3}\pi$

$R=3r$ …… ㉠

원뿔의 높이가 4이므로 피타고라스 정리에 의해

$R^2=r^2+4^2$

㉠을 대입하여 정리하면

$8r^2=16$

$r^2=2$

$r>0$이므로 $r=\sqrt{2}$

답 ②

03

원뿔의 옆면의 전개도인 부채꼴의 반지름의 길이를 R, 중심각의 크기를 θ라 할 때, 밑면의 둘레의 길이와 부채꼴의 호의 길이가 같으므로

$2\pi=R\theta$ …… ㉠

원뿔의 겉넓이가 4π이고, 밑면의 넓이가 π, 옆면의 넓이가 $\frac{1}{2}R^2\theta$이므로

$\pi+\frac{1}{2}R^2\theta=4\pi$

$\frac{1}{2}R^2\theta=3\pi$

㉠을 대입하여 정리하면

$R=3$

따라서 $\theta=\frac{2}{3}\pi$

답 ④

04

원의 반지름의 길이는 원점과 점 $(6,\ -8)$ 사이의 거리이므로

$\sqrt{6^2+(-8)^2}=10$

따라서 $\sin\theta=\frac{-8}{10}=-\frac{4}{5}$

답 ①

05

이차방정식 $8x^2-ax+1=0$에서

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 $\frac{1}{8}$이므로

$\sin 2\theta\cos 2\theta=\frac{1}{8}$

이때 $\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta=1$이므로

$\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta+2\sin 2\theta\cos 2\theta=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

$(\sin 2\theta+\cos 2\theta)^2=\frac{5}{4}$

θ가 제1사분면의 각이므로

$2n\pi<\theta<2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

$4n\pi<2\theta<4n\pi+\pi$에서 $\sin 2\theta>0$이고,

$\sin 2\theta\cos 2\theta=\frac{1}{8}>0$이므로 $\cos 2\theta>0$이다.

즉, $\sin 2\theta+\cos 2\theta>0$이므로

$\sin 2\theta+\cos 2\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합이 $\frac{a}{8}$이므로

$\frac{a}{8}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

따라서 $a=4\sqrt{5}$

답 ②

06

θ가 제4사분면의 각이므로

$2n\pi+\frac{3}{2}\pi<\theta<2n\pi+2\pi$ (n은 정수)

$n\pi+\frac{3}{4}\pi<\frac{\theta}{2}<n\pi+\pi$

$3\cos\frac{\theta}{2}=\left|\cos\frac{\theta}{2}-5\sin\frac{\theta}{2}\right|>0$이므로 $\frac{\theta}{2}$는 제4사분면의 각이다.

즉, $\sin\frac{\theta}{2}<0$이므로

$3\cos\frac{\theta}{2}=\cos\frac{\theta}{2}-5\sin\frac{\theta}{2}$

$2\cos\frac{\theta}{2}=-5\sin\frac{\theta}{2}$

$$\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=-\frac{2}{5}$$

따라서 $\tan\frac{\theta}{2}=-\frac{2}{5}$

답 ③

07

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin\theta\times\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$$
$$=\sin\theta\times\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}$$
$$=-\cos\theta=-\frac{1}{3}$$

답 ②

08

$f(x)=\tan(\pi+ax)+b=\tan ax+b$이므로 이 함수의 주기는

$\frac{\pi}{|a|}=\frac{\pi}{2}$

$a>0$이므로 $a=2$

함수 $y=\tan ax$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, 함수 $f(x)=\tan ax+b$의 그래프는 함수 $y=\tan ax$의 그래프를 y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프이므로 점 $(0,\ b)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $b=5$이므로

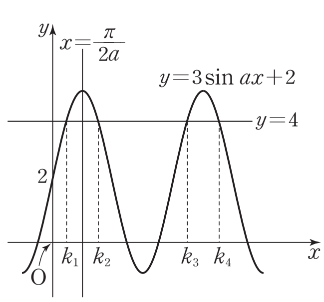
$a+b=7$

답 ④

09

함수 $f(x)=3\sin ax+2$의 주기는 $\frac{2\pi}{a}$이므로

함수 $f(x)=3\sin ax+2$의 그래프는 그림과 같고 두 점 $(k_1,\ f(k_1))$, $(k_2,\ f(k_2))$는 직선 $x=\frac{\pi}{2a}$에 대하여 서로 대칭이다.



$\frac{k_1+k_2}{2}=\frac{\pi}{2a}$, $k_3=k_1+\frac{2\pi}{a}$, $k_4=k_2+\frac{2\pi}{a}$이므로

$$k_1+k_2+k_3+k_4=k_1+k_2+\left(k_1+\frac{2\pi}{a}\right)+\left(k_2+\frac{2\pi}{a}\right)$$
$$=2(k_1+k_2)+\frac{4\pi}{a}=\frac{6\pi}{a}$$

이때 $k_1+k_2+k_3+k_4=3$이므로

$\frac{6\pi}{a}=3$

따라서 $a=2\pi$

답 ④

10

모든 실수 x에 대하여 $-1\le\sin(2x+1)\le1$이므로

함수 $f(x)$는 $\sin(2x+1)=-1$일 때, 최솟값 -1을 갖는다.

즉, $-3+k=-1$에서 $k=2$

따라서 함수 $f(x)$는 $\sin(2x+1)=1$일 때 최대이므로 최댓값은

$3\times1+2=5$

답 ③

11

$$f(x)=-2\cos(x-\pi)\tan^2(x+\pi)+k$$
$$=2\cos x\tan^2 x+k$$
$$=2\sin x\tan x+k$$

$0\le x\le\frac{\pi}{3}$에서 $\sin x\ge0$, $\tan x\ge0$이고

두 함수 $y=\sin x$, $y=\tan x$가 모두 $x=\frac{\pi}{3}$에서 최대이므로

함수 $f(x)=2\sin x\tan x+k$는 $x=\frac{\pi}{3}$에서 최대이다.

따라서 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}+k=7$이므로

$k=4$

답 ④

12

$$f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}-2\sin^2 x$$
$$=\sqrt{\sin^2 x}-2\sin^2 x$$
$$=|\sin x|-2|\sin x|^2$$
$$=-2\left(|\sin x|-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$$

이때 모든 실수 x에 대하여 $0\le|\sin x|\le1$이므로 함수 $f(x)$는 $|\sin x|=\frac{1}{4}$일 때 최댓값 $\frac{1}{8}$을 가지고, $|\sin x|=1$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$\frac{1}{8}+(-1)=-\frac{7}{8}$

답 ④

13

$2\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)=\tan x$에서

$2\sin x=\tan x$

$\sin x\times\left(2-\frac{1}{\cos x}\right)=0$

$\sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 $\sin x=0$을 만족시키는 x의 값은 0, π이고,

$\cos x=\frac{1}{2}$을 만족시키는 x의 값은 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{3}\pi$이다.

따라서 방정식을 만족시키는 모든 실근의 합은

$0+\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{5}{3}\pi=3\pi$

답 ③

14

모든 실수 x에 대하여 $|\sqrt{3}\sin x|\ge 0$이므로

$\cos x>|\sqrt{3}\sin x|\ge 0$

즉, $\cos x>0$이므로

$|\sqrt{3}\sin x|<\cos x$에서

$-\cos x<\sqrt{3}\sin x<\cos x$

$-\frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{\sin x}{\cos x}<\frac{1}{\sqrt{3}}$

$-\frac{\sqrt{3}}{3}<\tan x<\frac{\sqrt{3}}{3}$

이때 $-\pi<x<\pi$이므로

$-\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{6}$

따라서 $\alpha=-\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{\pi}{6}$이므로

$\beta-\alpha=\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3}$

답 ②

15

$3\cos\frac{\pi(x+3)}{6}-2\sin^2\frac{\pi x}{6}>1$에서

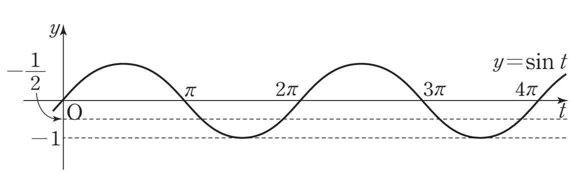
$-3\sin\frac{\pi x}{6}-2\sin^2\frac{\pi x}{6}>1$

$2\sin^2\frac{\pi x}{6}+3\sin\frac{\pi x}{6}+1<0$

$\left(2\sin\frac{\pi x}{6}+1\right)\left(\sin\frac{\pi x}{6}+1\right)<0$

$-1<\sin\frac{\pi x}{6}<-\frac{1}{2}$

$0<x\le 20$에서 $0<\frac{\pi x}{6}\le\frac{10}{3}\pi$이므로 $\frac{\pi x}{6}=t$라 하면 곡선 $y=\sin t$는 그림과 같다.



$\frac{7}{6}\pi<\frac{\pi x}{6}<\frac{3}{2}\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<\frac{\pi x}{6}<\frac{11}{6}\pi$ 또는 $\frac{19}{6}\pi<\frac{\pi x}{6}\le\frac{10}{3}\pi$

$7<x<9$ 또는 $9<x<11$ 또는 $19<x\le 20$

따라서 부등식을 만족시키는 20 이하의 자연수 x는 8, 10, 20이므로 그 합은

$8+10+20=38$

답 ①

16

삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 6π이므로 외접원의 반지름의 길이는 $\sqrt{6}$이다.

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{AB}}{\sin C}=\frac{\overline{AC}}{\sin B}=2\sqrt{6}$

$\sin C=\frac{\overline{AB}}{2\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이고 각 C는 예각이므로 $\angle C=45°$

$\sin B=\frac{\overline{AC}}{2\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이고 각 B는 예각이므로 $\angle B=60°$

따라서 $\angle A=180°-(45°+60°)=75°$

답 ⑤

17

삼각형 APB에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle APB)}=2r_1$ …… ㉠

삼각형 ABQ에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle AQB)}=2r_2$ …… ㉡

$\sin(\angle APB)=\sqrt{2}\sin(\angle AQB)$이므로 ㉠, ㉡에서 $\sqrt{2}r_1=r_2$

두 원의 넓이의 합이 9π이므로

$9\pi=\pi r_1^2+\pi r_2^2=\pi r_1^2+\pi(\sqrt{2}r_1)^2=3\pi r_1^2$

즉, $r_1^2=3$이므로 $r_1=\sqrt{3}$, $r_2=\sqrt{6}$

따라서 $r_1r_2=\sqrt{3}\times\sqrt{6}=3\sqrt{2}$

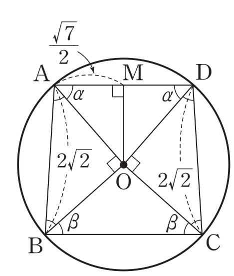
답 ④

18

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=2$, $\overline{AB}=\overline{CD}=2\sqrt{2}$이므로

$\angle AOB=\angle COD=90°$이고

$\angle OAB=\angle OBA=\angle ODC=\angle OCD=45°$이다.



그림과 같이 $\angle OAD=\angle ODA=\alpha$, $\angle OBC=\angle OCB=\beta$라 하면 사각형 ABCD의 내각의 크기의 합은 $360°$이므로

$2\alpha+2\beta+4\times 45°=360°$, 즉 $\alpha+\beta=90°$

한편, 선분 AD의 중점을 M이라 하면 $\overline{AM}=\frac{\sqrt{7}}{2}$이고 삼각형 OAD는 이등변삼각형이므로 $\angle OMA=90°$이다.

즉, $\cos\alpha=\frac{\overline{AM}}{\overline{OA}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\beta=90°-\alpha$이므로 $\sin\beta=\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$

즉, 삼각형 OBC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{OC}}{\sin\beta}=\frac{2}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=2R$$

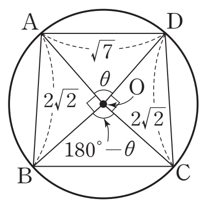
따라서 $R=\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$

답 ④

다른 풀이

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=2$, $\overline{AB}=\overline{CD}=2\sqrt{2}$이므로

$\angle AOB=\angle COD=90^\circ$이다.



$\angle AOD=\theta$라 하면 삼각형 AOD에서 코사인법칙에 의해

$$\cos\theta=\frac{2^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2\times2\times2}=\frac{1}{8} \quad \cdots\cdots ㉠$$

즉, $\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta=-\frac{1}{8}$이고 삼각형 OBC에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{BC}^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos(180^\circ-\theta)$$
$$=8-8\times\left(-\frac{1}{8}\right)=9$$

이므로 $\overline{BC}=3$

한편, ㉠에서 $\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$이므로

삼각형 OBC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의해

$$2R=\frac{\overline{BC}}{\sin(180^\circ-\theta)}=\frac{3}{\sin\theta}=\frac{3}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}=\frac{8\sqrt{7}}{7}$$

따라서 $R=\frac{4\sqrt{7}}{7}$

19

삼각형 ABC는 예각삼각형이므로

$$\cos B=\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos B$$
$$=8+5-2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}$$
$$=9$$

따라서 $\overline{AC}=3$

답 ④

20

$\overline{AD}=\overline{CD}=a$라 하면 $\overline{BC}=4a$이다.

삼각형 ADC는 이등변삼각형이므로

$$\cos(\angle ACD)=\frac{\frac{1}{2}}{a}=\frac{1}{2a} \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$$\cos(\angle ACD)=\frac{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-\overline{AB}^2}{2\times\overline{AC}\times\overline{BC}}$$
$$=\frac{1^2+(4a)^2-(\sqrt{6})^2}{2\times1\times4a}=\frac{16a^2-5}{8a} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{2a}=\frac{16a^2-5}{8a}$

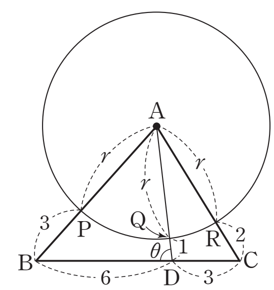
$a>0$이므로 $a=\frac{3}{4}$

따라서 $\overline{BC}=4a=3$

답 ③

21

$\overline{AP}=\overline{AQ}=\overline{AR}=r$이고, $\angle ADB=\theta$라 하면 $\angle ADC=180^\circ-\theta$이다.



삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의해

$$\cos\theta=\frac{\overline{BD}^2+\overline{AD}^2-\overline{AB}^2}{2\times\overline{BD}\times\overline{AD}}$$
$$=\frac{6^2+(r+1)^2-(r+3)^2}{2\times6\times(r+1)}$$
$$=\frac{7-r}{3(r+1)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의해

$$\cos(180^\circ-\theta)=\frac{\overline{DC}^2+\overline{AD}^2-\overline{AC}^2}{2\times\overline{DC}\times\overline{AD}}$$
$$=\frac{3^2+(r+1)^2-(r+2)^2}{2\times3\times(r+1)}$$
$$=\frac{3-r}{3(r+1)}$$

즉, $\cos\theta=\frac{r-3}{3(r+1)} \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $7-r=r-3$

따라서 $r=5$

답 ④

22

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{BC}^2=2^2+(\sqrt{3})^2-2\times2\times\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=10$$

이므로 $\overline{BC}=\sqrt{10}$

원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\sin(\angle BAC)=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{4}$$이므로

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)}=2R,\ \frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{13}}{4}}=2R,\ R=\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{13}}$$

따라서 원의 넓이는

$$\pi\times\left(\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{13}}\right)^2=\frac{40}{13}\pi$$

답 ⑤

23

삼각형 ABC에서 $A+B+C=180^\circ$이므로 $A+B=180^\circ-C$

즉, $\sin(A+B)=\sin(180^\circ-C)=\sin C$

이때 $4\sin A=3\sin B=2\sin(A+B)$에서

$4\sin A=3\sin B=2\sin C$이므로

$$\frac{3}{\sin A}=\frac{4}{\sin B}=\frac{6}{\sin C}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

한편, 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 할 때, 사인법칙에 의해

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\qquad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $a:b:c=3:4:6$이므로 양수 k에 대하여

$a=3k$, $b=4k$, $c=6k$이다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{(6k)^2+(3k)^2-(4k)^2}{2\times6k\times3k}$$

$$=\frac{29k^2}{36k^2}=\frac{29}{36}$$

따라서 $p+q=36+29=65$

답 65

참고

문제의 조건을 만족시키는 삼각형으로는 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=3$, $\overline{CA}=4$인 삼각형 ABC가 있다.

24

$\cos A=\frac{9}{16}$에서 $\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{9}{16}\right)^2}=\frac{5\sqrt7}{16}$

삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 $\frac{16}{7}\pi$이므로 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{4}{\sqrt7}$이다.

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{BC}}{\frac{5\sqrt7}{16}}=2\times\frac{4}{\sqrt7}\text{이므로 }\overline{BC}=\frac{5}{2}$$

한편, 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$$\cos A=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AC}}\text{이므로}$$

$$\frac{9}{16}=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}{2\times6}$$

즉, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=13$

이때 $\overline{AB}\times\overline{AC}=6$이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=(\overline{AB}+\overline{AC})^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}$에서

$\overline{AB}+\overline{AC}=5$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=(\overline{AB}+\overline{AC})+\overline{BC}$$

$$=5+\frac{5}{2}=\frac{15}{2}$$

답 ⑤

참고

문제의 조건을 만족시키는 삼각형으로는 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=\frac{5}{2}$, $\overline{CA}=3$인 삼각형 ABC가 있다.

25

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt3$이므로 $\overline{AB}=c$라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=6\sqrt3\qquad\cdots\cdots ㉠$$

즉, $\sin A=\frac{a}{6\sqrt3}$, $\sin B=\frac{b}{6\sqrt3}$, $\sin C=\frac{c}{6\sqrt3}$

이것을 주어진 등식에 대입하면

$$(a-b)\left(\frac{c}{6\sqrt3}\right)^2=a\left(\frac{a}{6\sqrt3}\right)^2-b\left(\frac{b}{6\sqrt3}\right)^2$$

$(a-b)c^2=a^3-b^3$, $(a-b)c^2=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a\neq b$이므로 $c^2=a^2+ab+b^2$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-(a^2+ab+b^2)}{2ab}$$

$$=-\frac{ab}{2ab}=-\frac{1}{2}$$

에서 $C=120^\circ$ ($0^\circ<C<180^\circ$이므로)

㉠에서 $\frac{c}{\sin120^\circ}=6\sqrt3$이므로 $c=6\sqrt3\times\frac{\sqrt3}{2}=9$

즉, $\overline{AB}=c=9$

답 9

26

ㄱ. 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$$\cos(\angle BAC)=\frac{2^2+3^2-4^2}{2\times2\times3}=\frac{-3}{12}=-\frac{1}{4}\text{ (참)}$$

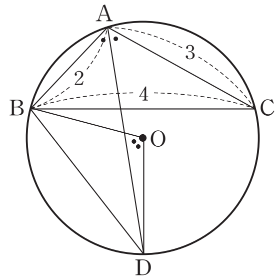
ㄴ. ㄱ에서 $\cos(\angle BAC)=-\frac{1}{4}$이므로

$$\sin(\angle BAC)=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)}=2R,\ \frac{4}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=2R,\ R=\frac{8\sqrt{15}}{15}\text{ (참)}$$

ㄷ. 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O라 하자.



원주각과 중심각의 관계에 의해 $\angle BOD=2\angle BAD$이므로

$\angle BOD=\angle BAC$

즉, $\cos(\angle BOD)=-\frac{1}{4}$

ㄴ에서 $\overline{OB}=\overline{OD}=\frac{8\sqrt{15}}{15}$이므로 삼각형 OBD에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{BD}^2=\left(\frac{8\sqrt{15}}{15}\right)^2+\left(\frac{8\sqrt{15}}{15}\right)^2-2\times\frac{8\sqrt{15}}{15}\times\frac{8\sqrt{15}}{15}\times\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{64}{15}+\frac{64}{15}+\frac{32}{15}=\frac{160}{15}=\frac{32}{3}$$

따라서 $\overline{BD}=\sqrt{\frac{32}{3}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

27

삼각형 ABC에서 $A+B+C=180^\circ$이므로

$C=180^\circ-(A+B)$

즉, $\sin C=\sin\{180^\circ-(A+B)\}=\sin(A+B)=\frac{1}{3}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\sin C=\frac{1}{2}\times9\times6\times\frac{1}{3}=9$

답 9

28

$\cos(\angle BAC)=-\frac{1}{5}$에서

$\sin(\angle BAC)=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

즉, 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin(\angle BAC)=\frac{1}{2}\times4\times5\times\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$=4\sqrt{6}$$

한편, 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$\overline{BC}^2=4^2+5^2-2\times4\times5\times\left(-\frac{1}{5}\right)=49$

즉, $\overline{BC}=7$

삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}=4\sqrt{6}$이므로

$\frac{1}{2}\times7\times\overline{AH}=4\sqrt{6}$

따라서 $\overline{AH}=\frac{8\sqrt{6}}{7}$

답 ⑤

29

$\overline{AD}=a$, $\overline{AE}=b$, $\angle BAC=\theta$라 하자.

조건 (가)에서 $a+b=8$

조건 (나)에서 삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 ADE의 넓이의 2배이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin\theta=2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{AE}\times\sin\theta\right)$

$15\sin\theta=ab\sin\theta$, $ab=15$

삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{DE}^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

$$=(a+b)^2-2ab-2ab\cos\theta$$

조건 (다)에서 $\overline{DE}^2=14$이므로

$14=8^2-30-30\cos\theta$, $\cos\theta=\frac{2}{3}$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times5\times6\times\frac{\sqrt{5}}{3}=5\sqrt{5}$

답 ③

30

$\cos(\angle BAD)=\cos(\angle BDC)=-\frac{1}{3}$에서

$\sin(\angle BAD)=\sin(\angle BDC)=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

삼각형 ABD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin(\angle BAD)=\frac{1}{2}\times5\times6\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=10\sqrt{2}$

한편, 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{BD}^2=5^2+6^2-2\times5\times6\times\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$=25+36+20=81$$

이므로 $\overline{BD}=9$

이때 $\overline{CD}=a$라 하면 삼각형 DBC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{DC}\times\sin(\angle BDC)=\frac{1}{2}\times9\times a\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=3\sqrt{2}a$

사각형 ABCD의 넓이가 $35\sqrt{2}$이므로

$10\sqrt{2}+3\sqrt{2}a=35\sqrt{2}$에서 $a=\frac{25}{3}$

즉, $\overline{CD}=\frac{25}{3}$

답 ②

03 수열

정답 본문 32~43쪽

01 ③	02 ④	03 32	04 11	05 44
06 ②	07 ②	08 11	09 ①	10 ⑤
11 16	12 543	13 ③	14 4	15 11
16 98	17 ⑤	18 8	19 9	20 ①
21 26	22 240	23 ④	24 540	25 ②
26 ③	27 63	28 27	29 ④	30 ④
31 80	32 ④	33 ⑤	34 ⑤	

01

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_4=7$에서 $a+3d=7$ …… ㉠

$a_3+a_6=17$에서

$(a+2d)+(a+5d)=17$

$2a+7d=17$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $d=3$

따라서 $a_7=a+6d=-2+18=16$

답 ③

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_4+a_5=a_3+a_6$이므로

$7+a_5=17$, 즉 $a_5=10$

$a_4=7$, $a_5=10$이므로 공차는 3이고

$a_7=a_5+2\times3=16$

02

사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{B}_n$은 사다리꼴이고, 네 점의 좌표가 각각

$\mathrm{A}_n(n,\ 0)$, $\mathrm{A}_{n+1}(n+1,\ 0)$, $\mathrm{B}_n(n,\ an+b)$,

$\mathrm{B}_{n+1}(n+1,\ a(n+1)+b)$이므로

$S_n=\frac{1}{2}\times1\times(\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}+\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}})$

$=\frac{1}{2}\{an+b+a(n+1)+b\}$

$=an+\frac{a}{2}+b$

$S_2=3$에서 $2a+\frac{a}{2}+b=3$

$\frac{5}{2}a+b=3$ …… ㉠

$S_{10}-S_6=2$에서 $10a+\frac{a}{2}+b-\left(6a+\frac{a}{2}+b\right)=2$

$4a=2$, $a=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\frac{5}{4}+b=3$, $b=\frac{7}{4}$

따라서 $ab=\frac{1}{2}\times\frac{7}{4}=\frac{7}{8}$

답 ④

03

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항이 모두 1이고, l, m은 각각 0이 아닌 정수이므로 $l\neq0$, $m\neq0$이다.

(i) l, m의 부호가 같은 경우

a_5와 b_8의 부호가 같으므로 $1+4l=1+7m$ …… ㉠

a_7과 b_{11}의 부호가 같으므로 $1+6l=1+10m$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 0이 아닌 정수 l, m은 존재하지 않는다.

(ii) l, m의 부호가 서로 반대인 경우

a_5와 b_8의 부호가 서로 반대이므로

$1+4l=-1-7m$ …… ㉢

a_7과 b_{11}의 부호가 서로 반대이므로

$1+6l=-1-10m$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $l=3$, $m=-2$

(i), (ii)에서 $l=3$, $m=-2$이므로

$|a_5|+|b_{11}|=|1+4\times3|+|1+10\times(-2)|$

$=13+19$

$=32$

답 32

04

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $S_3=S_7$에서

$\frac{3\{2\times(-9)+(3-1)d\}}{2}=\frac{7\{2\times(-9)+(7-1)d\}}{2}$

$3(2d-18)=7(6d-18)$

$d-9=7(d-3)$, $d=2$

따라서 $S_{11}=\frac{11\{2\times(-9)+(11-1)\times2\}}{2}=11$

답 11

05

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$(a_{m+1}+a_{m+2}+a_{m+3}+\cdots+a_{2m})-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m)$

$=(a_{m+1}-a_1)+(a_{m+2}-a_2)+(a_{m+3}-a_3)+\cdots+(a_{2m}-a_m)$

$=md+md+md+\cdots+md$

$=m\times md=m^2d$

즉, $115-40=75=m^2d$이고, m은 1이 아닌 자연수, d는 자연수이므로 $75=5^2\times3$에서 $m=5$, $d=3$이다.

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m=40$에서 $m=5$, $d=3$이므로

$\frac{5\{2a_1+(5-1)\times3\}}{2}=40$, $a_1=2$

따라서 $a_{3m}=a_{15}=2+(15-1)\times3=44$

답 44

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m=40$, $a_{m+1}+a_{m+2}+a_{m+3}+\cdots+a_{2m}=115$

이므로 $S_m=40$, $S_{2m}=40+115=155$

$S_m=\frac{m\{2a_1+(m-1)d\}}{2}=40$ …… ㉠

$S_{2m}=\frac{2m\{2a_1+(2m-1)d\}}{2}=155$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m^2d=75$이고, m은 1이 아닌 자연수, d는 자연수이므로 $75=5^2\times3$에서 $m=5$, $d=3$이다.

이것을 ㉠에 대입하면 $a_1=2$

따라서 $a_{3m}=a_{15}=2+(15-1)\times3=44$

06

S_{10}이 최소가 되기 위해서는 $a_{10}\le0$, $a_{11}\ge0$이 되어야 하므로

$a_{10}=0$일 때 $S_9=S_{10}$이고, $a_{10}<0$일 때 $a_{11}=0$이면 $S_{10}=S_{11}$이다.

따라서 $m=9$ 또는 $m=11$이다.

(i) $m=9$인 경우

$a_{10}=0$이므로 $a_1+9\times2=0$, 즉 $a_1=-18$이다.

(ii) $m=11$인 경우

$a_{11}=0$이므로 $a_1+10\times2=0$, 즉 $a_1=-20$이다.

(i), (ii)에서 모든 a_1의 값의 합은

$-18+(-20)=-38$

답 ②

07

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=9a_4$에서 $ar=9ar^3$

$a\ne0$이므로 $r^2=\frac{1}{9}$ ...... ㉠

$\frac{a_5a_7}{a_6}=\frac{ar^4\times ar^6}{ar^5}=ar^5=4$ ...... ㉡

$a<0$이므로 ㉡에서 $r<0$이고 ㉠에서 $r=-\frac{1}{3}$이다.

한편, ㉡에서 $ar^5=4$이므로 $a_6=4$

따라서 $a_9=a_6\times r^3=4\times\left(-\frac{1}{3}\right)^3=-\frac{4}{27}$

답 ②

08

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_3a_5=8r^2\times8r^4=(8r^3)^2=1$이므로

$8r^3=1$ 또는 $8r^3=-1$

$r=\frac{1}{2}$ 또는 $r=-\frac{1}{2}$

(i) $r=\frac{1}{2}$인 경우

$a_4=8r^3=1$, $a_5=8r^4=\frac{1}{2}$

(ii) $r=-\frac{1}{2}$인 경우

$a_4=8r^3=-1$, $a_5=8r^4=\frac{1}{2}$

$a_4<a_5$이므로 (i), (ii)에서 $r=-\frac{1}{2}$이고

$a_n=ar^{n-1}=8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이다.

즉, $a_m>0$이려면 $a_m=8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}$에서 m이 홀수이어야 하고,

이때 $a_9=8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{9-1}=\frac{1}{32}$, $a_{11}=8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{11-1}=\frac{1}{128}$이므로

$0<a_m<\frac{1}{100}$을 만족시키는 자연수 m의 최솟값은 11이다.

답 11

09

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b라 하면

$a=3b$ ...... ㉠

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 s라 하면

$a_5=b_3$에서 $ar^4=bs^2$이므로 ㉠을 대입하여 정리하면 $3r^4=s^2$

이때 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 모든 항이 양수이므로 r, s도 모두 양수이고 $s=\sqrt{3}r^2$ ...... ㉡

$a_4=b_6$에서 $ar^3=bs^5$이므로 ㉠, ㉡을 대입하여 정리하면

$3r^3=(\sqrt{3}r^2)^5$, $\frac{1}{r^7}=3^{\frac{3}{2}}$, $\frac{1}{r}=3^{\frac{3}{14}}$ ...... ㉢

따라서 ㉠, ㉡, ㉢에 의해

$\frac{a_3}{b_7}=\frac{ar^2}{bs^6}=\frac{3br^2}{b(\sqrt{3}r^2)^6}=\frac{1}{9r^{10}}=3^{-2}\times\left(3^{\frac{3}{14}}\right)^{10}=3^{-2}\times3^{\frac{15}{7}}=3^{\frac{1}{7}}$

답 ①

다른 풀이

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b라 하면

$a=3b$ ...... ㉠

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 s라 하면

$a_5=b_3$, $a_4=b_6$에서

$\frac{a_5}{a_4}=\frac{b_3}{b_6}$이므로 $r=\frac{1}{s^3}$ ...... ㉡

또한 $a_5=b_3$, $a_4=b_6$에서

$a_4a_5=b_3b_6$이므로 $ar^3\times ar^4=bs^2\times bs^5$, $a^2r^7=b^2s^7$

㉠, ㉡을 대입하면 $(3b)^2\left(\frac{1}{s^3}\right)^7=b^2s^7$

즉, $s^{28}=3^2$

이때 등비수열 $\{b_n\}$의 모든 항이 양수이므로 s도 양수이고 $s=3^{\frac{1}{14}}$

한편, ㉡에서 $\frac{1}{r}=s^3$이므로 $a_4=b_6$에서 $\frac{a_4}{r}=b_6\times s^3$

즉, $a_3=b_9$

따라서 $\frac{a_3}{b_7}=\frac{b_9}{b_7}=s^2=(3^{\frac{1}{14}})^2=3^{\frac{1}{7}}$

10

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 -3, 공비가 -2이므로

첫째항부터 제8항까지의 합은

$\frac{(-3)\times\{1-(-2)^8\}}{1-(-2)}=\frac{(-3)\times(-255)}{3}=255$

답 ⑤

11

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$라 하면

$a_7=30$에서 $ar^6=30$ ...... ㉠

$a_{2m+1}=90$에서 $ar^{2m}=90$ ...... ㉡

만약 $r=1$이라 하면 ㉠에서 $a=30$, ㉡에서 $a=90$이 되어 모순이므로 $r\ne1$이다.

$r \neq 1$이므로 $\dfrac{S_{3m}}{S_{2m}}=\dfrac{13}{4}$에서

$$\frac{S_{3m}}{S_{2m}}=\frac{\dfrac{a(r^{3m}-1)}{r-1}}{\dfrac{a(r^{2m}-1)}{r-1}}=\frac{r^{3m}-1}{r^{2m}-1}=\frac{(r^m-1)(r^{2m}+r^m+1)}{(r^m-1)(r^m+1)}$$

$$=\frac{r^{2m}+r^m+1}{r^m+1}$$

$r^m=t$라 하면 $\dfrac{t^2+t+1}{t+1}=\dfrac{13}{4}$

$4t^2-9t-9=0,\ (4t+3)(t-3)=0$

$t=r^m>0$이므로 $t=r^m=3$

이것을 ㉡에 대입하면 $a\times 3^2=90$에서 $a=10$

이것을 ㉠에 다시 대입하면 $10r^6=30$이므로 $r^6=3$

따라서 $m=6$이고 $a+m=10+6=16$

답 16

12

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 a는 자연수이고 공비가 $\dfrac{1}{2}$이므로

$a_1>a_2>a_3>\cdots>a_n>a_{n+1}>\cdots$이다.

이때 $n(A)=5$이므로 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$이고 $a_5>1$, $a_6 \leq 1$이어야 한다.

즉, $a\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^4>1$, $a\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\leq 1$에서 $16<a\leq 32$이고 a는 자연수이므로 가능한 a의 값은 17, 18, $\cdots$, 32이다.

한편, $S=\dfrac{a\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{31}{16}a$이므로 a가 최소일 때 S도 최소이다.

따라서 구하는 S의 최솟값은 $a=17$일 때 $\dfrac{31}{16}\times 17=\dfrac{527}{16}$이고

$p+q=16+527=543$

답 543

13

조건 (가)에서 $2x=3+y$ …… ㉠

조건 (나)에서 $2y^2=x^2+49$ …… ㉡

㉠에서 $y=2x-3$이므로 이것을 ㉡에 대입하여 정리하면

$2(2x-3)^2=x^2+49$

$7x^2-24x-31=0$

$(7x-31)(x+1)=0$

$x=\dfrac{31}{7}$ 또는 $x=-1$

한편, 조건 (가)에서 $x<3$이므로 $x=-1$, $y=-5$

따라서 $x+y=(-1)+(-5)=-6$

답 ③

14

방정식 $(x+1)(8x^2+ax-1)=0$의 서로 다른 세 실근을 -1, α, β $(\alpha<\beta)$라 하자. 이때 α, β는 방정식 $8x^2+ax-1=0$의 서로 다른 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=-\dfrac{1}{8}$ …… ㉠

또한 $\alpha\beta=-\dfrac{1}{8}<0$이므로 $\alpha<0$, $\beta>0$이고, 세 수 -1, α, β를 적당히 나열하여 등비수열을 이루게 하려면 공비가 음수이고 β가 -1과 α의 등비중항이어야 한다.

즉, $\beta^2=(-1)\times\alpha=-\alpha$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-\beta^3=-\dfrac{1}{8}$이므로

$\beta=\dfrac{1}{2}$, $\alpha=-\dfrac{1}{4}$

한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{a}{8}$이므로 $-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{a}{8}$

따라서 $a=-2$이므로 $a^2=4$

답 4

15

세 양수 a, b, c가 이 순서대로 공비가 r인 등비수열을 이룬다고 하면

조건 (가)에서 $r>1$이므로 $a<b<c$이고

$b^2=ac$ …… ㉠

조건 (나)에서 삼각형 ABC의 무게중심의 x좌표가 7이므로

$\dfrac{a+b+c}{3}=7$에서

$a+b+c=21$ …… ㉡

또한 세 점 A, B, C의 y좌표는 각각 $\log_2 a$, $\log_2 b$, $\log_2 c$이므로

$\dfrac{\log_2 a+\log_2 b+\log_2 c}{3}=\log_2 6$

$\log_2 abc=3\log_2 6$

즉, $abc=6^3$ …… ㉢

㉠, ㉢에서 $b^3=6^3$이므로 $b=6$

㉠, ㉡에서 $ac=36$, $a+c=15$이므로 a와 c를 두 근으로 가지는 이차방정식은 $x^2-15x+36=0$이다.

$(x-3)(x-12)=0$에서

$a=3$, $c=12$ 또는 $a=12$, $c=3$

$a<b<c$이므로 $a=3$, $c=12$

즉, 직선 AC의 기울기는

$\dfrac{\log_2 c-\log_2 a}{c-a}=\dfrac{\log_2 12-\log_2 3}{12-3}=\dfrac{\log_2 4}{9}=\dfrac{2}{9}$

따라서 $p+q=9+2=11$

답 11

16

$S_n=p\times 3^n+n$에서 $a_1=S_1=3p+1$이고

$a_4=S_4-S_3=(81p+4)-(27p+3)=54p+1$이므로

$a_1+a_4=(3p+1)+(54p+1)=57p+2$

$57p+2=230$에서 $p=4$

즉, $S_4=4\times 3^4+4=328$

따라서 $a_2+a_3=S_4-(a_1+a_4)=328-230=98$

답 98

17

$S_n=\log_2(n^2+3n+2)=\log_2(n+1)(n+2)$이므로

$n=1$일 때, $a_1=S_1=\log_2(2\times3)=\log_2 6$

$n\geq2$일 때

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=\log_2(n+1)(n+2)-\log_2 n(n+1)\\&=\log_2\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}\\&=\log_2\frac{n+2}{n}\end{aligned}$$

$a_m=\log_2\frac{6}{5}$에서 $\frac{m+2}{m}=\frac{6}{5}$이므로 $5m+10=6m$

따라서 $m=10$

답 ⑤

18

$n=1$일 때 $a_1=S_1=p+20$

$n\geq2$일 때

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(pn^2+20n)-\{p(n-1)^2+20(n-1)\}\\&=2pn+(20-p)\end{aligned}$$

이때 $2p+(20-p)=p+20$이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=2pn+(20-p)$이고, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $p+20$, 공차가 $2p$인 등차수열이다.

$a_1+a_3+a_5+a_7=(a_1+a_7)+(a_3+a_5)=2a_4+2a_4=4a_4=24$

이므로 $a_4=6$이다.

$a_4=8p+(20-p)=7p+20=6$에서 $p=-2$이고 수열 $\{a_n\}$의 공차는 -4이다.

따라서

$$\begin{aligned}a_2+a_4+a_6+a_8&=(a_1-4)+(a_3-4)+(a_5-4)+(a_7-4)\\&=(a_1+a_3+a_5+a_7)-16\\&=24-16=8\end{aligned}$$

답 8

19

$\sum_{k=1}^{5}a_k=6$, $\sum_{k=1}^{5}b_k=16$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}\left(a_k+\frac{1}{2}b_k-1\right)&=\sum_{k=1}^{5}a_k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5}b_k-\sum_{k=1}^{5}1\\&=6+\frac{1}{2}\times16-1\times5\\&=9\end{aligned}$$

답 9

20

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{10}k(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}})\\&=(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})+2(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3})+3(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_4})\\&\qquad+\cdots+9(\sqrt{a_9}-\sqrt{a_{10}})+10(\sqrt{a_{10}}-\sqrt{a_{11}})\\&=(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+\cdots+\sqrt{a_9}+\sqrt{a_{10}})-10\sqrt{a_{11}}\\&=\sum_{k=1}^{10}\sqrt{a_k}-10\sqrt{a_{11}}\end{aligned}$$

이므로 $25=30-10\sqrt{a_{11}}$, $\sqrt{a_{11}}=\frac{1}{2}$

따라서 $a_{11}=\frac{1}{4}$

답 ①

21

$\sum_{k=1}^{20}\log_2(2a_k)=6$에서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20}\log_2(2a_k)&=\sum_{k=1}^{20}(\log_2 a_k+1)\\&=\sum_{k=1}^{20}\log_2 a_k+20\end{aligned}$$

즉, $\sum_{k=1}^{20}\log_2 a_k=6-20=-14$ …… ㉠

한편, $\sum_{k=1}^{19}(\log_{\frac{1}{4}} a_k-2)=-18$에서

$\log_{\frac{1}{4}} a_k=-\frac{1}{2}\log_2 a_k$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{19}(\log_{\frac{1}{4}} a_k-2)&=\sum_{k=1}^{19}\left(-\frac{1}{2}\log_2 a_k-2\right)\\&=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{19}\log_2 a_k-38\end{aligned}$$

즉, $\sum_{k=1}^{19}\log_2 a_k=-2(-18+38)=-40$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서

$$\begin{aligned}\log_2 a_{20}&=\sum_{k=1}^{20}\log_2 a_k-\sum_{k=1}^{19}\log_2 a_k\\&=-14-(-40)=26\end{aligned}$$

답 26

22

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{8}k(k+1)&=\sum_{k=1}^{8}(k^2+k)\\&=\sum_{k=1}^{8}k^2+\sum_{k=1}^{8}k\\&=\frac{8\times9\times17}{6}+\frac{8\times9}{2}\\&=204+36=240\end{aligned}$$

답 240

23

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_n+b_n=\frac{n(n-5)}{a}$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)&=\sum_{k=1}^{10}\frac{k(k-5)}{a}\\&=\frac{1}{a}\left(\sum_{k=1}^{10}k^2-5\sum_{k=1}^{10}k\right)\\&=\frac{1}{a}\left(\frac{10\times11\times21}{6}-5\times\frac{10\times11}{2}\right)\\&=\frac{110}{a}=22\end{aligned}$$

에서 $a=5$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

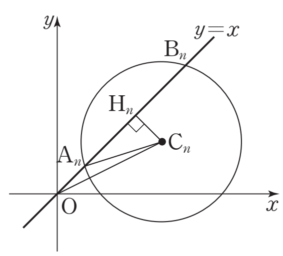
$a_nb_n=\frac{-n(n^2+1)}{5}$이므로

$$\sum_{k=1}^{10} a_k b_k = \sum_{k=1}^{10} \frac{-k(k^2+1)}{5}$$
$$= -\frac{1}{5}\left(\sum_{k=1}^{10} k^3 + \sum_{k=1}^{10} k\right)$$
$$= -\frac{1}{5}\left\{\left(\frac{10\times 11}{2}\right)^2 + \frac{10\times 11}{2}\right\}$$
$$= -616$$

답 ④

24

원 $(x-2n)^2+(y-n)^2=2n(n+1)$의 중심을 $C_n(2n, n)$이라 하자.
$\overline{OC_n}=\sqrt{(2n)^2+n^2}=\sqrt{5}n$이고 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2n(n+1)}$이다. 이때 자연수 n에 대하여
$5n^2-2n(n+1)=3n^2-2n=n(3n-2)>0$이므로
$\sqrt{5}n>\sqrt{2n(n+1)}$이다.
즉, 점 O는 원의 외부에 있다.



그림과 같이 점 C_n에서 직선 $y=x$, 즉 직선 $x-y=0$에 내린 수선의 발을 H_n이라 하면

$$\overline{C_nH_n}=\frac{|2n-n|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{n}{\sqrt{2}}$$
$$\overline{A_nH_n}=\overline{B_nH_n}=\sqrt{2n(n+1)-\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}n^2+2n}$$

또한 삼각형 OC_nH_n에서

$$\overline{OH_n}=\sqrt{\overline{OC_n}^2-\overline{C_nH_n}^2}=\sqrt{\{(2n)^2+n^2\}-\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{2}}n$$

이므로

$$\overline{OA_n}\times\overline{OB_n}=\left(\frac{3}{\sqrt{2}}n-\sqrt{\frac{3}{2}n^2+2n}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{2}}n+\sqrt{\frac{3}{2}n^2+2n}\right)$$
$$=\frac{9}{2}n^2-\left(\frac{3}{2}n^2+2n\right)$$
$$=3n^2-2n$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{8}(\overline{OA_k}\times\overline{OB_k})=\sum_{k=1}^{8}(3k^2-2k)$$
$$=3\sum_{k=1}^{8}k^2-2\sum_{k=1}^{8}k$$
$$=3\times\frac{8\times 9\times 17}{6}-2\times\frac{8\times 9}{2}$$
$$=612-72=540$$

답 540

다른 풀이

두 식 $(x-2n)^2+(y-n)^2=2n(n+1)$, $y=x$를 연립하여 정리하면
$2x^2-6nx+n(3n-2)=0$ …… ㉠
㉠의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=9n^2-2\times n(3n-2)$$
$$=3n^2+4n>0$$

이므로 ㉠은 항상 서로 다른 두 실근 α, β를 갖는다.
㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3n>0$,
$\alpha\beta=\dfrac{n(3n-2)}{2}>0$이므로 $\alpha>0$, $\beta>0$이다.
$A_n(\alpha, \alpha)$, $B_n(\beta, \beta)$에서
$\overline{OA_n}=\sqrt{(\alpha-0)^2+(\alpha-0)^2}=\sqrt{2}|\alpha|=\sqrt{2}\alpha$,
$\overline{OB_n}=\sqrt{(\beta-0)^2+(\beta-0)^2}=\sqrt{2}|\beta|=\sqrt{2}\beta$
이므로 $\overline{OA_n}\times\overline{OB_n}=\sqrt{2}\alpha\times\sqrt{2}\beta=2\alpha\beta$
즉, $\overline{OA_n}\times\overline{OB_n}=2\alpha\beta=n(3n-2)=3n^2-2n$
따라서

$$\sum_{k=1}^{8}(\overline{OA_k}\times\overline{OB_k})=\sum_{k=1}^{8}(3k^2-2k)$$
$$=3\sum_{k=1}^{8}k^2-2\sum_{k=1}^{8}k$$
$$=3\times\frac{8\times 9\times 17}{6}-2\times\frac{8\times 9}{2}$$
$$=612-72=540$$

25

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(k+a)(k+a+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k+a}-\frac{1}{k+a+1}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{1+a}-\frac{1}{2+a}\right)+\left(\frac{1}{2+a}-\frac{1}{3+a}\right)+\left(\frac{1}{3+a}-\frac{1}{4+a}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10+a}-\frac{1}{11+a}\right)$$
$$=\frac{1}{1+a}-\frac{1}{11+a}$$
$$=\frac{10}{(1+a)(11+a)}$$

$\dfrac{10}{(1+a)(11+a)}=\dfrac{10}{39}$에서
$(1+a)(11+a)=39$, $a^2+12a+11=39$
$a^2+12a-28=0$, $(a-2)(a+14)=0$
따라서 양수 a의 값은 2이다.

답 ②

26

$S_{n+1}=4n^2S_n$에서 $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$이므로
$S_n+a_{n+1}=4n^2S_n$, $a_{n+1}=(4n^2-1)S_n$
즉, $\dfrac{S_n}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{4n^2-1}$
따라서

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{S_k}{a_{k+1}}=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{4k^2-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}$$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{21}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{20}{21}=\frac{10}{21}$

답 ③

27

자연수 n에 대하여 점 A_n의 좌표는 $(n, \sqrt{n})$, 점 B_n의 좌표는 $(n, 0)$이므로

$a_n=\frac{1}{2}\times(n+1)\times\sqrt{n}+\frac{1}{2}\times n\times\sqrt{n+1}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{n+1}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

이때

$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{2}{\sqrt{k+1}\sqrt{k}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$

$=\sum_{k=1}^{m}\frac{2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{\sqrt{k+1}\sqrt{k}}$

$=2\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$

$=2\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{m}}-\frac{1}{\sqrt{m+1}}\right)\right\}$

$=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{m+1}}\right)=\frac{7}{4}$

이므로 $\frac{1}{\sqrt{m+1}}=\frac{1}{8}$

따라서 $m=63$

답 63

28

$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$에서 $a_2=\frac{2}{3}a_1$

$a_3=\frac{2}{3}a_2=\left(\frac{2}{3}\right)^2a_1$, $a_4=\frac{2}{3}a_3=\left(\frac{2}{3}\right)^3a_1$이므로

$a_4=8$에서 $\frac{8}{27}a_1=8$

따라서 $a_1=27$

답 27

29

$a_{n+1}(a_n^2-1)=12$ …… ㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_2(a_1^2-1)=12$, $3a_2=12$, $a_2=4$

㉠에 $n=2$를 대입하면

$a_3(a_2^2-1)=12$, $15a_3=12$, $a_3=\frac{4}{5}$

㉠에 $n=3$을 대입하면

$a_4(a_3^2-1)=12$, $-\frac{9}{25}a_4=12$, $a_4=-\frac{100}{3}$

답 ④

30

ㄱ. $r=-1$이면 $b_2=-b_1$, $b_3=b_1$이므로

$a_2=2(b_2+a_1)=2(-b_1+2b_1)=2b_1$

$a_3=2(b_3+a_2)=2(b_1+2b_1)=6b_1$

이때 $6b_1=3a_1$이므로 $a_3=3a_1$ (참)

ㄴ. $r=2$이면 $b_2=2b_1$, $b_3=4b_1$, $b_4=8b_1$이므로

$a_2=2(b_2+a_1)=2(2b_1+2b_1)=8b_1$

$a_3=2(b_3+a_2)=2(4b_1+8b_1)=24b_1$

$a_4=2(b_4+a_3)=2(8b_1+24b_1)=64b_1$

이때 $a_4=64b_1=32a_1$이므로 $a_4=32$이면 $a_1=1$이다. (거짓)

ㄷ. $r=\frac{2}{3}$이면 $b_3=\frac{2}{3}b_2$, $b_2=\frac{2}{3}b_1$이므로

$a_3+b_3=2(b_3+a_2)+b_3$

$=3b_3+2a_2=2b_2+2a_2$

$=2b_2+4(b_2+a_1)=4a_1+6b_2$

$=8b_1+4b_1=12b_1$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

31

$a_1=5$에서

$\sqrt{5}$는 자연수가 아니므로 $a_2=a_1+1=6$

$\sqrt{6}$은 자연수가 아니므로 $a_3=a_2+1=7$

$\sqrt{7}$은 자연수가 아니므로 $a_4=a_3+1=8$

$\sqrt{8}$은 자연수가 아니므로 $a_5=a_4+1=9$

$\sqrt{9}=3$이므로 $a_6=\sqrt{9}=3$

$\sqrt{3}$은 자연수가 아니므로 $a_7=a_6+1=4$

$\sqrt{4}=2$이므로 $a_8=\sqrt{4}=2$

$\sqrt{2}$는 자연수가 아니므로 $a_9=a_8+1=3$

$\sqrt{3}$은 자연수가 아니므로 $a_{10}=a_9+1=4$

$\sqrt{4}=2$이므로 $a_{11}=\sqrt{4}=2$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$은 제6항부터 3, 4, 2가 반복하여 나타난다.

따라서

$\sum_{k=1}^{20}a_k=(5+6+7+8+9)+5\times(3+4+2)=35+45=80$

답 80

32

$a_1=\frac{2}{3}\pi$이므로

$a_2=\pi\cos(\pi-a_1)=\pi\cos\left(\pi-\frac{2}{3}\pi\right)=\pi\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$

$a_3=\pi\cos(\pi-a_2)=\pi\cos\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\pi\cos\frac{\pi}{2}=0$

$a_4=\pi\cos(\pi-a_3)=\pi\cos(\pi-0)=\pi\cos\pi=-\pi$

$a_5=\pi\cos(\pi-a_4)=\pi\cos(\pi+\pi)=\pi\cos2\pi=\pi$

$a_6=\pi\cos(\pi-a_5)=\pi\cos(\pi-\pi)=\pi\cos0=\pi$

$a_7=\pi\cos(\pi-a_6)=\pi\cos(\pi-\pi)=\pi\cos0=\pi$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$에서 $n\geq5$일 때, $a_n=\pi$이고 $n\geq5$인 모든 자연수 n에 대하여 $S_n>S_4$이다.

한편, $S_1=\frac{2}{3}\pi$, $S_2=\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{7}{6}\pi$, $S_3=\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{2}+0=\frac{7}{6}\pi$,

$S_4=\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{2}+0-\pi=\frac{\pi}{6}$이므로 S_n은 $n=4$일 때 최솟값 $\frac{\pi}{6}$를 갖는다.

따라서 $k\times m=4\times\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$

답 ④

33

ㄱ. $a_1=3,\ b_1=1$이면

$a_2=3+1=4,\ b_2=(-1)^3=-1$

$a_3=4+(-1)=3,\ b_3=(-1)^4=1$

$a_4=3+1=4,\ b_4=(-1)^3=-1$

⋮

즉, 모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n-1}=3,\ a_{2n}=4,\ b_{2n-1}=1,\ b_{2n}=-1$

따라서 $a_{10}+b_{10}=4+(-1)=3$ (참)

ㄴ. a_1이 홀수일 때는 $b_2=-1$이고 $a_3=a_2+b_2=9,\ b_3=1$이므로

$a_4=a_3+b_3=10$이다. 즉, $a_4>10$의 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 a_1은 짝수이므로 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 차례로 나열하면 다음과 같다.

	$\{a_n\}$	$\{b_n\}$
$n=1$	a_1 (짝수)	b_1
$n=2$	10	1
$n=3$	11	1
$n=4$	12	-1
$n=5$	11	1
$n=6$	12	-1
⋮	⋮	⋮
$n=11$	11	1

따라서

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{10}a_{k+1}=10+11\times5+12\times4=113$ (참)

ㄷ. $a_2>a_4$이므로

$a_4=a_3+b_3=(a_2+b_2)+b_3=a_2+(b_2+b_3)$에서 $b_2+b_3<0$이다.

이때 b_2와 b_3은 각각 1 또는 -1이므로 $b_2=b_3=-1$이다. 즉, a_1과 a_2는 홀수인 자연수이므로 b_1은 짝수인 자연수이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 차례로 나열하면 다음과 같다.

	$\{a_n\}$	$\{b_n\}$
$n=1$	a_1 (홀수)	b_1 (짝수)
$n=2$	a_1+b_1 (홀수)	-1
$n=3$	a_1+b_1-1 (짝수)	-1
$n=4$	a_1+b_1-2 (홀수)	1
$n=5$	a_1+b_1-1 (짝수)	-1
$n=6$	a_1+b_1-2 (홀수)	1
⋮	⋮	⋮
$n=10$	a_1+b_1-2 (홀수)	1

$a_3=a_1+b_1-1,\ a_{10}=a_1+b_1-2$이므로 $a_3>a_{10}$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

34

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=\log 3$,

(우변)$=\sum_{k=1}^{2}\log\frac{2+k}{2}=\log\frac{2+1}{2}+\log\frac{2+2}{2}=\log 3$

이므로 ($*$)이 성립한다.

(ii) $n=m\ (m\ge2)$일 때, ($*$)이 성립한다고 가정하면

$\log 3+\log 5+\log 7+\cdots+\log(2m-1)=\sum_{k=1}^{m}\log\frac{m+k}{2}$

이다. 위 등식의 양변에 $\log(2m+1)$을 더하면

$\log 3+\log 5+\log 7+\cdots+\log(2m-1)+\log(2m+1)$

$=\sum_{k=1}^{m}\log\frac{m+k}{2}+\boxed{\log(2m+1)}$

$=\sum_{k=1}^{m-1}\log\frac{(m+1)+k}{2}+\log\frac{m+1}{2}+\log(2m+1)$

$=\sum_{k=1}^{m-1}\log\frac{(m+1)+k}{2}+\{\log(m+1)-\boxed{\log 2}\}$

$+\boxed{\log(2m+1)}$

$=\sum_{k=1}^{m-1}\log\frac{(m+1)+k}{2}+\log(m+1)+\log\frac{2m+1}{2}$

$=\sum_{k=1}^{m-1}\log\frac{(m+1)+k}{2}+\log(m+1)+\log\frac{(m+1)+\boxed{m}}{2}$

$=\sum_{k=1}^{m-1}\log\frac{(m+1)+k}{2}+\log\frac{(m+1)+m}{2}$

$+\log\frac{(m+1)+(m+1)}{2}$

$=\sum_{k=1}^{m+1}\log\frac{(m+1)+k}{2}$

이상에서 $f(m)=\log(2m+1)$, $g(m)=m$, $p=\log 2$이므로

$f(7)+g(6)+p=\log 15+6+\log 2$

$=6+\log 30$

$=7+\log 3$

답 ⑤

수학Ⅱ

04 함수의 극한과 연속

정답 본문 46~57쪽

01 ①	02 ②	03 9	04 ④	05 20
06 9	07 12	08 ③	09 ⑤	10 ④
11 ③	12 ④	13 ④	14 6	15 ⑤
16 ④	17 ④	18 21	19 ④	20 ③
21 ②	22 ⑤	23 ①	24 10	25 ②
26 ①	27 ④	28 10	29 ③	30 ④
31 7	32 5	33 ⑤	34 ②	35 ④
36 4	37 ③	38 ⑤		

01

$$\lim_{x\to1+}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}(x+1)=2$$
$$\lim_{x\to1-}\frac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to1-}\frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1-}\{-(x+1)\}=-2$$

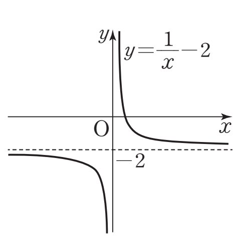
따라서 $a=2$, $b=-2$이므로

$ab=-4$

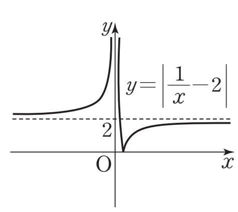
답 ①

02

함수 $y=\frac{1}{x}-2$의 그래프는 [그림 1]과 같으므로 함수 $y=\left|\frac{1}{x}-2\right|$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

따라서 함수 $f(t)$는 다음과 같다.

$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t=0)\\ 2 & (0<t<2)\\ 1 & (t=2)\\ 2 & (t>2)\end{cases}$$

따라서 $\lim_{t\to0-}f(t)=0$, $\lim_{t\to2+}f(t)=2$이므로

$$\lim_{t\to0-}f(t)+\lim_{t\to2+}f(t)=0+2=2$$

답 ②

03

$$\lim_{x\to3+}f(x)=2$$
$$\lim_{x\to6+}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)+1=-1+1=0$$
$$\lim_{x\to9+}f(x)=\lim_{x\to5+}f(x)+1=\{\lim_{x\to1+}f(x)+1\}+1$$
$$=\lim_{x\to1+}f(x)+2=2+2=4$$
$$\lim_{x\to12+}f(x)=\lim_{x\to8+}f(x)+1=\{\lim_{x\to4+}f(x)+1\}+1$$
$$=[\{\lim_{x\to0+}f(x)+1\}+1]+1$$
$$=\lim_{x\to0+}f(x)+3=0+3=3$$

따라서 $\sum_{k=1}^{4}\lim_{x\to(3k)+}f(x)=2+0+4+3=9$

답 9

04

$$\lim_{x\to1}2f(x)=2\lim_{x\to1}f(x)=2\times3=6$$
$$\lim_{x\to0}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to0}f(x)\times\lim_{x\to0}f(x)=(-1)\times(-1)=1$$

따라서 $\lim_{x\to1}2f(x)-\lim_{x\to0}\{f(x)\}^2=6-1=5$

답 ④

05

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x+1}=2$에서 $\frac{f(x)-1}{x+1}=h(x)$라 하면

$x\neq-1$일 때 $f(x)=(x+1)h(x)+1$이므로

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x+1)\times\lim_{x\to1}h(x)+1=2\times2+1=5$$

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)+1}{f(x)}=3$에서 $\frac{g(x)+1}{f(x)}=i(x)$라 하면

$g(x)=f(x)i(x)-1$이므로

$$\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}f(x)\times\lim_{x\to1}i(x)-1=5\times3-1=14$$

따라서

$$\lim_{x\to1}f(x)\{g(x)-2f(x)\}=\lim_{x\to1}f(x)\times\lim_{x\to1}\{g(x)-2f(x)\}$$
$$=\lim_{x\to1}f(x)\times\{\lim_{x\to1}g(x)-2\lim_{x\to1}f(x)\}$$
$$=5\times(14-2\times5)=20$$

답 20

06

$\lim_{x\to1}f(x)g(x)$의 값이 존재하므로 $\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)g(x)$이다.

$\lim_{x\to1-}f(x)=-2$, $\lim_{x\to1-}g(x)=\frac{3}{2}$이므로

$$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)\times\lim_{x\to1-}g(x)=(-2)\times\frac{3}{2}=-3$$

$\lim_{x\to1+}f(x)=3$, $\lim_{x\to1+}g(x)=a+2$이므로

$$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)\times\lim_{x\to1+}g(x)=3(a+2)$$

따라서 $3(a+2)=-3$에서 $a=-3$, $b=-3$이므로

$ab=(-3)\times(-3)=9$

답 9

07

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{\sqrt{x^2+x+4}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+3)(\sqrt{x^2+x+4}+2)}{x(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+3)(\sqrt{x^2+x+4}+2)}{x+1}=12$$

답 12

08

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2x-9}\right)=\lim_{x\to 3}\left\{\frac{1}{x-3}\times\frac{2x-6}{3(2x-9)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 3}\left\{\frac{1}{x-3}\times\frac{2(x-3)}{3(2x-9)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{2}{3(2x-9)}=-\frac{2}{9}$$

답 ③

09

$f(x)=ax(x-2)$ $(a<0)$라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ f(1))$, 즉 $(1,\ -a)$이므로

$g(x)=-ax$

따라서 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{ax(x-2)}{-ax}=\lim_{x\to 0}(-x+2)=2$

답 ⑤

10

$-x=t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{1-2x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+1}}{1+2t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}{\frac{1}{t}+2}=\frac{1}{2}$$

답 ④

11

$f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2-1=x-1$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{f(x)}-f(\sqrt{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}-(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+(x-1)}{(x^2-1)-(x-1)^2}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}+(x-1)}{2x-2}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1-\frac{1}{x}}{2-\frac{2}{x}}=1$$

답 ③

12

$\sqrt{2x+1}<f(x)<\sqrt{2x+3}$에서

$2x+1<\{f(x)\}^2<2x+3$이므로

$2x+1-\sqrt{2x+3}<\{f(x)\}^2-f(x)<2x+3-\sqrt{2x+1}$

$$\frac{2x+1-\sqrt{2x+3}}{x}<\frac{\{f(x)\}^2-f(x)}{x}<\frac{2x+3-\sqrt{2x+1}}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1-\sqrt{2x+3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{1}=2$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3-\sqrt{2x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}-\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1}=2$$

따라서 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\{f(x)-1\}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2-f(x)}{x}=2$$

답 ④

다른 풀이

$x>0$에서 $\sqrt{2x+1}<f(x)<\sqrt{2x+3}$이므로

$$\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x}}<\frac{f(x)}{\sqrt{x}}<\frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x}}$$

그런데 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x}}=\sqrt{2}$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}=\sqrt{2}$$

또한 $\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{x}}<\frac{f(x)-1}{\sqrt{x}}<\frac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{x}}$에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{x}}=\sqrt{2}$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-1}{\sqrt{x}}=\sqrt{2}$$

따라서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\{f(x)-1\}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\times\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-1}{\sqrt{x}}$$
$$=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$$

13

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x^3-1}=1$에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $1+a+b=0$이므로 $b=-a-1$ ...... ㉠

따라서

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+a+1}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{2+a}{3}$$

$\frac{2+a}{3}=1$에서 $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-2$

따라서 $a-b=1-(-2)=3$

답 ④

14

$$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+ax})=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(\sqrt{x^2+ax})^2}{x+\sqrt{x^2+ax}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-ax}{x+\sqrt{x^2+ax}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-a}{1+\sqrt{1+\frac{a}{x}}}=-\frac{a}{2}$$

따라서 $-\frac{a}{2}=-3$에서 $a=6$

답 6

15

$x\to a$일 때 (분자) $\to0$이고 $b\neq0$이므로 (분모) $\to0$이다.

즉, $\sqrt{13-a}-\sqrt{5+a}=0$에서

$\sqrt{13-a}=\sqrt{5+a}$

$13-a=5+a$이므로 $a=4$

이때

$$\lim_{x\to4}\frac{16-x^2}{\sqrt{13-x}-\sqrt{5+x}}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{(16-x^2)(\sqrt{13-x}+\sqrt{5+x})}{(\sqrt{13-x}-\sqrt{5+x})(\sqrt{13-x}+\sqrt{5+x})}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{(4-x)(4+x)(\sqrt{13-x}+\sqrt{5+x})}{13-x-(5+x)}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{(4-x)(4+x)(\sqrt{13-x}+\sqrt{5+x})}{2(4-x)}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to4}\{(4+x)(\sqrt{13-x}+\sqrt{5+x})\}$$
$$=\frac{1}{2}\times8\times(\sqrt{9}+\sqrt{9})=24$$

즉, $b=24$

따라서 $a+b=4+24=28$

답 ⑤

16

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{f(x)-x^3}$의 값이 0이 아닌 상수이므로 분모의 차수와 분자의 차수는 서로 같다.

또한 그 극한값이 $\frac{1}{3}$이므로 분모 $f(x)-x^3$은 이차항의 계수가 3인 이차함수이다.

따라서 $f(x)-x^3=3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=x^3+3x^2+ax+b$

또 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to1}f(x)=1+3+a+b=0$에서

$b=-a-4$ ...... ㉠

따라서

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+4x+a+4)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x^2+4x+a+4)$$
$$=a+9=2$$

즉, $a=-7$

$a=-7$을 ㉠에 대입하면 $b=3$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-7x+3$이므로

$f(-1)=-1+3+7+3=12$

답 ④

17

조건 (가)에서 $x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $2f(0)=0$에서 $f(0)=0$이므로 $f(x)$는 x를 인수로 갖는다.

이때 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x\to0}\frac{(x^2+2)f(x)}{x^3+x}=\lim_{x\to0}\frac{(x^2+2)\{x(x^2+ax+b)\}}{x(x^2+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(x^2+2)(x^2+ax+b)}{x^2+1}=2b$$

이므로 $2b=4$에서 $b=2$

$f(x)=x(x^2+ax+2)$이므로 조건 (나)에서

$$\frac{2(6+2a)}{2}=\frac{5(27+5a)}{5}$$

$3a=-21$, $a=-7$

따라서 $f(x)=x(x^2-7x+2)$이므로

$f(1)=1\times(1-7+2)=-4$

답 ④

참고

$g(x)=\frac{f(x)}{x}$라 하면 $g(x)=x^2+ax+b$이고

조건 (나)에서 $g(2)=g(5)$이므로 이차함수 $g(x)$의 그래프의 대칭축은

$x=\frac{2+5}{2}=\frac{7}{2}$이다.

즉, $-\frac{a}{2}=\frac{7}{2}$에서 $a=-7$

18

$f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=x+c$ (a, b, c는 상수)라 하자.

조건 (가)에서 $x\to-1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to-1}f(x)=1-a+b=0$에서

$b=a-1$ ...... ㉠

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{(x+1)g(x)}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x+a-1)}{(x+1)(x+c)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{x+a-1}{x+c} \quad \text{...... ㉡}$$

㉡에서 $c=1$, $a=2$이면 $x\to-1$일 때 함수 $y=\frac{x+1}{x+1}$은 1에 수렴하고,

$c=1$, $a\neq2$이면 $x\to-1$일 때 함수 $y=\frac{x+a-1}{x+1}$은 발산하므로

$c\neq1$이다.

따라서 $\lim_{x\to-1}\frac{x+a-1}{x+c}=\frac{-2+a}{-1+c}$

$\frac{-2+a}{-1+c}=2$에서

$a=2c$ ...... ㉢

조건 (나)에서

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-xg(x)}{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+ax+b-x(x+c)}{2x+3}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-c)x+b}{2x+3}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a-c+\frac{b}{x}}{2+\frac{3}{x}}$$

$$=\frac{a-c}{2}$$

$\frac{a-c}{2}=2$에서

$a=c+4$ …… ㉣

㉠, ㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$a=8,\ b=7,\ c=4$

따라서 $f(x)=x^2+8x+7,\ g(x)=x+4$이므로

$f(1)+g(1)=16+5=21$

답 21

19

세 점 A, P, Q의 좌표는

$A(2,\ 4),\ P(t,\ 2t),\ Q(t,\ t^2)$이므로

$$\overline{AQ}=\sqrt{(t-2)^2+(t^2-4)^2}$$
$$=\sqrt{(t-2)^2+(t-2)^2(t+2)^2}$$
$$=|t-2|\sqrt{1+(t+2)^2}$$
$$=(2-t)\sqrt{1+(t+2)^2}\ (0<t<2\text{이므로})$$

$\overline{PQ}=2t-t^2=t(2-t)$

따라서

$$\lim_{t\to2-}\frac{\overline{AQ}}{\overline{PQ}}=\lim_{t\to2-}\frac{(2-t)\sqrt{1+(t+2)^2}}{t(2-t)}$$
$$=\lim_{t\to2-}\frac{\sqrt{1+(t+2)^2}}{t}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

답 ④

20

점 P의 x좌표를 $a\ (a>0)$라 하면 점 $P(a,\ \sqrt{a})$가 원 C 위의 점이므로

$a^2+a=t^2$ …… ㉠

점 P에서의 접선의 방정식은

$ax+\sqrt{a}y=t^2$

이 직선의 x절편이 $f(t)$이므로

$f(t)=\frac{t^2}{a}$

㉠에서 $a^2+a-t^2=0$이므로 $a=\frac{-1\pm\sqrt{1+4t^2}}{2}$

그런데 $a>0$이므로 $a=\frac{-1+\sqrt{1+4t^2}}{2}$

따라서

$$\lim_{t\to0+}f(t)=\lim_{t\to0+}\frac{t^2}{a}=\lim_{t\to0+}\frac{2t^2}{\sqrt{1+4t^2}-1}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{2t^2(\sqrt{1+4t^2}+1)}{4t^2}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{1+4t^2}+1}{2}$$
$$=\frac{1+1}{2}=1$$

답 ③

다른 풀이 1

점 P의 x좌표를 $a\ (a>0)$라 하면 점 $P(a,\ \sqrt{a})$가 원 C 위의 점이므로

$a^2+a=t^2$ …… ㉠

점 P에서의 접선의 방정식은

$ax+\sqrt{a}y=t^2$

이 직선의 x절편이 $f(t)$이므로

$f(t)=\frac{t^2}{a}$

㉠에서 $f(t)=\frac{t^2}{a}=\frac{a^2+a}{a}=a+1$

$a^2+a-t^2=0$에서 $a>0$이므로

$a=\frac{-1+\sqrt{1+4t^2}}{2}$

따라서 $t\to0+$일 때 $a\to0+$이므로

$\lim_{t\to0+}f(t)=\lim_{a\to0+}(a+1)=1$

다른 풀이 2

점 P의 x좌표를 $a\ (a>0)$라 하면 점 $P(a,\ \sqrt{a})$에 대하여 직선 OP의 기울기는 $\frac{\sqrt{a}}{a}$이고 직선 l은 직선 OP와 수직이므로 직선 l의 기울기는 $-\sqrt{a}$이다.

따라서 직선 l의 방정식은 $y-\sqrt{a}=-\sqrt{a}(x-a)$이다.

직선 l의 방정식에 $y=0$을 대입하면 $x=a+1$이다.

$t\to0+$이면 $a\to0+$이므로

$\lim_{t\to0+}f(t)=\lim_{a\to0+}(a+1)=1$

21

점 P의 x좌표를 $p\ (p>0)$라 하면 두 점 $A(0,\ 1),\ P(p,\ r)$에 대하여

$\overline{AP}=\sqrt{p^2+(r-1)^2}=r$

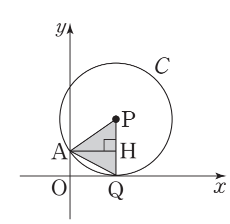
$\sqrt{p^2+(r-1)^2}=r$의 양변을 제곱하면

$p^2+(r-1)^2=r^2$

$p^2=2r-1$

$p>0$이므로 $p=\sqrt{2r-1}$이다.

점 A에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$S(r)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{AH}$$
$$=\frac{1}{2}\times r\times\sqrt{2r-1}$$

따라서

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\{S(r)\}^2}{r^3}=\lim_{r\to\infty}\frac{\frac{r^2(2r-1)}{4}}{r^3}$$
$$=\lim_{r\to\infty}\frac{2r^3-r^2}{4r^3}$$
$$=\lim_{r\to\infty}\frac{2-\frac{1}{r}}{4}$$
$$=\frac{1}{2}$$

답 ②

22

직선 l의 방정식은 $y=kx$이므로

$kx=\dfrac{4}{x}$에서 $x^2=\dfrac{4}{k}$

$x>0$이므로 $x=\dfrac{2}{\sqrt{k}}$

즉, 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{2}{\sqrt{k}},\ 2\sqrt{k}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{\dfrac{4}{k}+4k}$

또한 점 M의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}},\ \sqrt{k}\right)$이므로 직선 MQ의 방정식은

$y-\sqrt{k}=-\dfrac{1}{k}\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$ …… ㉠

㉠에 $y=0$을 대입하면 $x=k\sqrt{k}+\dfrac{1}{\sqrt{k}}$이므로

$\overline{\mathrm{OQ}}=k\sqrt{k}+\dfrac{1}{\sqrt{k}}$

따라서

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k^2\times\overline{\mathrm{OP}}^2}{\overline{\mathrm{OQ}}^2}=\lim_{k\to\infty}\frac{k^2\left(\dfrac{4}{k}+4k\right)}{k^3+2k+\dfrac{1}{k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{4}{k^2}+4}{1+\dfrac{2}{k^2}+\dfrac{1}{k^4}}=4$$

답 ⑤

23

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$이 성립하므로

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-a}{x-1}=b$

$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}(\sqrt{x^2+3}-a)=2-a=0$에서 $a=2$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}\\&=\frac{2}{2+2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

즉, $b=\dfrac{1}{2}$이므로

$a+b=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

답 ①

24

$$h(x)=\begin{cases}-4x-2a & (x<-1)\\ -2 & (-1\le x<2)\\ x^2+x+b & (x\ge2)\end{cases}$$

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=-1$, $x=2$에서 연속이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to-1-}h(x)=\lim\limits_{x\to-1-}(-4x-2a)=4-2a$,

$\lim\limits_{x\to-1+}h(x)=\lim\limits_{x\to-1+}(-2)=-2$,

$h(-1)=-2$에서

$4-2a=-2$이므로 $a=3$

또한 $\lim\limits_{x\to2-}h(x)=\lim\limits_{x\to2-}(-2)=-2$,

$\lim\limits_{x\to2+}h(x)=\lim\limits_{x\to2+}(x^2+x+b)=6+b$,

$h(2)=6+b$에서

$-2=6+b$이므로 $b=-8$

따라서 $h(x)=\begin{cases}-4x-6 & (x<-1)\\ -2 & (-1\le x<2)\\ x^2+x-8 & (x\ge2)\end{cases}$이므로

$h(-3)+h(3)=6+4=10$

답 10

25

$\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}=0$에서 $x=2$이므로

$x\neq2$일 때, $f(x)=\dfrac{ax+b}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}}$

그런데 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{ax+b}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}}=-5$

$x\to2$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $2a+b=0$에서 $b=-2a$

따라서

$$\begin{aligned}f(2)&=\lim_{x\to2}\frac{ax+b}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}}\\&=\lim_{x\to2}\frac{a(x-2)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})}\\&=\lim_{x\to2}\frac{a(x-2)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})}{x^2-4}\\&=\lim_{x\to2}\frac{a(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5})}{x+2}\\&=\frac{\sqrt{5}a}{2}=-5\end{aligned}$$

에서 $a=-2\sqrt{5}$, $b=4\sqrt{5}$이므로

$ab=(-2\sqrt{5})\times4\sqrt{5}=-40$

답 ②

26

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to2-}f(x)=\lim\limits_{x\to2+}f(x)=f(2)$가 성립한다.

$\lim\limits_{x\to2-}f(x)=\lim\limits_{x\to2-}(x^2+ax)=4+2a$,

$\lim\limits_{x\to2+}f(x)=\lim\limits_{x\to2+}(-2x+b)=-4+b$,

$f(2)=-4+b$

에서 $4+2a=-4+b$이므로

$a=\frac{b}{2}-4$ …… ㉠

또 $f(x+4)=f(x)$에서 $f(4)=f(0)=0$이고 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 4-} f(x)=f(4)$에서 $-8+b=0$

즉, $b=8$

㉠에서 $a=0$

즉, $f(x)=\begin{cases} x^2 & (0\le x<2) \\ -2x+8 & (2\le x<4) \end{cases}$

이므로 $f(9)=f(5)=f(1)=1$

답 ①

27

$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+x^3}{x^2+x-2}$의 값이 0이 아닌 상수이므로 분모의 차수와 분자의 차수는 서로 같다.

또한 그 극한값이 2이므로 $f(x)+x^3$은 이차함수이고 이차항의 계수는 2이다.

즉, $f(x)+x^3=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

$x<-2$ 또는 $x>1$일 때,

$g(x)=\frac{f(x)+x^3}{x^2+x-2}=\frac{2x^2+ax+b}{x^2+x-2}=\frac{2x^2+ax+b}{(x+2)(x-1)}$ …… ㉠

함수 $g(x)$가 $x=-2$, $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to -2} g(x)$, $\lim_{x\to 1} g(x)$의 값이 존재한다. 즉, ㉠에서 $2x^2+ax+b$는 $x+2$와 $x-1$을 인수로 갖는다.

즉, $x<-2$ 또는 $x>1$일 때

$g(x)=\frac{2x^2+ax+b}{(x+2)(x-1)}=\frac{2(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)}=2$

$g(-2)=g(1)=\frac{3}{2}k$이므로

$\lim_{x\to -2} g(x)=g(-2)$, $\lim_{x\to 1} g(x)=g(1)$에서 $\frac{3}{2}k=2$

따라서 $k=\frac{4}{3}$

답 ④

28

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=k$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to k-} f(x)=\lim_{x\to k+} f(x)=f(k)$가 성립해야 한다.

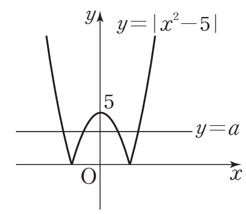
$\lim_{x\to k-} f(x)=\lim_{x\to k-} |x^2-5|=|k^2-5|$

$\lim_{x\to k+} f(x)=\lim_{x\to k+} a=a$

$f(k)=a$

이므로 $|k^2-5|=a$

a는 상수이므로 k에 대한 방정식 $|k^2-5|=a$의 서로 다른 실근의 개수가 4이려면 함수 $y=|x^2-5|$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 네 점에서 만나야 한다.



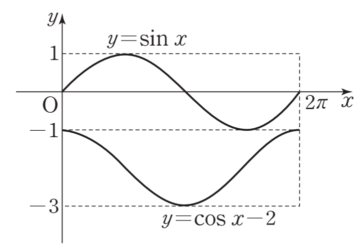
따라서 $0<a<5$이므로 정수 a는 1, 2, 3, 4이고 그 합은

$1+2+3+4=10$

답 10

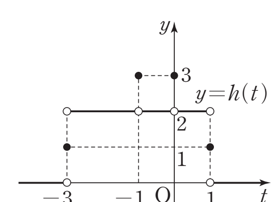
29

$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x-2$의 그래프는 그림과 같다.



$h(t)=\begin{cases} 0 & (t<-3) \\ 1 & (t=-3) \\ 2 & (-3<t<-1) \\ 3 & (t=-1) \\ 2 & (-1<t<0) \\ 3 & (t=0) \\ 2 & (0<t<1) \\ 1 & (t=1) \\ 0 & (t>1) \end{cases}$

이므로 함수 $y=h(t)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $h(t)$는 $a=-1$ 또는 $a=0$에서

$\lim_{t\to a-} h(t)=\lim_{t\to a+} h(t)\ne h(a)$이므로

구하는 실수 a의 개수는 2이다.

답 ③

30

함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0-}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to 0+}\{f(x)\}^2=\{f(0)\}^2$이 성립한다.

$\lim_{x\to 0-}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to 0-} f(x)\times\lim_{x\to 0-} f(x)=k\times k=k^2$,

$\lim_{x\to 0+}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to 0+} f(x)\times\lim_{x\to 0+} f(x)=4\times 4=16$,

$\{f(0)\}^2=4^2=16$

에서 $k^2=16$

$k=4$ 또는 $k=-4$

k가 음수이므로 $x<0$일 때 $f(x)=x-4$

따라서 $f(-1)=-5$

답 ④

31

함수 $f(x)$와 함수 $f(x)-a$는 $x=0$에서만 연속이 아니므로 함수 $f(x)\{f(x)-a\}$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=0$에서 연속이면 된다.

즉, $\lim_{x\to0-} f(x)\{f(x)-a\}=\lim_{x\to0-}(x^2+3)(x^2+3-a)$

$=3(3-a)=-3a+9$

$\lim_{x\to0+} f(x)\{f(x)-a\}=\lim_{x\to0+}(x^2+4)(x^2+4-a)$

$=4(4-a)=-4a+16$

$f(0)\{f(0)-a\}=4(4-a)=-4a+16$

$-3a+9=-4a+16$에서 $a=7$

답 7

32

$x<1$일 때 $f(x)>1$, $x\ge1$일 때 $f(x)\ge2$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $x\ne1$인 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $x\ne1$인 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=1$에서 연속이면 된다.

즉, $\lim_{x\to1-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to1+}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g(1)}{f(1)}$

$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to1-}\frac{3x-a}{-x+2}=\frac{3-a}{1}=3-a$

$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to1+}\frac{-x-3}{x+1}=\frac{-4}{2}=-2$

$\frac{g(1)}{f(1)}=\frac{-4}{2}=-2$

에서 $3-a=-2$이므로

$a=5$

답 5

33

함수 $g(x)=f(x)+kf(x+1)$이 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0-} g(x)=\lim_{x\to0+} g(x)=g(0)$

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to0-} f(x)=-2$

$x\to0-$일 때, $x+1\to1-$이므로

$\lim_{x\to0-} f(x+1)=1$

즉, $\lim_{x\to0-}\{f(x)+kf(x+1)\}=-2+k$ …… ㉠

$\lim_{x\to0+} f(x)=2$

$x\to0+$일 때, $x+1\to1+$이므로

$\lim_{x\to0+} f(x+1)=-1$

즉, $\lim_{x\to0+}\{f(x)+kf(x+1)\}=2-k$ …… ㉡

$g(0)=f(0)+kf(1)=0+0=0$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$-2+k=2-k=0$

따라서 $k=2$

답 ⑤

34

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점이 $\mathrm{A}(1, 3)$이므로

$f(x)=m(x-1)^2+3$ (m은 $m<0$인 상수)라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $\mathrm{C}(3, 1)$을 지나므로

$1=m(3-1)^2+3$에서 $m=-\frac{1}{2}$

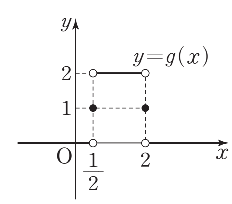
즉, $f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2+3$

두 점 P, A를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{5-3}{5-1}=\frac{1}{2}$,

두 점 P, C를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{5-1}{5-3}=2$이므로

$$g(a)=\begin{cases}0 & \left(a<\frac{1}{2}\right)\\ 1 & \left(a=\frac{1}{2}\right)\\ 2 & \left(\frac{1}{2}<a<2\right)\\ 1 & (a=2)\\ 0 & (a>2)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $g(x)$가 $x=\frac{1}{2}$, $x=2$에서만 불연속이고 함수 $f(x)-t$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(x)\{f(x)-t\}$가 불연속인 x의 값이 오직 한 개가 되도록 하려면 함수 $g(x)\{f(x)-t\}$는 $x=\frac{1}{2}$에서 불연속, $x=2$에서 연속 또는 $x=\frac{1}{2}$에서 연속, $x=2$에서 불연속이어야 한다.

(i) $x=2$에서 연속일 때

함수 $g(x)\{f(x)-t\}$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2-} g(x)\{f(x)-t\}=\lim_{x\to2+} g(x)\{f(x)-t\}$

$=g(2)\{f(2)-t\}$

가 성립한다.

$\lim_{x\to2-} g(x)\{f(x)-t\}=2\times\{f(2)-t\}=2\left(\frac{5}{2}-t\right)$,

$\lim_{x\to2+} g(x)\{f(x)-t\}=0\times\{f(2)-t\}=0$,

$g(2)\{f(2)-t\}=1\times\{f(2)-t\}=\frac{5}{2}-t$에서

$2\left(\frac{5}{2}-t\right)=0=\frac{5}{2}-t$이므로 $t=\frac{5}{2}$

이때 함수 $g(x)\left\{f(x)-\frac{5}{2}\right\}$는 $x=\frac{1}{2}$에서 불연속이다.

(ii) $x=\frac{1}{2}$에서 연속일 때

함수 $g(x)\{f(x)-t\}$가 $x=\frac{1}{2}$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}-} g(x)\{f(x)-t\}=\lim_{x\to\frac{1}{2}+} g(x)\{f(x)-t\}$$
$$=g\left(\frac{1}{2}\right)\left\{f\left(\frac{1}{2}\right)-t\right\}$$

가 성립한다.

$\lim_{x\to\frac{1}{2}-} g(x)\{f(x)-t\}=0\times\left\{f\left(\frac{1}{2}\right)-t\right\}=0,$

$\lim_{x\to\frac{1}{2}+} g(x)\{f(x)-t\}=2\times\left\{f\left(\frac{1}{2}\right)-t\right\}=2\left(\frac{23}{8}-t\right),$

$g\left(\frac{1}{2}\right)\left\{f\left(\frac{1}{2}\right)-t\right\}=1\times\left\{f\left(\frac{1}{2}\right)-t\right\}=\frac{23}{8}-t$

에서 $0=2\left(\frac{23}{8}-t\right)=\frac{23}{8}-t$이므로 $t=\frac{23}{8}$

이때 함수 $g(x)\left\{f(x)-\frac{23}{8}\right\}$은 $x=2$에서 불연속이다.

(i), (ii)에서 함수 $g(x)\{f(x)-t\}$는 $t=\frac{5}{2}$일 때 $x=\frac{1}{2}$에서 불연속, $x=2$에서 연속이고 $t=\frac{23}{8}$일 때 $x=2$에서 불연속, $x=\frac{1}{2}$에서 연속이므로 구하는 모든 t의 값의 합은

$\frac{5}{2}+\frac{23}{8}=\frac{43}{8}$

답 ②

35

$f(x)=x^3+2x-5$라 하면 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$f(-2)=-8-4-5=-17<0$

$f(-1)=-1-2-5=-8<0$

$f(0)=-5<0$

$f(1)=1+2-5=-2<0$

$f(2)=8+4-5=7>0$

$f(3)=27+6-5=28>0$

이때 $f(1)f(2)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 열린구간 $(1, 2)$에서 실근을 갖는다.

답 ④

36

$f(x)=x^3+ax+4$라 하면 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

삼차방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수가 1이므로 실근이 열린구간 $(-1, 2)$에 존재하려면 $f(-1)<0$, $f(2)>0$이어야 한다.

$f(-1)=-a+3<0$에서

$a>3$ …… ㉠

$f(2)=2a+12>0$에서

$a>-6$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a>3$

따라서 양의 정수 a의 최솟값은 4이다.

답 4

37

$f(-2)=a$, $f(2)=b$라 하면 사잇값의 정리에 의하여 $ab<0$

ㄱ. $g(x)=f(2x)$라 하면 $g(x)$는 연속함수이다.

$g(-1)=f(2\times(-1))=f(-2)=a$,

$g(1)=f(2\times1)=f(2)=b$이므로

$g(-1)g(1)=ab<0$

따라서 방정식 $f(2x)=0$은 열린구간 $(-1, 1)$에서 적어도 1개의 실근을 가지므로 열린구간 $(-2, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. $h(x)=(x-3)f(x)$라 하면 $h(x)$는 연속함수이다.

$h(-2)=-5f(-2)=-5a$

$h(2)=-f(2)=-b$

$h(-2)h(2)=(-5a)\times(-b)=5ab<0$

따라서 방정식 $(x-3)f(x)=0$은 열린구간 $(-2, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. [반례] $f(x)=(x-1)(x^2+1)$이라 하면 방정식 $f(x)=0$은 오직 하나의 실근 1을 가지고 $-2<1<2$이다.

$$f(x)+f(-x)=(x-1)(x^2+1)+(-x-1)(x^2+1)$$
$$=-2(x^2+1)$$

이므로 방정식 $f(x)+f(-x)=0$의 실근은 존재하지 않는다.

이상에서 열린구간 $(-2, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가지는 방정식은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

38

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=1$에서 불연속이므로 실수 a의 개수는 2이다. (참)

ㄴ. $\lim_{x\to0-} xf(x)=0\times1=0$, $\lim_{x\to0+} xf(x)=0\times3=0$, $0\times f(0)=0$

이므로 함수 $xf(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $xf(x)$는 연속이므로

최대 · 최소 정리에 의하여 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다. (참)

ㄷ. $h(x)=g(x)\{f(x)-2\}$라 하자.

$\lim_{x\to1-} h(x)=\lim_{x\to1-} g(x)\{f(x)-2\}=(-1)\times(3-2)=-1$

$\lim_{x\to1+} h(x)=\lim_{x\to1+} g(x)\{f(x)-2\}=1\times(1-2)=-1$

$h(1)=g(1)\{f(1)-2\}=(-1)\times(3-2)=-1$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$h(0)=g(0)\{f(0)-2\}=(-1)\times(3-2)=-1$

$h(2)=g(2)\{f(2)-2\}=1\times(3-2)=1$

$h(0)h(2)<0$

따라서 함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 $h(0)h(2)<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $h(x)=0$은 열린구간 $(0, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

05 다항함수의 미분법

정답

본문 61~73쪽

01 ③	02 ③	03 ②	04 ④	05 ③
06 44	07 ③	08 ②	09 ④	10 ①
11 ①	12 ③	13 ③	14 ⑤	15 45
16 ⑤	17 ①	18 2	19 ②	20 ①
21 12	22 ④	23 ⑤	24 4	25 ③
26 ③	27 81	28 2	29 4	30 5
31 21	32 ⑤	33 ②	34 ④	35 ②
36 ①	37 ④	38 243	39 18	40 5
41 ②	42 ①	43 ①	44 ④	45 3
46 ②	47 ③	48 ⑤		

01

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}&=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{(x+2)(x-2)}\\&=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}\\&=f'(2)\times\frac{1}{4}=1\end{aligned}$$

이므로 $f'(2)=4$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(2+4h)-f(2)}{h}&=\lim_{h\to0}\frac{f(2+4h)-f(2)}{4h}\times4\\&=f'(2)\times4=4\times4=16\end{aligned}$$

답 ③

02

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기가 2이므로

$f'(a)=2$

따라서

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{f(a+4h)-f(a-3h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(a+4h)-f(a)-\{f(a-3h)-f(a)\}}{h}\\&=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+4h)-f(a)}{4h}\times4+\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}\times3\right\}\\&=4f'(a)+3f'(a)\\&=7f'(a)=14\end{aligned}$$

답 ③

03

함수 $f(x)$가 다항함수이므로 $x=3$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$이므로 $f(3)=2$

따라서

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{f(3+2h)f\left(3+\frac{h}{2}\right)-2f(3+2h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f\left(3+\frac{h}{2}\right)-2}{h}\times f(3+2h)\right\}\\&=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f\left(3+\frac{h}{2}\right)-f(3)}{h}\times f(3+2h)\right\}\\&=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f\left(3+\frac{h}{2}\right)-f(3)}{\frac{h}{2}}\times f(3+2h)\times\frac{1}{2}\right\}\\&=f'(3)\times f(3)\times\frac{1}{2}\\&=f'(3)\times2\times\frac{1}{2}=f'(3)\end{aligned}$$

에서 $f'(3)=4$

답 ②

04

ㄱ. $f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & (x<0)\\ x^2+1 & (x\ge0)\end{cases}$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}&=\lim_{h\to0+}\frac{h^2+1-1}{h}\\&=\lim_{h\to0+}\frac{h^2}{h}=\lim_{h\to0+}h=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}&=\lim_{h\to0-}\frac{-h^2+1-1}{h}\\&=\lim_{h\to0-}\frac{-h^2}{h}=\lim_{h\to0-}(-h)=0\end{aligned}$$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄴ. $g(x)=|x|+2$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}&=\lim_{h\to0+}\frac{|h|+2-2}{h}\\&=\lim_{h\to0+}\frac{h}{h}=\lim_{h\to0+}1=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}&=\lim_{h\to0-}\frac{|h|+2-2}{h}\\&=\lim_{h\to0-}\frac{-h}{h}=\lim_{h\to0-}(-1)=-1\end{aligned}$$

$1\ne-1$이므로 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $h(x)=2|x|^3-x$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0+}\frac{h(0+h)-h(0)}{h}&=\lim_{h\to0+}\frac{2|h|^3-h-0}{h}\\&=\lim_{h\to0+}\frac{2h^3-h}{h}\\&=\lim_{h\to0+}(2h^2-1)=-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0-}\frac{h(0+h)-h(0)}{h}&=\lim_{h\to0-}\frac{2|h|^3-h-0}{h}\\&=\lim_{h\to0-}\frac{-2h^3-h}{h}\\&=\lim_{h\to0-}(-2h^2-1)=-1\end{aligned}$$

이므로 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

이상에서 $x=0$에서 미분가능한 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

05

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 1+}(ax+3)=\lim_{x\to 1-}(x^2+b)=f(1)$에서

$a+3=1+b$

즉, $b=a+2$ ...... ㉠

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{ax+3-(a+3)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{a(x-1)}{x-1}=a$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{x^2+b-(a+3)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{x^2+(a+2)-(a+3)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1-}(x+1)=2$$

이므로 $a=2$

㉠에서 $b=4$이므로 $a+b=2+4=6$

답 ③

06

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 2+}(-x^2+2ax+b-a^2)=\lim_{x\to 2-}\left(\frac{1}{3}x^3+c\right)=f(2)$에서

$-4+4a+b-a^2=\frac{8}{3}+c$ ...... ㉠

또한 $x=2$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

이때

$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{-x^2+2ax+b-a^2-(-4+4a+b-a^2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{-x^2+2ax+4-4a}{x-2}=-\lim_{x\to 2+}\frac{(x-2)(x-2a+2)}{x-2}=-(-2a+4)=2a-4$$

㉠에서 $-4+4a+b-a^2=\frac{8}{3}+c$이므로

$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{\frac{1}{3}x^3+c-(-4+4a+b-a^2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{\frac{1}{3}x^3+c-\left(\frac{8}{3}+c\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{\frac{1}{3}(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=4$$

즉, $2a-4=4$에서 $a=4$

㉠에서 $c=b-\frac{20}{3}$ ...... ㉡

그러므로 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+b-\frac{20}{3} & (x<2)\\ -(x-4)^2+b & (x\geq 2)\end{cases}$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{26}{3}$이고

$x\geq 2$에서 $f(x)=-(x-4)^2+b$이므로 $b=\frac{26}{3}$

㉡에서 $c=2$

따라서 $3(a+b+c)=3\left(4+\frac{26}{3}+2\right)=44$

답 44

07

$f(x)=(2x^3-x+1)(ax-x^2)+x+1$에서

$f'(x)=(6x^2-1)(ax-x^2)+(2x^3-x+1)(a-2x)+1$

이므로

$f'(1)=5(a-1)+2(a-2)+1$

$=7a-8=13$

$7a=21$

따라서 $a=3$

답 ③

08

$h'(x)=\begin{cases}f'(x)g(x)+f(x)g'(x) & (x<1)\\ f'(x)+g'(x) & (x>1)\end{cases}$

이때 $f'(x)=2x-2$, $g'(x)=3x^2+a$이므로

$h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$

$=-2b-a=5$ ...... ㉠

$h'(2)=f'(2)+g'(2)$

$=2+12+a=15$

에서 $a=1$

㉠에서 $b=-3$

따라서 $ab=1\times(-3)=-3$

답 ②

09

조건 (가)에서

$A(x)=\sum_{k=1}^{2n}kx^k$

$=x+2x^2+\cdots+(2n-2)x^{2n-2}+(2n-1)x^{2n-1}+2nx^{2n}$

$A'(x)=1^2+2^2x+\cdots+(2n-2)^2x^{2n-3}+(2n-1)^2x^{2n-2}$
$+(2n)^2x^{2n-1}$

$A'(1)=1^2+2^2+\cdots+(2n-2)^2+(2n-1)^2+(2n)^2$

$=\sum_{k=1}^{2n} k^2=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}=650$

에서 $n(2n+1)(4n+1)=1950=6\times13\times25$이므로 $n=6$

즉, $A(x)=x+2x^2+\cdots+10x^{10}+11x^{11}+12x^{12}$

조건 (나)에서 $f(x)=f(-x)$, $g(x)=-g(-x)$이므로

$f(x)=2x^2+4x^4+\cdots+8x^8+10x^{10}+12x^{12}$

$g(x)=x+3x^3+\cdots+7x^7+9x^9+11x^{11}$이고

$f'(x)=2^2x+4^2x^3+\cdots+8^2x^7+10^2x^9+12^2x^{11}$

$g'(x)=1^2+3^2x^2+\cdots+7^2x^6+9^2x^8+11^2x^{10}$

$B'(x)=f'(x)-g'(x)$에서

$B'(1)=f'(1)-g'(1)$

$=\sum_{k=1}^{6}(2k)^2-\sum_{k=1}^{6}(2k-1)^2$

$=\sum_{k=1}^{6}(4k-1)$

$=4\sum_{k=1}^{6}k-\sum_{k=1}^{6}1$

$=4\times\frac{6\times7}{2}-6$

$=78$

답 ④

10

점 (a, b)는 곡선 $y=x^3-10$ 위의 점이므로

$b=a^3-10$ ...... ㉠

$y=x^3-10$에서 $y'=3x^2$

조건에서 $x=a$에서의 접선의 기울기가 12이므로

$3a^2=12$

점 (a, b)는 제4사분면 위의 점이므로

$a=2$

㉠에서 $b=-2$

따라서 $a+b=2+(-2)=0$

답 ①

11

$f(x)=ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=2ax+b$

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선과 직선

$y=-\frac{1}{3}x+\frac{13}{3}$이 수직이므로 $x=1$에서의 접선의 기울기는 3이다.

$f'(1)=3$에서 $2a+b=3$ ...... ㉠

$f'(2)=1$에서 $4a+b=1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=5$

또한 함수 $f(x)=-x^2+5x+c$의 그래프 위의 점 $(1, f(1))$이 직선

$y=-\frac{1}{3}x+\frac{13}{3}$ 위에 있으므로 $f(1)=4$

즉, $-1+5+c=4$, $c=0$

따라서 $a^2+b^2+c^2=26$

답 ①

12

$f(x)=2x^3+ax^2+b$에서

$f'(x)=6x^2+2ax$

두 접선 l_1과 l_2의 기울기가 같으므로

$f'(-2)=f'(1)$

$f'(-2)=24-4a$, $f'(1)=6+2a$이므로

$24-4a=6+2a$

즉, $a=3$

그러므로 $f(x)=2x^3+3x^2+b$이고

$f'(-2)=f'(1)=12$

점 $\mathrm{A}(-2, -4+b)$에서의 접선 l_1의 방정식은

$y-(-4+b)=12(x+2)$

즉, $y=12x+b+20$

함수 $f(x)=2x^3+3x^2+b$의 그래프와 직선 l_1이 점 A가 아닌 점 B에서 만나므로

$2x^3+3x^2+b=12x+b+20$에서

$2x^3+3x^2-12x-20=0$

$(x+2)^2(2x-5)=0$

이므로 점 B의 x좌표는 $\frac{5}{2}$이다.

또한 점 $\mathrm{C}(1, 5+b)$에서의 접선 l_2의 방정식은

$y-(5+b)=12(x-1)$

즉, $y=12x+b-7$

함수 $f(x)=2x^3+3x^2+b$의 그래프와 직선 l_2가 점 C가 아닌 점 D에서 만나므로

$2x^3+3x^2+b=12x+b-7$에서

$2x^3+3x^2-12x+7=0$

$(x-1)^2(2x+7)=0$

이므로 점 D의 x좌표는 $-\frac{7}{2}$이다.

따라서 두 점 B, D의 x좌표의 곱은

$\frac{5}{2}\times\left(-\frac{7}{2}\right)=-\frac{35}{4}$

답 ③

13

$f(x)=2x^3-x^2-ax+1$에서

$f'(x)=6x^2-2x-a$

$f'(-1)=6\times(-1)^2-2\times(-1)-a=7$에서 $a=1$

즉, $f(x)=2x^3-x^2-x+1$, $f'(x)=6x^2-2x-1$

접선 l의 기울기가 3이므로

$6x^2-2x-1=3$에서

$3x^2-x-2=0$

$(x-1)(3x+2)=0$이므로 $x=1$ 또는 $x=-\frac{2}{3}$

$c>0$이므로 $c=1$

$d=f(c)=f(1)=1$

접선 l은 기울기가 3이고 점 $(1, 1)$을 지나므로 접선 l의 방정식은

$y-1=3(x-1)$, 즉 $y=3x-2$

접선 l이 점 $(2,\ b)$를 지나므로

$b=3\times2-2=4$

따라서 $a+b+c+d=1+4+1+1=7$

답 ③

14

$y=x^3$에서 $y'=3x^2$이므로 점 $\mathrm{P}(a,\ a^3)\ (a>0)$에서의 접선 l의 기울기는 $3a^2$이다.

이때 접선 l의 방정식은

$y-a^3=3a^2(x-a)$, 즉 $y=3a^2x-2a^3$

이 접선과 곡선 $y=x^3$의 교점의 x좌표는

$x^3=3a^2x-2a^3$에서 $x^3-3a^2x+2a^3=0$

$(x-a)^2(x+2a)=0$

이때 $x\neq a$이므로 $x=-2a$

점 Q의 좌표는 $(-2a,\ -8a^3)$이므로 점 Q에서의 접선의 기울기는

$3\times(-2a)^2=12a^2$이다.

$12a^2-3a^2=18$에서 $a^2=2$

따라서 접선 l의 기울기는 $3a^2=3\times2=6$

답 ⑤

15

$y=x^3+ax$에서 $y'=3x^2+a$이므로 $\mathrm{A}(p,\ p^3+ap)$라 하면

점 A에서의 접선의 방정식은

$y-(p^3+ap)=(3p^2+a)(x-p)$

즉, $y=(3p^2+a)x-2p^3$ …… ㉠

이때 ㉠은 $y=-x-2$와 일치하므로

$3p^2+a=-1,\ -2p^3=-2$에서 $p=1,\ a=-4$

즉, $\mathrm{A}(1,\ -3)$은 곡선 $y=-x^2+bx+c$ 위의 점이므로

$-3=-1+b+c$에서

$b+c=-2$ …… ㉡

$y=-x^2+bx+c$에서 $y'=-2x+b$이고 점 A에서의 접선의 기울기는 -1이므로

$-2+b=-1$에서 $b=1$

㉡에서 $c=-3$

따라서 두 곡선 $y=x^3-4x,\ y=-x^2+x-3$이 만나는 점의 x좌표는

$x^3-4x=-x^2+x-3$에서

$x^3+x^2-5x+3=0,\ (x-1)^2(x+3)=0$

$x=1$ 또는 $x=-3$

곡선 $y=x^3-4x$에서 $x=-3$일 때 $y=-15$

두 곡선 $y=x^3-4x,\ y=-x^2+x-3$의 점 A가 아닌 교점의 좌표는

$(-3,\ -15)$이다.

따라서 $\alpha\beta=(-3)\times(-15)=45$

답 45

16

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

$x<-3,\ 1<x<5$에서 함수 $f(x)$는 감소하므로 열린구간 $(3,\ 5)$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

답 ⑤

17

$f(1)=k+11,\ g(1)=k^2+2$이고

$f'(x)=3x^2-4x+k,\ g'(x)=2x+k^2$에서

$f'(1)=k-1,\ g'(1)=k^2+2$

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$i(k)=h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

$\quad=(k-1)(k^2+2)+(k+11)(k^2+2)$

$\quad=2k^3+10k^2+4k+20$

함수 $i(k)$가 감소하기 위해서는 $i'(k)\leq0$이어야 한다.

$i'(k)=2(3k^2+10k+2)\leq0$에서

$\dfrac{-5-\sqrt{19}}{3}\leq k\leq\dfrac{-5+\sqrt{19}}{3}$

그런데 $4<\sqrt{19}<5,\ -1<-5+\sqrt{19}<0$이므로

$-\dfrac{1}{3}<\dfrac{-5+\sqrt{19}}{3}<0$

같은 방법으로 $-\dfrac{10}{3}<\dfrac{-5-\sqrt{19}}{3}<-3$이므로 이 구간에 속하는 정수는 $-3,\ -2,\ -1$의 3개이다.

답 ①

18

$f'(x)=x^3-3x^2+3$

$g(x)=x^3-3x^2+3$이라 하면

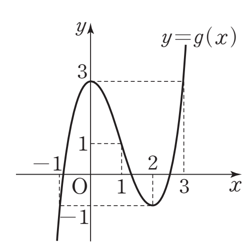
$g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	3	↘	-1	↗

이때 $g(3)=3$이고, $g(1)=1,\ g(-1)=-1$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $g(x)$의 값의 부호가 열린구간 $(-1,\ 0),\ (1,\ 2),\ (2,\ 3)$에서 바뀌므로 구하는 모든 정수 a의 값의 합은

$-1+1+2=2$

답 2

19

$f(x)=2x^3-2x^2-10x$에서

$f'(x)=6x^2-4x-10=2(3x^2-2x-5)$

$\quad\quad=2(x+1)(3x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=\frac{5}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $a+b=\frac{2}{3}$

답 ②

20

$f'(x)=x^2+x-2=(x+2)(x-1)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$x=-2$일 때 극댓값을 가지므로 $a=-2$

답 ①

21

$f'(x)-a=(x+2)(x-5)$이므로

$f'(x)=x^2-3x-10+a$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 갖기 위해서는 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=(-3)^2-4(-10+a)=49-4a>0$

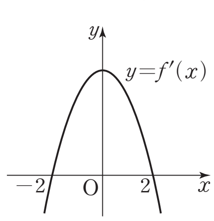
에서 $a<\frac{49}{4}$

따라서 자연수 a의 최댓값은 12이다.

답 12

22

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값을 가지고, $x=2$에서 극댓값을 가지므로 $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(x)=ax^3+(a^2-3)x^2+bx$에서

$f'(x)=3ax^2+2(a^2-3)x+b$

$f'(-2)=12a-4(a^2-3)+b=0$

즉, $4a^2-12a-12-b=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(2)=12a+4(a^2-3)+b=0$

즉, $4a^2+12a-12+b=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면 $8a^2-24=0$, 즉 $a^2=3$

함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 $a<0$이므로

$a=-\sqrt{3}$, $b=12\sqrt{3}$

따라서 $f(x)=-\sqrt{3}x^3+12\sqrt{3}x$이므로

$f(2)=16\sqrt{3}$

답 ④

23

함수 $f(x)$가 $x=-3$에서 극댓값을 가지고 $x=1$에서 극솟값을 가지므로 $a>0$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$가 $x=-3$과 $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$의 두 근이 -3과 1이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{2b}{3a}=-3+1=-2$에서 $b=3a$

$\frac{c}{3a}=-3$에서 $c=-9a$

$g(x)=ax^2+bx+c$이므로

$g'(x)=2ax+b=2ax+3a=2a\left(x+\frac{3}{2}\right)=0$에서

$x=-\frac{3}{2}$이고 $a>0$이므로

$x<-\frac{3}{2}$일 때, $g'(x)<0$, $x>-\frac{3}{2}$일 때, $g'(x)>0$

즉, $g(x)$는 $x=-\frac{3}{2}$에서 극솟값을 갖는다.

한편,

$g(x)=ax^2+bx+c=ax^2+3ax-9a$

$\quad\quad=a(x^2+3x-9)$

이므로 $g\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{45}{4}a=-45$에서 $a=4$

따라서 $g(x)=4(x^2+3x-9)$이므로 $g(1)=-20$

답 ⑤

24

최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$이고, 상수항이 0이므로

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx$ (a, b는 자연수)라 하자.

또한 $f(1)=\frac{1}{3}+a+b=\frac{22}{3}$이므로

$a+b=7$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(x)=x^2+2ax+b$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 가지므로 이차방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$x^2+2ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-b>0$, 즉 $a^2>b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$

이므로 서로 다른 함수 $f(x)$의 개수는 4이다.

답 4

25

$f'(x)=3x^2-9x+6=3(x-1)(x-2)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$

닫힌구간 $[0, 3]$에서 $f(x)$의 최댓값은 $x=3$일 때이므로 $\frac{5}{2}$이고,

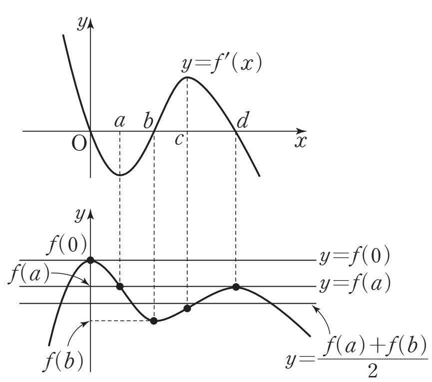
최솟값은 $x=0$일 때이므로 -2이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $\frac{5}{2}+(-2)=\frac{1}{2}$

답 ③

26

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(a)$가 만나는 점의 개수가 3이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



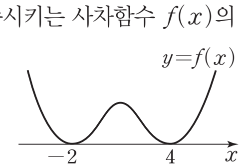
그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(0)$이 만나는 점의 개수는 1이고 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{f(a)+f(b)}{2}$가 만나는 점의 개수는 4이다.

따라서 $p=1$, $q=4$이므로 $p+q=5$

답 ③

27

조건 (가), (나)를 만족시키는 사차함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(x)=(x+2)^2(x-4)^2$이므로

$f'(x)=2(x+2)(x-4)^2+2(x+2)^2(x-4)$

$\quad=4(x+2)(x-1)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로 닫힌구간 $[-2, 4]$에서 최댓값 $f(1)$을 갖는다.

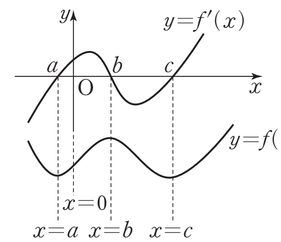
따라서 구하는 최댓값은

$f(1)=3^2\times(-3)^2=81$

답 81

28

함수 $y=f'(x)$의 그래프로부터 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



조건 (가)에 의해 닫힌구간 $[0, b]$에서 최댓값은 $f(b)$, 최솟값은 $f(0)$이므로

$f(b)-f(0)=5$ …… ㉠

조건 (나)에 의해 닫힌구간 $[0, c]$에서 최댓값은 $f(b)$, 최솟값은 $f(0)$, $f(c)$ 중 작은 값이다.

$f(0)\le f(c)$이면 $f(b)-f(0)=7$ (㉠에 모순)

따라서 $f(0)>f(c)$이고, $f(b)-f(c)=7$ …… ㉡

조건 (다)에 의해 닫힌구간 $[a, c]$에서 최댓값은 $f(b)$, 최솟값은 $f(a)$, $f(c)$ 중 작은 값이다.

$f(a)\ge f(c)$이면 $f(b)-f(c)=9$ (㉡에 모순)

따라서 $f(a)<f(c)$이고, $f(b)-f(a)=9$ …… ㉢

㉢$-$㉡을 하면 $f(c)-f(a)=9-7=2$

따라서 $|f(c)-f(a)|=2$

답 2

29

$f'(x)=3ax^2+(3a+1)x+2(1-3a)$

$\quad=(x+2)(3ax+1-3a)=0$

에서 $x=-2$ 또는 $x=\frac{3a-1}{3a}$

$x=-2$에서 극대이므로

$\frac{3a-1}{3a}>-2$에서 $3a-1>-6a$, $9a>1$

$a>\frac{1}{9}$ …… ㉠

$f(-3)=-27a+\frac{9(3a+1)}{2}-6(1-3a)+2a+4$

$\quad=\frac{13a+5}{2}$

$f(-2)=-8a+2(3a+1)-4(1-3a)+2a+4$

$\quad=12a+2$

$f(-2)\ge f(-3)$에서

$12a+2\ge\frac{13a+5}{2}$, $\frac{11}{2}a\ge\frac{1}{2}$

즉, $a\ge\frac{1}{11}$ …… ㉡

$f(1)=a+\frac{3a+1}{2}+2(1-3a)+2a+4$

$\quad=-\frac{3}{2}a+\frac{13}{2}$

$f(-2)\ge f(1)$에서 $12a+2\ge-\frac{3}{2}a+\frac{13}{2}$

즉, $a\ge\frac{1}{3}$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $a \geq \frac{1}{3}$

따라서 $p=3$, $q=1$이므로 $p+q=4$

답 4

30

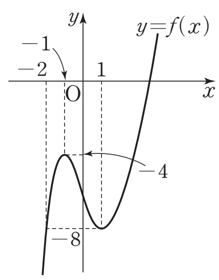
$f(x)=x^3-3x-6$이므로

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-4	↘	-8	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$x^3-3x-6=-8$에서

$x^3-3x+2=0$, $(x+2)(x-1)^2=0$

$x=-2$ 또는 $x=1$

구간 $[a, \infty)$에서 함수 $f(x)=x^3-3x-6$의 최솟값 $g(a)$는 다음과 같다.

$$g(a)=\begin{cases} f(a) & (a \leq -2) \\ -8 & (-2 < a < 1) \\ f(a) & (a \geq 1) \end{cases}$$

따라서 $g(a) \neq f(a)$인 실수 a의 값의 범위는 $-2<a<1$이므로

$p^2+q^2=(-2)^2+1^2=5$

답 5

31

점 P의 좌표는 $(t, f(t))$이고 삼각형 OHP는 직각삼각형이므로

$S(t)=\frac{1}{2} \times |t| \times |3t^3-8t^2-6t+24|$

$\quad =\frac{1}{2}|3t^4-8t^3-6t^2+24t|$

$g(t)=3t^4-8t^3-6t^2+24t$라 하면

$g'(t)=12t^3-24t^2-12t+24$

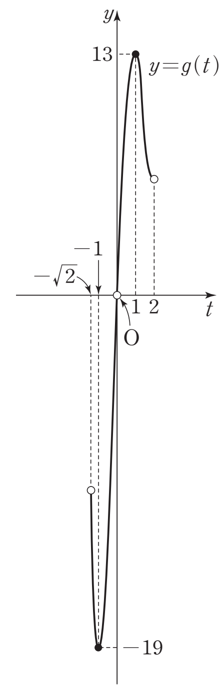
$\quad =12(t^3-2t^2-t+2)$

$\quad =12(t+1)(t-1)(t-2)$

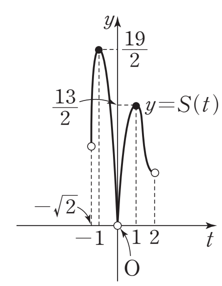
열린구간 $(-\sqrt{2}, 2)$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$(-\sqrt{2})$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	(2)
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	$(-8\sqrt{2})$	↘	-19	↗	13	↘	(8)

$-\sqrt{2}<t<0$, $0<t<2$에서 함수 $g(t)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $S(t)=\frac{1}{2}|3t^4-8t^3-6t^2+24t|$의 그래프는 그림과 같다.



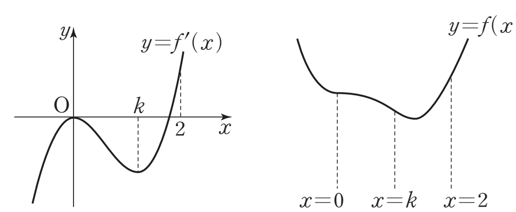
따라서 $-\sqrt{2}<t<0$, $0<t<2$에서 함수 $S(t)$의 최댓값은 $\frac{19}{2}$이므로

$p+q=2+19=21$

답 21

32

조건 (가), (나)에서 $y=f(x)$의 그래프와 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



ㄱ. 그림에서 $f'(3)>0$ (참)

ㄴ. 그림에서 $y=f'(x)$의 그래프는 열린구간 $(0, 2)$에서 x축과 만난다. (참)

ㄷ. $f(0)=0$이면 양수 a에 대하여 $f(x)=x^3(x-a)$로 놓을 수 있다.

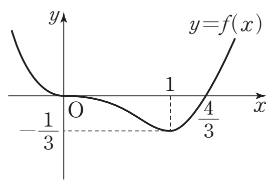
$f(x)=x^4-ax^3$에서 $f'(x)=4x^3-3ax^2$이고

$f'(2)=32-12a=16$에서 $a=\frac{4}{3}$

즉, $f(x)=x^3\left(x-\frac{4}{3}\right)=x^4-\frac{4}{3}x^3$

$f'(x)=4x^3-4x^2=4x^2(x-1)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $y=f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)=-\frac{1}{3}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

33

$f'(x)=x^2-ax=x(x-a)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=a$

$a>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=0$,

$x=a$에서 극소이고 극솟값은 $f(a)=-\frac{1}{6}a^3$이다.

$f(-1)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a$, $f(3)=9-\frac{9}{2}a$이므로

$-1\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a$	↗	0	↘	$-\frac{1}{6}a^3$	↗	$9-\frac{9}{2}a$

$f(a)\le f(-1)$을 만족시키는 양수 a의 값의 범위는

$-\frac{1}{6}a^3\le -\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a$에서 $a^3-3a-2\ge 0$

즉, $(a+1)^2(a-2)\ge 0$이므로 $a\ge 2$ …… ㉠

$0<a<3$이므로 ㉠에서 양수 a의 값의 범위에 따라 함수 $f(x)$의 최솟값은 다음과 같다.

(i) $0<a<2$일 때

㉠과 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타낸 표에서

$f(-1)<f(a)<f(3)$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은

$g(a)=f(-1)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a$

(ii) $2\le a<3$일 때

㉠과 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타낸 표에서

$f(a)\le f(-1)$, $f(a)<f(3)$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은

$g(a)=f(a)=-\frac{1}{6}a^3$

(i), (ii)에서 $g(a)=\begin{cases} -\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a & (0<a<2) \\ -\frac{1}{6}a^3 & (2\le a<3) \end{cases}$

$$h(a)=|g(a)|=\begin{cases} \frac{1}{2}a+\frac{1}{3} & (0<a<2) \\ \frac{1}{6}a^3 & (2\le a<3) \end{cases}$$

따라서 $h\left(\frac{4}{3}\right)+h(2)+h(\sqrt[3]{9})=1+\frac{4}{3}+\frac{3}{2}=\frac{23}{6}$

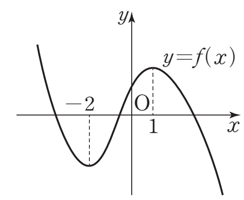
답 ②

34

도함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

또한 $f(-2)f(1)<0$에서 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $y=f(x-5)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로 방정식 $f(x-5)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수와 같다.

즉, 방정식 $f(x-5)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

답 ④

35

$f(x)=x^3-6x^2+9x+1$에서

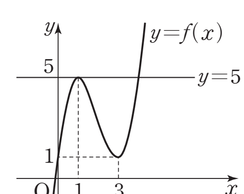
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(1)=5$, $f(3)=1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수이므로 1이다. 즉, $a=1$

방정식 $f(x)-5=0$, 즉 $f(x)=5$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=5$가 만나는 점의 개수이므로 2이다.

즉, $b=2$

따라서 $a+b=1+2=3$

답 ②

36

$\frac{2}{3}x^3-2x^2+x=x^2-3x+a$에서 $\frac{2}{3}x^3-3x^2+4x-a=0$

$f(x)=\frac{2}{3}x^3-3x^2+4x-a$라 하면

$f'(x)=2x^2-6x+4=2(x-1)(x-2)$

두 곡선 $y=\frac{2}{3}x^3-2x^2+x$와 $y=x^2-3x+a$가 만나는 점의 개수가 1

이 되려면 방정식 $f(x)=0$의 해가 1개이어야 하므로

(극댓값)$\times$(극솟값)>0이어야 한다.

즉, $f(1)f(2)=\left(\frac{5}{3}-a\right)\left(\frac{4}{3}-a\right)>0$에서 $\left(a-\frac{5}{3}\right)\left(a-\frac{4}{3}\right)>0$

$a<\frac{4}{3}$ 또는 $a>\frac{5}{3}$

따라서 $p=\frac{4}{3}$, $q=\frac{5}{3}$이므로 $pq=\frac{4}{3}\times\frac{5}{3}=\frac{20}{9}$

답 ①

37

$g(x)=f(x)+2a$이므로 방정식 $g(x)=0$의 근은 방정식

$f(x)=-2a$의 근과 같다.

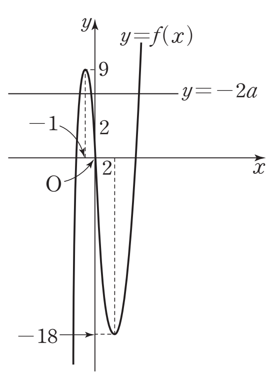
$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(-1)=9$, $f(2)=-18$, $f(0)=2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



이때 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 개의 음의 실근과 한 개의 양의 실근을 가지려면 그림과 같이 $2<-2a<9$이어야 한다.

즉, $-\frac{9}{2}<a<-1$

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

$(-4)+(-3)+(-2)=-9$

답 ④

38

$f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-18x-k^2+\frac{9}{2}k$라 하면

$f'(x)=3x^2+3x-18=3(x+3)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=2$

극댓값 $f(-3)=\frac{81}{2}+\frac{9}{2}k-k^2$

극솟값 $f(2)=-22+\frac{9}{2}k-k^2$

주어진 삼차방정식이 중근과 다른 한 실근을 가지려면

(극댓값)$\times$(극솟값)$=0$이어야 하므로

$\left(\frac{81}{2}+\frac{9}{2}k-k^2\right)\left(-22+\frac{9}{2}k-k^2\right)=0$

(i) $\frac{81}{2}+\frac{9}{2}k-k^2=0$일 때

$\frac{81}{2}+\frac{9}{2}k-k^2=0$에서 $2k^2-9k-81=0$ …… ㉠

㉠의 판별식을 D라 하면 $D>0$이므로 모든 실수 k의 값의 곱은 $-\frac{81}{2}$이다. 한편, ㉠에서 $-k^2+\frac{9}{2}k=-\frac{81}{2}$

$f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-18x-\frac{81}{2}=(x+3)^2\left(x-\frac{9}{2}\right)$

이므로 $a=-3$, $b=\frac{9}{2}$

(ii) $-22+\frac{9}{2}k-k^2=0$일 때

$-22+\frac{9}{2}k-k^2=0$에서 $2k^2-9k+44=0$

그런데 $2k^2-9k+44=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이므로

실수 k가 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=-3$, $b=\frac{9}{2}$, $p=-\frac{81}{2}$이므로

$\frac{4}{9}abp=\frac{4}{9}\times(-3)\times\frac{9}{2}\times\left(-\frac{81}{2}\right)=243$

답 243

39

$f'(x)=x^2+2\sqrt{a}x+\frac{a}{4}$

$x^2+2\sqrt{a}x+\frac{a}{4}=0$의 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하고 판별식을 D라 하면

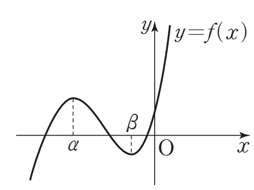
$D=4a-a=3a>0$이고 $\alpha+\beta=-2\sqrt{a}<0$, $\alpha\beta=\frac{a}{4}>0$이므로

$\alpha<0$, $\beta<0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$\alpha<0$, $\beta<0$, $f(0)>0$이고 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱이 음수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수이므로 3이다. 즉, $p=3$

서로 다른 실근 중 음수의 개수는 3이므로 $q=3$

따라서 $p^2+q^2=3^2+3^2=18$

답 18

40

$f(x)=x^4-4x^3+16$이라 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이면서 최소이다.
$f(0)=16$, $f(3)=-11$이므로 곡선 $y=f(x)$는 $0<x<3$일 때와 $x>3$일 때 x축과 만난다. 즉, 방정식 $x^4-4x^3+16=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
그런데 $f(2)=0$이고 $f(3)=-11<0$, $f(4)=16>0$
이므로 한 근은 2이고 다른 한 근은 3과 4 사이에 있다.
그러므로 방정식 $x^4-4x^3+16=0$의 서로 다른 모든 실근의 합은 5와 6 사이의 값이다.
따라서 구하는 자연수 n의 최댓값은 5이다.

답 5

41

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(1, 2)$를 지나므로
$f(1)=1+a+b-4=2$에서
$a+b=5$ $\cdots\cdots$ ㉠
조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 극값을 가지므로
$f'(x)=3x^2+2ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.
방정식 $3x^2+2ax+b=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-3b>0$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠에서 $b=5-a$이므로 ㉡에 대입하면
$a^2+3a-15>0$
$a<\frac{-3-\sqrt{69}}{2}$ 또는 $a>\frac{-3+\sqrt{69}}{2}$
조건을 만족시키는 자연수 a의 최솟값은 3이므로 ㉠에서
$b=2$
$f(x)=x^3+3x^2+2x-4$이므로
$f'(x)=3x^2+6x+2=0$에서
$x=\frac{-3-\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x=\frac{-3+\sqrt{3}}{3}$
그러므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{-3-\sqrt{3}}{3}$에서 극댓값을 갖는다.

$$\begin{aligned}f(x)&=x^3+3x^2+2x-4\\&=x(x^2+3x+2)-4\\&=x(x+1)(x+2)-4\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}f\left(\frac{-3-\sqrt{3}}{3}\right)&=\frac{-3-\sqrt{3}}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\times\frac{3-\sqrt{3}}{3}-4\\&=-4+\frac{2\sqrt{3}}{9}<-3\end{aligned}$$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-3$이 만나는 점의 개수는 1이다.

답 ②

42

최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$이고 조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+px^2+qx$ (p, q는 상수)라 하자.
조건 (나)에 의하여 $f'(x)=x^2+2px+q=0$을 만족시키는 서로 다른 두 실근을 α, $\alpha+2$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\alpha+2=-2p$, $\alpha(\alpha+2)=q$
즉, $\alpha+1=-p$ $\cdots\cdots$ ㉠
$\alpha^2+2\alpha=q$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠에서 $\alpha=-p-1$이므로 이 식을 ㉡에 대입하면
$(-p-1)^2+2(-p-1)=q$
즉, $p^2-1=q$ $\cdots\cdots$ ㉢

$$\begin{aligned}f(1)&=\frac{1}{3}+p+q=\frac{1}{3}+p+(p^2-1)\\&=p^2+p-\frac{2}{3}\\&=\left(p+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{11}{12}\end{aligned}$$

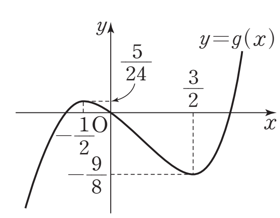
$f(1)$의 값은 $p=-\frac{1}{2}$일 때 최소이므로 ㉢에서 $q=-\frac{3}{4}$
$g(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x$

$$\begin{aligned}g'(x)&=x^2-x-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}(4x^2-4x-3)\\&=\frac{1}{4}(2x+1)(2x-3)=0\end{aligned}$$

에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	$\frac{5}{24}$	$\searrow$	$-\frac{9}{8}$	$\nearrow$

그러므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $g(x)=a$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 점의 개수이므로
$h(1)+h\left(\frac{1}{3}\right)+h(-1)=1+1+3=5$

답 ①

43

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+a$라 하면
$f'(x)=x^2-4x=x(x-4)$
$f'(x)$는 닫힌구간 $[1, 3]$에서 항상 $f'(x)<0$이므로 이 구간에서 감소하는 함수이다.
닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(3)$이므로
$f(3)=9-18+a\geq 0$에서 $a\geq 9$
따라서 실수 a의 최솟값은 9이다.

답 ①

44

$f(x)=2x^3-9x^2+28$이라 하면

$f'(x)=6x(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$x>0$일 때 함수 $f(x)$는 $x=\boxed{3}$에서 극소이면서 최소이다.

이때 함수 $f(x)$의 최솟값은 $\boxed{1}$이므로 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여

$f(x)=2x^3-9x^2+28\ge1$

즉, $2x^3-9x^2+28>0$이므로 $2x^3+28>9x^2$

따라서 (가), (나)에 알맞은 수는 각각 3, 1이므로

$a+b=3+1=4$

답 ④

45

$x^3+4x^2\le ax+18$에서 $x^3+4x^2-18\le ax$

$f(x)=x^3+4x^2-18$, $g(x)=ax$라 하면

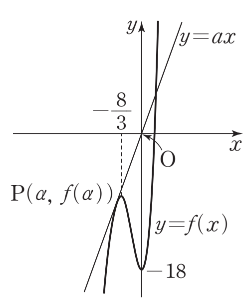
$f'(x)=3x^2+8x=x(3x+8)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=-\dfrac{8}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\dfrac{8}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

직선 $g(x)=ax$는 원점을 지나는 직선이므로 $x\le0$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 접하는 경우는 그림과 같아야 한다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 접점을

P$(\alpha,\ \alpha^3+4\alpha^2-18)$이라 하면 직선 $y=g(x)$의 기울기는 $3\alpha^2+8\alpha$이므로 직선 $y=g(x)$의 방정식은

$y-(\alpha^3+4\alpha^2-18)=(3\alpha^2+8\alpha)(x-\alpha)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-(\alpha^3+4\alpha^2-18)=-\alpha(3\alpha^2+8\alpha)$

$\alpha^3+2\alpha^2+9=0$, $(\alpha+3)(\alpha^2-\alpha+3)=0$

$\alpha^2-\alpha+3>0$이므로 $\alpha=-3$

이때 직선 $g(x)$의 기울기는

$3\alpha^2+8\alpha=3\times(-3)^2+8\times(-3)=3$

따라서 $x\le0$일 때, $f(x)\le g(x)$이려면 $a\le3$이므로 양수 a의 최댓값은 3이다.

답 3

46

$x=t^2-4t+2$에서 속도 v는 $v=\dfrac{dx}{dt}=2t-4$이므로

가속도는 $\dfrac{dv}{dt}=2$

따라서 $t=10$에서의 점 P의 가속도는 2이다.

답 ②

47

$x=t^3+at^2+bt$에서 속도 v는

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2+2at+b$, $\dfrac{dv}{dt}=6t+2a$

$t=1$에서의 점 P의 속도가 15이므로

$3+2a+b=15$ $\cdots\cdots$ ㉠

$t=2$에서의 점 P의 가속도가 16이므로

$12+2a=16$에서 $a=2$

㉠에서 $b=8$

따라서 $ab=16$

답 ③

48

조건 (가)에서 $t=2$에서의 점 P의 위치가 $\dfrac{20}{3}$이므로

$\dfrac{8}{3}+4a+2b=\dfrac{20}{3}$, $2a+b=2$

$b=2-2a$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x=\dfrac{1}{3}t^3+at^2+bt$에서 속도 v는

$v=\dfrac{dx}{dt}=t^2+2at+b$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각 t_1, t_2는 $t^2+2at+b=0$의 두 양의 실근이다.

$t_2-t_1=2$이므로 $t_2=t_1+2$

$t^2+2at+b=0$의 서로 다른 두 양의 실근을 t_1, t_1+2라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$t_1+t_1+2=-2a$, $t_1(t_1+2)=b$

즉, $t_1+1=-a$ $\cdots\cdots$ ㉡

${t_1}^2+2t_1=b$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 $t_1=-a-1$이므로 이것을 ㉢에 대입하면

$(-a-1)^2+2(-a-1)=b$

즉, $a^2-1=b$ $\cdots\cdots$ ㉣

한편, ㉠을 ㉣에 대입하면

$a^2+2a-3=0$, $(a-1)(a+3)=0$

㉡에서 $t_1+1>0$이므로 $-a>0$

즉, $a<0$이므로 $a=-3$

$a=-3$일 때, $b=8$이므로 $v=t^2-6t+8$

따라서 $t=8$에서의 점 P의 속도는 24이다.

답 ⑤

06 다항함수의 적분법

정답 본문 76~85쪽

01 10	02 ②	03 ④	04 6	05 ③
06 ④	07 ②	08 ⑤	09 46	10 ③
11 ③	12 13	13 ②	14 ②	15 24
16 ④	17 ⑤	18 ①	19 ③	20 ③
21 ②	22 13	23 ④	24 ⑤	25 ③
26 ①	27 16	28 84	29 285	30 ④
31 ④	32 5	33 ④		

01

$\int f(x)dx=\int(3x^2-4x+1)dx$

$=x^3-2x^2+x+C$ (C는 적분상수)

$f'(x)=6x-4$이므로

$g(x)=(6x-4)-(x^3-2x^2+x+C)$

이때 $g(1)=2-C=6$에서 $C=-4$

따라서 $g(x)=-x^3+2x^2+5x$이므로

$g(2)=-8+8+10=10$

답 10

02

$f'(x)=2x+3$이므로

$f(x)=\int(2x+3)dx$

$=x^2+3x+C$ (C는 적분상수)

그런데 $f(1)=3$이므로

$4+C=3$에서 $C=-1$

즉, $f(x)=x^2+3x-1$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$가 만나는 점의 x좌표는 방정식 $f(x)=2x$, 즉 $x^2+3x-1=2x$의 근이다.

이차방정식 $x^2+x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1-4\times1\times(-1)=5>0$

이므로 이차방정식 $x^2+x-1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2x$가 만나는 모든 점의 x좌표의 합은 -1이다.

답 ②

03

조건 (가)에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $2f(0)+1=0$에서 $f(0)=-\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to0}\frac{2f(x)+1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\left\{f(x)+\frac{1}{2}\right\}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\{f(x)-f(0)\}}{x}=2f'(0)=6$$

에서 $f'(0)=3$

조건 (나)에서 $f'(0)=a$이므로 $a=3$

$f(x)=\int(x^2+x+3)dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x+C$ (C는 적분상수)

이때 $f(0)=-\frac{1}{2}$이므로 $C=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{2}$이므로

$f(a)=f(3)=9+\frac{9}{2}+9-\frac{1}{2}=22$

답 ④

04

$\int_0^2 x^2(x+1)dx+\int_2^0 x(x+1)dx+\int_0^2(x+1)dx$

$=\int_0^2 x^2(x+1)dx-\int_0^2 x(x+1)dx+\int_0^2(x+1)dx$

$=\int_0^2\{x^2(x+1)-x(x+1)+(x+1)\}dx$

$=\int_0^2(x+1)(x^2-x+1)dx$

$=\int_0^2(x^3+1)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+x\right]_0^2$

$=4+2$

$=6$

답 6

05

$-1\le x\le1$에서 $f(x)\le0$, $1\le x\le2$에서 $f(x)\ge0$이므로

$\int_{-1}^2|f(x)|dx$

$=\int_{-1}^0|f(x)|dx+\int_0^1|f(x)|dx+\int_1^2|f(x)|dx$

$=\int_{-1}^0(-x^2-x)dx+\int_0^1(-x^2+x)dx+\int_1^2(x^2-x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^2$

$=\left\{0-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right\}+\left\{\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-0\right\}+\left\{\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\right\}$

$=\frac{7}{6}$

답 ③

06

$\int_{-3}^{0} f'(x)dx=-63$에서 $f(0)-f(-3)=-63$

$f(2-x)=f(2+x)$에

$x=2$를 대입하면 $f(0)=f(4)$

$x=5$를 대입하면 $f(-3)=f(7)$이므로

$$\begin{aligned}\int_{4}^{7} f'(x)dx&=f(7)-f(4)=f(-3)-f(0)\\&=-\{f(0)-f(-3)\}\\&=-(-63)=63\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{7} f'(x)dx&=\int_{-1}^{4} f'(x)dx+\int_{4}^{7} f'(x)dx\\&=-15+63=48\end{aligned}$$

답 ④

07

$(x^2+x+1)^2=x^4+x^2+1+2(x^3+x+x^2)=x^4+2x^3+3x^2+2x+1$

이므로

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1} (x^2+x+1)^2dx\\&=\int_{-1}^{1} (x^4+2x^3+3x^2+2x+1)dx\\&=\int_{-1}^{1} (x^4+3x^2+1)dx+\int_{-1}^{1} (2x^3+2x)dx\\&=2\int_{0}^{1} (x^4+3x^2+1)dx+0\\&=2\left[\frac{1}{5}x^5+x^3+x\right]_0^1\\&=2\times\left(\frac{1}{5}+1+1\right)=\frac{22}{5}\end{aligned}$$

답 ②

08

$f(x)=\int (2x-9)dx=x^2-9x+C$ (C는 적분상수)이므로

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{3} f(x)dx&=\int_{-3}^{3} (x^2-9x+C)dx\\&=\int_{-3}^{3} (x^2+C)dx-9\int_{-3}^{3} xdx\\&=2\int_{0}^{3} (x^2+C)dx-0\\&=2\left[\frac{1}{3}x^3+Cx\right]_0^3\\&=2(9+3C)\\&=18+6C\end{aligned}$$

$18+6C=6$에서 $C=-2$

따라서 $f(x)=x^2-9x-2$이므로

$f(-1)=8$

답 ⑤

09

삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키므로 $f(x)=ax^3+bx$ ($a\neq0$, a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=3ax^2+b$이므로

$g(x)=f(x)-f'(x)=ax^3-3ax^2+bx-b$

$xg(x)=ax^4-3ax^3+bx^2-bx$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} g(x)dx&=\int_{-1}^{1} (ax^3-3ax^2+bx-b)dx\\&=\int_{-1}^{1} (ax^3+bx)dx-\int_{-1}^{1} (3ax^2+b)dx\\&=0-2\int_{0}^{1} (3ax^2+b)dx\\&=-2\left[ax^3+bx\right]_0^1\\&=-2(a+b)=-16\end{aligned}$$

$a+b=8$ ⋯⋯ ㉠

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} xg(x)dx&=\int_{-1}^{1} (ax^4-3ax^3+bx^2-bx)dx\\&=\int_{-1}^{1} (ax^4+bx^2)dx-\int_{-1}^{1} (3ax^3+bx)dx\\&=2\int_{0}^{1} (ax^4+bx^2)dx-0\\&=2\left[\frac{a}{5}x^5+\frac{b}{3}x^3\right]_0^1\\&=2\left(\frac{a}{5}+\frac{b}{3}\right)=4\end{aligned}$$

$3a+5b=30$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5$, $b=3$

따라서 $f(x)=5x^3+3x$이므로

$f(2)=5\times8+3\times2=46$

답 46

10

$\int_{a}^{x} f(t)dt=x^2-4x$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=a$를 대입하면

$\int_{a}^{a} f(t)dt=a^2-4a=0$

$a(a-4)=0$에서 a는 양수이므로 $a=4$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)dt=\frac{d}{dx}(x^2-4x)$

$f(x)=2x-4$

따라서 $f(a)=f(4)=2\times4-4=4$

답 ③

11

$(x+1)f(x)=x^3-3x+\int_{1}^{x} f(t)dt$ ⋯⋯ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$2f(1)=1-3+0$에서 $f(1)=-1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+(x+1)f'(x)=3x^2-3+f(x)$

$(x+1)f'(x)=3(x^2-1)$

이때 $f(x)$는 다항함수이므로

$f'(x)=3(x-1)$

$$f(x)=\int f'(x)dx$$

$$=\int (3x-3)dx$$

$$=\frac{3}{2}x^2-3x+C \ (C\text{는 적분상수}) \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$x=1$을 ㉡에 대입하면

$f(1)=\frac{3}{2}-3+C=-1$에서 $C=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-3x+\frac{1}{2}$이므로

$f(3)=\frac{27}{2}-9+\frac{1}{2}=5$

답 ③

12

$$\frac{d}{dx}\int_1^x (x^2-t^2)f(t)dt=\frac{d}{dx}\left\{\int_1^x x^2f(t)dt-\int_1^x t^2f(t)dt\right\}$$

$$=\frac{d}{dx}\left\{x^2\int_1^x f(t)dt-\int_1^x t^2f(t)dt\right\}$$

$$=2x\int_1^x f(t)dt+x^2f(x)-x^2f(x)$$

$$=2x\int_1^x f(t)dt$$

즉, $4x^3-6x^2+2x=2x\int_1^x f(t)dt$에서

$2x(2x^2-3x+1)=2x\int_1^x f(t)dt$

이때 $f(x)$는 다항함수이므로

$\int_1^x f(t)dt=2x^2-3x+1$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=4x-3$

따라서 $f(4)=4\times4-3=13$

답 13

13

$F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\Big[F(t)\Big]_1^x$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)$$

$f(x)=|x^2-2x-3|$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt=\frac{1}{2}\times|-4|=2$

답 ②

14

$\int_0^2 f(t)dt=a$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=3x^2+2x+a$이므로

$$a=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 (3t^2+2t+a)dt$$

$$=\Big[t^3+t^2+at\Big]_0^2=12+2a$$

즉, $a=-12$이므로 $f(x)=3x^2+2x-12$

$F'(t)=f(t)$라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_2^{x+2}f(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_2^{x+2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{F(x+2)-F(2)}{x}$$

$$=F'(2)$$

$$=f(2)=4$$

답 ②

15

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_3^{x+3}f'(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\Big[f(t)\Big]_3^{x+3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x+3)-f(3)}{x}=f'(3)$$

$f(x)=\int_{-3}^x g(t)dt$에서 $f'(x)=g(x)$이므로

$f'(3)=g(3)$

$$g(3)=\int_{-3}^3 (t^2-10t+1)dt$$

$$=2\int_0^3 (t^2+1)dt-10\int_{-3}^3 t\,dt$$

$$=2\Big[\frac{1}{3}t^3+t\Big]_0^3-0$$

$$=2(9+3)$$

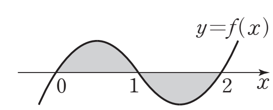
$$=24$$

따라서 $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_3^{x+3}f'(t)dt=24$

답 24

16

함수 $f(x)=x(x-1)(x-2)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는 $\int_0^1 f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx$이다.

답 ④

17

$-x^2+k=x+4$에서

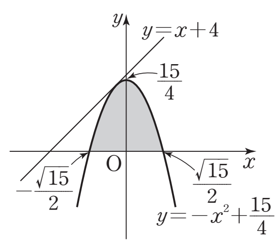
$x^2+x+4-k=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

㉠의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times1\times(4-k)=0$에서 $k=\dfrac{15}{4}$

$-x^2+\dfrac{15}{4}=0$에서 $x^2=\dfrac{15}{4}$

$x=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ 또는 $x=-\dfrac{\sqrt{15}}{2}$



따라서 곡선 $y=-x^2+\dfrac{15}{4}$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-\frac{\sqrt{15}}{2}}^{\frac{\sqrt{15}}{2}}\left(-x^2+\frac{15}{4}\right)dx=2\int_0^{\frac{\sqrt{15}}{2}}\left(-x^2+\frac{15}{4}\right)dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{15}{4}x\right]_0^{\frac{\sqrt{15}}{2}}$$

$$=2\left(-\frac{5\sqrt{15}}{8}+\frac{15\sqrt{15}}{8}\right)$$

$$=\frac{5\sqrt{15}}{2}$$

답 ⑤

18

$f(x)=|x^3-3t^2x|$에서

$g(x)=x^3-3t^2x$라 하면 $f(x)=|g(x)|$

$g'(x)=3x^2-3t^2=3(x+t)(x-t)=0$에서

$x=t$ 또는 $x=-t$

x	$\cdots$	$-t$	$\cdots$	t	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	$2t^3$	↘	$-2t^3$	↗

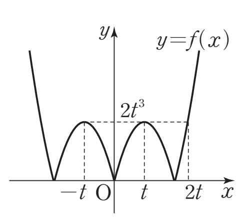
$g(x)=x^3-3t^2x=2t^3$에서

$x^3-3t^2x-2t^3=0$

$(x+t)^2(x-2t)=0$이므로

$x=-t$ 또는 $x=2t$

함수 $y=f(x)=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



$0\le x\le1$에서 함수 $f(x)=|g(x)|$의 최댓값 $M(t)$는 다음과 같다.

(ⅰ) $0\le 2t<1$, 즉 $0\le t<\dfrac{1}{2}$일 때

$M(t)=f(1)=|g(1)|=g(1)=1-3t^2$

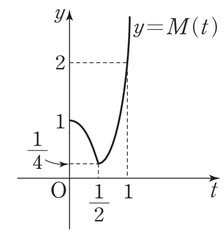
(ⅱ) $1\le 2t\le 2$, 즉 $\dfrac{1}{2}\le t\le 1$일 때

$M(t)=f(t)=|g(t)|=-g(t)=2t^3$

(ⅲ) $2t>2$, 즉 $t>1$일 때

$M(t)=f(1)=|g(1)|=-g(1)=3t^2-1$

그러므로 함수 $y=M(t)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(1-3t^2)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 2t^3dt=\Big[t-t^3\Big]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{2}t^4\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$=\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)-0\right\}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{32}\right)$$

$$=\frac{27}{32}$$

답 ①

19

$\displaystyle\int_2^{10}f(x)dx+\int_2^{10}\{8-f(x)\}dx=8\times8=64$이므로

$\displaystyle\int_2^{10}f(x)dx+26=64$에서

$\displaystyle\int_2^{10}f(x)dx=38$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=6$에 대하여 대칭이므로

$\displaystyle\int_2^6 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_2^{10}f(x)dx=\frac{1}{2}\times38=19$

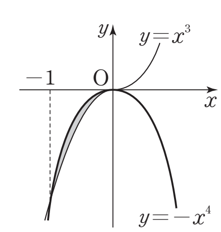
답 ③

20

$x^3=-x^4$에서

$x^4+x^3=0$, $x^3(x+1)=0$

$x=-1$ 또는 $x=0$



$-1\le x\le0$에서 $-x^4\ge x^3$이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^0|-x^4-x^3|dx=-\int_{-1}^0(x^4+x^3)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^0$$

$$=-\left\{0-\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{20}$$

답 ③

21

곡선 $y=-x^2+3x+2$와 직선 $y=2x$가 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하면

$-x^2+3x+2=2x$에서

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$

즉, A$(2, 4)$

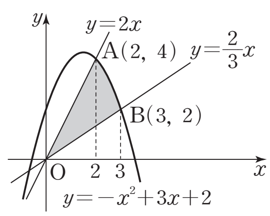
곡선 $y=-x^2+3x+2$와 직선 $y=\frac{2}{3}x$가 제1사분면에서 만나는 점을 B라 하면

$-x^2+3x+2=\frac{2}{3}x$에서

$3x^2-7x-6=0$, $(3x+2)(x-3)=0$

$x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=3$

즉, B$(3, 2)$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2\left(2x-\frac{2}{3}x\right)dx+\int_2^3\left(-x^2+3x+2-\frac{2}{3}x\right)dx$$

$$=\int_0^2\frac{4}{3}x\,dx+\int_2^3\left(-x^2+\frac{7}{3}x+2\right)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^2\right]_0^2+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{6}x^2+2x\right]_2^3$$

$$=\frac{8}{3}+\left\{\left(-9+\frac{21}{2}+6\right)-\left(-\frac{8}{3}+\frac{14}{3}+4\right)\right\}=\frac{25}{6}$$

답 ②

22

사각형 OQPR가 정사각형이 되는 경우는 곡선 $y=\frac{1}{4}x(1-x)^2$ 위를 움직이는 점 P가 직선 $y=x$ 위에 있을 때이다.

$\frac{1}{4}x(1-x)^2=x$에서

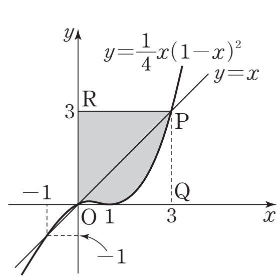
$x(x+1)(x-3)=0$

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

점 P의 x좌표는 양수이므로 $x=3$

사각형 OQPR는 $x=3$일 때 정사각형이므로 $a=b=3$

그러므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는 그림에서 색칠한 부분의 넓이이다.



따라서

$$S=\int_0^3\{3-f(x)\}dx$$

$$=\int_0^3\left\{3-\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x\right)\right\}dx$$

$$=\int_0^3\left(-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x+3\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{8}x^2+3x\right]_0^3$$

$$=\frac{117}{16}$$

이므로 $\frac{16S}{ab}=\frac{16\times\frac{117}{16}}{3\times3}=13$

답 13

23

$-x^2+1=-x+1$에서

$x^2-x=0$, $x(x-1)=0$

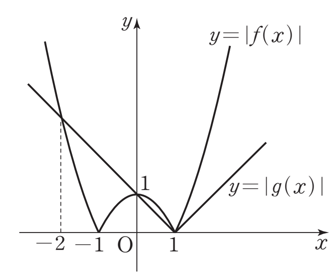
$x=0$ 또는 $x=1$

$x^2-1=-x+1$에서

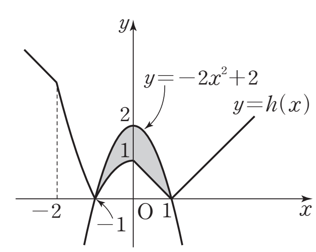
$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$

$x=-2$ 또는 $x=1$

두 함수 $f(x)=-x^2+1$, $g(x)=x-1$에 대하여 두 함수 $y=|f(x)|$, $y=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $h(x)$의 그래프와 곡선 $y=-2x^2+2$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 구하는 부분의 넓이는

$$\int_{-1}^1\{(-2x^2+2)-h(x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^0\{(-2x^2+2)-(-x^2+1)\}dx$$

$$+\int_0^1\{(-2x^2+2)-(1-x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^0(-x^2+1)dx+\int_0^1(-2x^2+x+1)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^0+\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1=\frac{3}{2}$$

답 ④

24

$y=\frac{1}{2}x^2$에서 $y'=x$이므로 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$에서의 접선 l의 방정식은

$y-\frac{1}{2}t^2=t(x-t)$

$y=tx-\frac{1}{2}t^2$ …… ㉠

접선 l은 곡선 $y=-(x-a)^2$과 접하므로

$tx-\frac{1}{2}t^2=-(x-a)^2$에서

$x^2+(t-2a)x+a^2-\frac{1}{2}t^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(t-2a)^2-4\left(a^2-\frac{1}{2}t^2\right)=0$

$t(3t-4a)=0$이므로

$t=0$ 또는 $t=\frac{4}{3}a$

그런데 $t>0$이므로

$t=\frac{4}{3}a$

㉠에서 접선 l의 방정식은

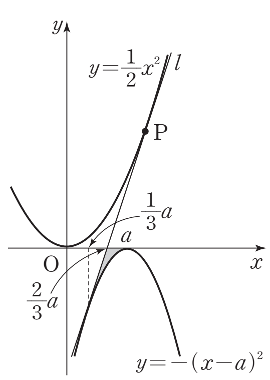
$y=\frac{4}{3}ax-\frac{8}{9}a^2$ …… ㉡

$y=-(x-a)^2=-x^2+2ax-a^2$에서

$y'=-2x+2a$이므로 접선 l이 곡선 $y=-(x-a)^2$과 접하는 점의 x좌표는 $-2x+2a=\frac{4}{3}a$에서 $x=\frac{1}{3}a$

한편, ㉡에서 접선 l이 x축과 만나는 점의 x좌표는

$\frac{4}{3}ax-\frac{8}{9}a^2=0$에서 $x=\frac{2}{3}a$



$x=\frac{1}{3}a$일 때, $y=-\left(\frac{1}{3}a-a\right)^2=-\frac{4}{9}a^2$이므로

곡선 $y=-(x-a)^2$과 접선 l 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$-\int_{\frac{1}{3}a}^{a}(-x^2+2ax-a^2)dx-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}a\times\frac{4}{9}a^2$

$=-\left[-\frac{1}{3}x^3+ax^2-a^2x\right]_{\frac{1}{3}a}^{a}-\frac{2}{27}a^3$

$=-\left\{\left(-\frac{1}{3}a^3+a^3-a^3\right)-\left(-\frac{1}{81}a^3+\frac{1}{9}a^3-\frac{1}{3}a^3\right)\right\}-\frac{2}{27}a^3$

$=-\left(-\frac{1}{3}a^3+\frac{19}{81}a^3\right)-\frac{2}{27}a^3$

$=\frac{8}{81}a^3-\frac{6}{81}a^3$

$=\frac{2}{81}a^3=6$

에서 $a^3=243$

따라서 $a=3\times\sqrt[3]{9}$

답 ⑤

25

$F(2)-F(0)=4$ …… ㉠

$F(5)-F(0)=-8$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면 $F(5)-F(2)=-12$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^5|f(x)|dx=\int_0^2 f(x)dx-\int_2^5 f(x)dx$

$=\Big[F(x)\Big]_0^2-\Big[F(x)\Big]_2^5$

$=F(2)-F(0)-\{F(5)-F(2)\}$

$=4-(-12)=16$

답 ③

26

$1-x^4=0$에서 $x^4-1=0$

$(x+1)(x-1)(x^2+1)=0$

$x=-1$ 또는 $x=1$

곡선 $y=1-x^4$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$S=\int_{-1}^{1}(1-x^4)dx=2\int_0^1(1-x^4)dx$

$=2\left[x-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{8}{5}$

$a\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=2a\int_0^1(1-x^2)dx$

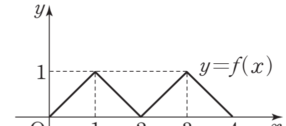
$=2a\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{4}{3}a$

따라서 $\frac{4}{3}a=2\times\frac{8}{5}$에서 $a=\frac{12}{5}$

답 ①

27

모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족시키므로 $0\le x\le 4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



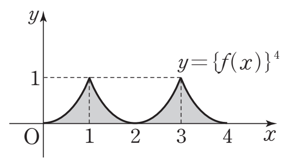
또한 $0\le f(x)\le 1$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프는

점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(2,\ 0)$, $(3,\ 1)$, $(4,\ 0)$을 지나므로

$0\le\{f(x)\}^4\le 1$이고 함수 $y=\{f(x)\}^4$의 그래프도

점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(2,\ 0)$, $(3,\ 1)$, $(4,\ 0)$을 지난다.

그러므로 함수 $y=\{f(x)\}^4$의 그래프는 그림과 같다.

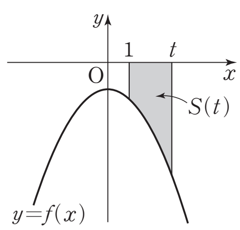


$S=\int_0^4 \{f(x)\}^4 dx=4\int_0^1 x^4 dx=4\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\frac{4}{5}$

이므로 $20S=20\times\frac{4}{5}=16$

답 16

28



조건에서 $f(x)<0$이므로

$S(t)=\int_1^t |f(x)|dx=-\int_1^t f(x)dx=3t^3+2t+a$

에서 $\int_1^t f(x)dx=-3t^3-2t-a$ …… ㉠

㉠에서 $\lim_{t\to1}\int_1^t f(x)dx=\lim_{t\to1}(-3t^3-2t-a)=0$이므로

$-3-2-a=0$, $a=-5$

$S(t)=3t^3+2t-5$이므로 $S(3)=82$

한편, ㉠에서 $\int_1^t f(x)dx=-3t^3-2t+5$이므로

양변을 t에 대하여 미분하면

$f(t)=-9t^2-2$

$|f(3)|=83$

이때 직사각형 ADCB의 넓이는 $2\times83=166$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$166-82=84$

답 84

29

$f'(x)=3x^2-2x+1$이고 모든 실수 x에 대하여 $3x^2-2x+1>0$이므로 $f(x)$는 증가하는 함수이다.

한편, 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이고 $f(x)$가 증가하는 함수이므로 함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$가 만나는 점의 x좌표는

$x^3-x^2+x-4=x$에서

$x^3-x^2-4=0$, $(x-2)(x^2+x+2)=0$이므로

$x=2$, 즉 $a=2$

$g(17)=b$라 하면

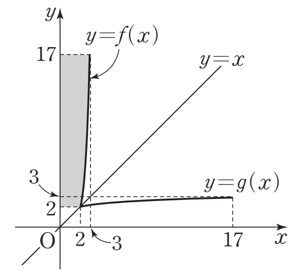
$f(b)=17$

$f(b)=b^3-b^2+b-4=17$에서

$b^3-b^2+b-21=0$, $(b-3)(b^2+2b+7)=0$

$b=3$

즉, $f(2)=2$, $f(3)=17$, $g(2)=2$, $g(17)=3$



$\int_2^{17} g(x)dx$의 값은 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같다.

$\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3 (x^3-x^2+x-4)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-4x\right]_2^3$

$=\left(\frac{81}{4}-9+\frac{9}{2}-12\right)-\left(4-\frac{8}{3}+2-8\right)$

$=\frac{101}{12}$

$\int_2^{17} g(x)dx=3\times17-4-\int_2^3 f(x)dx$

$=47-\frac{101}{12}$

$\int_2^{17}\{g(x)-1\}dx=\int_2^{17} g(x)dx-\int_2^{17} 1\,dx$

$=47-\frac{101}{12}-15=\frac{283}{12}$

따라서 $a=2$, $n=283$이므로

$a+n=2+283=285$

답 285

30

$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<0) \\ (x-1)^2 & (x\ge0) \end{cases}$이므로

(i) $x<0$일 때

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x+1)$

$x+1<0$에서 $x<-1$일 때

$f(x+1)=x+2$

$x+1\ge0$에서 $-1\le x<0$일 때

$f(x+1)=(x+1-1)^2=x^2$

즉, $(f\circ f)(x)=\begin{cases} x+2 & (x<-1) \\ x^2 & (-1\le x<0) \end{cases}$

(ii) $x\ge0$일 때

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f((x-1)^2)$

모든 실수 x에 대하여 $(x-1)^2\ge0$이므로

$x\ge0$일 때

$f((x-1)^2)=\{(x-1)^2-1\}^2=x^2(x-2)^2$이므로

$(f\circ f)(x)=x^2(x-2)^2$

(i), (ii)에서

$$(f\circ f)(x)=\begin{cases} x+2 & (x<-1) \\ x^2 & (-1\le x<0) \\ x^2(x-2)^2 & (x\ge 0)\end{cases}$$

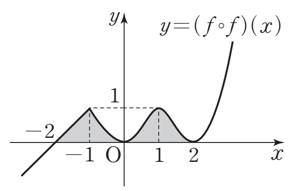
$g(x)=x^2(x-2)^2=x^4-4x^3+4x^2$이라 하면

$g'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x-2)(x-1)$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	0	↗	1	↘	0	↗

그러므로 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times1\times1+\int_{-1}^{0}x^2dx+\int_{0}^{2}(x^4-4x^3+4x^2)dx$

$=\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{5}x^5-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_{0}^{2}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{16}{15}=\frac{19}{10}$

답 ④

31

속도가 1일 때 $3t^2+2t=1$에서

$3t^2+2t-1=0$

$(t+1)(3t-1)=0$

$t\ge0$이므로 $t=\frac{1}{3}$

따라서 속도가 1일 때 점 P의 위치는

$\int_{0}^{\frac{1}{3}}v(t)dt=\int_{0}^{\frac{1}{3}}(3t^2+2t)dt$

$=\left[t^3+t^2\right]_{0}^{\frac{1}{3}}$

$=\frac{1}{27}+\frac{1}{9}=\frac{4}{27}$

답 ④

32

$0\le t\le4$일 때, $v(t)=t^2-4t$이므로 시각 t에서의 위치는

$5+\int_{0}^{t}v(t)dt=5+\int_{0}^{t}(t^2-4t)dt$

$=5+\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2\right]_{0}^{t}$

$=\frac{1}{3}t^3-2t^2+5$

그러므로 $t=4$일 때의 위치는

$\frac{1}{3}\times4^3-2\times4^2+5=-\frac{17}{3}$

$t>4$일 때, $v(t)=t-4$이므로 시각 t에서의 위치는

$-\frac{17}{3}+\int_{4}^{t}v(t)dt=-\frac{17}{3}+\int_{4}^{t}(t-4)dt$

$=-\frac{17}{3}+\left[\frac{1}{2}t^2-4t\right]_{4}^{t}$

$=\frac{1}{2}t^2-4t+\frac{7}{3}$

그런데 수직선 위에서 점 A의 위치가 점 B의 위치보다 왼쪽에 있고 $0\le t\le4$일 때, $v(t)=t(t-4)\le0$이므로 점 P가 점 B를 지나갈 때의 시각 t는 $t>4$이다.

$\frac{1}{2}t^2-4t+\frac{7}{3}=\frac{16}{3}$에서

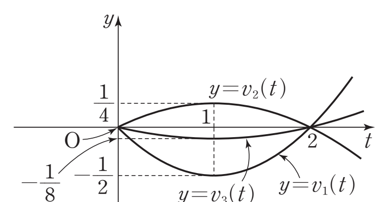
$\frac{1}{2}t^2-4t-3=0$, $t^2-8t-6=0$

$t>0$이므로 $t=4+\sqrt{22}$

따라서 $a=4$, $b=1$이므로 $a+b=5$

답 5

33



$v_n(t)=k_nt(t-2)$ $(n=1, 2, 3, \cdots, 10)$라 하면

$v_n(1)=-k_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots, 10)$

$v_n(1)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ $(n=1, 2, 3, \cdots, 10)$이므로

$k_n=-\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ $(n=1, 2, 3, \cdots, 10)$

즉, $v_n(t)=-\left(-\frac{1}{2}\right)^nt(t-2)$ $(n=1, 2, 3, \cdots, 10)$

10개의 점 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_{10}이 다시 원점을 지나는 시각이 $t=a$이므로 $\int_{0}^{a}\left\{-\left(-\frac{1}{2}\right)^nt(t-2)\right\}dt=0$ $(n=1, 2, 3, \cdots, 10)$에서

$-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left[\frac{t^3}{3}-t^2\right]_{0}^{a}=0$ $(n=1, 2, 3, \cdots, 10)$

즉, $-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{a^3}{3}-a^2\right)=0$ $(n=1, 2, 3, \cdots, 10)$이므로

$a^2(a-3)=0$에서 $a=3$

$a+1=4$

$s_n=\int_{0}^{4}|v_n(t)|dt$

$=\int_{0}^{4}\left|-\left(-\frac{1}{2}\right)^nt(t-2)\right|dt$

$=-\left(\frac{1}{2}\right)^n\int_{0}^{2}t(t-2)dt+\left(\frac{1}{2}\right)^n\int_{2}^{4}t(t-2)dt$

$=-\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[\frac{t^3}{3}-t^2\right]_{0}^{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[\frac{t^3}{3}-t^2\right]_{2}^{4}$

$$=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{20}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=8\left(\frac{1}{2}\right)^n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10)$$

따라서 10개의 점 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_{10}이 움직인 거리의 합은

$s_1+s_2+s_3+\cdots+s_{10}$

$$=8\left(\frac{1}{2}\right)^1+8\left(\frac{1}{2}\right)^2+8\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+8\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$=8\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}$$

$$=8\times\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=8\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right\}$$

$$=8-\left(\frac{1}{2}\right)^7$$

답 ④

확률과 통계

07 경우의 수

정답 본문 88~97쪽

01 ④	02 ④	03 ③	04 72	05 10
06 ①	07 106	08 ⑤	09 ④	10 ①
11 21	12 ⑤	13 ③	14 840	15 ②
16 ①	17 129	18 ①	19 ③	20 ⑤
21 ③	22 81	23 ②	24 ④	25 ①
26 ④	27 ③	28 ②	29 ①	30 ②
31 20	32 284	33 ③	34 ④	35 151

01

3명의 학생이 4개의 의자 중 3개를 택하여 앉는 경우의 수는 3명의 학생 A, B, C가 4개의 의자 중 3개를 택하여 앉고 남은 한 자리에 다른 학생 D가 앉는 경우의 수와 같다.

4개의 의자에 4명의 학생이 앉는 경우의 수는 $4!$

회전하였을 때 같은 것이 4가지씩 있으므로 구하는 경우의 수는

$\frac{4!}{4}=3\times2\times1=6$

답 ④

다른 풀이

회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 보므로 구하는 경우의 수는 그림의 맨 위에 위치한 의자를 비워두고 양 옆의 두 개의 의자와 아래 하나의 의자에 학생들이 앉는 경우의 수와 같다. 이때 3명의 학생 A, B, C가 3개의 의자에 앉는 경우의 수는

$3!=6$

02

각 학년별 학생들이 서로 이웃해야 하므로 1학년 학생들 2명의 묶음을 A, 2학년 학생들 2명의 묶음을 B, 3학년 학생들 3명의 묶음을 C라 하자. A, B, C가 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2$

1학년 묶음 내에서 1학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는 $2!=2$

2학년 묶음 내에서 2학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는 $2!=2$

3학년 묶음 내에서 3학년 학생 3명이 앉는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2\times2\times2\times6=48$

답 ④

다른 풀이

1학년 학생 1명을 선택하여 미리 앉히고 시작한다.

남은 1학년 학생 1명이 앞서 앉은 학생의 왼쪽 또는 오른쪽에 앉는 경우의 수는 2

(ⅰ) 1학년 학생이 앉은 자리의 시계방향으로 2학년과 3학년 학생들이 앉는 경우의 수는

$2!\times 3!=12$

(ⅱ) 1학년 학생이 앉은 자리의 시계방향으로 3학년과 2학년 학생들이 앉는 경우의 수는

$3!\times 2!=12$

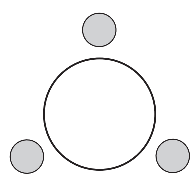
따라서 구하는 경우의 수는 합의 법칙과 곱의 법칙에 의하여

$2\times(12+12)=48$

03

의자를 모두 치우고 자녀 3명을 그림과 같이 원탁에 둘러앉히는 경우의 수는

$(3-1)!=2$



위의 그림에서 두 자녀의 사이사이인 3개의 위치 중 2개를 선택하여 부모가 앉으면 모든 자녀들이 아버지 또는 어머니와 이웃하게 되므로 부모가 앉는 경우의 수는

${}_3P_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2\times 6=12$

답 ③

다른 풀이 1

아버지가 그림의 가장 윗부분의 자리에 앉고 어머니와 세 자녀를 앉힌다. 아버지 좌우에 세 자녀 중 두 자녀가 앉아야 하므로 경우의 수는

${}_3P_2=6$

아래 두 자리에 남은 자녀 한 명과 어머니가 위치에 관계없이 앉으면 되므로 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$6\times 2=12$

다른 풀이 2

부모 2명이 서로 이웃하여 앉는 경우 부모 중 누구와도 이웃하여 앉지 못하는 자녀가 생기므로 가족 5명이 원형으로 앉는 모든 경우의 수에서 부모 2명이 서로 이웃하여 앉는 경우의 수를 빼서 구한다.

가족 5명이 원형으로 앉는 경우의 수는

$(5-1)!=24$

부모 2명을 한 묶음으로 생각하여 자녀 3명과 함께 원형으로 앉는 경우의 수는

$(4-1)!=6$

부모가 앉는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 부모 2명이 서로 이웃하여 앉는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$6\times 2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$24-12=12$

04

1, 2, 3, 4, 5, 6의 자연수 중 소수는 2, 3, 5이다.

3개의 소수 중 2개의 수를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2=3$

택한 두 소수를 작은 원의 두 개의 반원의 영역에 붙이는 경우의 수는

$(2-1)!=1$

나머지 4개의 스티커를 나머지 4개의 영역에 붙이는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times 1\times 24=72$

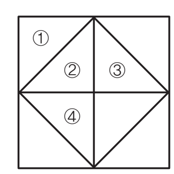
답 72

참고

이와 같은 도형의 경우 작은 원의 내부의 두 반원 영역에 의하여 180°로 회전시켜야 일치하는 것이 나타난다.

05

그림과 같이 8개의 영역의 일부에 번호를 부여하자.



빨간색과 파란색을 서로 이웃하지 않게 칠하는 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) 빨간색을 ①번 영역에 칠하는 경우

파란색은 ①번, ②번을 제외한 나머지 영역에 칠할 수 있으므로 파란색을 칠하는 경우의 수는 6

나머지 6개의 색을 칠하는 경우의 수는 $6!$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times 6!$

(ⅱ) 빨간색을 ②번 영역에 칠하는 경우

파란색은 ①번, ②번, ③번, ④번 영역을 제외한 나머지 영역에 칠할 수 있으므로 파란색을 칠하는 경우의 수는 4

나머지 6개의 색을 칠하는 경우의 수는 $6!$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times 6!$

(ⅰ), (ⅱ)에서 빨간색과 파란색이 서로 이웃하지 않게 칠하는 경우의 수는

$6\times 6!+4\times 6!=10\times 6!$

이므로 $k=10$

답 10

다른 풀이

전체 경우의 수에서 빨간색과 파란색이 서로 이웃하는 경우의 수를 빼서 구하자.

8개의 색 중 4가지를 선택하는 경우의 수는 ${}_8C_4$

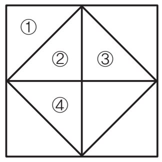
선택한 4가지 색을 내부의 4개의 영역에 칠하는 경우의 수는 $(4-1)!$

나머지 4가지 색을 외부의 4개의 영역에 칠하는 경우의 수는 $4!$

따라서 구하는 전체 경우의 수는

${}_8C_4\times 3!\times 4!$

그림과 같이 8개의 영역의 일부에 번호를 부여하자.



빨간색과 파란색을 서로 이웃하게 칠하는 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) 빨간색을 ①번 영역에 칠하는 경우
파란색을 ②번 영역에 칠해야 서로 이웃하므로 구하는 경우의 수는 빨간색과 파란색을 제외한 나머지 6가지 색을 6개의 영역에 칠하는 경우의 수인 $6!$

(ⅱ) 빨간색을 ②번 영역에 칠하는 경우
파란색을 ①번 또는 ③번 또는 ④번 영역에 칠해야 서로 이웃하므로 파란색을 칠하는 경우의 수는 3
나머지 6가지 색을 6개의 영역에 칠하는 경우의 수는 $6!$
따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $3\times6!$

(ⅰ), (ⅱ)에서 빨간색과 파란색이 서로 이웃하게 칠하는 경우의 수는
$6!+3\times6!=4\times6!$
따라서 빨간색과 파란색이 서로 이웃하지 않도록 칠하는 경우의 수는

$$\begin{aligned}{}_8\mathrm{C}_4\times3!\times4!-4\times6! &= \frac{8!}{(8-4)!4!}\times3!\times4!-4\times6!\\ &= \frac{8!}{4}-4\times6!\\ &= 2\times7\times6!-4\times6!\\ &= 10\times6!\end{aligned}$$

따라서 $k=10$

06

각 학생은 최소 1개의 사탕부터 최대 4개의 사탕을 받을 수 있으므로 각 학생이 받는 사탕의 수는 1, 2, 3, 4 중 하나이다.
따라서 구하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4 중 중복을 허락하여 3개를 택해 나열하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_4\Pi_3=4^3=64$

답 ①

07

조건 (가)에서 $a_1=1$ 또는 $a_1=2$ 또는 $a_1=4$이다.
이때 조건 (나)에서 $a_2<a_1$이고 a_2는 1 이상 6 이하의 자연수이므로 $a_1=1$이면 $a_2<a_1$인 자연수 a_2는 존재하지 않는다.
따라서 $a_1=2$ 또는 $a_1=4$이다.

(ⅰ) $a_1=2$일 때
조건 (나)에서 $a_2<2\le a_3$이고 조건 (다)에서 $a_4<2\le a_5$이므로 $a_2=a_4=1$이고 a_3과 a_5의 값은 2, 3, 4, 5, 6 중 하나이다. 따라서 구하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5, 6 중 중복을 허락하여 2개를 택해 나열하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_5\Pi_2=5^2=25$

(ⅱ) $a_1=4$일 때
조건 (나)에서 $a_2<4\le a_3$이고 조건 (다)에서 $a_4<4\le a_5$이므로 a_2와 a_4의 값은 1, 2, 3 중 하나이고 a_3과 a_5의 값은 4, 5, 6 중 하나이다.
따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개 중 중복을 허락하여 2개를 택해 나열하는 중복순열의 수의 제곱과 같으므로
$({}_3\Pi_2)^2=(3^2)^2=3^4=81$

따라서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$25+81=106$

답 106

08

조건 (가)에서 $f(1)=4$ 또는 $f(1)=5$이다.

(ⅰ) $f(1)=4$일 때
$1\times f(1)=1\times4=4$
이므로 조건 (나)를 만족시키는 1이 아닌 정의역의 원소가 있어야 한다. 즉, 2, 3, 4, 5 중 적어도 하나의 원소 a에 대하여 $a\times f(a)$의 값이 홀수이어야 한다. 이 경우의 수는 $f(1)=4$를 만족시키는 모든 함수 f의 개수에서 $f(1)=4$이고 모든 정의역의 원소 x에 대하여 $x\times f(x)$의 값이 짝수인 함수 f의 개수를 뺀 것과 같다. 정의역의 원소 2, 3, 4, 5를 공역의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중 하나에 대응시키는 경우의 수는 5개의 수 1, 2, 3, 4, 5 중 중복을 허락하여 4개를 택해 나열하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_5\Pi_4=5^4=625$
한편, $f(1)=4$이고 모든 정의역의 원소 x에 대하여 $x\times f(x)$의 값이 짝수인 함수 f의 개수는 정의역의 원소 2, 4는 공역의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중 하나에 대응시키고 정의역의 원소 3, 5는 공역의 원소 중 짝수인 2 또는 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_5\Pi_2\times{}_2\Pi_2=5^2\times2^2=10^2=100$
따라서 구하는 함수 f의 개수는 $625-100=525$

(ⅱ) $f(1)=5$일 때
$1\times f(1)=1\times5=5$이므로 조건 (나)를 만족시키는 정의역의 원소 1이 존재한다. 따라서 정의역의 원소 2, 3, 4, 5를 공역의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중 하나에 대응시킬 수 있으므로 구하는 함수 f의 개수는 5개의 수 1, 2, 3, 4, 5 중 중복을 허락하여 4개를 택해 나열하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_5\Pi_4=5^4=625$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수 f의 개수는 합의 법칙에 의하여
$525+625=1150$

답 ⑤

다른 풀이

(ⅰ) $f(1)=4$일 때
$1\times f(1)=1\times4=4$
이므로 조건 (나)를 만족시키는 1이 아닌 정의역의 원소가 있어야 한다. 즉, 2, 3, 4, 5 중 적어도 하나의 원소 a에 대하여 $a\times f(a)$의 값이 홀수이어야 하므로 a와 $f(a)$의 값이 모두 홀수이어야 한다.
따라서 이를 만족시키는 함수 f의 개수는 $f(3)$의 값이 홀수인 함수 f의 개수와 $f(5)$의 값이 홀수인 함수 f의 개수의 합에서 $f(3)$의 값과 $f(5)$의 값이 모두 홀수인 함수 f의 개수를 뺀 것과 같다.
$f(3)$의 값이 홀수이려면 $f(3)=1$ 또는 $f(3)=3$ 또는 $f(3)=5$이어야 하므로 $f(3)$의 값이 홀수인 함수 f의 개수는

$_5\Pi_3\times3=5^3\times3=375$

$f(5)$의 값이 홀수인 함수 f의 개수도 위와 마찬가지로

$_5\Pi_3\times3=5^3\times3=375$

$f(3)$의 값과 $f(5)$의 값이 모두 홀수인 함수 f의 개수는

$_5\Pi_2\times{}_3\Pi_2=5^2\times3^2=225$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$375+375-225=525$

(ii) $f(1)=5$일 때

$1\times f(1)=1\times5=5$이므로 조건 (나)를 만족시키는 정의역의 원소 1이 존재한다. 따라서 정의역의 원소 2, 3, 4, 5를 공역의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중 하나에 대응시킬 수 있으므로 구하는 함수 f의 개수는 5개의 수 1, 2, 3, 4, 5 중 중복을 허락하여 4개를 택해 나열하는 중복순열의 수와 같으므로

$_5\Pi_4=5^4=625$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는 합의 법칙에 의하여

$525+625=1150$

09

5개의 문자 b, b, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times3!}=10$

이 각각에 대하여 그림과 같이 ∨ 표시된 곳 중 두 곳에 a를 넣으면 되므로 경우의 수는 서로 다른 6개에 2개를 택하는 조합의 수와 같다.

즉, $_6C_2=15$

∨ b ∨ b ∨ c ∨ c ∨ c ∨

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$10\times15=150$

답 ④

다른 풀이

7개의 문자 a, a, b, b, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!\times2!\times3!}=210$

a끼리 이웃하도록 나열하는 경우의 수는 2개의 a를 한 묶음(○)으로 생각하고 ○, b, b, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{6!}{2!\times3!}=60$

따라서 구하는 경우의 수는

$210-60=150$

10

상품의 종류를 각각 A, B, C라 하면 A가 3개, B가 3개, C가 3개 있고, 다음과 같이 나누어 구할 수 있다.

(i) A, B, C 중 두 종류의 상품으로 3개씩 나누어 주는 경우

A, B, C 중 두 종류의 상품을 선택하는 경우의 수는

$_3C_2=3$

위에서 선택한 상품을 6명의 참가자에게 나누어 주는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times3!}=20$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times20=60$

(ii) 서로 다른 상품으로 3개, 2개, 1개 나누어 주는 경우

3개, 2개, 1개 나누어 주는 상품의 종류를 선택하는 경우의 수는

$3!=6$

위에서 선택한 상품을 6명의 참가자에게 나누어 주는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times2!}=60$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$6\times60=360$

(iii) A, B, C 각각 2개씩 나누어 주는 경우

경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times2!\times2!}=90$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$60+360+90=510$

답 ①

11

다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $a_1+a_2+a_3+a_4=4$인 경우

(1, 1, 1, 1)로 경우의 수는 1이다.

(ii) $a_1+a_2+a_3+a_4=8$인 경우

$2+2+2+2=8$인 경우

(2, 2, 2, 2)로 경우의 수는 1

$1+2+2+3=8$인 경우

1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{2!}=12$

$1+1+3+3=8$인 경우

1, 1, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

따라서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$1+12+6=19$

(iii) $a_1+a_2+a_3+a_4=12$인 경우

(3, 3, 3, 3)으로 경우의 수는 1이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$1+19+1=21$

답 21

12

홀수가 적힌 카드는 1, 3, 5가 적힌 카드 3장이고 짝수가 적힌 카드는 2, 4, 6이 적힌 카드 3장이다.

짝수가 적힌 카드 중 하나를 선택하여 가장 오른쪽에 나열하는 경우의 수는 $_3P_1=3$

홀수가 적힌 카드를 놓을 자리를 a라 하고 나머지 두 개의 짝수를 b, c라 하면 a, a, a, b, c를 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{3!}=20$

이때 홀수는 a에 작은 수부터 크기순으로 위치가 결정된다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times20=60$

답 ⑤

다른 풀이

홀수가 적힌 카드는 1, 3, 5가 적힌 카드 3장이고 짝수가 적힌 카드는 2, 4, 6이 적힌 카드 3장이다.

6개의 자리 중 가장 오른쪽을 제외한 5개의 자리에서 홀수가 놓일 3개의 자리를 선택하여 작은 수부터 크기순으로 왼쪽부터 나열하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_3=10$

나머지 3개의 자리에 짝수를 배열하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$10\times6=60$

13

o를 e로 간주하여 4개의 e를 나열한 뒤 마지막의 e를 o라 하면 된다.

m, p, l을 놓을 자리를 A라 하고 8개의 문자 e, e, e, e, A, A, A, y를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{8!}{4!\times3!}=280$

위의 각각의 경우에 대해 A가 놓인 3개의 자리에 m, p, l을 이 순서대로 놓거나 이와 반대의 순서대로 놓을 수 있으므로 경우의 수는 2

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$280\times2=560$

답 ③

14

박물관 견학, 점심식사, 저녁식사, 유람선 탑승은 이 순서대로 진행해야 하므로 이 네 가지 활동을 모두 A라 하자.

나머지 4가지의 활동을 각각 B, C, D, E라 하고 A, A, A, A, B, C, D, E를 나열할 때, 두 번째로 나열되는 A와 세 번째로 나열되는 A 사이에 B, C, D, E 중 적어도 하나가 나열되어야 한다.

따라서 전체 경우에서 두 번째로 나열되는 A와 세 번째로 나열되는 A가 이웃하여 나열되는 경우를 제외한다.

A, A, A, A, B, C, D, E를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{8!}{4!}$

한편, 두 번째로 나열되는 A와 세 번째로 나열되는 A가 이웃하여 나열되는 경우는 ○, ○, ○, B, C, D, E를 일렬로 나열한 뒤, 첫 번째와 세 번째에 나열된 두 개의 ○에 각각 A를 넣고, 두 번째에 나열된 ○에 두 개의 A를 넣는 것과 같으므로 경우의 수는 $\frac{7!}{3!}$

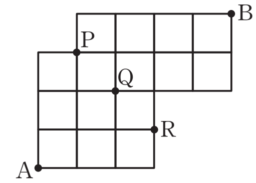
따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{8!}{4!}-\frac{7!}{3!}=\frac{7!}{3!}\times\left(\frac{8}{4}-1\right)=7\times6\times5\times4=840$

답 840

15

그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망을 따라 A지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 경우 그림의 P지점, Q지점, R지점 중 오직 한 지점만을 반드시 지난다.



(ⅰ) P지점을 지나는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}\times\frac{5!}{4!}=4\times5=20$

(ⅱ) Q지점을 지나는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{5!}{2!\times3!}=6\times10=60$

(ⅲ) R지점을 지나는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}\times1\times\frac{4!}{2!\times2!}=4\times1\times6=24$

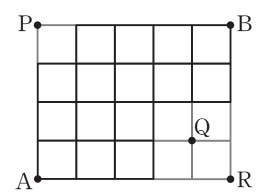
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$20+60+24=104$

답 ②

다른 풀이

그림과 같이 도로망이 직사각형 모양으로 있다고 가정하여 A지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 모든 경우의 수를 구한 후 P지점, Q지점, R지점을 지나는 경우의 수를 뺀다.



A지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 모든 경우의 수는

$\frac{9!}{5!\times4!}=126$

(ⅰ) P지점을 지나는 경우의 수는 1

(ⅱ) Q지점을 지나는 경우의 수는 $\frac{5!}{4!}\times\frac{4!}{3!}=5\times4=20$

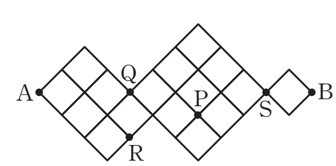
(ⅲ) R지점을 지나는 경우의 수는 1

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$126-(1+20+1)=104$

16

A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 가는 경우 그림에서 Q지점과 R지점 중 하나를 반드시 지나며 S지점을 반드시 지난다.



따라서 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.

(ⅰ) A → Q → S → B로 이동하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{6!}{3!\times3!}\times2!=6\times20\times2=240$

(ⅱ) A → Q → P → S → B로 이동하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}\times2!=6\times3\times3\times2=108$

(i), (ii)에서 A지점에서 출발하여 Q지점을 지나고 P지점을 지나지 않고 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$240-108=132$ …… ㉠

(iii) A → R → S → B로 이동하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}\times1\times\frac{5!}{2!\times3!}\times2!=4\times1\times10\times2=80$

(iv) A → R → P → S → B로 이동하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}\times1\times2!\times\frac{3!}{2!}\times2!=4\times1\times2\times3\times2=48$

(iii), (iv)에서 A지점에서 출발하여 R지점을 지나고 P지점을 지나지 않고 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$80-48=32$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$132+32=164$

답 ①

17

두 지점 P_1, P_2를 연결하는 도로와 두 지점 Q_1, Q_2를 연결하는 도로를 지날 수 있다고 가정하면 최단거리로 가는 모든 경우의 수는

$\frac{10!}{6!\times4!}=210$

(i) A → P_1 → P_2 → B로 이동하는 경우의 수는

$1\times1\times\frac{7!}{4!\times3!}=35$

(ii) A → Q_1 → Q_2 → B로 이동하는 경우의 수는

$\frac{8!}{5!\times3!}\times1\times1=56$

(iii) A → P_1 → P_2 → Q_1 → Q_2 → B로 이동하는 경우의 수는

$1\times1\times\frac{5!}{3!\times2!}\times1\times1=10$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$210-(35+56-10)=129$

답 129

18

2권의 공책을 우선 A에게 주고 남은 7권의 공책을 4명의 학생에게 나누어 준다.

이 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

${}_4H_7={}_{4+7-1}C_7={}_{10}C_7={}_{10}C_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

답 ①

19

설탕 6봉지와 소금 6봉지는 총 12봉지이고 나누어 담은 3개의 장바구니의 무게가 모두 같아야 하므로 각각의 장바구니에 설탕 또는 소금을 총 4봉지씩 담아야 한다.

이때 설탕 6봉지를 3개의 장바구니 A, B, C에 각 장바구니당 최대 4봉지가 되도록 남김없이 나누어 담은 후 무게가 서로 같도록 소금 6봉지를 나누어 담으면 되므로 설탕 6봉지를 3개의 장바구니 A, B, C에 남김없이 나누어 담는 모든 경우의 수에서 설탕 5봉지를 하나의 장바구니에 담는 경우의 수와 설탕 6봉지를 하나의 장바구니에 담는 경우의 수를 빼서 구한다.

설탕 6봉지를 3개의 장바구니 A, B, C에 남김없이 나누어 담는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

(i) 설탕 5봉지를 하나의 장바구니에 담는 경우의 수는 장바구니 A, B, C 중 설탕 5봉지와 설탕 1봉지를 담을 2개의 장바구니를 택해 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_3P_2=6$

(ii) 설탕 6봉지를 하나의 장바구니에 담는 경우의 수는 장바구니 A, B, C 중 설탕 6봉지를 담을 장바구니를 선택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_3C_1=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$28-(6+3)=19$

답 ③

다른 풀이

설탕 6봉지를 3개의 장바구니 A, B, C에 남김없이 나누어 담은 후 무게가 서로 같도록 소금을 담으면 된다. 이때 최대 4봉지가 되도록 3개의 묶음으로 설탕 6봉지를 나누는 경우를 순서쌍으로 나타내면

(4, 2, 0), (4, 1, 1), (3, 3, 0), (3, 2, 1), (2, 2, 2)이다.

(i) (4, 2, 0) 또는 (3, 2, 1)로 묶은 설탕을 장바구니 A, B, C에 담는 경우의 수는 각각 $3!=6$이므로 경우의 수는 $2\times6=12$

(ii) (4, 1, 1) 또는 (3, 3, 0)으로 묶은 설탕을 장바구니 A, B, C에 담는 경우의 수는 각각 $\frac{3!}{2!}=3$이므로 경우의 수는 $2\times3=6$

(iii) (2, 2, 2)로 묶은 설탕을 장바구니 A, B, C에 담는 경우의 수는 1

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$12+6+1=19$

20

다음과 같이 2개의 필통에 볼펜을 각각 하나씩 넣는 경우와 1개의 필통에 볼펜 2자루를 모두 넣는 경우 두 가지로 나누어 생각할 수 있다.

(i) 2개의 필통에 볼펜을 각각 하나씩 넣는 경우

남은 하나의 필통에 연필 한 자루를 넣으면 빈 필통이 없으며 3개의 필통은 서로 구별이 가능하다. 이때 남은 연필 4자루를 서로 다른 필통 3개에 나누어 담는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

(ii) 1개의 필통에 볼펜 2자루를 모두 넣는 경우

나머지 두 필통에 연필을 하나씩 넣으면 빈 필통은 없다. 볼펜이 들어 있는 필통을 A, 연필이 들어 있는 두 필통을 모두 B라 할 때, 남은 연필 3자루를 A, B, B에 나누어 담는 경우를 순서쌍으로 나타내면 다음과 같다.

(3, 0, 0), (2, 1, 0), (1, 2, 0), (1, 1, 1), (0, 3, 0), (0, 2, 1)

따라서 경우의 수는 6이다.

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$15+6=21$

답 ⑤

21

$0<a\le b\le c\le d<10$을 만족시키는 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수에서 $0<a\le b=c\le d<10$을 만족시키는 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 빼서 구한다.

$0<a\le b\le c\le d<10$에서 $1\le a\le b\le c\le d\le 9$이고 이것을 만족시키는 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$${}_9\mathrm{H}_4={}_{9+4-1}\mathrm{C}_4={}_{12}\mathrm{C}_4=\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}=495$$

$1\le a\le b=c\le d\le 9$를 만족시키는 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$${}_9\mathrm{H}_3={}_{9+3-1}\mathrm{C}_3={}_{11}\mathrm{C}_3=\frac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=165$$

따라서 구하는 경우의 수는

$495-165=330$

답 ③

다른 풀이 1

b와 c는 정수이고 $b<c$이므로 $b+1\le c$이다.

마찬가지로 $0<a$에서 $1\le a$이고, $d<10$에서 $d\le 9$이다.

따라서 $0<a\le b<c\le d<10$에서

$0+1<a+1\le b+1\le c\le d<10$

$2\le a+1\le b+1\le c\le d\le 9$이고

$a+1=a'$, $b+1=b'$이라 하면

$2\le a'\le b'\le c\le d\le 9$ …… ㉠

$0<a\le b<c\le d<10$을 만족시키는 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 ㉠을 만족시키는 정수 a', b', c, d의 순서쌍 (a', b', c, d)의 개수와 같고 이것은 2 이상 9 이하의 자연수 8개에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 $${}_8\mathrm{H}_4={}_{8+4-1}\mathrm{C}_4={}_{11}\mathrm{C}_4=\frac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1}=330$$

다른 풀이 2

a와 b는 정수이고 $a\le b$이므로 $a<b+1$

c와 d는 정수이고 $c\le d$이므로 $c<d+1$

$0<a\le b<c\le d<10$에서

$1\le a<b+1<c+1<d+2\le 11$

$b+1=b'$, $c+1=c'$, $d+2=d'$이라 하면

$1\le a<b'<c'<d'\le 11$ …… ㉡

$0<a\le b<c\le d<10$을 만족시키는 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 ㉡을 만족시키는 정수 a, b', c', d'의 순서쌍 (a, b', c', d')의 개수와 같다. 이것은 1 이상 11 이하의 자연수 11개에서 서로 다른 4개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_{11}\mathrm{C}_4=\frac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1}=330$$

22

조건 (가)에서 $f(3)=3$ 또는 $f(3)=6$이다.

(i) $f(3)=3$일 때

조건 (나)에서 $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)$이고 $f(3)=3$이므로 $1\le f(1)\le f(2)\le 3$, $3\le f(4)\le f(5)\le 6$이어야 한다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는 1 이상 3 이하의 3개의 자연수에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 3 이상 6 이하의 4개의 자연수에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수의 곱과 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_2\times{}_4\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2\times{}_{4+2-1}\mathrm{C}_2$$
$$={}_4\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_2=6\times10=60$$

(ii) $f(3)=6$일 때

조건 (나)에서 $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)$이고 $f(3)=6$이므로 $1\le f(1)\le f(2)\le 6$, $f(4)=f(5)=6$이어야 한다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는 1 이상 6 이하의 6개의 자연수에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_6\mathrm{H}_2={}_{6+2-1}\mathrm{C}_2={}_7\mathrm{C}_2=21$$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는 합의 법칙에 의하여

$60+21=81$

답 81

23

조건 (나)에서 xy의 값이 0 또는 짝수이므로 조건 (가)를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수에서 xy의 값이 홀수인 경우의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 빼서 구한다.

$x+y+z=15$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_{15}={}_{3+15-1}\mathrm{C}_{15}={}_{17}\mathrm{C}_{15}={}_{17}\mathrm{C}_2=136$$

xy의 값이 홀수이려면 x, y 모두 홀수이어야 한다.

x, y가 모두 홀수이면 음이 아닌 정수 x', y'에 대하여 $x=2x'+1$, $y=2y'+1$로 놓을 수 있다. 조건 (가)에서 $x+y+z=15$이므로

$(2x'+1)+(2y'+1)+z=15$ …… ㉠

이때 두 홀수와 z의 합이 홀수이므로 z는 홀수이어야 한다. 따라서 음이 아닌 정수 z'에 대하여 $z=2z'+1$로 놓을 수 있고, ㉠에서

$(2x'+1)+(2y'+1)+(2z'+1)=15$

$x'+y'+z'=6$

따라서 x, y가 모두 홀수인 경우의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 $x'+y'+z'=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z'의 순서쌍 (x', y', z')의 개수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_6={}_{3+6-1}\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=28$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$136-28=108$

답 ②

다른 풀이

조건 (나)에서 xy의 값이 0 또는 짝수이므로 다음의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) x, y가 모두 0 또는 짝수인 경우

음이 아닌 정수 x', y'에 대하여 $x=2x'$, $y=2y'$으로 놓을 수 있다.

조건 (가)에서 $x+y+z=15$이므로

$2x'+2y'+z=15$ …… ㉠

이때 0 또는 짝수인 두 수와 z의 합이 홀수이므로 z는 홀수이어야 한다.

따라서 음이 아닌 정수 z'에 대하여 $z=2z'+1$로 놓을 수 있고, ㉠에서 $2x'+2y'+(2z'+1)=15$

$x'+y'+z'=7$

따라서 x, y가 모두 0 또는 짝수인 경우의 순서쌍 (x, y, z)의 개수

는 $x'+y'+z'=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z'의 순서쌍 (x', y', z')의 개수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_7={}_{3+7-1}\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=36$

(ii) x는 0 또는 짝수이고 y는 홀수인 경우

음이 아닌 정수 x', y'에 대하여 $x=2x'$, $y=2y'+1$로 놓을 수 있다.

조건 (가)에서 $x+y+z=15$이므로

$2x'+(2y'+1)+z=15$ …… ㉡

이때 0 또는 짝수, 홀수와 z의 합이 홀수이므로 z는 0 또는 짝수이어야 한다.

따라서 음이 아닌 정수 z'에 대하여 $z=2z'$으로 놓을 수 있고, ㉡에서 $2x'+(2y'+1)+2z'=15$

$x'+y'+z'=7$

따라서 x는 0 또는 짝수이고 y는 홀수인 경우의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 $x'+y'+z'=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z'의 순서쌍 (x', y', z')의 개수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_7={}_{3+7-1}\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=36$

(iii) x는 홀수이고 y는 0 또는 짝수인 경우

(ii)와 마찬가지로 구하는 순서쌍의 개수는 36

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$36+36+36=108$

24

조건 (나)에서 $x_1+x_2\le 2$이므로 다음의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $x_1+x_2=0$일 때

$x_1=x_2=0$이므로 순서쌍 (x_1, x_2)의 개수는 1이다.

조건 (가)에서 $x_3+x_4+x_5=5$

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_3, x_4, x_5의 순서쌍 (x_3, x_4, x_5)의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_5={}_{3+5-1}\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$

따라서 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$의 개수는

$1\times 21=21$

(ii) $x_1+x_2=1$일 때

$x_1=0$, $x_2=1$ 또는 $x_1=1$, $x_2=0$이므로 순서쌍 (x_1, x_2)의 개수는 2이다.

조건 (가)에서 $x_3+x_4+x_5=4$

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_3, x_4, x_5의 순서쌍 (x_3, x_4, x_5)의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$

따라서 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$의 개수는

$2\times 15=30$

(iii) $x_1+x_2=2$일 때

$x_1=0$, $x_2=2$ 또는 $x_1=x_2=1$ 또는 $x_1=2$, $x_2=0$이므로 순서쌍 (x_1, x_2)의 개수는 3이다.

조건 (가)에서 $x_3+x_4+x_5=3$

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_3, x_4, x_5의 순서쌍 (x_3, x_4, x_5)의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

따라서 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$의 개수는

$3\times 10=30$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는 합의 법칙에 의하여

$21+30+30=81$

답 ④

참고

방정식 $x_1+x_2=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2의 순서쌍 (x_1, x_2)의 개수는 서로 다른 2개 중에서 중복을 허락하여 1개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2\mathrm{H}_1={}_{2+1-1}\mathrm{C}_1={}_2\mathrm{C}_1=2$

와 같이 계산할 수도 있다. 마찬가지로 방정식 $x_1+x_2=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2의 순서쌍 (x_1, x_2)의 개수는 서로 다른 2개 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2\mathrm{H}_2={}_{2+2-1}\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$

과 같이 계산할 수도 있다.

25

$(x+y+z+w)^8$을 전개하여 정리하였을 때, xy를 인수로 갖지 않는 서로 다른 항의 개수는 $(x+y+z+w)^8$을 전개하였을 때 나타나는 서로 다른 모든 항의 개수에서 xy를 인수로 갖는 서로 다른 모든 항의 개수를 빼서 구한다.

$(x+y+z+w)^8$의 전개식에서 각 항을 $x^a y^b z^c w^d$이라 하면 a, b, c, d는 음이 아닌 정수이고

$a+b+c+d=8$ …… ㉠

을 만족시킨다.

따라서 $(x+y+z+w)^8$을 전개하였을 때 나타나는 서로 다른 모든 항의 개수는 방정식 ㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_8={}_{4+8-1}\mathrm{C}_8={}_{11}\mathrm{C}_8={}_{11}\mathrm{C}_3=\dfrac{11\times 10\times 9}{3\times 2\times 1}=165$

한편, $(x+y+z+w)^8$의 전개식에서 각 항을 $x^a y^b z^c w^d$이라 할 때, $a\ge 1$이고 $b\ge 1$이면 xy를 인수로 갖는다.

따라서 $(x+y+z+w)^8$을 전개하였을 때 나타나는 xy를 인수로 갖는 서로 다른 모든 항의 개수는 방정식 ㉠을 만족시키는 자연수 a, b와 음이 아닌 정수 c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수와 같다.

$a=a'+1$, $b=b'+1$이라 하면 a', b'은 음이 아닌 정수이고 ㉠에서

$(a'+1)+(b'+1)+c+d=8$이므로

$a'+b'+c+d=6$

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c, d의 순서쌍 (a', b', c, d)의 개수는

${}_4\mathrm{H}_6={}_{4+6-1}\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_3=\dfrac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1}=84$

따라서 구하는 항의 개수는

$165-84=81$

답 ①

다른 풀이

$(x+y+z+w)^8$의 전개식에서 각 항을 $x^a y^b z^c w^d$이라 하면 a, b, c, d는 음이 아닌 정수이고

$a+b+c+d=8$ …… ㉠

을 만족시킨다. 이때 $a\ge1$이고 $b\ge1$이면 xy를 인수로 갖는다.

따라서 xy를 인수로 갖지 않으려면 $a<1$ 또는 $b<1$, 즉 $a=0$ 또는 $b=0$이어야 한다.

따라서 $a=0$인 경우의 순서쌍의 개수와 $b=0$인 경우의 순서쌍의 개수의 합에서 $a=0$이고 $b=0$인 경우의 순서쌍의 개수를 빼서 구한다.

(i) $a=0$인 경우

㉠에서 $b+c+d=8$

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c, d의 순서쌍 (b, c, d)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_8={}_{3+8-1}\mathrm{C}_8={}_{10}\mathrm{C}_8={}_{10}\mathrm{C}_2=45$

(ii) $b=0$인 경우

(i)의 경우와 같으므로 순서쌍의 개수는 45

(iii) $a=0$이고 $b=0$인 경우

㉠에서 $c+d=8$

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 c, d의 순서쌍 (c, d)의 개수는

${}_2\mathrm{H}_8={}_{2+8-1}\mathrm{C}_8={}_9\mathrm{C}_8={}_9\mathrm{C}_1=9$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 항의 개수는

$45+45-9=81$

26

$N=a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d$라 하면

a는 1 이상 9 이하의 자연수이고 b, c, d는 0 이상 9 이하의 정수이다.

조건 (가)에서

$a+b+c+d=11$ …… ㉠

조건 (나)에서 $d\ne0$, $d\ne5$이다.

따라서 조건을 만족시키는 자연수 N의 개수는 방정식 ㉠을 만족시키는

$1\le a\le9$, $0\le b\le9$, $0\le c\le9$, $0\le d\le9$

인 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수에서 $d=0$, $d=5$인 경우의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 빼서 구한다.

$a=a'+1$이라 하면 $1\le a\le9$에서 $0\le a'\le8$이고 ㉠에서

$a'+b+c+d=10$ …… ㉡

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b, c, d의 순서쌍 (a', b, c, d)의 개수는

${}_4\mathrm{H}_{10}={}_{4+10-1}\mathrm{C}_{10}={}_{13}\mathrm{C}_{10}={}_{13}\mathrm{C}_3=286$

이때 $0\le a'\le8$이고 b, c, d는 0 이상 9 이하이어야 하므로 위의 경우에서 $a'=9$ 또는 $a'=10$ 또는 $b=10$ 또는 $c=10$ 또는 $d=10$인 경우를 제외해야 한다.

즉, $a'=9$인 경우

$(9, 1, 0, 0)$, $(9, 0, 1, 0)$, $(9, 0, 0, 1)$

의 3가지와 $a'=10$ 또는 $b=10$ 또는 $c=10$ 또는 $d=10$인 경우

$(10, 0, 0, 0)$, $(0, 10, 0, 0)$, $(0, 0, 10, 0)$, $(0, 0, 0, 10)$

의 4가지를 제외해야 한다. 즉, 방정식 ㉠을 만족시키는

$1\le a\le9$, $0\le b\le9$, $0\le c\le9$, $0\le d\le9$

인 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$286-7=279$

(i) $d=0$인 경우

㉡에서 $a'+b+c=10$

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b, c의 순서쌍 (a', b, c)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{3+10-1}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=66$

이때 위와 마찬가지로

$(9, 1, 0)$, $(9, 0, 1)$, $(10, 0, 0)$, $(0, 10, 0)$, $(0, 0, 10)$

인 경우를 제외해야 하므로 구하는 순서쌍의 개수는

$66-5=61$

(ii) $d=5$인 경우

㉡에서 $a'+b+c=5$

위의 방정식을 만족시키는 $0\le a'\le8$이고 b, c는 0 이상 9 이하인 정수 a', b, c의 순서쌍 (a', b, c)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_5={}_{3+5-1}\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$

(i), (ii)에서 $d=0$ 또는 $d=5$인 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$61+21=82$

따라서 조건을 만족시키는 네 자리의 자연수 N의 개수는

$279-82=197$

답 ④

27

다항식 $(3x+1)^7$의 전개식에서 일반항은

${}_7\mathrm{C}_r(3x)^r={}_7\mathrm{C}_r3^rx^r$

x^2의 계수는 $r=2$일 때이므로

${}_7\mathrm{C}_2\times3^2=\frac{7\times6}{2\times1}\times9=189$

답 ③

28

$(x+1)(2x+a)^6=x(2x+a)^6+(2x+a)^6$이므로

$(2x+a)^6$의 전개식에서 x^5의 계수를 p, x^6의 계수를 q라 하면 다항식 $(x+1)(2x+a)^6$의 전개식에서 x^6의 계수는 $p+q$이다.

$(2x+a)^6$의 전개식에서 일반항은

${}_6\mathrm{C}_r(2x)^ra^{6-r}={}_6\mathrm{C}_r2^ra^{6-r}x^r$

p는 $r=5$일 때이므로

$p={}_6\mathrm{C}_5\times2^5\times a^{6-5}=6\times32\times a=192a$

q는 $r=6$일 때이므로

$q={}_6\mathrm{C}_6\times2^6\times a^{6-6}=1\times64\times1=64$

$p+q=160$이므로

$192a+64=160$, $192a=96$

따라서 $a=\frac{1}{2}$

답 ②

29

$(x+2)+(x+2)^2+(x+2)^3+(x+2)^4+(x+2)^5$에서 x^2항은

$(x+2)^2+(x+2)^3+(x+2)^4+(x+2)^5$의 전개식에서 나타난다.

2 이상 5 이하의 자연수 n에 대하여 다항식 $(x+2)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r 2^{n-r} x^r$

x^2의 계수는 $r=2$일 때이므로 ${}_nC_2 2^{n-2}$

$(x+2)^2+(x+2)^3+(x+2)^4+(x+2)^5$의 전개식에서 x^2의 계수는

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{5} {}_nC_2 2^{n-2} &= {}_2C_2+{}_3C_2\times 2+{}_4C_2\times 2^2+{}_5C_2\times 2^3 \\ &=1+3\times 2+6\times 4+10\times 8 \\ &=1+6+24+80=111\end{aligned}$$

답 ①

30

$\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^8$의 전개식에서 일반항은

${}_8C_r (x^2)^{8-r}\left(\frac{a}{x}\right)^r = {}_8C_r a^r x^{16-3r}$

x^{10}의 계수는 $16-3r=10$에서 $r=2$일 때이므로

${}_8C_2\times a^2=28a^2$

x^4의 계수는 $16-3r=4$에서 $r=4$일 때이므로

${}_8C_4\times a^4=70a^4$

x^{10}의 계수와 x^4의 계수가 서로 같으므로

$28a^2=70a^4$

$a^2=\frac{28}{70}=\frac{2}{5}$

답 ②

31

$\left(\frac{x}{a}+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{a}{x}\right)^5=\frac{1}{a}x\left(x+\frac{a}{x}\right)^5+\frac{1}{x}\left(x+\frac{a}{x}\right)^5$이므로

$\left(x+\frac{a}{x}\right)^5$의 전개식에서 x의 계수를 p, x^3의 계수를 q라 하면

$\left(\frac{x}{a}+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{a}{x}\right)^5$의 전개식에서 x^2의 계수는 $\frac{1}{a}\times p+q$이다.

$\left(x+\frac{a}{x}\right)^5$의 전개식에서 일반항은

${}_5C_r x^{5-r}\left(\frac{a}{x}\right)^r={}_5C_r a^r x^{5-2r}$

p는 $5-2r=1$, 즉 $r=2$일 때이므로

$p={}_5C_2 a^2=10a^2$

q는 $5-2r=3$, 즉 $r=1$일 때이므로

$q={}_5C_1 a^1=5a$

x^2의 계수가 5이므로

$\frac{1}{a}\times 10a^2+5a=5$, $15a=5$, $a=\frac{1}{3}$

따라서 $60a=60\times\frac{1}{3}=20$

답 20

32

$\left(2x^3+\frac{1}{x^2}\right)^n$의 전개식에서 일반항은

${}_nC_r (2x^3)^{n-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r={}_nC_r 2^{n-r} x^{3n-5r}$

$3n-5r=1$에서 $3n=5r+1$

$r=0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$일 때의 $5r+1$의 값은 각각

$1, 6, 11, 16, 21, 26, \cdots$

이때 $3n$은 3의 배수이므로

$r=1$일 때, $3n=6$, $n=2$

$r=4$일 때, $3n=21$, $n=7$

따라서 $n_1=2$, $n_2=7$

$n=2$일 때 x의 계수 a_1은 $r=1$일 때이므로

$a_1={}_2C_1\times 2^{2-1}=2\times 2=4$

$n=7$일 때 x의 계수 a_2는 $r=4$일 때이므로

$a_2={}_7C_4\times 2^{7-4}=35\times 8=280$

따라서 $a_1+a_2=4+280=284$

답 284

33

${}_{16}C_0=1$, ${}_{16}C_{16}=1$이므로

$$\begin{aligned}&\log_4({}_{16}C_1+{}_{16}C_2+{}_{16}C_3+\cdots+{}_{16}C_{15}+2) \\ &=\log_4({}_{16}C_0+{}_{16}C_1+{}_{16}C_2+{}_{16}C_3+\cdots+{}_{16}C_{15}+{}_{16}C_{16}) \\ &=\log_4 2^{16} \\ &=\frac{16}{2}=8\end{aligned}$$

답 ③

34

$$\begin{aligned}f(n)&=\sum_{k=1}^{n} {}_{2n}C_{2k-1} \\ &={}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+{}_{2n}C_5+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1} \\ &=2^{2n-1}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}f(n+1)-f(n)&=2^{2(n+1)-1}-2^{2n-1} \\ &=4\times 2^{2n-1}-2^{2n-1} \\ &=3\times 2^{2n-1}\end{aligned}$$

$90<f(n+1)-f(n)<9000$에서

$90<3\times 2^{2n-1}<9000$

$30<2^{2n-1}<3000$ …… ㉠

이때 $2^4<30<2^5$, $2^{11}<3000<2^{12}$

이므로 부등식 ㉠에서 $5\le 2n-1\le 11$

$3\le n\le 6$

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은

$3+4+5+6=18$

답 ④

35

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n-1}$의 전개식에서 일반항은

${}_{2n-1}C_r x^{(2n-1)-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_{2n-1}C_r x^{(2n-1)-2r}$

$(2n-1)-2r=2k-1$에서 $r=n-k$이므로 a_k는 $r=n-k$일 때의 계수이다.

즉, $a_k={}_{2n-1}C_{n-k}$

따라서

$f(n)=\sum_{k=1}^{n} a_k$

$=\sum_{k=1}^{n} {}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-k}$

$={}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}+{}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-2}+{}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-3}+\cdots+{}_{2n-1}\mathrm{C}_{1}+{}_{2n-1}\mathrm{C}_{0}$

이때 ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}\ (0\le r\le n)$이므로

$f(n)=\sum_{k=1}^{n} {}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-k}$

$=\sum_{k=1}^{n} {}_{2n-1}\mathrm{C}_{(2n-1)-(n-k)}$

$=\sum_{k=1}^{n} {}_{2n-1}\mathrm{C}_{n+k-1}$

$={}_{2n-1}\mathrm{C}_{n}+{}_{2n-1}\mathrm{C}_{n+1}+{}_{2n-1}\mathrm{C}_{n+2}+\cdots+{}_{2n-1}\mathrm{C}_{2n-2}+{}_{2n-1}\mathrm{C}_{2n-1}$

$2f(n)={}_{2n-1}\mathrm{C}_{0}+{}_{2n-1}\mathrm{C}_{1}+{}_{2n-1}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{2n-1}\mathrm{C}_{2n-1}=2^{2n-1}$

이므로 $f(n)=2^{2n-2}$이다.

$\log_8 f(n)=100$에서

$\log_8 2^{2n-2}=100,\ \frac{2(n-1)}{3}=100$

따라서 $n=100\times\frac{3}{2}+1=151$

답 151

8 확률

정답

본문 100~111쪽

01 ②	02 ③	03 ③	04 ①	05 ④
06 17	07 ③	08 ②	09 251	10 ④
11 ⑤	12 ④	13 ②	14 ③	15 ①
16 ②	17 43	18 128	19 ②	20 ④
21 ⑤	22 ②	23 ②	24 ③	25 ⑤
26 ①	27 50	28 21	29 ⑤	30 56
31 13	32 ①	33 ③	34 ④	35 3
36 60	37 ③	38 ⑤	39 323	

01

두 개의 주사위를 던져 나오는 눈의 수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 $6\times6=36$

두 개의 주사위의 눈의 수의 곱이 4의 배수가 되려면 두 주사위의 눈의 수가 모두 4가 아닌 2의 배수이거나 두 주사위의 눈의 수 중 적어도 하나가 4이어야 한다.

(i) 두 주사위의 눈의 수가 모두 4가 아닌 2의 배수인 경우

1부터 6까지의 자연수 중 4가 아닌 2의 배수는 2, 6이므로 구하는 경우의 수는

$2\times2=4$

(ii) 두 주사위의 눈의 수 중 적어도 하나가 4인 경우

모든 경우에서 두 주사위의 눈의 수가 모두 4의 배수가 아닌 경우를 제외하면 되므로 구하는 경우의 수는

$36-5\times5=11$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{4+11}{36}=\frac{5}{12}$

답 ②

다른 풀이

아래와 같이 표로 나타내어 구할 수 있다.

×	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

따라서 구하는 확률은

$\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

02

서로 다른 9장의 카드에서 2장의 카드를 순서대로 꺼내는 경우의 수는

$9\times8=72$

$a+b$가 짝수이려면 a, b가 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다.

(i) a, b가 모두 짝수인 경우

1부터 9까지의 자연수 중 짝수는 4개이므로 짝수가 적힌 4장의 카드에서 2장의 카드를 순서대로 꺼내는 경우의 수는

$4\times3=12$

(ii) a, b가 모두 홀수인 경우

1부터 9까지의 자연수 중 홀수는 5개이므로 5장의 카드에서 2장의 카드를 순서대로 꺼내는 경우의 수는

$5\times4=20$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{12+20}{72}=\frac{4}{9}$

답 ③

03

전체집합 U의 모든 부분집합의 개수는

$2^3=8$

전체집합 U의 부분집합 중에서 서로 다른 두 부분집합을 택하는 경우의 수는

${}_8\mathrm{C}_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$

택한 두 부분집합의 합집합이 집합 U와 같고 교집합이 공집합이려면 택한 집합 중 하나를 P라 하면 다른 하나의 집합은 P^C이어야 한다.

이때 집합 P가 될 수 있는 것은 집합 U의 모든 부분집합이고, 두 집합 P, P^C을 순서쌍 (P, P^C)으로 나타내면

$(\varnothing, \{1, 2, 3\})$,

$(\{1\}, \{2, 3\})$, $(\{2\}, \{1, 3\})$, $(\{3\}, \{1, 2\})$,

$(\{1, 2\}, \{3\})$, $(\{1, 3\}, \{2\})$, $(\{2, 3\}, \{1\})$,

$(\{1, 2, 3\}, \varnothing)$

이며 2개씩 중복되므로 택한 두 집합의 합집합이 집합 U와 같고 교집합이 공집합인 경우의 수는 4이다.

따라서 구하는 확률은

$\frac{4}{28}=\frac{1}{7}$

답 ③

04

주머니에서 공을 1개씩 모두 꺼내어 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

1이 적힌 공은 2가 적힌 공보다 왼쪽에 놓이고 3이 적힌 공은 2가 적힌 공보다 오른쪽에 놓이며, A가 적힌 공은 B가 적힌 공보다 왼쪽에 놓이는 사건은 숫자가 적힌 3개의 공과 문자가 적힌 2개의 공을 각각 같은 종류의 공이라 가정하고 일렬로 나열하는 사건과 같다. 즉, 이 사건의 경우의 수는 1, 1, 1, A, A를 일렬로 나열하는 같은 것이 있는 순열의 수와 같으므로

$\frac{5!}{3!\times2!}=10$

따라서 구하는 확률은

$\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$

답 ①

05

한 개의 주사위를 4번 던질 때 일어나는 모든 경우의 수는 6^4

3의 배수의 눈을 ○, 3의 배수가 아닌 수의 눈을 ●라 하면 3의 배수의 눈이 연속으로 2회만 나오는 경우는 ○의 두 개를 하나로 묶어

$\boxed{○○}$●●

을 일렬로 나열하는 것과 같다. 이 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

이때 3의 배수의 눈의 개수가 2이고, 3의 배수가 아닌 수의 눈의 개수가 4이므로 위의 경우 각각에 대하여 3의 배수의 눈이 2회, 3의 배수가 아닌 수의 눈이 2회 나오는 경우의 수는

$2^2\times4^2=2^6$

3의 배수의 눈이 연속으로 2회만 나오는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

3×2^6

따라서 구하는 확률은

$\frac{3\times2^6}{6^4}=\frac{2^2}{3^3}=\frac{4}{27}$

답 ④

06

6명의 사람들이 원형으로 둘러앉는 경우의 수는

$\frac{6!}{6}=5!=120$

1학년 학생이 적어도 1명의 선생님과 이웃하여 앉는 경우의 수는 1학년 학생이 2명의 선생님 중 한 명을 택하여 묶고 이 묶음과 나머지 4명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수에서 1학년 학생이 2명의 선생님과 모두 이웃하도록 묶고 이 묶음과 나머지 3명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

(i) 1학년 학생이 2명의 선생님 중 한 명을 택하여 묶고, 이 묶음과 나머지 4명이 원형으로 둘러앉는 경우

2명의 선생님 중 한 명을 택해 1학년 학생과 묶는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1=2$

이 묶음과 나머지 4명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수는

$\frac{5!}{5}=4!=24$

묶음 내에서 학생과 선생님을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2\times24\times2=96$

(ii) 1학년 학생이 2명의 선생님과 모두 이웃하도록 묶고, 이 묶음과 나머지 3명이 원형으로 둘러앉는 경우

1학년 학생이 2명의 선생님과 모두 이웃하도록 묶었을 때, 묶음 내에서 학생과 선생님을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$2!=2$

이 묶음과 나머지 3명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수는

$\frac{4!}{4}=3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

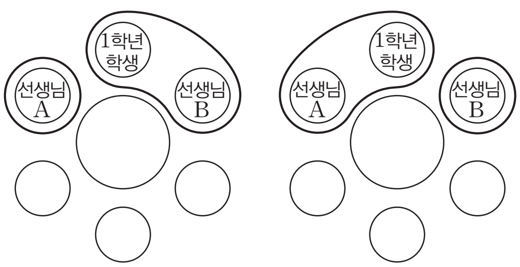
$2\times6=12$

(i), (ii)에서 1학년 학생이 적어도 1명의 선생님과 이웃하여 앉는 경우의 수는

$96-12=84$
이므로 구하는 확률은
$\frac{84}{120}=\frac{7}{10}$
따라서 $p=10$, $q=7$이므로
$p+q=10+7=17$

답 17

참고
1학년 학생이 2명의 선생님 중 한 명을 택하여 묶고 이 묶음과 나머지 4명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수에서 1학년 학생이 2명의 선생님과 모두 이웃하도록 묶고 이 묶음과 나머지 3명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수를 빼는 이유는 1학년 학생이 2명의 선생님 중 한 명을 택하여 묶고 이 묶음과 나머지 4명이 원형으로 둘러앉았을 때, 다음과 같은 경우가 2번으로 중복되기 때문이다.



07

주머니에서 2개의 공을 꺼내는 모든 경우의 수는
${}_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$
꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같은 경우는 2개의 공 모두 흰 공이거나 2개의 공 모두 검은 공인 경우이다.
흰 공 2개를 꺼내는 경우의 수는
${}_3C_2={}_3C_1=3$
검은 공 2개를 꺼내는 경우의 수는
${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$
따라서 구하는 확률은
$\frac{3+6}{21}=\frac{3}{7}$

답 ③

08

서로 다른 6개의 공을 서로 다른 3개의 상자 A, B, C에 각각 2개씩 넣는 경우의 수는 6개의 공 중에서 상자 A에 넣을 공을 2개 선택하고, 남은 4개의 공 중에서 상자 B에 넣을 공을 2개 선택하는 경우의 수와 같으므로
${}_6C_2\times{}_4C_2=\frac{6\times5}{2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}=90$
1부터 6까지의 자연수 중에서 서로소인 두 자연수를 순서쌍으로 나타내면 다음과 같다.
$(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(1,\ 4)$, $(1,\ 5)$, $(1,\ 6)$,
$(2,\ 3)$, $(2,\ 5)$, $(3,\ 4)$, $(3,\ 5)$, $(4,\ 5)$, $(5,\ 6)$
따라서 상자 A에 넣는 2개의 공에 적힌 두 자연수가 서로소인 경우의 수는 11이다.
이때 위의 경우 각각에 대하여 남은 4개의 공을 두 상자 B, C에 2개씩 나누어 담는 경우의 수는
${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$
따라서 구하는 확률은
$\frac{11\times6}{90}=\frac{11}{15}$

답 ②

09

한 개의 주사위를 3번 던져 나오는 모든 경우의 수는
$6^3=216$
a, b, c는 1 이상 6 이하의 자연수이고 $a\le b<c$이므로
$1\le a\le b<c\le6$이고, $a\le b<c$인 경우의 수는 $a<b<c$인 경우의 수에서 $a=b<c$인 경우의 수를 더하여 구한다.
(i) $1\le a<b<c\le6$인 경우
부등식 $1\le a<b<c\le6$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로
${}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$
(ii) $1\le a=b<c\le6$인 경우
부등식 $1\le a=b<c\le6$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 서로 다른 6개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로
${}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$
(i), (ii)에서 $a\le b<c$인 경우의 수는
$20+15=35$
따라서 구하는 확률은 $\frac{35}{216}$이므로
$p=216$, $q=35$
즉, $p+q=216+35=251$

답 251

다른 풀이 1
한 개의 주사위를 3번 던져 나오는 모든 경우의 수는
$6^3=216$
a, b, c는 1 이상 6 이하의 자연수이고 $a\le b<c$이므로
$1\le a\le b<c\le6$ …… ㉠
이때 $b<c$에서 $b\le c-1$이므로 $c-1=c'$이라 하면 c'은 0 이상 5 이하의 정수이고 부등식 ㉠을 만족시키는 1 이상 6 이하의 자연수 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는
$1\le a\le b\le c-1\le5$, 즉 $1\le a\le b\le c'\le5$
를 만족시키는 자연수 a, b, c'의 순서쌍 $(a,\ b,\ c')$의 개수와 같다.
이것은 서로 다른 5개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

따라서 구하는 확률은 $\frac{35}{216}$이므로

$p=216$, $q=35$

즉, $p+q=216+35=251$

다른 풀이 2

한 개의 주사위를 3번 던져 나오는 모든 경우의 수는

$6^3=216$

a, b, c는 1 이상 6 이하의 자연수이고 $a\le b<c$이므로

$1\le a\le b<c\le 6$ …… ㉠

이때 $a\le b$에서 $a<b+1$이므로

$a<b+1<c+1$이고, $b+1=b'$, $c+1=c'$이라 하면

b', c'은 2 이상 7 이하의 자연수이므로 부등식 ㉠을 만족시키는 1 이상 6 이하의 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$1\le a<b'<c'\le 7$을 만족시키는 자연수 a, b', c'의 순서쌍 (a, b', c')의 개수와 같다.

이것은 서로 다른 7개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

따라서 구하는 확률은 $\frac{35}{216}$이므로

$p=216$, $q=35$

즉, $p+q=216+35=251$

10

9명 중 4명을 선택하는 경우의 수는

${}_9C_4=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$

각 학년별로 한 명 이상씩 뽑히려면 한 학년에서 2명, 나머지 두 학년에서 각각 한 명씩 뽑아야 한다.

2명을 뽑을 학년을 선택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

위에서 선택한 학년에서 2명을 뽑고, 나머지 두 학년에서 각각 한 명씩 뽑는 경우의 수는

${}_3C_2\times{}_3C_1\times{}_3C_1=3\times3\times3=27$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times27=81$

따라서 구하는 확률은

$\frac{81}{126}=\frac{9}{14}$

답 ④

11

집합 X에서 집합 X로의 함수의 개수는

$4^4=256$

조건 (가)를 만족시키는 함수의 개수는 0, 1, 2, 3에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같고, 조건 (나)를 만족시키려면 함수의 치역의 원소에 0이 포함되어야 한다.

따라서 두 조건 (가), (나)를 동시에 만족시키는 함수의 개수는 공역 X의 원소 중 0을 하나 택한 후 0, 1, 2, 3에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

즉, ${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

따라서 구하는 확률은

$\frac{20}{256}=\frac{5}{64}$

답 ⑤

다른 풀이

집합 X에서 집합 X로의 함수의 개수는

$4^4=256$

조건 (가)를 만족시키는 함수의 개수는 0, 1, 2, 3에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_4={}_{4+4-1}C_4={}_7C_4={}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

이때 $f(k)=0$을 만족시키는 집합 X의 원소 k가 존재하는 사건을 A라 하면 사건 A^C은 집합 X의 모든 원소 k에 대하여 $f(k)\ne0$인 사건이다. 이 경우의 수는 1, 2, 3에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

따라서 두 조건 (가), (나)를 동시에 만족시키는 함수의 개수는

$35-15=20$

따라서 구하는 확률은

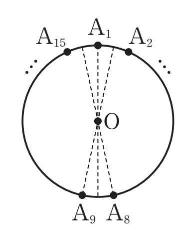
$\frac{20}{256}=\frac{5}{64}$

12

15개의 점에서 임의로 3개를 동시에 선택하는 모든 경우의 수는

${}_{15}C_3=455$

원의 중심을 O, 처음 선택한 점을 A_1이라 하면 삼각형의 내부에 중심 O가 존재하려면 나머지 두 개의 점은 직선 OA_1의 서로 반대쪽에 있어야 한다.



(i) 두 번째로 선택한 점이 A_9일 때

세 번째로 선택한 점은 A_2, A_3, $\cdots$, A_8 중에서 하나이므로 경우의 수는

${}_7C_1=7$

(ii) 두 번째로 선택한 점이 A_{10}일 때

세 번째로 선택한 점은 A_3, A_4, $\cdots$, A_8 중에서 하나이므로 경우의 수는

${}_6C_1=6$

위와 같은 방법으로 두 번째로 선택한 점이

A_{11}이면 경우의 수는 ${}_5C_1=5$

A_{12}이면 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

A_{13}이면 경우의 수는 ${}_3C_1=3$
A_{14}이면 경우의 수는 ${}_2C_1=2$
A_{15}이면 경우의 수는 ${}_1C_1=1$
처음 선택한 점이 A_1일 때의 경우의 수는
$7+6+5+4+3+2+1=28$이므로 원의 중심이 세 점을 이어 만든 삼각형의 내부에 존재하는 삼각형의 개수는
$28\times15\div3=140$
따라서 구하는 확률은
$\frac{140}{455}=\frac{4}{13}$

답 ④

13

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{1}{7}$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=1-\mathrm{P}((A\cup B)^C)\\&=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)\\&=1-\frac{1}{7}\\&=\frac{6}{7}\end{aligned}$$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이고 $\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(B)$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\\&=2\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(B)\\&=3\mathrm{P}(B)\\&=\frac{6}{7}\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(B)=\frac{2}{7}$, $\mathrm{P}(A)=\frac{4}{7}$

따라서 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$

답 ②

14

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{1}{6}$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=1-\mathrm{P}((A\cup B)^C)\\&=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)\\&=1-\frac{1}{6}\\&=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{5}$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=1-\mathrm{P}(B^C)\\&=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\frac{5}{6}=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}-\mathrm{P}(A\cap B)$

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

답 ③

15

7명의 학생을 3명, 4명씩 2개 조로 편성하는 방법의 수는 서로 다른 7개에서 3개를 선택하는 조합의 수와 같으므로

${}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

두 학생 A, B가 같은 조에 편성되는 경우는 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

(i) 두 학생 A, B가 3명인 조에 편성되는 경우
나머지 학생 5명 중 1명을 선택하여 두 학생 A, B가 포함된 조에 편성하면 되므로
${}_5C_1=5$
따라서 이때의 확률은
$\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$

(ii) 두 학생 A, B가 4명인 조에 편성되는 경우
나머지 학생 5명 중 2명을 선택하여 두 학생 A, B가 포함된 조에 편성하면 되므로
${}_5C_2=10$
따라서 이때의 확률은
$\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$

(i), (ii)에서 두 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$

답 ①

16

다음과 같이 세 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) $10a+b$의 값이 짝수인 경우
b의 값이 짝수이면 되므로 a가 홀수일 때 b가 짝수이거나 a가 짝수일 때 b가 짝수인 경우로 나눌 수 있다. 이때 홀수가 3개, 짝수가 2개이므로 확률은
$\frac{{}_3P_1\times{}_2P_1}{{}_5P_2}+\frac{{}_2P_2}{{}_5P_2}=\frac{6+2}{20}=\frac{2}{5}$

(ii) $10a+b$의 값이 3의 배수인 경우
$10a+b=9a+(a+b)$에서 $a+b$의 값이 3의 배수이면 되고 이때 a, b를 순서쌍 (a, b)로 나타내면 다음과 같다.
$(1, 2)$, $(1, 5)$, $(2, 1)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$, $(4, 5)$, $(5, 1)$, $(5, 4)$
따라서 이때의 확률은
$\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$

(iii) $10a+b$의 값이 짝수이면서 3의 배수인 경우
(ii)에서 b의 값이 짝수인 순서쌍 (a, b)는 다음과 같다.
$(1, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 2)$, $(5, 4)$

따라서 이때의 확률은

$\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$\frac{2}{5}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$

답 ②

17

두 개의 1을 각각 1_a, 1_b로 놓고 6개의 자연수 1_a, 1_b, 2, 3, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=720$

(ⅰ) $a_1=1$인 경우

첫 번째에 놓을 1을 선택하는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

나머지 자연수 1, 2, 3, 4, 5를 빈 자리에 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 이때의 확률은

$\frac{2\times120}{720}=\frac{1}{3}$

(ⅱ) $a_2=2$인 경우

2를 두 번째에 놓는 경우의 수는 1

나머지 자연수 1_a, 1_b, 3, 4, 5를 빈 자리에 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 이때의 확률은

$\frac{1\times120}{720}=\frac{1}{6}$

(ⅲ) $a_1=1$이고 $a_2=2$인 경우

첫 번째에 놓을 1을 선택하는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

2를 두 번째에 놓는 경우의 수는 1

나머지 자연수 1, 3, 4, 5를 빈 자리에 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 이때의 확률은

$\frac{2\times1\times24}{720}=\frac{1}{15}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{15}=\frac{13}{30}$

즉, $p=30$, $q=13$이므로

$p+q=30+13=43$

답 43

다른 풀이 1

두 개의 1을 각각 1_a, 1_b로 놓고 6개의 자연수 1_a, 1_b, 2, 3, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$6!=720$

(ⅰ) $a_1=1$이고 $a_2\neq2$인 경우

첫 번째에 놓을 1을 선택하는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

2를 첫 번째와 두 번째가 아닌 다른 위치에 놓는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

나머지 자연수 1, 3, 4, 5를 빈 자리에 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 이때의 확률은 $\frac{2\times4\times24}{720}=\frac{4}{15}$

(ⅱ) $a_1\neq1$이고 $a_2=2$인 경우

2를 두 번째에 놓는 경우의 수는 1

두 개의 1을 첫 번째와 두 번째가 아닌 4개의 위치 중 두 자리에 놓는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

나머지 자연수 3, 4, 5를 빈 자리에 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 이때의 확률은 $\frac{1\times12\times6}{720}=\frac{1}{10}$

(ⅲ) $a_1=1$이고 $a_2=2$인 경우

첫 번째에 놓을 1을 선택하는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

2를 두 번째에 놓는 경우의 수는 1

나머지 자연수 1, 3, 4, 5를 빈 자리에 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 이때의 확률은 $\frac{2\times1\times24}{720}=\frac{1}{15}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$\frac{4}{15}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{13}{30}$

즉, $p=30$, $q=13$이므로

$p+q=30+13=43$

다른 풀이 2

6개의 자연수 1, 1, 2, 3, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!}=360$

(ⅰ) $a_1=1$인 경우

나머지 자연수 1, 2, 3, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

따라서 이때의 확률은 $\frac{120}{360}=\frac{1}{3}$

(ⅱ) $a_2=2$인 경우

나머지 자연수 1, 1, 3, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

따라서 이때의 확률은 $\frac{60}{360}=\frac{1}{6}$

(ⅲ) $a_1=1$이고 $a_2=2$인 경우

나머지 자연수 1, 3, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 이때의 확률은 $\frac{24}{360}=\frac{1}{15}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{15}=\frac{13}{30}$

즉, $p=30$, $q=13$이므로

$p+q=30+13=43$

18

4명의 학생이 10개의 좌석 중 4개를 택해 앉는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{P}_4=10\times9\times8\times7$

4명의 학생들이 어느 누구도 서로 이웃하여 앉지 않으려면 칠판을 바라보고 양쪽에 각각 3명, 1명 또는 2명, 2명씩 앉아야 한다.

(i) 칠판을 바라보고 양쪽에 각각 3명, 1명씩 앉는 경우

왼쪽과 오른쪽 중 3명이 앉을 곳을 선택하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1=2$

선택된 곳에 앉을 3명을 선택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$

선택된 곳의 5개의 자리 중 서로 이웃하지 않게 3자리를 택해 앉는 경우는

●○●○●

의 1가지이고, 이때 3명이 앉는 경우의 수는

$3!=6$

다른 쪽에 앉을 1명이 자리를 선택하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_1=5$

따라서 이때의 확률은

$\dfrac{2\times4\times6\times5}{10\times9\times8\times7}=\dfrac{1}{21}$

(ii) 칠판을 바라보고 양쪽에 각각 2명씩 앉는 경우

왼쪽에 앉을 2명을 선택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

왼쪽의 5개의 자리 중 서로 이웃하지 않게 2자리를 택해 앉는 경우의 수는 2명이 앉을 2개의 자리를 제외한 빈 3자리의 사이사이와 양 끝의 4곳 중 2곳을 택해 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{P}_2=4\times3=12$

오른쪽에 앉을 2명이 자리를 택해 앉는 경우의 수도 위와 같으므로 12

따라서 이때의 확률은

$\dfrac{6\times12\times12}{10\times9\times8\times7}=\dfrac{6}{35}$

(i), (ii)에서 두 사건이 서로 배반사건이므로 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$\dfrac{1}{21}+\dfrac{6}{35}=\dfrac{23}{105}$

즉, $p=105$, $q=23$이므로

$p+q=105+23=128$

답 128

다른 풀이

4명의 학생이 10개의 좌석 중 4개를 택해 앉는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{P}_4=10\times9\times8\times7$

4명의 학생들이 어느 누구도 서로 이웃하지 않으려면 칠판을 바라보고 양쪽에 각각 3명, 1명 또는 2명, 2명씩 앉아야 한다.

(i) 칠판을 바라보고 양쪽에 각각 3명, 1명씩 앉는 경우

왼쪽과 오른쪽 중 3명이 앉을 곳을 선택하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1=2$

선택된 곳의 5개의 자리 중 서로 이웃하지 않게 자리를 택하는 경우의 수는

●○●○●

의 1이고,

다른 쪽에 1명이 앉을 자리를 선택하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_1=5$

선택한 4개의 자리에 4명을 앉히는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 이때의 확률은 $\dfrac{2\times5\times24}{10\times9\times8\times7}=\dfrac{1}{21}$

(ii) 칠판을 바라보고 양쪽에 각각 2명씩 앉는 경우

왼쪽의 5개의 자리 중 서로 이웃하지 않게 2자리를 택하는 경우의 수는 5개의 자리 중 2자리를 택하는 경우의 수에서 서로 이웃한 2자리를 택하는 경우의 수 4를 뺀 것과 같으므로

${}_5\mathrm{C}_2-4=6$

오른쪽의 2자리를 택하는 경우의 수도 위와 같으므로 6

선택된 4개의 자리에 4명을 앉히는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 이때의 확률은 $\dfrac{6\times6\times24}{10\times9\times8\times7}=\dfrac{6}{35}$

(i), (ii)에서 두 사건이 서로 배반사건이므로 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$\dfrac{1}{21}+\dfrac{6}{35}=\dfrac{23}{105}$

즉, $p=105$, $q=23$이므로

$p+q=105+23=128$

19

9명의 학생들 중 임의로 3명씩 두 조를 편성하여 각각 A지역과 B지역으로 사진을 찍으러 가는 경우의 수는

${}_9\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_3=\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}\times\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=1680$

각 조에 남학생이 적어도 1명씩 속하도록 조를 나누는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 여학생만으로 이루어진 조가 있을 사건이다. 이때 여학생이 5명이므로 두 조 모두 여학생으로 이루어질 수는 없고 여학생만으로 이루어진 조가 있는 경우 오직 한 조만 여학생만으로 이루어져 있다.

여학생 5명 중 3명을 선택하고 나머지 6명 중 3명을 선택하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_3\times{}_6\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_3=10\times20=200$

이 두 조를 각각 A지역과 B지역으로 사진을 찍으러 가도록 정하는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 여학생만으로 이루어진 조가 있을 확률은

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{200\times2}{1680}=\dfrac{5}{21}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\dfrac{5}{21}=\dfrac{16}{21}$

답 ②

20

같은 색의 공끼리는 서로 이웃하지 않을 사건을 A라 하면 사건 A^C은 빨간 공끼리 서로 이웃하거나 파란 공끼리 서로 이웃하는 사건이다.
빨간 공 2개, 파란 공 2개, 흰 공 1개, 검은 공 1개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times 2!}=180$

(ⅰ) 빨간 공 2개만 서로 이웃하거나 파란 공 2개만 서로 이웃하는 경우
빨간색과 파란색 중 하나를 선택하는 경우의 수는
$_2C_1=2$
선택된 색의 공 2개를 한 묶음으로 보고 묶음 1개, 흰 공 1개, 검은 공 1개를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$3!=6$
앞서 나열한 공 사이사이와 양 끝의 4곳 중 2곳을 택하여 선택되지 않은 색의 2개의 공을 나열하는 경우의 수는
$_4C_2=\frac{4\times 3}{2\times 1}=6$
따라서 이때의 확률은
$\frac{2\times 6\times 6}{180}=\frac{2}{5}$

(ⅱ) 빨간 공 2개와 파란 공 2개 모두 같은 색의 공끼리 서로 이웃하는 경우
빨간 공 2개를 한 묶음으로, 파란 공 2개를 한 묶음으로 보고 빨간 공 1묶음과 파란 공 1묶음, 흰 공 1개, 검은 공 1개를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$4!=24$
따라서 이때의 확률은 $\frac{24}{180}=\frac{2}{15}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 사건은 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여
$P(A^C)=\frac{2}{5}+\frac{2}{15}=\frac{8}{15}$
따라서 구하는 확률은
$1-P(A^C)=1-\frac{8}{15}=\frac{7}{15}$

답 ④

다른 풀이 1

같은 색의 공끼리는 서로 이웃하지 않을 사건을 A라 하면 사건 A^C은 빨간 공끼리 서로 이웃하거나 파란 공끼리 서로 이웃하는 사건이다.
빨간 공 2개, 파란 공 2개, 흰 공 1개, 검은 공 1개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times 2!}=180$

(ⅰ) 빨간 공 2개가 서로 이웃한 경우
빨간 공 2개를 한 묶음으로 보고 묶음 1개, 파란 공 2개, 흰 공 1개, 검은 공 1개를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!}=60$
따라서 이때의 확률은 $\frac{60}{180}=\frac{1}{3}$

(ⅱ) 파란 공 2개가 서로 이웃한 경우
(ⅰ)의 경우와 같으므로 이때의 확률은 $\frac{1}{3}$

(ⅲ) 빨간 공 2개와 파란 공 2개 모두 같은 색의 공끼리 서로 이웃하는 경우의 수
빨간 공 2개를 한 묶음으로, 파란 공 2개를 한 묶음으로 보고 빨간 공 1묶음과 파란 공 1묶음, 흰 공 1개, 검은 공 1개를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$4!=24$
따라서 이때의 확률은 $\frac{24}{180}=\frac{2}{15}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여
$P(A^C)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{15}=\frac{8}{15}$
따라서 구하는 확률은
$1-P(A^C)=1-\frac{8}{15}=\frac{7}{15}$

다른 풀이 2

같은 색의 공끼리는 서로 이웃하지 않을 사건을 A라 하면 사건 A^C은 빨간 공끼리 서로 이웃하거나 파란 공끼리 서로 이웃하는 사건이다.
같은 색의 공끼리 서로 구별 가능하다고 가정하면 빨간 공 2개와 파란 공 2개, 흰 공 1개, 검은 공 1개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 서로 다른 6개를 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로
$6!=720$

(ⅰ) 빨간 공 2개만 서로 이웃하거나 파란 공 2개만 서로 이웃하는 경우
빨간색과 파란색 중 하나를 선택하는 경우의 수는
$_2C_1=2$
선택된 색의 공 2개를 한 묶음으로 보고 묶음 1개, 흰 공 1개, 검은 공 1개를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$3!=6$
묶음 내의 2개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수는
$2!=2$
앞서 나열한 공 사이사이와 양 끝의 4곳 중 2곳을 택하여 선택되지 않은 색의 2개의 공을 나열하는 경우의 수는
$_4P_2=12$
따라서 이때의 확률은 $\frac{2\times 6\times 2\times 12}{720}=\frac{2}{5}$

(ⅱ) 빨간 공 2개와 파란 공 2개 모두 같은 색의 공끼리 서로 이웃하는 경우
빨간 공 2개를 한 묶음으로, 파란 공 2개를 한 묶음으로 보고 빨간 공 1묶음과 파란 공 1묶음, 흰 공 1개, 검은 공 1개를 나열하는 경우의 수는
$4!=24$
빨간 공 2개와 파란 공 2개를 각각의 묶음 내에서 나열하는 경우의 수는
$2!\times 2!=4$
따라서 이때의 확률은 $\frac{24\times 4}{720}=\frac{2}{15}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 사건은 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여
$P(A^C)=\frac{2}{5}+\frac{2}{15}=\frac{8}{15}$
따라서 구하는 확률은
$1-P(A^C)=1-\frac{8}{15}=\frac{7}{15}$

21

서로 다른 8개의 공 중에서 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$

곡선 $y=x^2-ax+b$와 직선 $y=x-4$가 만나려면 이차방정식

$x^2-ax+b=x-4$, 즉 $x^2-(a+1)x+b+4=0$의 판별식을 D라 할 때, $D\geq0$이어야 한다.

$D=(a+1)^2-4(b+4)$

이때 $D<0$, 즉 $(a+1)^2<4(b+4)$를 만족시키는 a, b $(a>b)$의 순서쌍 (a, b)는 $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$으로 그 개수는 4이다.

따라서 구하는 확률은

$1-\frac{4}{28}=\frac{6}{7}$

답 ⑤

22

조건 (가)에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

조건 (나)에서

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\mathrm{P}(A)}=\frac{3}{4}$

따라서 사건 A가 일어날 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{9}$

답 ②

23

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(B^C|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{1}{2}$에서

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

이때 $\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)$에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$

답 ②

24

ㄱ. 조건 (가)에서 A, B 중 적어도 한 사건이 반드시 일어나므로 사건 A가 일어나지 않으면 사건 B가 반드시 일어난다.
따라서 사건 A^C이 일어났을 때, 사건 B가 일어날 확률은 1이므로
$\mathrm{P}(B|A^C)=1$ (참)

ㄴ. 조건 (가)에서 두 사건 A, B 중 적어도 한 사건이 일어날 확률은 1이므로
$\mathrm{P}(A\cup B)=1$
이때 조건 (나)에서
$\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)$이므로
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)=1$
$2\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(B)-\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{7}{3}\mathrm{P}(B)=1$
따라서 $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{7}$ (거짓)

ㄷ. ㄴ에서 $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{7}$이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{2}{7}$이고
$\mathrm{P}(A)=2\mathrm{P}(B)=2\times\frac{3}{7}=\frac{6}{7}$
이때 $\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)$이므로
$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{6}{7}-\frac{2}{7}=\frac{4}{7}$
따라서 $\mathrm{P}(B^C|A)=\frac{\mathrm{P}(B^C\cap A)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{4}{7}}{\frac{6}{7}}=\frac{2}{3}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

25

임의로 선택한 1명이 체육관 신규 건립을 찬성한 사람인 사건을 A, 여자인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

주어진 표에서 찬성한 사람은 180명이고, 이 중 여자는 80명이므로

$n(A)=180$, $n(A\cap B)=80$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{80}{180}=\frac{4}{9}$

답 ⑤

26

150명의 학생 중 임의로 택한 한 학생이 '미적분'을 선택하지 않은 사건, 즉 '확률과 통계' 또는 '기하'를 선택한 학생인 사건을 A, 남학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

이때 $n(A)=(30+30)+(25+15)=100$이고

$n(A\cap B)=30+25=55$이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{55}{100}=\frac{11}{20}$

답 ①

27

이 상자에 들어 있는 빨간 공은 50개이고, 빨간 공의 40 %에는 숫자 1이 적혀 있으므로 숫자 1이 적혀 있는 빨간 공의 개수는

$50\times\frac{40}{100}=20$이다.

따라서 숫자 2가 적혀 있는 빨간 공의 개수는 $50-20=30$이다.

이 상자에 들어 있는 파란 공 중에서 숫자 1이 적혀 있는 공의 개수를 a, 파란 공 중에서 숫자 2가 적혀 있는 공의 개수를 b라 하고, 주어진 상황을 표로 나타내면 다음과 같다.

숫자 \ 색	빨간 공	파란 공	합계
숫자 1	20	a	$20+a$
숫자 2	30	b	$30+b$
합계	50	$a+b=60$	110

이 상자에 들어 있는 공 중에서 1이 적혀 있는 공의 개수는 $20+a$이고, 이 중에서 파란 공의 개수는 a이다.
따라서 이 상자에 들어 있는 공 중에서 임의로 뽑은 한 개의 공에 숫자 1이 적혀 있을 때, 이 공이 파란 공일 확률은 $\frac{a}{20+a}$이므로

$\frac{a}{20+a}=\frac{2}{3}$, $3a=40+2a$

따라서 $a=40$이므로 $b=60-a=20$
그러므로 이 상자에 들어 있는 공 중에서 숫자 2가 적혀 있는 공의 개수는
$30+b=30+20=50$

답 50

28

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 3의 배수의 눈이 적어도 한 번 나오는 사건을 A, 6의 눈이 두 번 나오는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.
3의 배수의 눈이 한 번도 나오지 않을 확률은

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{4\times4}{6^2}=\frac{4}{9}$

이므로 3의 배수의 눈이 적어도 한 번 나올 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

6의 눈이 두 번 나올 확률은

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6^2}=\frac{1}{36}$

이때 $A\cap B=B$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{36}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{9}}=\frac{1}{20}$$

이므로 $p+q=20+1=21$

답 21

29

A, B가 같은 의자에 서로 이웃하여 앉는 사건을 X, A, B가 3인용 의자에 앉는 사건을 Y라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(Y|X)$이다.
6명이 6개의 자리에 앉는 경우의 수는 $6!$이다.
A, B가 3인용 의자에 서로 이웃하여 앉는 경우의 수는 다음과 같다.
3인용 의자에서 이웃하는 자리를 정하는 경우의 수는 2, A, B의 순서를 정하는 경우의 수는 $2!$, 나머지 4명이 나머지 4개의 자리에 앉는 경우의 수는 $4!$이므로 $2\times2!\times4!$이다.
또 A, B가 2인용 의자에 서로 이웃하여 앉는 경우의 수는 $2!\times4!$이므로

$$\mathrm{P}(X)=\frac{2\times2!\times4!+2!\times4!}{6!}=\frac{4+2}{6\times5}=\frac{1}{5}$$

따라서 $\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{2\times2!\times4!}{6!}=\frac{4}{6\times5}=\frac{2}{15}$

이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{5}}=\frac{2}{3}$$

답 ⑤

30

이 시행에서 나온 4개의 공에 적힌 숫자가 모두 다른 사건을 A, 검은 공이 2개 나오는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.
8개의 공 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

${}_8\mathrm{C}_4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$

이 시행에서 나온 4개의 공에 적힌 숫자가 모두 다른 경우는 다음과 같다.
(i) 4 또는 5가 적힌 공을 꺼내지 않는 경우의 수는
${}_4\mathrm{C}_4=1$
(ii) 4 또는 5가 적힌 공을 한 개만 꺼내는 경우의 수는
${}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_3=4\times4=16$
(iii) 4가 적힌 공과 5가 적힌 공을 각각 한 개씩 꺼내는 경우의 수는
${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2=2\times2\times6=24$
(i), (ii), (iii)에서

$\mathrm{P}(A)=\frac{1+16+24}{70}=\frac{41}{70}$

(i)에서 검은 공이 2개 나오는 경우의 수는 0이다.
(ii)에서 검은 공이 2개 나오려면 1, 2, 3이 적힌 흰 공 중에서 2개, 4, 5가 적힌 검은 공 중에서 1개, 6이 적힌 검은 공을 1개 꺼내야 하므로 그 경우의 수는
${}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1=3\times2\times1=6$
(iii)에서 검은 공이 두 개 나오는 경우의 수는 다음과 같다.
(1) 1, 2, 3이 적힌 흰 공 중에서 2개, 4, 5가 적힌 검은 공 2개를 꺼내는 경우의 수는
${}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2=3\times1=3$
(2) 1, 2, 3이 적힌 흰 공 중에서 1개, 4, 5가 적힌 공 중에서 흰 공 1개와 검은 공 1개, 6이 적힌 검은 공 1개를 꺼내는 경우의 수는
${}_3\mathrm{C}_1\times({}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1)\times{}_1\mathrm{C}_1=3\times(2\times1)\times1=6$

즉, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{6+(3+6)}{70}=\frac{15}{70}=\frac{3}{14}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{3}{14}}{\frac{41}{70}}=\frac{15}{41}$$

이므로 $p+q=41+15=56$

답 56

31

주사위 1개를 던져서 나온 눈의 수가 2 이하인 사건을 A, 택한 카드에 적혀 있는 수가 홀수인 사건을 B라 하자.
주사위의 눈의 수는 2 이하이고, 빨간 카드 중에서 임의로 택한 한 장의 카드에 적혀 있는 수가 홀수일 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

주사위의 눈의 수는 3 이상이고, 노란 카드 중에서 임의로 택한 한 장의 카드에 적혀 있는 수가 홀수일 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$

따라서 $p+q=9+4=13$

답 13

32

B가 던진 2개의 주사위에서 나오는 두 눈의 수를 각각 c, d라 하면 $b=|c-d|$이다.

$0\le b\le 5$이므로 $b\ge 2a$를 만족시키는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) $a=1$, $b\ge 2$일 때

$d-c\ge 2$인 순서쌍 (c, d)는

$(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(2, 6)$, $(3, 5)$, $(3, 6)$, $(4, 6)$

의 10개이므로 $c-d\ge 2$인 순서쌍 (c, d)도 10개이다.

따라서 $a=1$, $b\ge 2$일 확률은

$\frac{1}{6}\times\frac{2\times 10}{36}=\frac{5}{54}$

(ⅱ) $a=2$, $b\ge 4$일 때

$d-c\ge 4$인 순서쌍 (c, d)는

$(1, 5)$, $(1, 6)$, $(2, 6)$

의 3개이므로 $c-d\ge 4$인 순서쌍 (c, d)도 3개이다.

따라서 $a=2$, $b\ge 4$일 확률은

$\frac{1}{6}\times\frac{2\times 3}{36}=\frac{1}{36}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $b\ge 2a$가 성립할 확률은

$\frac{5}{54}+\frac{1}{36}=\frac{10+3}{108}=\frac{13}{108}$

답 ①

33

A가 꺼낸 공에 적혀 있는 세 수 중 두 번째로 큰 수를 a, B가 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 b라 하자.

이때 $a>b$를 만족시키는 a의 값이 될 수 있는 수는 3, 4이므로 $a>b$인 경우와 그 확률은 다음과 같다.

(ⅰ) $a=3>b$일 때

$a=3$이려면 A는 3이 적혀 있는 공은 반드시 꺼내고 1, 2가 적혀 있는 공 중에서 1개, 4, 5가 적혀 있는 공 중에서 1개를 꺼내야 하므로 $a=3$일 확률은

$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{2\times 1\times 2}{10}=\frac{2}{5}$

이때 $b<3$이려면 B는 남아 있는 두 개의 공 중에서 작은 수가 적혀 있는 공을 꺼내야 하므로 $b<3$일 확률은

$\frac{{}_1\mathrm{C}_1}{{}_2\mathrm{C}_1}=\frac{1}{2}$

따라서 $a=3>b$일 확률은 확률의 곱셈정리에 의해

$\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$

(ⅱ) $a=4>b$일 때

$a=4$이려면 A는 1, 2, 3이 적혀 있는 공 중에서 1개를 꺼내고, 4가 적혀 있는 공과 5가 적혀 있는 공을 반드시 꺼내야 하므로 $a=4$일 확률은

$\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{3\times 1}{10}=\frac{3}{10}$

이때 $b<4$이려면 B는 남아 있는 두 개의 공 중에서 아무 공이나 꺼내도 되므로 $b<4$일 확률은 1이다.

따라서 $a=4>b$일 확률은 확률의 곱셈정리에 의해

$\frac{3}{10}\times 1=\frac{3}{10}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=3>b$인 사건과 $a=4>b$인 사건은 서로 배반사건이므로 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의해

$\frac{1}{5}+\frac{3}{10}=\frac{1}{2}$

답 ③

참고

$a=2$이려면 A가 1과 2가 적혀 있는 공은 반드시 꺼내고, 3, 4, 5가 적혀 있는 공 중에서 1개를 꺼내야 하므로 $b=1$인 경우는 불가능하다.

따라서 $a=2>b$일 확률은 0이다.

34

두 사건 A, B가 서로 독립이고, 두 사건 A^C, B도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)$

따라서 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$이고 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

따라서 확률의 덧셈정리에 의해

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{5}{8}\end{aligned}$$

답 ④

35

재호가 빨간 공 2개를 꺼내는 사건을 X, 희재가 빨간 공 2개를 꺼내는 사건을 Y라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(X\cap Y)$이다.

$\mathrm{P}(X)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$, $\mathrm{P}(Y)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$

이때 두 사건 X, Y는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(X\cap Y)=\mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y)=\frac{1}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{100}$

따라서 $100p=3$

답 3

36

조사 대상인 280명 중에서 임의로 선택한 한 명이 남학생인 사건을 A, 개를 선호하는 학생인 사건을 B라 하면 두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$이어야 한다.

조사 대상인 280명 중에서 개를 선호하는 학생의 수는 $108+k$이므로

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{108+k}{280}$

조사 대상인 남학생 180명 중에서 개를 선호하는 학생은 108명이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{108}{180}=\dfrac{3}{5}$

따라서 $\dfrac{108+k}{280}=\dfrac{3}{5}$에서

$108+k=280\times\dfrac{3}{5}=168$이므로

$k=60$

답 60

다른 풀이

조사 대상인 280명 중에서 임의로 선택한 한 명이 남학생인 사건을 A, 개를 선호하는 학생인 사건을 B라 하면 두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이어야 한다.

주어진 표에서

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{108+72}{280}=\dfrac{9}{14}$

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{108+k}{280}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{108}{280}=\dfrac{27}{70}$

따라서 $\dfrac{27}{70}=\dfrac{9}{14}\times\dfrac{108+k}{280}$이므로

$108+k=\dfrac{27}{70}\times\dfrac{14}{9}\times 280=168$

즉, $k=60$

37

한 개의 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\dfrac{1}{2}$이므로 한 개의 동전을 던지는 시행을 5회 반복하는 독립시행에서 앞면이 r회 나올 확률은

${}_5\mathrm{C}_r\left(\dfrac{1}{2}\right)^r\left(\dfrac{1}{2}\right)^{5-r}={}_5\mathrm{C}_r\times\dfrac{1}{32}$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$

이때 구하는 확률은 $r=1,\ 3,\ 5$일 확률이므로

${}_5\mathrm{C}_1\times\dfrac{1}{32}+{}_5\mathrm{C}_3\times\dfrac{1}{32}+{}_5\mathrm{C}_5\times\dfrac{1}{32}=\dfrac{5+10+1}{32}=\dfrac{1}{2}$

답 ③

38

한 개의 주사위를 던질 때 짝수의 눈이 나올 확률은 $\dfrac{1}{2}$이고, 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\dfrac{2}{3}$이다.

(i) $a=2,\ b=1$일 때

$a=2$일 확률은 ${}_4\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{8}$

$b=1$일 확률은 ${}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{2}{3}\right)^1\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{2}{9}$

이때 $a=2$인 사건과 $b=1$인 사건은 서로 독립이므로 $a=2,\ b=1$일 확률은

$\dfrac{3}{8}\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{12}$

(ii) $a=4,\ b=2$일 때

$a=4$일 확률은 ${}_4\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{16}$

$b=2$일 확률은 ${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^1=\dfrac{4}{9}$

이때 $a=4$인 사건과 $b=2$인 사건은 서로 독립이므로 $a=4,\ b=2$일 확률은

$\dfrac{1}{16}\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{1}{36}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{36}=\dfrac{3+1}{36}=\dfrac{1}{9}$

답 ⑤

39

6회의 시행에서 $\log 5$가 적혀 있는 카드가 뽑힌 횟수를 k라 하면 종이에 적힌 6개의 수를 모두 더한 값은

$k\log 5+(6-k)\log 4=\log(5^k\times 4^{6-k})$

$=\log(5^k\times 2^{12-2k})$

이때 $\log(5^k\times 2^{12-2k})=N$ (N은 자연수)라 하면

$5^k\times 2^{12-2k}=10^N$이므로 $k=12-2k$, 즉 $k=4$이어야 한다.

이때 한 번의 시행에서 $\log 5$가 적혀 있는 카드를 뽑을 확률은 $\dfrac{2}{3}$이므로 구하는 확률은

${}_6\mathrm{C}_4\left(\dfrac{2}{3}\right)^4\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{15\times 16}{3^6}=\dfrac{80}{243}$

따라서 $p+q=243+80=323$

답 323

9 통계

정답				본문 114~125쪽
01 ⑤	02 ③	03 ④	04 ④	05 ④
06 ①	07 ④	08 ④	09 59	10 12
11 29	12 ①	13 ⑤	14 10	15 ①
16 ①	17 14	18 29	19 ⑤	20 ④
21 ③	22 ③	23 ①	24 ①	25 ①
26 63	27 ①	28 ③	29 ③	30 ①
31 ②	32 ①	33 75	34 ③	35 ②
36 4	37 ⑤	38 ④	39 ①	

01

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(0<X\le 2)&=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)\\&=1-\mathrm{P}(X=-1)-\mathrm{P}(X=0)\\&=1-\frac{1}{12}-\frac{1}{3}=\frac{7}{12}\end{aligned}$$

답 ⑤

다른 풀이

$\frac{1}{12}+\frac{1}{3}+a+\frac{1}{12}=1$에서 $a=\frac{1}{2}$

따라서

$\mathrm{P}(0<X\le 2)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$

02

확률변수 X의 모든 확률의 합은 1이므로

$\sum_{k=1}^{4}\mathrm{P}(X=k)=a\times 4\times(4+1)=1$

따라서 $a=\frac{1}{20}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(2\le X\le 3)&=\sum_{k=2}^{3}\mathrm{P}(X=k)\\&=\sum_{k=1}^{3}\mathrm{P}(X=k)-\sum_{k=1}^{1}\mathrm{P}(X=k)\\&=\frac{3\times 4}{20}-\frac{1\times 2}{20}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ③

03

$\mathrm{P}(X=x)=ax^2+\frac{1}{12}$ $(x=-1,\ 0,\ 1,\ 2)$이고

$\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=1$이므로

$a(1+0+1+4)+4\times\frac{1}{12}=1$, 즉 $a=\frac{1}{9}$

$X=-1,\ 0,\ 1,\ 2$일 때 $Y=X^2-2$의 값은 차례로 $-1,\ -2,\ -1,\ 2$이므로

$b=2$

이때 $\mathrm{P}(X=x)=\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{12}$ $(x=-1,\ 0,\ 1,\ 2)$에서

$\mathrm{P}(Y=-2)=\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{12}$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y=-1)&=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=1)\\&=\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{12}\right)=\frac{7}{18}\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(Y=2)=\mathrm{P}(X=2)=\frac{4}{9}+\frac{1}{12}=\frac{19}{36}$

따라서 $c=\frac{1}{12}$, $d=\frac{7}{18}$, $e=\frac{19}{36}$이므로

$$\frac{d}{ab}=\frac{\frac{7}{18}}{\frac{1}{9}\times 2}=\frac{7}{4}$$

답 ④

04

모든 확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+a=1$에서 $a=\frac{1}{6}$

따라서 X의 기댓값은

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}\\&=\frac{3+4+3}{6}=\frac{5}{3}\end{aligned}$$

답 ④

05

모든 확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{4}+a+b=1$

즉, $b=\frac{3}{4}-a$ ······ ㉠

따라서

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times a+3\times b=2a+3b+\frac{1}{4}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times a+3^2\times b=4a+9b+\frac{1}{4}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=\left(4a+9b+\frac{1}{4}\right)-\left(2a+3b+\frac{1}{4}\right)^2\\&=(7-5a)-\left(\frac{5}{2}-a\right)^2\\&=\frac{3}{4}-a^2\end{aligned}$$

$\sigma(X)=\frac{\sqrt{11}}{4}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\frac{3}{4}-a^2=\left(\frac{\sqrt{11}}{4}\right)^2$

$a^2=\frac{1}{16}$

$a>0$이므로 $a=\frac{1}{4}$

따라서 $b=\frac{3}{4}-a=\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{b}{a}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=2$$

답 ④

06

$\mathrm{P}(X=n)=p_n\,(n=0,\ 1,\ 2,\ 3)$이라 하면

$\mathrm{P}(X=n)=n\mathrm{P}(X=n-1)$에서

$p_1=p_0,\ p_2=2p_1=2p_0,\ p_3=3p_2=3(2p_0)=6p_0$

확률변수 X의 모든 확률의 합은 1이므로

$p_0+p_1+p_2+p_3=p_0+p_0+2p_0+6p_0=1$에서

$p_0=\frac{1}{10},\ p_1=\frac{1}{10},\ p_2=\frac{2}{10},\ p_3=\frac{6}{10}$

따라서

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{2}{10}+3\times\frac{6}{10}$$

$$=\frac{0+1+4+18}{10}=\frac{23}{10},$$

$$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{10}+1^2\times\frac{1}{10}+2^2\times\frac{2}{10}+3^2\times\frac{6}{10}$$

$$=\frac{0+1+8+54}{10}=\frac{63}{10}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{63}{10}-\left(\frac{23}{10}\right)^2=\frac{63}{10}-\frac{529}{100}=\frac{101}{100}$$

답 ①

07

꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차인 X가 갖는 값은 0, 1, 2이다.

$X=0$인 경우는 꺼낸 두 공에 적힌 수가 모두 1이거나 모두 2이거나 모두 3일 때이므로

$$\mathrm{P}(X=0)=\frac{3}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$$

$X=2$인 경우는 1이 적힌 공 1개와 3이 적힌 공 1개가 나올 때이므로

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{2\times2}{15}=\frac{4}{15}$$

$$\mathrm{P}(X=1)=1-\mathrm{P}(X=0)-\mathrm{P}(X=2)=1-\frac{1}{5}-\frac{4}{15}=\frac{8}{15}$$

따라서 $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{4}{15}=\frac{16}{15}$

답 ④

08

(i) 처음에 A 상자를 택하고, 두 번째에 A 상자를 택할 때 $X=2$이고, 이때의 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(ii) 처음에 A 상자를 택하고, 두 번째에 B 상자를 택할 때 $X=3$이고, 이때의 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(iii) 처음에 B 상자를 택하고, 두 번째에 A 상자를 택할 때 $X=4$이고, 이때의 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(iv) 처음에 B 상자를 택하고, 두 번째에 B 상자를 택할 때 $X=1$이고, 이때의 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}=\frac{5}{2},$$

$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{4}=\frac{15}{2}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{15}{2}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{30-25}{4}=\frac{5}{4}$$

답 ④

09

세 자리의 자연수의 개수는

$9\times10\times10=900$

세 자리의 자연수 중에서 숫자 5가 적혀 있지 않은 수의 개수는

$8\times9\times9=648$

이므로 $\mathrm{P}(X=0)=\frac{648}{900}$

세 자리의 자연수 중에서 숫자 5가 한 개 적혀 있는 수의 개수는

$1\times9\times9+8\times1\times9+8\times9\times1=225$

이므로 $\mathrm{P}(X=1)=\frac{225}{900}$

세 자리의 자연수 중에서 숫자 5가 두 개 적혀 있는 수의 개수는

$1\times1\times9+1\times9\times1+8\times1\times1=26$

이므로 $\mathrm{P}(X=2)=\frac{26}{900}$

세 자리의 자연수 중에서 숫자 5가 세 개 적혀 있는 수의 개수는

$1\times1\times1=1$

이므로 $\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{900}$

따라서

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{648}{900}+1\times\frac{225}{900}+2\times\frac{26}{900}+3\times\frac{1}{900}$$

$$=\frac{225+52+3}{900}=\frac{280}{900}=\frac{14}{45}$$

이므로 $p+q=45+14=59$

답 59

10

$\mathrm{E}(2X)=2\mathrm{E}(X)=8$이므로

$\mathrm{E}(X)=4$

따라서 $\mathrm{E}(X+8)=\mathrm{E}(X)+8=4+8=12$

답 12

11

모든 확률의 합은 1이므로

$a+\frac{1}{3}+b=1$에서 $a+b=\frac{2}{3}$

이때

$\mathrm{E}(X)=(-1)\times a+0\times\frac{1}{3}+1\times b=-a+b=0$

이므로 $a=b=\frac{1}{3}$

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times a+0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times b=a+b=\frac{2}{3}$

따라서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{2}{3}-0^2=\frac{2}{3}$이므로

$\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)=\frac{1}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$

따라서 $p+q=27+2=29$

답 29

12

B와 C 두 명 중에서 A와 이웃하는 사람의 수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

나머지 2명을 D, E라 할 때, 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$5!=120$

(i) B, C 두 사람 중 아무도 A와 이웃하지 않도록 세우는 경우, 즉 $X=0$인 경우

(1) A가 양 끝자리 중 한 자리에 서는 경우

A가 설 자리를 정하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1=2$

D, E 중 A와 이웃할 사람을 정하여 A의 옆에 세우는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1=2$

나머지 3명을 세우는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 이 경우의 수는 $2\times2\times6=24$

(2) A가 양 끝자리에 서지 않는 경우

A가 설 자리를 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$

D, E를 A의 양 옆에 이웃하도록 세우는 경우의 수는 $2!=2$

B, C를 나머지 두 자리에 세우는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 이 경우의 수는 $3\times2\times2=12$

(1), (2)에서 $X=0$인 경우의 수는 $24+12=36$이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$

(ii) B, C 두 사람이 모두 A와 이웃하도록 세우는 경우, 즉 $X=2$인 경우

A의 양 옆에 B, C를 세우는 경우의 수는 $2!=2$

이 세 명을 한 묶음으로 간주하고, 이 묶음과 D, E를 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 $X=2$인 경우의 수는 $2\times6=12$이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$

(i), (ii)에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=1)&=1-\mathrm{P}(X=0)-\mathrm{P}(X=2)\\&=1-\frac{3}{10}-\frac{1}{10}=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

이므로

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$

따라서 $\mathrm{E}(aX+a)=a\mathrm{E}(X)+a=\frac{4a}{5}+a=\frac{9a}{5}$이므로

$\frac{9a}{5}=90$에서 $a=50$

답 ①

13

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(72,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=72\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=16$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{16}=4$이므로

$\sigma(2X)=2\sigma(X)=2\times4=8$

답 ⑤

14

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$\mathrm{P}(X=1)={}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}=n\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

$\mathrm{P}(X=2)={}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}$

따라서 $\frac{\mathrm{P}(X=1)}{\mathrm{P}(X=2)}=\frac{2}{n-1}\times\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}}=\frac{3}{n-1}=\frac{1}{3}$에서

$n-1=9$이므로 $n=10$

답 10

15

각 시행에서 꺼낸 공을 다시 주머니에 넣으므로 각 시행은 독립시행이다.

흰 공 2개와 검은 공 n개가 들어 있는 상자에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 흰 공이 나올 확률은 $\frac{2}{n+2}$이다.

따라서 10회의 독립시행 중에서 흰 공이 나온 횟수가 확률변수 X이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{2}{n+2}\right)$를 따른다.

따라서 $\mathrm{V}(X)=10\times\frac{2}{n+2}\times\frac{n}{n+2}=\frac{20}{9}$에서

$(n+2)^2=9n$

$n^2-5n+4=(n-1)(n-4)=0$

$n\geq2$이므로 $n=4$

답 ①

16

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(X<2)\\&=1-\{\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)\}\\&=1-\left\{{}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}\\&=1-\frac{5}{16}=\frac{11}{16}\end{aligned}$$

한편, 사건 $A\cap B$는 $X=2$인 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(X=2)={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{11}{16}}=\frac{6}{11}$

답 ①

17

확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=r)={}_3\mathrm{C}_r\left(\frac{2}{3}\right)^r\left(\frac{1}{3}\right)^{3-r}$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(3,\ \frac{2}{3}\right)$를 따른다.

따라서 $\mathrm{E}(X)=3\times\frac{2}{3}=2$, $\mathrm{V}(X)=3\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이므로

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{2}{3}+2^2=\frac{14}{3}$

따라서 $\mathrm{E}(3X^2)=3\mathrm{E}(X^2)=3\times\frac{14}{3}=14$

답 14

다른 풀이

확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=r)={}_3\mathrm{C}_r\times\frac{2^r}{27}$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$	1

따라서

$\mathrm{E}(X^2)=\frac{0^2\times1+1^2\times6+2^2\times12+3^2\times8}{27}=\frac{14}{3}$

이므로

$\mathrm{E}(3X^2)=3\mathrm{E}(X^2)=3\times\frac{14}{3}=14$

18

2개의 전구가 켜지려면 스위치는 2번 또는 5번 눌러야 하므로 주사위를 한 번 던질 때마다 2개의 전구가 켜진 상태가 나타날 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

주어진 시행을 독립적으로 10회 실시할 때, 2개의 전구가 켜진 결과가 나오는 횟수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

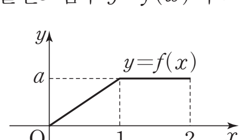
따라서 $\mathrm{V}(X)=10\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{20}{9}$이므로

$p+q=9+20=29$

답 29

19

연속확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$\frac{1}{2}\times1\times a+(2-1)\times a=1$, 즉 $\frac{3a}{2}=1$

따라서 $a=\frac{2}{3}$

답 ⑤

20

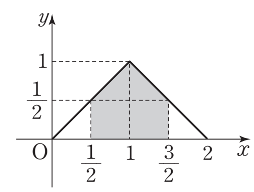
주어진 확률밀도함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이어야 하므로

$\frac{1}{2}\times2\times a=1$, 즉 $a=1$

이때 $f(t)=\mathrm{P}(t\le X\le t+1)$의 값은 주어진 확률밀도함수의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=t$, $x=t+1$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

그런데 주어진 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $f(t)$의 값이 최대가 되려면 x축 위의 두 점 $\mathrm{A}(t,\ 0)$, $\mathrm{B}(t+1,\ 0)$에 대하여 선분 AB의 중점의 x좌표가 1이어야 한다.

즉, $\frac{t+(t+1)}{2}=1$이어야 하므로 $t=\frac{1}{2}$



따라서 함수 $f(t)$의 최댓값은

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le\frac{3}{2}\right)$$
$$=2\times\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+1\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{3}{4}$$

답 ④

21

$f(3-x)=f(3+x)$이므로 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.

따라서 $\mathrm{P}(0\le X\le1)=\mathrm{P}(5\le X\le6)$이고

$\mathrm{P}(1\le X\le3)=\mathrm{P}(3\le X\le5)$이다.

또 $\mathrm{P}(0\le X\le3)=\mathrm{P}(0\le X\le1)+\mathrm{P}(1\le X\le3)=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(0\le X\le1)=\mathrm{P}(5\le X\le6)=p$라 하면

$\mathrm{P}(1\le X\le3)=\mathrm{P}(3\le X\le5)=\frac{1}{2}-p$이므로

$\mathrm{P}(1\le X\le3)=2\times\mathrm{P}(5\le X\le6)$에서

$\frac{1}{2}-p=2p$

따라서 $p=\frac{1}{6}$이므로

$$\mathrm{P}(1\le X\le5)=\mathrm{P}(1\le X\le3)+\mathrm{P}(3\le X\le5)$$
$$=2\left(\frac{1}{2}-p\right)=1-2p$$
$$=1-2\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

답 ③

22

$$\mathrm{P}(-1\le Z\le-0.5)=\mathrm{P}(0.5\le Z\le1)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le1)-\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)$$
$$=0.3413-0.1915=0.1498$$

답 ③

23

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ \sigma^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-20}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$$\mathrm{P}(|X-20|\le 6)=\mathrm{P}\left(\left|\frac{X-20}{\sigma}\right|\le\frac{6}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(|Z|\le\frac{6}{\sigma}\right)$$
$$=2\times\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{6}{\sigma}\right)$$
$$=2\times\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$$

이므로

$$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{6}{\sigma}\right)=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$$

즉, $\frac{6}{\sigma}=1.5$이므로 $\sigma=\frac{6}{1.5}=4$

따라서

$$\mathrm{P}(18\le X\le 24)=\mathrm{P}\left(\frac{18-20}{4}\le\frac{X-20}{4}\le\frac{24-20}{4}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 1)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=0.1915+0.3413=0.5328$$

답 ①

24

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르고

$\mathrm{P}(X\le m-4)=\mathrm{P}(X\ge 2m-4)$이므로

$$\frac{(m-4)+(2m-4)}{2}=m$$

즉, $m=8$

따라서 확률변수 $Z=\frac{X-8}{2}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(4\le X\le 6)=\mathrm{P}\left(\frac{4-8}{2}\le\frac{X-8}{2}\le\frac{6-8}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-2\le Z\le -1)$$
$$=\mathrm{P}(1\le Z\le 2)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=0.4772-0.3413=0.1359$$

답 ①

25

이 농장에서 수확한 참외 중 임의로 선택한 1개의 무게를 확률변수 $X(\mathrm{g})$이라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(350,\ 25^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-350}{25}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X\le 300)=\mathrm{P}\left(\frac{X-350}{25}\le\frac{300-350}{25}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le -2)=\mathrm{P}(Z\ge 2)$$
$$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$$
$$=0.5-0.4772=0.0228$$

답 ①

26

이 회사의 각 직원이 하루 근무시간 동안 휴식을 취하는 시간을 확률변수 X(분)이라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(43,\ 10^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-43}{10}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(X\le a)=\mathrm{P}\left(\frac{X-43}{10}\le\frac{a-43}{10}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a-43}{10}\right)=0.9772$$

이때 $\frac{a-43}{10}>0$이므로

$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a-43}{10}\right)=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-43}{10}\right)=0.9772$에서

$$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-43}{10}\right)=0.9772-0.5=0.4772$$

따라서 $\frac{a-43}{10}=2$이므로

$a=43+2\times 10=63$

답 63

27

5000명의 키를 확률변수 $X(\mathrm{cm})$라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(174,\ 5^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-174}{5}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

5000명의 키를 큰 값부터 크기순으로 나열할 때, 1500번째 이내에 들기 위한 키의 최솟값을 $k(\mathrm{cm})$라 하면

$$\mathrm{P}(X\ge k)=\mathrm{P}\left(\frac{X-174}{5}\ge\frac{k-174}{5}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{k-174}{5}\right)$$
$$=\frac{1500}{5000}=0.3$$

즉, $\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{k-174}{5}\right)=0.5-0.3=0.2$이어야 한다.

따라서 $\frac{k-174}{5}=0.52$이므로

$k=174+5\times 0.52=174+2.6=176.6$

답 ①

28

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(1200,\ \frac{3}{4}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=1200\times\frac{3}{4}=900$$

$$\mathrm{V}(X)=1200\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=225=15^2$$

이때 시행 횟수 1200은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(900,\ 15^2)$을 따른다.

따라서 확률변수 $Z=\frac{X-900}{15}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(900\le X\le 915)=\mathrm{P}\left(\frac{900-900}{15}\le\frac{X-900}{15}\le\frac{915-900}{15}\right)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$$

답 ③

29

함수 $\mathrm{P}(X=k)={}_{192}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{192-k}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 192)$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(192,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르는 확률변수 X의 확률질량함수이다.

따라서 $\sum_{k=48}^{57}{}_{192}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{192-k}$의 값은 확률 $\mathrm{P}(48\le X\le 57)$의 값과 같다.

이때 $\mathrm{E}(X)=192\times\frac{1}{4}=48$, $\mathrm{V}(X)=192\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=36$이고,

시행 횟수 192는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(48,\ 6^2)$을 따르고, 확률변수 $Z=\frac{X-48}{6}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(48\le X\le 57)&=\mathrm{P}\left(\frac{48-48}{6}\le Z\le\frac{57-48}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332\end{aligned}$$

답 ③

30

네 문자 중 서로 다른 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$이므로 A, B를 모두 선택할 확률은 $\frac{1}{6}$이다.

720명의 학생 중 A, B를 선택한 학생의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(720,\ \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=720\times\frac{1}{6}=120$

$\mathrm{V}(X)=720\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=100$

이때 시행 횟수 720은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$을 따른다.

따라서 확률변수 $Z=\frac{X-120}{10}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(110\le X\le 135)&=\mathrm{P}\left(\frac{110-120}{10}\le\frac{X-120}{10}\le\frac{135-120}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.3413+0.4332=0.7745\end{aligned}$$

답 ①

31

$\mathrm{V}(X)=4$이므로

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{4}=2$

이때 표본의 크기는 $n=9$이므로 $\overline{X}$의 표준편차는

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$

답 ②

다른 풀이

$\mathrm{V}(X)=4$이고 표본의 크기는 $n=9$이므로 $\overline{X}$의 분산은

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{n}=\frac{4}{9}$

따라서 $\overline{X}$의 표준편차는

$\sigma(\overline{X})=\sqrt{\mathrm{V}(\overline{X})}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

32

이 모집단에서 임의추출한 크기가 3인 표본의 값을 차례로 X_1, X_2, X_3이라 하면

$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+X_3}{3}$

이때 $\overline{X}=2$, 즉 $X_1+X_2+X_3=6$인 순서쌍 $(X_1,\ X_2,\ X_3)$과 그때의 확률은 다음과 같다.

(i) $(X_1,\ X_2,\ X_3)$이 $(2,\ 2,\ 2)$일 때

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$

(ii) $(X_1,\ X_2,\ X_3)$이 $(1,\ 2,\ 3)$, $(1,\ 3,\ 2)$, $(2,\ 1,\ 3)$, $(2,\ 3,\ 1)$, $(3,\ 1,\ 2)$, $(3,\ 2,\ 1)$일 때

$6\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\frac{1}{27}+\frac{1}{6}=\frac{2+9}{54}=\frac{11}{54}$

답 ①

33

주어진 확률분포를 나타낸 표에서 모든 확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{2}+a+\frac{1}{4}=1$

즉, $a=\frac{1}{4}$

따라서

$\mathrm{E}(X)=(-1)\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$,

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{2}+0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{3}{4}-\frac{1}{16}=\frac{11}{16}$

따라서 크기가 4인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{4}=\frac{\frac{11}{16}}{4}=\frac{11}{64}$

이므로 $p+q=64+11=75$

답 75

34

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 4^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-50}{4}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 44)&=\mathrm{P}\left(\frac{X-50}{4}\le\frac{44-50}{4}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{3}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

한편, 크기가 64인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포

$\mathrm{N}\left(50, \left(\frac{4}{\sqrt{64}}\right)^2\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(50, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따르므로 확률변수

$Z=\dfrac{\overline{X}-50}{\frac{1}{2}}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(\overline{X}\ge a)=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-50}{\frac{1}{2}}\ge\frac{a-50}{\frac{1}{2}}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 2(a-50))$$

이때 $\mathrm{P}(X\le 44)=\mathrm{P}(\overline{X}\ge a)$에서

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{3}{2}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 2(a-50))$이므로

$2(a-50)=\frac{3}{2}$

따라서 $a=50+\frac{3}{4}=\frac{203}{4}$

답 ③

35

1000명의 학생 중에서 임의로 선택한 1명이 수학문제를 푸는 데 걸린 시간을 확률변수 X(분)이라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(8, 2^2)$을 따르므로 1000명 중 임의추출한 9명이 그 문제를 푸는 데 걸린 시간의 평균을 확률변수 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 평균이 8분, 표준편차가 $\frac{2}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$(분)인 정규분포를 따른다.

따라서 확률변수 $Z=\dfrac{\overline{X}-8}{\frac{2}{3}}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\le 7)&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-8}{\frac{2}{3}}\le\frac{7-8}{\frac{2}{3}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{3}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{3}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{3}{2}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332=0.0668\end{aligned}$$

답 ②

36

이 학교의 학생이 하루에 섭취하는 단백질의 양을 확률변수 X(g)이라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(60, 5^2)$을 따른다.
따라서 이 학교의 학생 중 임의추출한 n명이 하루에 섭취하는 단백질의 양의 평균을 $\overline{X}$(g)이라 하면 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포

$\mathrm{N}\left(60, \left(\frac{5}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

이때 확률변수 $Z=\dfrac{\overline{X}-60}{\frac{5}{\sqrt{n}}}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}\le 65)=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-60}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\le\frac{65-60}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right)=\mathrm{P}(Z\le\sqrt{n})=0.9772$$

그런데 $\mathrm{P}(Z\le 2)=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.5+0.4772=0.9772$
이므로 $\sqrt{n}=2$
따라서 $n=4$

답 4

37

$\overline{x}=150$, $n=4$, $\sigma=2$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$150-2.58\times\frac{2}{\sqrt{4}}\le m\le 150+2.58\times\frac{2}{\sqrt{4}}$$

즉, $147.42\le m\le 152.58$
따라서 $a=147.42$

답 ⑤

38

임의추출한 바나나 100송이를 이용하여 얻은 표본평균의 값이 $\overline{x}$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}$$

이때 주어진 신뢰구간이 $2.3008\le m\le 2.3792$이므로

$$\overline{x}=\frac{2.3008+2.3792}{2}=\frac{4.68}{2}=2.34$$

또 $2.3792=2.34+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}$에서

$\sigma=\frac{0.0392\times 10}{1.96}=0.2$이므로

$$\frac{\overline{x}}{\sigma}=\frac{2.34}{0.2}=\frac{234}{20}=11.7$$

답 ④

39

이 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값을 $\overline{x_1}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이므로

$$b-a=2\times 1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이 모집단에서 크기가 k인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값을 $\overline{x_2}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{k}}\le m\le\overline{x_2}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{k}}$이므로

$$d-c=2\times 2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{k}}$$

이때 $\dfrac{d-c}{b-a}=\dfrac{2\times 2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{k}}}{2\times 1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\dfrac{129}{49}$에서

$\frac{258\sqrt{n}}{196\sqrt{k}}=\frac{129\sqrt{n}}{98\sqrt{k}}=\frac{129}{49}$이므로 $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}}=2$

따라서 $\frac{n}{k}=2^2=4$이므로 $\frac{k}{n}=\frac{1}{4}$

답 ①

실전 모의고사

실전 모의고사 1회

본문 130~137쪽

01 ③	02 ②	03 ④	04 ⑤	05 ②
06 ④	07 ④	08 ③	09 ①	10 ④
11 ⑤	12 ②	13 ③	14 ⑤	15 ②
16 ④	17 ①	18 ③	19 ①	20 ②
21 ⑤	22 7	23 15	24 32	25 27
26 16	27 14	28 30	29 341	30 14

01

${}_2\Pi_3=2^3=8$

답 ③

02

$8^{\frac{2}{3}}+81^{\frac{1}{4}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}+(3^4)^{\frac{1}{4}}=2^2+3=7$

답 ②

03

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{x^2+3x-10}{\sqrt{x-1}-1}&=\lim_{x\to2}\frac{(x^2+3x-10)(\sqrt{x-1}+1)}{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}\\&=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+5)(\sqrt{x-1}+1)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}(x+5)(\sqrt{x-1}+1)=14\end{aligned}$$

답 ④

04

$f'(x)=12x^3+6x^2+1$이므로

$f'(1)=12+6+1=19$

답 ⑤

05

$$\begin{aligned}&\int_1^3(x+1)^2dx+\int_3^1(x-1)^2dx\\&=\int_1^3(x^2+2x+1)dx-\int_1^3(x^2-2x+1)dx\\&=\int_1^3\{(x^2+2x+1)-(x^2-2x+1)\}dx\\&=\int_1^3 4x\,dx\\&=\Big[2x^2\Big]_1^3\\&=18-2=16\end{aligned}$$

답 ②

06

$P(A^C)=\frac{1}{3}$에서 $P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$P(A)P(B)=\frac{1}{3}$이고 $P(A)=\frac{2}{3}$이므로

$P(B)=\frac{1}{2}$

따라서

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\\&=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

답 ④

07

$g(x)=\sin\frac{x}{3}$라 하면 함수 $g(x)=\sin\frac{x}{3}$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$이고

함수 $y=g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이므로 함수 $f(x)$의 주기는 6π이고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(0, 2)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $p=6\pi$, $q=2$이므로

$pq=6\pi\times2=12\pi$

답 ④

08

$a_2=a_1\left(\frac{1}{2}a_1+k\right)=2\left(\frac{1}{2}\times2+k\right)=2(1+k)$

$a_3=a_2\left(\frac{1}{2}a_2+k\right)=2(1+k)\left\{\frac{1}{2}\times2(1+k)+k\right\}$

$=2(1+k)(1+2k)$

즉, $2(1+k)(1+2k)=56$

$2k^2+3k+1=28$, $2k^2+3k-27=0$, $(k-3)(2k+9)=0$

따라서 양수 k의 값은 3이다.

답 ③

09

6개의 의자 중에서 빈 의자를 택하는 경우의 수는

${}_6C_1=6$

빈 의자의 이웃한 양 옆의 의자에 어른 2명이 앉는 경우의 수는

${}_3P_2=3\times2=6$

나머지 세 의자에 남은 어른 1명과 어린이 2명이 앉는 경우의 수는

$3!=6$

이때 회전하여 일치하는 것이 6가지씩 있으므로 구하는 경우의 수는

$\frac{6\times6\times6}{6}=36$

답 ①

10

함수 $y=\log_3(x-2)$의 역함수는

$x=\log_3(y-2)$에서 $y=3^x+2$이다.

함수 $y=3^x+2$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프는 함수 $y-b=3^{x-a}+2$의 그래프이므로

$f(x)=3^{x-a}+2+b$라 하면

$f(0)=0$에서 $3^{-a}+2+b=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

곡선 $y=f(x)$의 점근선은 직선 $y=2+b$이므로 $2+b=-9$

즉, $b=-11$

이것을 ㉠에 대입하면 $3^{-a}=9=3^2$, 즉 $a=-2$

따라서 $a+b=-2+(-11)=-13$

답 ④

11

$\lim_{x\to-1-}f(x)=2$, $\lim_{x\to1+}f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to-1-}f(x)\times\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)\times\lim_{x\to a+}f(x)$에서

$2\lim_{x\to a-}f(x)=-\lim_{x\to a+}f(x)$

$\lim_{x\to a-}f(x)=-\frac{1}{2}\lim_{x\to a+}f(x)$

그림에서 이 식을 만족시키는 상수 a의 값은 2이다.

답 ⑤

12

조건 (가)에서 등차중항의 성질에 의해 $\frac{a+b}{2}=2$

$a+b=4$ $\cdots\cdots$ ㉠

조건 (나)에서 등비중항의 성질에 의해

$|a|^2=2|b|$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $b=4-a$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$a^2=2|4-a|$

(i) $a>4$인 경우

$|4-a|=a-4$이므로 $a^2=2(a-4)$

$a^2-2a+8=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=1-8=-7<0$이므로

이차방정식 $a^2-2a+8=0$은 실근을 갖지 않는다.

(ii) $a\le4$인 경우

$|4-a|=4-a$이므로 $a^2=2(4-a)$

$a^2+2a-8=0$, $(a+4)(a-2)=0$

$a=2$이면 ㉠에서 $b=2$이므로 $a=b$이다.

즉, $a=-4$

(i), (ii)에서 $a=-4$이고 ㉠에서 $b=8$이다.

따라서 $a^2+b^2=(-4)^2+8^2=80$

답 ②

13

이 공장에서 생산하는 자동차 1대의 연비를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(13,\ 1.6^2)$을 따른다.

이 공장에서 생산한 자동차 중 임의추출한 16대의 자동차 연비의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(13,\ \frac{1.6^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(13,\ 0.4^2)$을 따르고, $Z=\frac{\overline{X}-13}{0.4}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\le12.4)&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-13}{0.4}\le\frac{12.4-13}{0.4}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le-1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge1.5)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)\\&=0.5-0.4332=0.0668\end{aligned}$$

답 ③

14

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-6}{x-1}=3$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=6$이고 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=3$에서 $f'(1)=3$이다.

마찬가지로 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)+2}{x-1}=-\frac{5}{2}$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}g(x)=g(1)=-2$이고 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=-\frac{5}{2}$에서

$g'(1)=-\frac{5}{2}$이다.

함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)\{f(x)+2g(x)\}$라 하면

$h(1)=f(1)\{f(1)+2g(1)\}=6\times(6-4)=12$

한편, $h'(x)=f'(x)\{f(x)+2g(x)\}+f(x)\{f'(x)+2g'(x)\}$이므로

$$\begin{aligned}h'(1)&=f'(1)\{f(1)+2g(1)\}+f(1)\{f'(1)+2g'(1)\}\\&=3\times(6-4)+6\times(3-5)=-6\end{aligned}$$

따라서 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(1,\ a)$에서의 접선의 방정식은

$$\begin{aligned}y&=h'(1)(x-1)+h(1)\\&=-6(x-1)+12\\&=-6x+18\end{aligned}$$

따라서 $a=h(1)=12$, $b=18$이므로 $a+b=12+18=30$

답 ⑤

15

$\overline{\mathrm{AE}}=k$라 하면

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{AF}}=\sqrt{1^2+k^2}=\sqrt{k^2+1}$

$\overline{\mathrm{FC}}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+k^2}=\sqrt{k^2+2}$

삼각형 AFC에서 코사인법칙에 의해

$\left(\sqrt{k^2+2}\right)^2=(\sqrt{3})^2+\left(\sqrt{k^2+1}\right)^2-2\times\sqrt{3}\times\sqrt{k^2+1}\times\cos\frac{\pi}{3}$

$\sqrt{3k^2+3}=2$

$3k^2=1$

이때 $k>0$이므로 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 직육면체 ABCD$-$EFGH의 부피는

$1\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

답 ②

16

$S_n=4n^2-3n+24$에서

$n=1$일 때 $a_1=S_1=4-3+24=25$이고

$n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(4n^2-3n+24)-\{4(n-1)^2-3(n-1)+24\}$

$=8n-7$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{\sqrt{8k-7}+\sqrt{8(k+1)-7}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{25}+\sqrt{16-7}}+\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{\sqrt{8k-7}+\sqrt{8k+1}}$$

$$=\frac{1}{5+3}+\sum_{k=2}^{10}\frac{\sqrt{8k-7}-\sqrt{8k+1}}{(\sqrt{8k-7}+\sqrt{8k+1})(\sqrt{8k-7}-\sqrt{8k+1})}$$

$$=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\sum_{k=2}^{10}(\sqrt{8k-7}-\sqrt{8k+1})$$

$$=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\times\{(\sqrt{9}-\sqrt{17})+(\sqrt{17}-\sqrt{25})+\cdots+(\sqrt{73}-\sqrt{81})\}$$

$$=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\times(\sqrt{9}-\sqrt{81})$$

$$=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\times(3-9)=\frac{7}{8}$$

답 ④

17

시각 $t=x$에서 점 P의 위치를 $p(x)$라 하면

$$p(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x(3t^2-4t)dt=x^3-2x^2$$

시각 $t=x$에서 점 Q의 위치를 $q(x)$라 하면

$$q(x)=\int_0^x g(t)dt=\int_0^x 2t\,dt=x^2$$

시각 $t=x$에서 두 점 P, Q 사이의 거리를 $h(x)$라 하면

$h(x)=|x^3-3x^2|=|x^2(x-3)|$

$0\leq x\leq 3$일 때 $x^2(x-3)\leq 0$이므로

$h(x)=-x^3+3x^2$

$0<x<3$일 때 $h'(x)=-3x^2+6x$이므로

$h'(x)=0$에서 $x=2$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $h(x)$가 $x=2$일 때 극대이면서 최대이므로 $0\leq x\leq 3$에서 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은

$h(2)=-8+12=4$

답 ①

18

처음 꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 차가 나중에 꺼낸 1개의 공에 적힌 수와 같은 사건을 X, 나중에 꺼낸 1개의 공에 적힌 수가 2인 사건을 Y라 하자.

(i) 주머니 A에서 공을 2개 꺼내는 경우

주머니 A를 선택할 확률은 $\frac{1}{2}$이고, 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 꺼냈을 때 꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 차는 1 또는 2 또는 3이다.

ⓘ 꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 차가 1인 경우

주머니 A에서 $\{1, 2\}$ 또는 $\{2, 3\}$ 또는 $\{3, 4\}$가 적힌 공을 꺼내야 하므로 그 확률은

$$\frac{3}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

주머니 B에서 1이 적힌 공을 꺼내야 하므로 그 확률은 $\frac{1}{3}$

즉, 이 경우의 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

ⓘⓘ 꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 차가 2인 경우

주머니 A에서 $\{1, 3\}$ 또는 $\{2, 4\}$가 적힌 공을 꺼내야 하므로 그 확률은

$$\frac{2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

주머니 B에서 2가 적힌 공을 꺼내야 하므로 그 확률은 $\frac{1}{3}$

즉, 이 경우의 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$

ⓘⓘⓘ 꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 차가 3인 경우

주머니 A에서 $\{1, 4\}$가 적힌 공을 꺼내야 하므로 그 확률은

$$\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{6}$$

주머니 B에서 3이 적힌 공을 꺼내야 하므로 그 확률은 $\frac{1}{3}$

즉, 이 경우의 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{36}$

(ii) 주머니 B에서 공을 2개 꺼내는 경우

주머니 B를 선택할 확률은 $\frac{1}{2}$이고, 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 꺼냈을 때 꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 차는 1 또는 2이다.

ⓘ 꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 차가 1인 경우

주머니 B에서 $\{1, 2\}$ 또는 $\{2, 3\}$이 적힌 공을 꺼내야 하므로 그 확률은

$$\frac{2}{{}_3\mathrm{C}_2}=\frac{2}{3}$$

주머니 A에서 1이 적힌 공을 꺼내야 하므로 그 확률은 $\frac{1}{4}$

즉, 이 경우의 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

ⓘⓘ 꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 차가 2인 경우

주머니 B에서 $\{1, 3\}$이 적힌 공을 꺼내야 하므로 그 확률은

$$\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}$$

주머니 A에서 2가 적힌 공을 꺼내야 하므로 그 확률은 $\frac{1}{4}$

즉, 이 경우의 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$

(i), (ii)에서

$$\mathrm{P}(X)=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}\right)+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{24}\right)=\frac{7}{24}$$

(i)−ⓘⓘ, (ii)−ⓘⓘ에서

$$\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{1}{18}+\frac{1}{24}=\frac{7}{72}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{7}{72}}{\frac{7}{24}}=\frac{1}{3}$$

답 ③

19

확률변수 X는 1부터 $\boxed{n-1}$까지의 자연수를 가질 수 있으므로 자연수 k $(1\le k\le \boxed{n-1})$에 대하여 확률변수 X의 값이 k일 확률은

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{n-\boxed{k}}{{}_n\mathrm{C}_2}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\sum_{k=1}^{\boxed{n-1}}\{k\times \mathrm{P}(X=k)\}\\&=\sum_{k=1}^{\boxed{n-1}}\left(k\times\frac{n-\boxed{k}}{{}_n\mathrm{C}_2}\right)\\&=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}(nk-k^2)\\&=\frac{2}{n(n-1)}\times\left\{n\times\frac{(n-1)n}{2}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right\}\\&=\frac{\boxed{n+1}}{3}\end{aligned}$$

이다.

이상에서 $f(n)=n-1$, $g(k)=k$, $h(n)=n+1$이므로

$f(6)+g(7)+h(8)=5+7+9=21$

답 ①

20

ㄱ. 직선 l의 방정식은

$x\log_{2^2}a+y\log_{2^3}b=1$

즉, $\frac{1}{2}x\log_2 a+\frac{1}{3}y\log_2 b=1$이므로

두 점 A, B는 각각

$\mathrm{A}\left(\frac{2}{\log_2 a}, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(0, \frac{3}{\log_2 b}\right)$

이때 $a>b>1$이므로 $\log_2 a>\log_2 b>0$이고

$\overline{\mathrm{OA}}=\frac{2}{\log_2 a}<\frac{2}{\log_2 b}<\frac{3}{\log_2 b}=\overline{\mathrm{OB}}$이다. (참)

ㄴ. 점 $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$이 직선 $l: \frac{1}{2}x\log_2 a+\frac{1}{3}y\log_2 b=1$ 위의 점이므로

$\frac{1}{3}\log_2 a+\frac{1}{3}\log_2 b=1$

$\log_2 a+\log_2 b=3$, $\log_2 ab=3$, $ab=2^3=8$

a, b는 $a>b>1$인 자연수이므로 $a=4$, $b=2$

ㄱ에서 점 A의 좌표는 $\left(\frac{2}{\log_2 4}, 0\right)$, 즉 $(1, 0)$이고

점 B의 좌표는 $\left(0, \frac{3}{\log_2 2}\right)$, 즉 $(0, 3)$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(0-1)^2+(3-0)^2}=\sqrt{10}$ (참)

ㄷ. 직선 l의 방정식은 $\frac{1}{2}x\log_2 a+\frac{1}{3}y\log_2 b=1$, 즉

$3x\log_2 a+2y\log_2 b=6$이므로 이 직선 위의 점 (x, y)는

$\log_2 a^{3x}b^{2y}=6$, 즉 $a^{3x}b^{2y}=2^6$을 만족시킨다.

이때 a, b는 $a>b>1$인 자연수이고 x, y가 자연수이면 $3x$, $2y$도 자연수이므로 $a^{3x}b^{2y}=2^6$에서 a, b는 모두 2의 거듭제곱이다.

$a=2^m$, $b=2^n$ (m, n은 $m>n\ge1$인 자연수)이라 하면

$a^{3x}b^{2y}=2^6$에서 $(2^m)^{3x}(2^n)^{2y}=2^6$

즉, $2^{3mx+2ny}=2^6$

$3mx+2ny=6$을 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 존재하지 않는다.

따라서 직선 l이 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점을 지나도록 하는 두 자연수 a, b는 존재하지 않는다. (거짓)

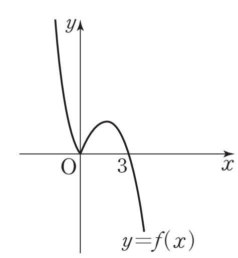
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

21

$$f(x)=-x^3+9|x|=\begin{cases}-x^3-9x & (x<0)\\ -x^3+9x & (x\ge0)\end{cases}$$

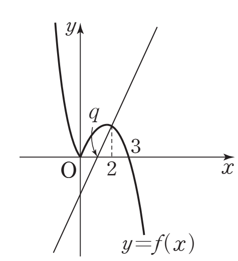
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$2\in(A\cap B)$이므로 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 좌극한과 우극한이 같지만 $t=2$에서 불연속이다.

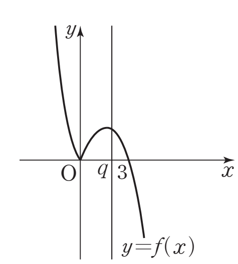
점 $\mathrm{Q}(q, 0)$의 x좌표에 따라 함수 $g(t)$의 $t=2$에서의 연속성을 살펴보자.

(i) $0<q<2$인 경우



$\lim_{t\to2+}g(t)=\lim_{t\to2-}g(t)=g(2)=1$이므로 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 연속이다. 즉, $2\notin B$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

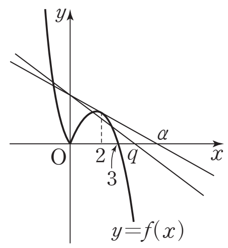
(ii) $q=2$인 경우



$\lim_{t\to2+}g(t)=1$, $\lim_{t\to2-}g(t)=3$에서 $2\notin A$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

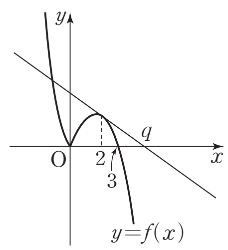
이제 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$에서의 접선의 x절편을 α라 하자.

(iii) $2<q<\alpha$인 경우



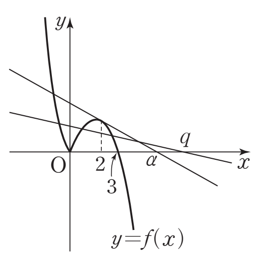
$\lim\limits_{t\to 2+} g(t)=\lim\limits_{t\to 2-} g(t)=g(2)=3$이므로 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 연속이다. 즉, $2\not\in B$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $q=\alpha$인 경우



$\lim\limits_{t\to 2-} g(t)=\lim\limits_{t\to 2+} g(t)=3$, $g(2)=2$이므로 $2\in(A\cap B)$이다.

(v) $q>\alpha$인 경우

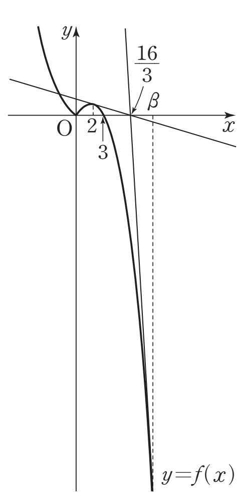


$\lim\limits_{t\to 2+} g(t)=\lim\limits_{t\to 2-} g(t)=g(2)=3$이므로 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 연속이다. 즉, $2\not\in B$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

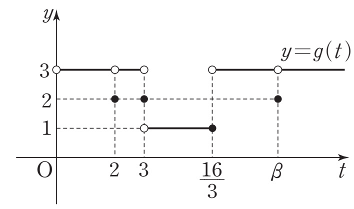
(i)~(v)에서 $2\in(A\cap B)$이려면 반드시 $q=\alpha$이어야 한다. α의 값을 구하기 위해 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 방정식을 구하면 $x>0$에서 $f'(x)=-3x^2+9$이므로

$y=f'(2)(x-2)+f(2)=-3(x-2)+10=-3x+16$

즉, $q=\alpha=\dfrac{16}{3}$이고 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{16}{3},\ 0\right)$이다.



이때 그림과 같이 점 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{16}{3},\ 0\right)$에서 곡선 $y=f(x)$에 접선을 그었을 때 점 $(2,\ f(2))$가 아닌 접점을 $(\beta,\ f(\beta))$라 하면 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 집합 B는 함수 $g(t)$가 연속이 아닌 점의 t좌표 중 양수인 것의 집합이므로 $B=\left\{2,\ 3,\ \dfrac{16}{3},\ \beta\right\}$이다.

한편, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(\beta,\ f(\beta))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(\beta)(x-\beta)+f(\beta)$

$\quad=(-3\beta^2+9)(x-\beta)-\beta^3+9\beta$

$\quad=(-3\beta^2+9)x+2\beta^3$

이 접선이 점 $\left(\dfrac{16}{3},\ 0\right)$을 지나므로

$0=-16\beta^2+48+2\beta^3$

$\beta^3-8\beta^2+24=0$

$(\beta-2)(\beta^2-6\beta-12)=0$

$\beta>0$이고 $\beta\neq 2$이므로 $\beta=3+\sqrt{21}$

따라서 집합 B의 모든 원소의 합은

$2+3+\dfrac{16}{3}+(3+\sqrt{21})=\dfrac{40}{3}+\sqrt{21}$

답 ⑤

22

$$\frac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)}=\frac{(4^3-24)-\{(-1)^3-(-6)\}}{5}$$
$$=\frac{40-5}{5}=7$$

답 7

23

$10\sin\dfrac{\pi}{3}\tan\dfrac{\pi}{3}=10\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=15$

답 15

24

선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{3\times3-2\times4}{3-2},\ \dfrac{3\times\log 16-2\times a}{3-2}\right)$

즉, $(1,\ 3\log 16-2a)$

이 점이 직선 $y=\log 4$ 위에 있으므로 $3\log 16-2a=\log 4$

$2a=3\log 16-\log 4=12\log 2-2\log 2=10\log 2$

따라서 $a=5\log 2$이므로

$10^a=10^{5\log 2}=10^{\log 32}=32$

답 32

25

확률변수 X에 대하여

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=87-81=6$

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n, p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=np=9$ …… ㉠

$\mathrm{V}(X)=np(1-p)=6$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$9(1-p)=6,\ p=\dfrac{1}{3}$

이것을 ㉠에 대입하면

$n\times\dfrac{1}{3}=9$

따라서 $n=27$

답 27

26

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(a_k+a_{k+1})&=\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}a_{k+1}\\&=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}+\frac{10(a_2+a_{11})}{2}\\&=5(a_1+a_2+a_{10}+a_{11})\end{aligned}$$

이때 $a_1+a_{11}=a_2+a_{10}=2a_6$이므로

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+a_{k+1})=5(2a_6+2a_6)=20a_6$

$\dfrac{35}{d}=20(1+5d),\ 20d^2+4d-7=0,\ (2d-1)(10d+7)=0$

$d>0$이므로 $d=\dfrac{1}{2}$

따라서 $a_{31}=1+30d=1+30\times\dfrac{1}{2}=16$

답 16

다른 풀이

$$\begin{aligned}a_k+a_{k+1}&=\{1+(k-1)d\}+(1+kd)\\&=2+(2k-1)d\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(a_k+a_{k+1})&=\sum_{k=1}^{10}\{2+(2k-1)d\}\\&=20+d\times\left(2\times\frac{10\times11}{2}-10\right)\\&=20+100d\end{aligned}$$

$20+100d=\dfrac{35}{d}$에서

$20d^2+4d-7=0$

$(2d-1)(10d+7)=0$

$d>0$이므로 $d=\dfrac{1}{2}$

따라서 $a_{31}=1+30d=1+30\times\dfrac{1}{2}=16$

27

$x\ge2$일 때, $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-c}$이 연속이므로 $x\ge2$인 모든 실수 x에 대하여 분모 $x-c\ne0$

즉, $x-c\ge2-c>0$에서

$c<2$

이때 c는 자연수이므로 $c=1$

즉, $x\ge2$일 때

$f(x)=\dfrac{3x+1}{x-1}$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to2-}f(x)=\lim\limits_{x\to2+}f(x)=f(2)$

이때 ㉠에 의해 $\lim\limits_{x\to2+}f(x)=f(2)=7$이므로

$\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{x^2+ax-b}{x-2}=7$ …… ㉡

$x\to2-$일 때, (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to2-}(x^2+ax-b)=0$이므로

$4+2a-b=0$

$b=2a+4$

이것을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2-}\frac{x^2+ax-(2a+4)}{x-2}&=\lim_{x\to2-}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2-}(x+a+2)\\&=4+a=7\end{aligned}$$

따라서 $a=3,\ b=10,\ c=1$이므로

$a+b+c=14$

답 14

28

사건 $A\cap B$는 꺼낸 공에 적힌 수가 6의 배수인 사건이다.

(i) $n=2m-1$ (m은 5 이하의 자연수)인 경우

1부터 $6m-3$까지의 자연수 중에서 짝수의 개수는 $3m-2$이므로

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{3m-2}{6m-3}$

1부터 $6m-3$까지의 자연수 중에서 3의 배수의 개수는 $2m-1$이므로

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{2m-1}{6m-3}=\dfrac{1}{3}$

1부터 $6m-3$까지의 자연수 중에서 6의 배수의 개수는 $m-1$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{m-1}{6m-3}$

두 사건 A와 B가 서로 독립이 되려면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이어야 하므로

$\dfrac{m-1}{6m-3}=\dfrac{3m-2}{6m-3}\times\dfrac{1}{3}$

$3m-3=3m-2$

이 식을 만족시키는 자연수 m은 존재하지 않는다.

(ii) $n=2m$ (m은 5 이하의 자연수)인 경우

1부터 $6m$까지의 자연수 중에서 짝수의 개수는 $3m$이므로

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{3m}{6m}=\dfrac{1}{2}$

1부터 $6m$까지의 자연수 중에서 3의 배수의 개수는 $2m$이므로

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{2m}{6m}=\dfrac{1}{3}$

1부터 $6m$까지의 자연수 중에서 6의 배수의 개수는 m이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{m}{6m}=\dfrac{1}{6}$

두 사건 A와 B가 서로 독립이 되려면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이어야 하는데

$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$이므로 $n=2m$일 때 두 사건 A와 B가 서로 독립이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 자연수 n은 2, 4, 6, 8, 10이므로 구하는 합은

$2+4+6+8+10=30$

답 30

29

전체 경우의 수는

${}_6\Pi_4=6^4$

네 번째 시행에서 처음으로 모두 앞면 또는 뒷면이 되어야 한다.

(ⅰ) 6장의 카드가 네 번째 시행에서 처음으로 모두 앞면이 되는 경우

5와 6이 적혀 있는 카드가 앞면이 보이도록 해야 하므로 4번의 시행 중 5와 6이 적혀 있는 카드를 각각 홀수 번씩 뒤집어야 한다.

① 5가 적혀 있는 카드를 3번, 6이 적혀 있는 카드를 1번 뒤집는 경우

첫 번째 시행부터 차례로 5, 5, 5, 6 또는 5, 5, 6, 5가 적혀 있는 카드를 뒤집어야 네 번째 시행에서 처음으로 모두 앞면이 되므로 경우의 수는 2

② 5가 적혀 있는 카드를 1번, 6이 적혀 있는 카드를 3번 뒤집는 경우

첫 번째 시행부터 차례로 6, 6, 6, 5 또는 6, 6, 5, 6이 적혀 있는 카드를 뒤집어야 네 번째 시행에서 처음으로 모두 앞면이 되므로 경우의 수는 2

③ 5가 적혀 있는 카드를 1번, 6이 적혀 있는 카드를 1번 뒤집는 경우

나머지 2번은 1, 2, 3, 4가 적힌 카드 중에서 같은 카드를 2번 뒤집어야 4번의 시행 후에 모두 앞면이 된다. 이때 만약 첫 번째 시행, 두 번째 시행에 5와 6이 적혀 있는 카드를 한 번씩 뒤집게 되면 두 번째 시행 만에 사건 A가 일어나므로 경우의 수는

$4\times\left(\frac{4!}{2!}-2!\right)=40$

(ⅱ) 6장의 카드가 네 번째 시행에서 처음으로 모두 뒷면이 되는 경우

1, 2, 3, 4가 적혀 있는 카드를 한 번씩 뒤집어야 하므로 경우의 수는 $4!=24$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\frac{2+2+40+24}{6^4}=\frac{68}{6^4}=\frac{17}{324}$

따라서 $p+q=324+17=341$

답 341

다른 풀이

앞면이 보이게 놓인 카드의 개수를 x, 뒷면이 보이게 놓인 카드의 개수를 y라 하자.

(ⅰ) 첫 번째 시행에서 앞면이 보이게 놓인 카드를 뒤집는 경우

첫 번째 시행 후 $x=y=3$이고, 두 번째 시행 후 $x=4$, $y=2$ 또는 $x=2$, $y=4$이다.

$x=2$이면 나머지 두 번의 시행에서 앞면이 보이게 놓인 2개의 카드를 한 번씩 뒤집어야 하고, $y=2$이면 나머지 두 번의 시행에서 뒷면이 보이게 놓인 2개의 카드를 한 번씩 뒤집어야 한다.

즉, 이 경우의 확률은 $\frac{4}{6}\times2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{27}$

(ⅱ) 첫 번째 시행에서 뒷면이 보이게 놓인 카드를 뒤집는 경우

첫 번째 시행 후 $x=5$, $y=1$이므로 두 번째 시행에서는 반드시 앞면이 보이게 놓인 카드를 뒤집어야 하고, 나머지 두 번의 시행에서 뒷면이 보이게 놓인 2개의 카드를 한 번씩 뒤집어야 하므로 이 경우의 확률은

$\frac{2}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{324}$

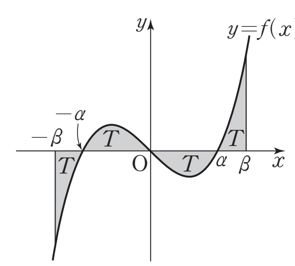
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{27}+\frac{5}{324}=\frac{12+5}{324}=\frac{17}{324}$

따라서 $p+q=324+17=341$

30

조건 (가), (나)에 의해 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표는 $-\alpha$, 0, α이다. $\int_{-\alpha}^{0}f(x)dx=-\int_{0}^{\alpha}f(x)dx=T$라 하고, $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=T$ $(\alpha<\beta)$라 하면 $-\int_{-\beta}^{-\alpha}f(x)dx=T$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(ⅰ) $t<-\beta$인 경우

$g(t)=\int_{t}^{t}f(s)ds=0$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$g(-t)=\int_{t}^{-t}f(s)ds=0$

따라서 t, $-t$를 제외한 실수 x에 대하여 $g(x)\neq0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 2이다.

(ⅱ) $t=-\beta$인 경우

$g(-\beta)=\int_{-\beta}^{-\beta}f(s)ds=0$,

$g(0)=\int_{-\beta}^{0}f(s)ds=-T+T=0$,

$g(\beta)=\int_{-\beta}^{\beta}f(s)ds=-T+T-T+T=0$

따라서 $-\beta$, 0, β를 제외한 실수 x에 대하여 $g(x)\neq0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 3이다.

(ⅲ) $-\beta<t<-\alpha$인 경우

$g(t)=\int_{t}^{t}f(s)ds=0$

$g(-\alpha)=\int_{t}^{-\alpha}f(s)ds=T_1$이라 하면

$-\alpha<a<0$이고, $g(a)=\int_{t}^{a}f(s)ds=T_1-T_1=0$인 a가 존재한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$$g(-a)=\int_{t}^{-a} f(s)ds=g(a)+\int_{-a}^{a} f(s)ds=0$$

$$g(-t)=\int_{t}^{-t} f(s)ds=0$$

따라서 t, a, $-a$, $-t$를 제외한 실수 x에 대하여 $g(x)\neq 0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 4이다.

(iv) $t=-\alpha$인 경우

(i)과 마찬가지 방법으로 $x=-\alpha$, $x=\alpha$일 때만 $g(x)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 2이다.

(v) $-\alpha<t<0$인 경우

(iii)과 마찬가지 방법으로 $g(t)=0$이고

열린구간 $(-\beta,\ -\alpha)$, $(0,\ \alpha)$, $(\alpha,\ \beta)$에 $g(x)=0$인 실수 x가 각각 하나씩 존재하므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 4이다.

(vi) $t=0$인 경우

(ii)와 마찬가지 방법으로 $x=-\beta$, $x=0$, $x=\beta$일 때만 $g(x)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 3이다.

(vii) $0<t<\alpha$인 경우

(iii)과 마찬가지 방법으로 $g(t)=0$이고

열린구간 $(-\beta,\ -\alpha)$, $(-\alpha,\ 0)$, $(\alpha,\ \beta)$에 $g(x)=0$인 실수 x가 각각 하나씩 존재하므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 4이다.

(viii) $t=\alpha$인 경우

(i)과 마찬가지 방법으로 $x=-\alpha$, $x=\alpha$일 때만 $g(x)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 2이다.

(ix) $\alpha<t<\beta$인 경우

(iii)과 마찬가지 방법으로 $g(t)=0$이고

열린구간 $(-\beta,\ -\alpha)$, $(-\alpha,\ 0)$, $(0,\ \alpha)$에 $g(x)=0$인 실수 x가 각각 하나씩 존재하므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 4이다.

(x) $t=\beta$인 경우

(ii)와 마찬가지 방법으로 $x=-\beta$, $x=0$, $x=\beta$일 때만 $g(x)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 3이다.

(xi) $t>\beta$인 경우

(i)과 마찬가지 방법으로 $x=-t$, $x=t$일 때 $g(x)=0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수는 2이다.

(i) ~ (xi)에 의해

$$h(t)=\begin{cases} 2 & (t<-\beta) \\ 3 & (t=-\beta) \\ 4 & (-\beta<t<-\alpha) \\ 2 & (t=-\alpha) \\ 4 & (-\alpha<t<0) \\ 3 & (t=0) \\ 4 & (0<t<\alpha) \\ 2 & (t=\alpha) \\ 4 & (\alpha<t<\beta) \\ 3 & (t=\beta) \\ 2 & (t>\beta) \end{cases}$$

함수 $h(t)$의 치역은 $\{2,\ 3,\ 4\}$이므로 치역의 모든 원소의 합은 $2+3+4=9$이고, 함수 $h(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k는 $-\beta$, $-\alpha$, 0, α, β로 5개이다.

따라서 $S=9$, $m=5$이므로

$S+m=14$

답 14

실전 모의고사 2회

본문 138~145쪽

01 ⑤	02 ③	03 ⑤	04 ②	05 ②
06 ④	07 ①	08 ①	09 ④	10 ③
11 ②	12 ①	13 ⑤	14 ⑤	15 ⑤
16 ⑤	17 ②	18 ③	19 ④	20 ⑤
21 ③	22 25	23 5	24 900	25 300
26 196	27 12	28 668	29 390	30 12

01

$\log_2 \frac{1}{3} \times \log_3 \frac{1}{8} = \log_2 3^{-1} \times \log_3 8^{-1}$

$= (-\log_2 3) \times (-\log_3 8)$

$= \log_2 3 \times \log_3 8$

$= \log_2 3 \times \frac{\log_2 8}{\log_2 3}$

$= \log_2 8 = \log_2 2^3$

$= 3 \log_2 2 = 3$

답 ⑤

02

$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-x-12}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$

$= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+3)(\sqrt{x}+2)}{x-4}$

$= \lim_{x\to 4} (x+3)(\sqrt{x}+2) = 28$

답 ③

03

θ가 제2사분면의 각이므로

$\cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta} = -\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$

따라서 $\cos\theta - \tan\theta = -\frac{3}{5} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{11}{15}$

답 ⑤

04

$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A|B) = P(A)$

조건에서 $P(A|B) = P(B)$이므로

$P(A) = P(B)$

따라서 $P(A)P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

답 ②

05

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1 + a_3 = 6$에서 $a + ar^2 = 6$ …… ㉠

$a_3 + a_5 = 3$에서 $ar^2 + ar^4 = r^2(a + ar^2) = 3$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2 = \frac{1}{2}$

$r^2 = \frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$a + \frac{a}{2} = 6$, $\frac{3}{2}a = 6$에서 $a = 4$

따라서 $a_9 = ar^8 = a(r^2)^4 = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$

답 ②

06

$\lim_{x\to 1+} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 4-} \{f(x)+1\} = \lim_{x\to 4-} f(x) + \lim_{x\to 4-} 1$

$= 5 + 1 = 6$

따라서 $\lim_{x\to 1+} f(x) + \lim_{x\to 4-} \{f(x)+1\} = 1 + 6 = 7$

답 ④

07

7개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_7C_3 = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$

노란 공 3개 또는 빨간 공 3개를 꺼내는 경우의 수는

${}_3C_3 + {}_4C_3 = {}_3C_3 + {}_4C_1 = 1 + 4 = 5$

따라서 구하는 확률은

$\frac{5}{35} = \frac{1}{7}$

답 ①

08

모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = f(x)$이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

$\int_0^2 f(x)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx = 3$

$\int_5^2 f(x)dx = -\int_2^5 f(x)dx = 2$

에서 $\int_2^5 f(x)dx = -2$

따라서

$\int_{-2}^5 f(x)dx = \int_{-2}^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx$

$= 3 + 3 + (-2) = 4$

답 ①

09

$2^{2x} = 10 - 2^{4-2x}$에서

$4^x = 10 - \frac{16}{4^x}$ …… ㉠

㉠의 양변에 4^x을 곱하여 정리하면

$(4^x)^2-10\times4^x+16=0$

$(4^x-2)(4^x-8)=0$

$4^x=2$ 또는 $4^x=8$

즉, $2^{2x}=2$ 또는 $2^{2x}=2^3$이므로 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

따라서 모든 실근의 합은

$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$

답 ④

10

$h^2=t$라 하면 $h\to0$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}=\lim_{t\to0+}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}$,

$\lim_{h\to0}\frac{g(a+h^2)-g(a)}{h^2}=\lim_{t\to0+}\frac{g(a+t)-g(a)}{t}$이고

$f(x)=x|x|=\begin{cases}x^2 & (x\ge0)\\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$, $g(x)=2x-|2x|=\begin{cases}0 & (x\ge0)\\ 4x & (x<0)\end{cases}$

(i) $a\ge0$일 때

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0+}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}&=\lim_{t\to0+}\frac{(a+t)^2-a^2}{t}\\&=\lim_{t\to0+}\frac{t(2a+t)}{t}\\&=\lim_{t\to0+}(2a+t)=2a,\end{aligned}$$

$\lim_{t\to0+}\frac{g(a+t)-g(a)}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{0}{t}=0$

이므로 $2a=0$에서 $a=0$

(ii) $a<0$일 때

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0+}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}&=\lim_{t\to0+}\frac{-(a+t)^2-(-a^2)}{t}\\&=\lim_{t\to0+}\frac{t(-2a-t)}{t}\\&=\lim_{t\to0+}(-2a-t)=-2a,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0+}\frac{g(a+t)-g(a)}{t}&=\lim_{t\to0+}\frac{4(a+t)-4a}{t}\\&=\lim_{t\to0+}\frac{4t}{t}\\&=\lim_{t\to0+}4=4\end{aligned}$$

이므로 $-2a=4$에서 $a=-2$

(i), (ii)에서 구하는 실수 a의 값은 0, -2이므로

$p=-2$, $q=2$

따라서 $p+q^3=-2+2^3=6$

답 ③

11

$f'(x)=nx^{n-1}\times(x^2+ax+1)+(x^n+1)(2x+a)$이므로

$f'(0)=a=-1$

$$\begin{aligned}f'(1)&=n(2+a)+2(2+a)\\&=n(2-1)+2(2-1)\\&=n+2\end{aligned}$$

$n+2=5$에서 $n=3$

따라서 $n+a=3+(-1)=2$

답 ②

12

직선 $x=3$이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점 A의 좌표는

$A(3, \log_2 3)$

직선 $x=k$ $(k>3)$가 두 곡선 $y=\log_4 x$, $y=\log_2 x$와 만나는 두 점 B, C의 좌표는

$B(k, \log_4 k)$, $C(k, \log_2 k)$

삼각형 ABC가 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로 선분 BC의 중점의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같다.

즉, $\frac{\log_2 k+\log_4 k}{2}=\log_2 3$에서

$\log_2 k+\log_4 k=2\log_2 3$

$\log_2 k+\frac{1}{2}\log_2 k=2\log_2 3$

$\frac{3}{2}\log_2 k=2\log_2 3$

$\log_2 k=\frac{4}{3}\log_2 3=\log_2 3^{\frac{4}{3}}$

따라서 $k=3^{\frac{4}{3}}$

답 ①

13

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1=8$ ...... ㉠

$a_{11}=a_1+10d=-22$ ...... ㉡

㉡$-$㉠을 하면 $10d=-30$이므로 $d=-3$

$a_n=8+(n-1)\times(-3)=-3n+11$

$a_1=8$, $a_2=5$, $a_3=2$, $a_4=-1$, $a_5=-4$, $\cdots$, $a_{15}=-34$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15}|a_k|&=\sum_{k=1}^{3}a_k+\sum_{k=4}^{15}(-a_k)\\&=15+\frac{12\times(1+34)}{2}\\&=15+210=225\end{aligned}$$

답 ⑤

14

$-1\le\sin b\pi\left(x-\frac{1}{3}\right)\le1$이고 a는 양수이므로

$-a\le a\sin b\pi\left(x-\frac{1}{3}\right)\le a$

$-a+c\le a\sin b\pi\left(x-\frac{1}{3}\right)+c\le a+c$

조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 1, 최댓값은 5이므로

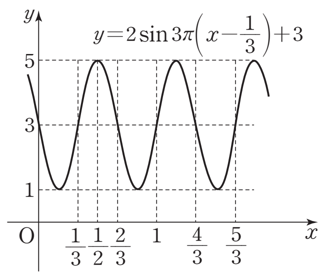
$-a+c=1$, $a+c=5$에서

$a=2$, $c=3$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2}{3}$이고 b는 양수이므로

$\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{3}$, $b=3$

그러므로 $f(x)=2\sin 3\pi\left(x-\frac{1}{3}\right)+3$의 그래프는 그림과 같다.



모든 실수 x에 대하여 $f(x)-f(q)\le 0$, 즉 $f(x)\le f(q)$를 만족시키는 양수 q 중에서 k는 최솟값이므로

$f(q)=5$에서

$2\sin 3\pi\left(q-\frac{1}{3}\right)+3=5$

$\sin 3\pi\left(q-\frac{1}{3}\right)=1$

양수 q의 최솟값 k는 $3\pi\left(k-\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{2}$에서 $k=\frac{1}{2}$

따라서 $a+b+c+k=2+3+3+\frac{1}{2}=\frac{17}{2}$

답 ⑤

15

$t>0$일 때, 곡선 위의 접점 A의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하면

$f'(x)=4x^3+3\ (x>0)$이므로 점 A에서의 접선의 기울기는 $4t^3+3$이다.

따라서 접선의 방정식은

$y-(t^4+3t+48)=(4t^3+3)(x-t)$ ······ ㉠

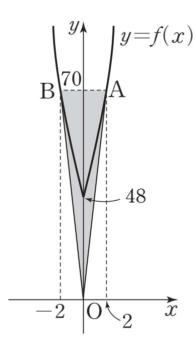
접선 ㉠이 원점을 지나므로

$0-(t^4+3t+48)=(4t^3+3)(0-t)$, $-t^4-3t-48=-4t^4-3t$

$t^4=16$

$t>0$이므로 $t=2$

접점 A의 좌표는 $(2,\ 70)$이다.



한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 접점 B의 좌표는 $(-2,\ 70)$이다.

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 4\times 70=140$

답 ⑤

16

x에 대한 삼차방정식 $x^3+tx^2+2tx=x(x^2+tx+2t)=0$은 $x=0$인 해를 가지고, 이차방정식 $x^2+tx+2t=0$에서 판별식을 D라 하면

$D=t^2-8t=t(t-8)$이므로

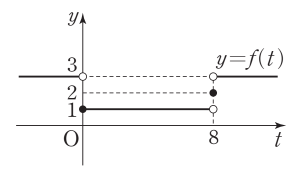
$t<0$ 또는 $t>8$일 때 $x\ne 0$인 서로 다른 두 실근,

$t=0$일 때 중근 $x=0$,

$t=8$일 때 중근 $x=-4$,

$0<t<8$일 때 허근을 갖는다.

따라서 $f(t)=\begin{cases} 3\ (t<0 \text{ 또는 } t>8) \\ 2\ (t=8) \\ 1\ (0\le t<8) \end{cases}$ 의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(t)$는 $t=0$, $t=8$에서만 불연속이고 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(t-3)$은 연속함수이므로 함수 $f(t)g(t-3)$이 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $f(t)g(t-3)$이 $t=0$, $t=8$에서 연속이어야 한다.

(i) $t=0$에서 연속일 때

$\lim_{t\to 0-} f(t)g(t-3)=\lim_{t\to 0-} f(t)\times\lim_{t\to 0-} g(t-3)$

$=3\times g(-3)=3g(-3)$,

$\lim_{t\to 0+} f(t)g(t-3)=\lim_{t\to 0+} f(t)\times\lim_{t\to 0+} g(t-3)$

$=1\times g(-3)=g(-3)$,

$f(0)g(-3)=1\times g(-3)=g(-3)$

이므로 $3g(-3)=g(-3)$에서 $g(-3)=0$

(ii) $t=8$에서 연속일 때

$\lim_{t\to 8-} f(t)g(t-3)=\lim_{t\to 8-} f(t)\times\lim_{t\to 8-} g(t-3)$

$=1\times g(5)=g(5)$,

$\lim_{t\to 8+} f(t)g(t-3)=\lim_{t\to 8+} f(t)\times\lim_{t\to 8+} g(t-3)$

$=3\times g(5)=3g(5)$,

$f(8)g(5)=2g(5)$

이므로 $g(5)=3g(5)=2g(5)$에서 $g(5)=0$

(i), (ii)에서 $g(t)=(t+3)(t-5)$

따라서 $g(8)=11\times 3=33$

답 ⑤

17

이 농장에서 생산되는 수박 1통의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2.5^2)$을 따른다. 이 농장에서 생산된 수박 중에서 임의추출한 100통의 무게의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포

$\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{2.5}{10}\right)^2\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{1}{4}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{1}{4}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(|\overline{X}-m|\ge 0.5)=\mathrm{P}\left(\frac{|\overline{X}-m|}{\frac{1}{4}}\ge\frac{0.5}{\frac{1}{4}}\right)$$
$$=\mathrm{P}(|Z|\ge 2)=2\mathrm{P}(Z\ge 2)$$
$$=2\{0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\}$$
$$=2(0.5-0.4772)=0.0456$$

답 ②

18

$(\sqrt{2}+x^2)^{20}$의 전개식의 일반항

$${}_{20}\mathrm{C}_r\times(\sqrt{2})^{20-r}\times(x^2)^r={}_{20}\mathrm{C}_r\times\boxed{2}^{10-\frac{r}{2}}\times x^{2r}$$

에서 x^{2r}의 계수, 즉 ${}_{20}\mathrm{C}_r\times\boxed{2}^{10-\frac{r}{2}}$이 자연수이어야 하므로 $\frac{r}{2}$는 10 이하의 음이 아닌 정수이다.

즉, $r=\boxed{2k}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10)$

그러므로 계수가 자연수인 항들의 계수의 합은

$${}_{20}\mathrm{C}_0 2^{10}+{}_{20}\mathrm{C}_2 2^9+{}_{20}\mathrm{C}_4 2^8+\cdots+{}_{20}\mathrm{C}_{18} 2^1+{}_{20}\mathrm{C}_{20} 2^0$$
$$={}_{20}\mathrm{C}_0 2^0+{}_{20}\mathrm{C}_2 2^1+{}_{20}\mathrm{C}_4 2^2+\cdots+{}_{20}\mathrm{C}_{18} 2^9+{}_{20}\mathrm{C}_{20} 2^{10}$$

$$(1+x)^{20}={}_{20}\mathrm{C}_0+{}_{20}\mathrm{C}_1x+{}_{20}\mathrm{C}_2x^2+{}_{20}\mathrm{C}_3x^3+\cdots+{}_{20}\mathrm{C}_{19}x^{19}+{}_{20}\mathrm{C}_{20}x^{20}$$

에 $x=\sqrt{2}$를 대입하면

$$(\boxed{1+\sqrt{2}})^{20}={}_{20}\mathrm{C}_0+{}_{20}\mathrm{C}_1\times\sqrt{2}+{}_{20}\mathrm{C}_2\times(\sqrt{2})^2+{}_{20}\mathrm{C}_3\times(\sqrt{2})^3+\cdots+{}_{20}\mathrm{C}_{19}\times(\sqrt{2})^{19}+{}_{20}\mathrm{C}_{20}\times(\sqrt{2})^{20}\quad\cdots\cdots ㉠$$

$x=-\sqrt{2}$를 대입하면

$$(\boxed{1-\sqrt{2}})^{20}={}_{20}\mathrm{C}_0-{}_{20}\mathrm{C}_1\times\sqrt{2}+{}_{20}\mathrm{C}_2\times(\sqrt{2})^2-{}_{20}\mathrm{C}_3\times(\sqrt{2})^3+\cdots-{}_{20}\mathrm{C}_{19}\times(\sqrt{2})^{19}+{}_{20}\mathrm{C}_{20}\times(\sqrt{2})^{20}\quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$(1+\sqrt{2})^{20}+(1-\sqrt{2})^{20}$$
$$=2\{{}_{20}\mathrm{C}_0+{}_{20}\mathrm{C}_2\times(\sqrt{2})^2+{}_{20}\mathrm{C}_4\times(\sqrt{2})^4+\cdots+{}_{20}\mathrm{C}_{18}\times(\sqrt{2})^{18}+{}_{20}\mathrm{C}_{20}\times(\sqrt{2})^{20}\}$$

이므로

$${}_{20}\mathrm{C}_0 2^0+{}_{20}\mathrm{C}_2 2^1+{}_{20}\mathrm{C}_4 2^2+\cdots+{}_{20}\mathrm{C}_{18} 2^9+{}_{20}\mathrm{C}_{20} 2^{10}$$
$$=\frac{(\boxed{1+\sqrt{2}})^{20}+(\boxed{1-\sqrt{2}})^{20}}{2}$$

따라서 $a=2$, $b=1+\sqrt{2}$, $c=1-\sqrt{2}$이고 $f(k)=2k$이므로

$(a+b+c)\times f(5)=4\times 10=40$

답 ③

19

$|f(n)-g(n)|<\frac{3}{2}$에서

$$\left|n^2+3n+\frac{9}{4}-(2n+m)\right|<\frac{3}{2}$$
$$\left|n^2+n+\frac{9}{4}-m\right|<\frac{3}{2}$$
$$-\frac{3}{2}<n^2+n-m+\frac{9}{4}<\frac{3}{2}$$
$$-\frac{15}{4}<n^2+n-m<-\frac{3}{4}$$

m, n은 자연수이므로 n^2+n-m의 값은 -3 또는 -2 또는 -1이다.

즉, m은 n^2+n+1, n^2+n+2, n^2+n+3이므로

$a_n=3n^2+3n+6$

$30<3n^2+3n+6<300$에서

$10<n^2+n+2<100$

$8<n(n+1)<98$

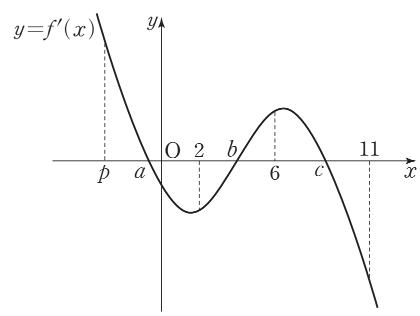
따라서 $i=3$, $l=9$이므로

$$\sum_{k=3}^{9}a_k=\sum_{k=1}^{9}a_k-(a_1+a_2)$$
$$=\sum_{k=1}^{9}(3k^2+3k+6)-(a_1+a_2)$$
$$=3\times\frac{9\times10\times19}{6}+3\times\frac{9\times10}{2}+6\times9-(12+24)$$
$$=1008$$

답 ④

20

두 조건 (가), (나)를 만족시키는 도함수 $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. 그림에서 $\int_p^a f'(x)dx>0$이므로

$$\int_p^a f'(x)dx=\Big[f(x)\Big]_p^a=f(a)-f(p)>0$$

즉, $f(a)>f(p)$ (참)

ㄴ. 조건 (다)에서

$$\int_p^2 f'(x)dx=\int_2^6 f'(x)dx=\int_6^{11} f'(x)dx=0\text{이고}$$

$f(p)=0$이므로

$$f(b)=\int_p^b f'(x)dx$$
$$=\int_p^2 f'(x)dx+\int_2^b f'(x)dx$$
$$=\int_2^b f'(x)dx<0$$

$$f(c)=\int_p^c f'(x)dx$$
$$=\int_p^6 f'(x)dx+\int_6^c f'(x)dx$$
$$=\int_p^2 f'(x)dx+\int_2^6 f'(x)dx+\int_6^c f'(x)dx$$
$$=\int_6^c f'(x)dx>0$$

한편, $f(p)=0$이므로 ㄱ에서

$f(a)>0$

그러므로 $f(a)f(b)f(c)<0$ (참)

ㄷ. ㄱ과 ㄴ에서 $f(p)=0$, $f(a)$와 $f(c)$는 극댓값이고 $f(b)$는 극솟값이므로 방정식 $f(x)=0$은 4개의 서로 다른 실근을 갖는다.

조건 (다)에서

$\int_p^2 f'(x)dx=\int_2^6 f'(x)dx=\int_6^{11} f'(x)dx=0$이므로

$f(2)=\int_p^2 f'(x)dx=0$

$f(6)=\int_p^6 f'(x)dx=\int_p^2 f'(x)dx+\int_2^6 f'(x)dx=0$

$f(11)=\int_p^{11} f'(x)dx=\int_p^6 f'(x)dx+\int_6^{11} f'(x)dx=0$

$f(p)=0$이므로

$f(x)=k(x-2)(x-6)(x-11)(x-p)$ (단, $k<0$)

$f(3)=24k(3-p)$, $f(5)=18k(5-p)$

$24k(3-p)=18k(5-p)$에서 $p=-3$

즉, $f(x)=k(x-2)(x-6)(x-11)(x+3)$ (단, $k<0$)

$k<0$이므로 부등식 $f(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$-3<x<2$ 또는 $6<x<11$

따라서 구하는 모든 정수 x의 합은

$(-2)+(-1)+0+1+7+8+9+10=32$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

21

$f(x)=2(x+1)(x-3)=2x^2-4x-6$에서 $f'(x)=4x-4$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

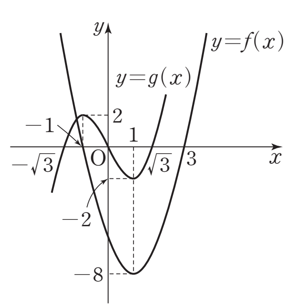
함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=-8$이다.

$g(x)=x(x^2-3)=x^3-3x$에서 $g'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 극대이고 극댓값은 $g(-1)=2$, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $g(1)=-2$이다.

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$i(x)=|f(x)-kg(x)|$ (k는 자연수)라 하면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=kg(x)$는 반드시 $-\sqrt{3}<x<-1$에서 만나고 만나는 점의 x좌표를 α라 하면 $i(\alpha)=0$이다.

$\lim_{h\to 0+}\frac{i(\alpha+h)-i(\alpha)}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\frac{\{kg(\alpha+h)-f(\alpha+h)\}-\{kg(\alpha)-f(\alpha)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\frac{k\{g(\alpha+h)-g(\alpha)\}-\{f(\alpha+h)-f(\alpha)\}}{h}$

$=kg'(\alpha)-f'(\alpha)$

$\lim_{h\to 0-}\frac{i(\alpha+h)-i(\alpha)}{h}$

$=\lim_{h\to 0-}\frac{\{f(\alpha+h)-kg(\alpha+h)\}-\{f(\alpha)-kg(\alpha)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0-}\frac{-k\{g(\alpha+h)-g(\alpha)\}+\{f(\alpha+h)-f(\alpha)\}}{h}$

$=-kg'(\alpha)+f'(\alpha)$

함수 $i(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능하려면

$kg'(\alpha)-f'(\alpha)=-kg'(\alpha)+f'(\alpha)$

즉, $kg'(\alpha)=f'(\alpha)$이어야 한다.

$k\times 3(\alpha+1)(\alpha-1)=4\alpha-4$, $(\alpha-1)\{3k(\alpha+1)-4\}=0$

$\alpha=1$ 또는 $\alpha=-1+\frac{4}{3k}$ ...... ㉠

그런데 $-\sqrt{3}<\alpha<-1$이므로 함수 $i(x)$는 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않다.

(i) $k=4$일 때

$i(1)=|f(1)-4g(1)|=0$이고

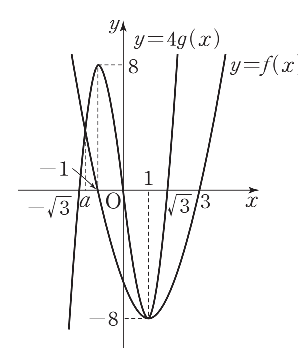
$i'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{i(1+h)-i(1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{4g(1+h)-f(1+h)\}-\{4g(1)-f(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{4\{g(1+h)-g(1)\}-\{f(1+h)-f(1)\}}{h}$

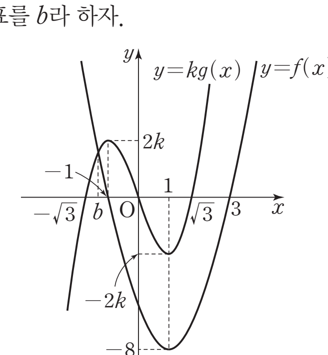
$=4g'(1)-f'(1)=0$

그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=4g(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나고 만나는 점 중 $x=1$이 아닌 점의 x좌표를 a $(-\sqrt{3}<a<-1)$라 하면 함수 $i(x)$는 $x=a$에서만 미분가능하지 않다.



(ii) $k=1, 2, 3$일 때

그림과 같이 $-\sqrt{3}<x<-1$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=kg(x)$가 만나는 점의 x좌표를 b라 하자.



$x<b$일 때 $f(x)>kg(x)$, $b<x\le 1$일 때 $f(x)<kg(x)$이다.

또한 $x>1$일 때 $f(1)<kg(1)$이고

$kg'(x)-f'(x)=3k(x+1)(x-1)-4(x-1)$

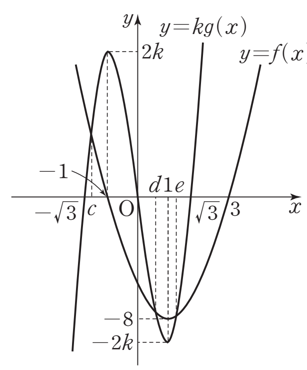
$=(x-1)\{3k(x+1)-4\}>0$

이므로 $f(x)<kg(x)$이다.

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=kg(x)$는 $x=b$에서만 만나고 함수 $i(x)$는 $x=b$에서만 미분가능하지 않다.

(iii) $k=5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$일 때

그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=kg(x)$는 서로 다른 세 점에서 만나고 만나는 점의 x좌표를 $c\ (-\sqrt{3}<c<-1)$, $d\ (0<d<1)$, $e\ (1<e<\sqrt{3})$라 하자.



$x=c$, $x=d$, $x=e$에서 미분가능하려면 ㉠에서와 마찬가지로 c, d, e의 값이 각각 1 또는 $-1+\dfrac{4}{3k}$가 되어야 하는데 $k>4$이므로 $-1<-1+\dfrac{4}{3k}<0$이다.

따라서 함수 $i(x)$는 $x=c$, $x=d$, $x=e$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii), (iii)에서 $1\le k\le 4$일 때 함수 $|f(x)-kg(x)|$가 미분가능하지 않은 실수 x의 개수는 각각 1이고, $5\le k\le 10$일 때 함수 $|f(x)-kg(x)|$가 미분가능하지 않은 실수 x의 개수는 각각 3이다. 그리고 이 x의 값들은 모두 서로 다르다. 함수 $p(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않고, 함수 $q(x)$가 $x=\beta\ (\alpha\ne\beta)$에서 미분가능하지 않으면 함수 $p(x)+q(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 미분가능하지 않으므로 함수 $\sum_{k=1}^{10}|f(x)-kg(x)|$가 미분가능하지 않은 실수 x의 개수는

$4\times1+6\times3=22$

답 ③

참고

두 곡선 $y=f(x)$, $y=kg(x)$ (k는 자연수)가 만나는 점의 x좌표를 $p\ (-\sqrt{3}<p<-1)$라 하고 두 곡선 $y=f(x)$, $y=(k+1)g(x)$ (k는 자연수)가 만나는 점의 x좌표를 $q\ (-\sqrt{3}<q<-1)$라 하자.

함수 $f(x)-(k+1)g(x)$는 닫힌구간 $[-\sqrt{3},\ p]$에서 연속이고

$f(p)-(k+1)g(p)=\{f(p)-kg(p)\}-g(p)=-g(p)<0$

$f(-\sqrt{3})-(k+1)g(-\sqrt{3})=f(-\sqrt{3})>0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(q)-(k+1)g(q)=0$인 q가 열린구간 $(-\sqrt{3},\ p)$에 존재한다.

즉, $q<p$이므로 $p\ne q$이다.

22

${}_5\Pi_2=5^2=25$

답 25

23

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x-1)dx$

$=x^2-x+C$ (C는 적분상수)

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로

$f(-1)=1$

즉, $1-(-1)+C=1$에서 $C=-1$

따라서 $f(x)=x^2-x-1$이므로

$a=f(3)=9-3-1=5$

답 5

24

$\sum_{k=1}^{10}(k+2)^3-\sum_{k=1}^{9}(k^3+6k^2+32k)$

$=\sum_{k=1}^{10}(k^3+6k^2+12k+8)-\sum_{k=1}^{9}(k^3+6k^2+32k)$

$=10^3+6\times10^2+12\times10+8$

$+\sum_{k=1}^{9}(k^3+6k^2+12k+8)-\sum_{k=1}^{9}(k^3+6k^2+32k)$

$=1728+\sum_{k=1}^{9}(8-20k)$

$=1728+\sum_{k=1}^{9}8-20\sum_{k=1}^{9}k$

$=1728+9\times8-20\times\dfrac{9\times10}{2}=900$

답 900

25

1, 3, 5, 7, 9의 5개의 홀수 중 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

(i) 5개의 숫자 중 4개의 숫자가 같은 경우

$2\times\dfrac{5!}{4!}=10$

(ii) 5개의 숫자 중 3개의 숫자가 같은 경우

$2\times\dfrac{5!}{3!\times2!}=20$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$10(10+20)=300$

답 300

다른 풀이

1, 3, 5, 7, 9의 5개의 홀수 중 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

택한 2개의 홀수로 이루어진 다섯 자리 자연수는

${}_2\Pi_5-2=32-2=30$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times30=300$

26

이 도시의 시민 n명의 걷는 운동 시간의 평균을 $\overline{x_1}$라 하자.

이 도시의 시민들의 걷는 운동 시간의 평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $0.7608\le m\le0.8392$이므로

$\overline{x_1}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$에서

$\overline{x_1}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=0.7608$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{x_1}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=0.8392$ ⋯⋯ ㉡

㉡－㉠을 하면

$2\times1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=0.0784$

$1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=0.0392$, $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{50}$

이 도시의 시민 $16n$명의 걷는 운동 시간의 평균을 $\overline{x_2}$라 하자.

이 도시의 시민들이 걷는 운동 시간의 평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{16n}}\le m\le\overline{x_2}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{16n}}$이므로

$b-a=\overline{x_2}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{16n}}-\left(\overline{x_2}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{16n}}\right)$

$=2\times1.96\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$=1.96\times\dfrac{1}{100}=0.0196$

따라서 $10000(b-a)=196$

답 196

27

$8^a=9^b$에서 $(2^a)^3=(3^b)^2$

$(2^a)^3=(3^b)^2=k$ (k는 양의 상수)라 하면

$2^a=k^{\frac{1}{3}}$, $3^b=k^{\frac{1}{2}}$ ⋯⋯ ㉠

$\log_6 2^a+\log_6 3^b=\log_6 k^{\frac{1}{3}}+\log_6 k^{\frac{1}{2}}$

$=\log_6(k^{\frac{1}{3}}k^{\frac{1}{2}})=\log_6 k^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}$

$=\log_6 k^{\frac{5}{6}}$

$\log_6 k^{\frac{5}{6}}=10$에서 $k^{\frac{5}{6}}=6^{10}$이므로

$k=(6^{10})^{\frac{6}{5}}=6^{12}$

㉠에서 $2=k^{\frac{1}{3a}}$, $3=k^{\frac{1}{2b}}$이므로

$6=k^{\frac{1}{3a}}\times k^{\frac{1}{2b}}=k^{\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}}=6^{12\left(\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}\right)}$

따라서 $\dfrac{1}{3a}+\dfrac{1}{2b}=\dfrac{1}{12}$이므로 $p=12$

답 12

28

정사면체 모양의 상자를 던질 때, 3이 적혀 있는 면이 바닥에 놓일 확률은 $\dfrac{1}{4}$이고 이 상자를 96회 던질 때, 3이 적혀 있는 면이 바닥에 놓인 횟수를 확률변수 X라 하면 확률변수 X에 대하여

$\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(k)={}_{96}\mathrm{C}_k\left(\dfrac{1}{4}\right)^k\left(\dfrac{3}{4}\right)^{96-k}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 96)$

이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(96,\ \dfrac{1}{4}\right)$을 따른다.

이때 $\mathrm{E}(X)=96\times\dfrac{1}{4}=24$

$\mathrm{V}(X)=96\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=18$

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=18+24^2=594$

따라서

$\displaystyle\sum_{k=0}^{96}(k+1)(k+2)\mathrm{P}(k)$

$\displaystyle=\sum_{k=0}^{96}(k+1)(k+2)\mathrm{P}(X=k)$

$\displaystyle=\sum_{k=0}^{96}\left\{(k+1)(k+2)\,{}_{96}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{96-k}\right\}$

$\displaystyle=\sum_{k=0}^{96}\left\{(k^2+3k+2)\,{}_{96}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{96-k}\right\}$

$\displaystyle=\sum_{k=0}^{96}\left\{k^2\,{}_{96}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{96-k}\right\}+3\sum_{k=0}^{96}\left\{k\,{}_{96}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{96-k}\right\}$

$\displaystyle+2\sum_{k=0}^{96}{}_{96}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{96-k}$

$=\mathrm{E}(X^2)+3\mathrm{E}(X)+2$

$=594+3\times24+2=668$

답 668

29

같은 종류의 사탕 6개를 서로 구별되는 6개의 접시에 남김없이 담는 경우의 수는 서로 다른 접시 6개에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_6\mathrm{H}_6={}_{6+6-1}\mathrm{C}_6={}_{11}\mathrm{C}_6={}_{11}\mathrm{C}_5=\dfrac{11\times10\times9\times8\times7}{5\times4\times3\times2\times1}=462$

각 접시에 적힌 수를 접시의 번호라 하자.

(i) 사탕이 담겨진 접시에 적힌 번호의 합이 6 이하가 되는 경우는 다음과 같다.

① 1개의 접시에 사탕을 모두 담는 경우

6가지

② 2개의 접시에 사탕을 모두 담는 경우

1번과 2번, 1번과 3번, 1번과 4번, 1번과 5번, 2번과 3번, 2번과 4번 접시에 담는 6가지

택한 2개의 접시에 사탕을 모두 담는 경우의 수는 2개의 접시에 사탕을 하나씩 놓고 남은 4개의 사탕을 중복을 허락하여 2개의 접시에 모두 담는 경우의 수이므로

${}_2\mathrm{H}_4={}_{2+4-1}\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_1=5$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times5=30$

③ 3개의 접시에 사탕을 모두 담는 경우

1번과 2번과 3번 접시에 담는 1가지

1번과 2번과 3번 접시에 사탕을 모두 담는 경우의 수는 1번과 2번과 3번 접시에 사탕을 하나씩 놓고 남은 3개의 사탕을 중복을 허락하여 1번과 2번과 3번 접시에 모두 담는 경우의 수이므로

${}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

따라서 구하는 경우의 수는 $1\times10=10$

(ii) 사탕이 담겨진 접시에 적힌 번호의 합이 18 이상이 되는 경우는 다음과 같다.

① 6개의 접시에 사탕을 모두 담는 경우

$1+2+3+4+5+6=21$이므로 1가지

② 5개의 접시에 사탕을 모두 담는 경우

1번을 제외한 5개, 2번을 제외한 5개, 3번을 제외한 5개의 접시에 담는 3가지

택한 1개의 접시를 제외한 5개의 접시에 사탕을 모두 담는 경우의 수는 5개의 접시에 사탕을 하나씩 놓고 남은 1개의 사탕을 5개의 접시 중 하나에 담는 경우의 수이므로

${}_5C_1=5$

따라서 구하는 경우의 수는 $3\times5=15$

③ 4개의 접시에 사탕을 모두 담는 경우

1번과 2번을 제외한 4개의 접시에 담는 1가지

1번과 2번을 제외한 4개의 접시에 사탕을 모두 담는 경우의 수는 4개의 접시에 사탕을 하나씩 놓고 남은 2개의 사탕을 중복을 허락하여 4개의 경우에 담는 경우의 수이므로

${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2=10$

따라서 구하는 경우의 수는 $1\times10=10$

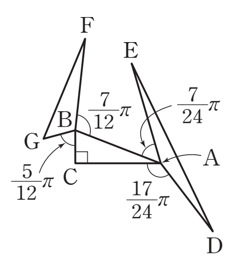
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$462-(6+30+10)-(1+15+10)=390$

답 390

30

$\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하면 $c^2=a^2+b^2$



두 삼각형 FGB, EAD에서 코사인법칙에 의해

$\overline{FG}^2=a^2+c^2-2ac\cos(\angle GBF)$ …… ㉠

$\overline{DE}^2=b^2+c^2-2bc\cos(\angle EAD)$ …… ㉡

$\angle GBF+\angle CBG+\angle ABC+\angle FBA=2\pi$이고

$\angle CBG+\angle FBA=\frac{5}{12}\pi+\frac{7}{12}\pi=\pi$이므로

$\angle GBF=\pi-\angle ABC$ …… ㉢

마찬가지로 $\angle EAD=\pi-\angle CAB$ …… ㉣

㉠과 ㉢에서

$c\cos(\angle GBF)=c\cos(\pi-\angle ABC)$

$=-c\cos(\angle ABC)$

$=-c\times\frac{a}{c}=-a$

㉡과 ㉣에서

$c\cos(\angle EAD)=c\cos(\pi-\angle CAB)$

$=-c\cos(\angle CAB)$

$=-c\times\frac{b}{c}=-b$

$\overline{FG}^2+\overline{DE}^2=(a^2+c^2+2a^2)+(b^2+c^2+2b^2)$

$=3(a^2+b^2)+2c^2$

$=3c^2+2c^2$

$=5c^2=720$

에서 $c^2=144$이므로 $c=12$

답 12

실전 모의고사 3회

본문 146~153쪽

01 ③	02 ④	03 ⑤	04 ①	05 ⑤
06 ②	07 ④	08 ①	09 ③	10 ④
11 ④	12 ②	13 ④	14 ②	15 ②
16 ①	17 ②	18 ③	19 ⑤	20 ⑤
21 ④	22 180	23 5	24 2	25 16
26 80	27 442	28 17	29 920	30 22

01

${}_nH_3={}_{n+3-1}C_3={}_{n+2}C_3$이고 ${}_{10}C_7={}_{10}C_3$이므로

${}_{n+2}C_3={}_{10}C_3$에서 $n+2=10$

따라서 $n=8$

답 ③

02

$\sqrt{\frac{4}{3}}\times18^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{2^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\times(2\times3^2)^{\frac{2}{3}}$

$=2\times3^{-\frac{1}{2}}\times2^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{4}{3}}$

$=2^{1+\frac{2}{3}}\times3^{-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}}$

$=2^{\frac{5}{3}}\times3^{\frac{5}{6}}$

에서 $a=\frac{5}{3}$, $b=\frac{5}{6}$이므로

$\frac{a}{b}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{6}}=2$

답 ④

03

공차를 d라 하면

$a_{11}=a_1+10d=33+10d=13$이므로

$d=-2$

따라서 $a_6=a_1+5d=33-10=23$

답 ⑤

다른 풀이

a_1, a_6, a_{11}은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a_6=\frac{a_1+a_{11}}{2}=\frac{33+13}{2}=23$

04

$P(A^C\cup B^C)=P((A\cap B)^C)=\frac{2}{3}$이므로

$P(A\cap B)=1-P((A\cap B)^C)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

이때 $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$이므로

$P(A\cap B^C)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

답 ①

05

$f(-1)=2$이고 $\lim_{x\to 1-} f(x)=3$이므로

$f(-1)+\lim_{x\to 1-} f(x)=2+3=5$

답 ⑤

06

다항함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1,\ 5)$에서의 접선의 기울기가 3이므로 $f(1)=5$이고 $f'(1)=3$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-5}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}\\&=2\times\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\\&=2f'(1)=2\times 3=6\end{aligned}$$

답 ②

07

$a>0$이고 함수 $f(x)=-a\sin ax+a$의 주기가 $\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{2\pi}{a}=\frac{\pi}{2}$

즉, $a=4$

따라서 함수 $f(x)=-4\sin 4x+4$의 최댓값은

$|-4|+4=8$

답 ④

08

다항함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값을 가지므로

$f'(-1)=0$

$f'(x)=6x^2+a$에서

$f'(-1)=6\times(-1)^2+a=6+a=0,\ a=-6$

$f'(x)=6x^2-6$에서

$$\begin{aligned}f(x)&=\int f'(x)dx=\int(6x^2-6)dx\\&=2x^3-6x+C\ (C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

$f(0)=1$이므로

$f(0)=C=1$

$f(x)=2x^3-6x+1$이므로

$$\begin{aligned}m&=f(-1)=2\times(-1)^3-6\times(-1)+1\\&=-2+6+1=5\end{aligned}$$

따라서 $m-a=5-(-6)=11$

답 ①

09

두 개의 동전을 동시에 던지는 시행에서 두 동전 모두 앞면이 나올 확률은 ${}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(8,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

따라서 $\mathrm{V}(X)=8\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$

답 ③

10

$S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2=\frac{\sqrt{3}}{4},\ S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이므로

$S_2=S_3-S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(1-a^2)$

세 수 $S_1,\ S_2,\ S_3$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로 세 수 $a^2,\ 1-a^2,\ 1$도 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

즉, $(1-a^2)^2=a^2\times 1$에서 $(1-a^2)^2=a^2$이므로

$1-a^2=\pm a$

(i) $1-a^2=a$일 때

$a^2+a-1=0$이고 $0<a<1$이므로

$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(ii) $1-a^2=-a$일 때

$a^2-a-1=0$

이것을 만족시키는 0보다 크고 1보다 작은 상수 a의 값은 존재하지 않는다.

따라서 $a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

답 ④

11

$a>0$이므로 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에서 최솟값을 갖는다.

$f\left(\frac{3}{2}\right)=a\times\frac{3}{2}\times\left(-\frac{3}{2}\right)+2=-\frac{9}{4}a+2$

이때 $a<\frac{8}{9}$이므로 $f\left(\frac{3}{2}\right)>0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.

$\log_3 f(x)\le 1$에서 $\log_3 f(x)\le\log_3 3$

밑이 3으로 1보다 크므로

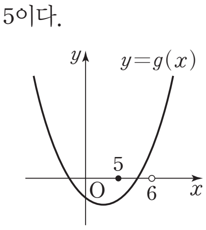
$f(x)\le 3$

$ax(x-3)+2\le 3$에서

$ax(x-3)-1\le 0$ …… ㉠

이때 $g(x)=ax(x-3)-1$이라 하면 곡선 $y=g(x)$는 직선 $x=\frac{3}{2}$에 대하여 대칭이고 부등식 ㉠을 만족시키는 정수 x의 개수가 8이므로 부등식 ㉠의 해 중 정수는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$이다.

따라서 그림과 같이 곡선 $y=g(x)$는 두 점 $(5,\ 0),\ (6,\ 0)$을 양 끝점으로 하는 선분과 만나면서 점 $(6,\ 0)$은 지나지 않아야 한다.



즉, $g(5)\le 0,\ g(6)>0$이어야 한다.

$g(5)\le 0$에서 $a\times 5\times 2-1\le 0,\ a\le\frac{1}{10}$

$g(6)>0$에서 $a\times 6\times 3-1>0,\ a>\frac{1}{18}$

$\frac{1}{18}<a\le\frac{1}{10}$이므로 $p=\frac{1}{18},\ q=\frac{1}{10}$

따라서 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=18+10=28$

답 ④

12

$f(x)=ax^2+2x+a-9$라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=-\frac{1}{a}$에 대하여 대칭이며 $0<-\frac{1}{a}<2$인 자연수 a는 존재하지 않는다.

따라서 사잇값의 정리에 의해 $f(0)\times f(2)<0$이면 $f(x)=0$인 실수 x가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재하고 이때에만 0보다 크고 2보다 작은 실수 x가 존재하므로

$f(0)\times f(2)=(a-9)(5a-5)<0$

$(a-9)(a-1)<0$

$1<a<9$

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 a의 개수는

$9-1-1=7$

답 ②

13

표본의 크기가 $n=64$, 모표준편차는 $\sigma=16$, 표본평균의 값이 $\bar{x}$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\bar{x}-1.96\times\frac{16}{\sqrt{64}}\le m\le\bar{x}+1.96\times\frac{16}{\sqrt{64}}$

주어진 신뢰구간에서

$\bar{x}-1.96\times2=55$, $\bar{x}+1.96\times2=a$

따라서 $\bar{x}=55+3.92=58.92$, $a=58.92+3.92=62.84$이므로

$\bar{x}+a=121.76$

답 ④

14

$a_1=1$이므로

$a_2=a_1+1=1+1=2$

$a_3=\frac{a_2}{2}=\frac{2}{2}=1$

$a_4=a_3+3=1+3=4$

$a_5=\frac{a_4}{4}=\frac{4}{4}=1$

$a_6=a_5+5=1+5=6$

$a_7=\frac{a_6}{6}=\frac{6}{6}=1$

$a_8=a_7+7=1+7=8$

따라서 $a_7+a_8=1+8=9$

답 ②

15

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)=0$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=2$에서 극소이므로

$a=-1$ 또는 $a=2$

이때 $f(-1)=3+4-12+a=a-5$,

$f(2)=48-32-48+a=a-32$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가지고, $x=2$에서 극소이면서 최솟값을 가지며, $x=-1$에서 최솟값이 아닌 극솟값을 갖는다.

그런데 두 조건 (가), (나)에서 $f(a)$는 함수 $f(x)$의 최솟값이 아닌 극솟값이어야 하므로

$a=-1$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(0)=a=-1$

답 ②

16

두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나온 두 눈의 수의 곱이 홀수일 확률은 두 눈의 수가 모두 홀수일 확률과 같으므로

$P(A^C)={}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

따라서 두 눈의 수의 곱이 짝수일 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(1200, \frac{3}{4}\right)$을 따르므로

$E(X)=1200\times\frac{3}{4}=900$

$V(X)=1200\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=225=15^2$

이때 시행횟수가 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(900, 15^2)$을 따른다.

따라서 $Z=\frac{X-900}{15}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\le870)&=P\left(\frac{X-900}{15}\le\frac{870-900}{15}\right)\\&=P(Z\le-2)\\&=0.5-P(0\le Z\le2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$

답 ①

17

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의해

$\overline{BD}^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\cos A=25-4=21$

이때 $\overline{CD}=a$, $\overline{BC}=2a$ $(a>0)$라 하면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의해

$21=a^2+(2a)^2-2\times a\times2a\times\cos120^\circ=7a^2$

이므로 $a^2=3$

즉, $a=\sqrt{3}$

한편, $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{35}}{6}$이므로 사각형 ABCD의 넓이는

(△ABD의 넓이)+(△BCD의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin A+\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\sin120^\circ$

$=6\times\frac{\sqrt{35}}{6}+3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{35}+\frac{3\sqrt{3}}{2}$

답 ②

18

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 조건 (가)에서 $f(0)=0$이므로 상수 k에 대하여 $f(x)=x(x-k)=x^2-kx$로 놓을 수 있다.

한편, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 양수이다.

$g'(x)=f(x)$이므로 $k=0$이면 $g'(x)=x^2\geq 0$, 즉 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=36$과 한 점에서만 만나므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 $k\neq 0$이고 $f(0)=f(k)=0$이므로 함수 $g(x)$는

$k>0$일 때, $x=0$에서 극대, $x=k$에서 극소이고,

$k<0$일 때, $x=k$에서 극대, $x=0$에서 극소이다.

이때 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$에서

$g(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$, $g'(0)=f(0)=0$이므로 함수 $g(x)$는 0을 극값으로 가지고, 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=36$과 서로 다른 두 점에서 만나므로 직선 $y=36$과 접하고 함수 $g(x)$는 36을 극값으로 갖는다.

$36>0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값 0, $x=k$에서 극댓값 36을 갖는다. 따라서 $g(k)=36$이고 $k<0$이므로

$$\begin{aligned}g(k)&=\int_0^k f(t)dt\\&=\int_0^k (t^2-kt)dt\\&=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{k}{2}t^2\right]_0^k\\&=\frac{k^3}{3}-\frac{k^3}{2}\\&=-\frac{k^3}{6}\\&=36\end{aligned}$$

$k^3+6^3=0$

$(k+6)(k^2-6k+36)=0$

따라서 $k=-6$이고

$f(x)=x^2+6x$, $g(x)=\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{3}x^3+3x^2$

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 모든 교점의 x좌표의 합은 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $g(x)-f(x)=0$의 서로 다른 실근의 합과 같으므로

$$\begin{aligned}g(x)-f(x)&=\left(\frac{1}{3}x^3+3x^2\right)-(x^2+6x)\\&=\frac{1}{3}x(x^2+6x-18)\end{aligned}$$

이차방정식 $x^2+6x-18=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-1\times(-18)=27>0$이므로 이차방정식 $x^2+6x-18=0$은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 갖는다. 두 실근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-6$

따라서 방정식 $g(x)-f(x)=0$은 서로 다른 세 실근 0, α, β를 가지고 그 합은

$0+\alpha+\beta=0+(-6)=-6$

답 ③

19

$a\leq b\leq c$가 성립하는 경우는 다음과 같다.

(i) $a<b<c$일 때

1부터 n까지의 자연수 중에서 서로 다른 3개를 택한 다음, 작은 수부터 크기순으로 a, b, c로 정하면 된다.

이때 1부터 n까지의 자연수 중에서 서로 다른 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_nC_3$이고, 택한 3개의 수가 적힌 공이 각각 2개씩 있으므로 각 숫자가 적힌 공을 택하는 경우의 수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

따라서 $a<b<c$가 성립하도록 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_nC_3\times\boxed{8}$

(ii) $a=b<c$일 때

1부터 n까지의 자연수 중에서 서로 다른 2개를 택한 다음, 작은 수를 a와 b로 정하고 큰 수를 c로 정하면 된다.

1부터 n까지의 자연수 중에서 서로 다른 2개를 택하는 경우의 수는

${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2!}=\frac{n(n-1)}{2}$

a, b가 적힌 공을 정하는 경우의 수는 2이고, c가 적힌 공을 택하는 경우의 수는 2

따라서 $a=b<c$가 성립하도록 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$\frac{n(n-1)}{2}\times2\times2=\boxed{2n(n-1)}$

(iii) $a<b=c$일 때

이 경우의 수는 (ii)와 같다.

(i), (ii), (iii)에서 $a\leq b\leq c$인 경우의 수는

$\boxed{8}\times{}_nC_3+\boxed{2n(n-1)}\times\boxed{2}$

이상에서 $p=8$, $q=2$, $f(n)=2n(n-1)$이므로

$f(p+q)=f(10)=2\times10\times9=180$

답 ⑤

참고

같은 수가 적힌 공이 각각 2개씩만 있으므로 $a=b=c$인 경우는 불가능하다.

20

점 A(2, 3)을 지나고 기울기가 -1인 직선을 l이라 하면

$l: y=-x+5$

ㄱ. $k=4$이면 곡선 $y=\log_4 x$는 점 (4, 1)을 지난다. 이때 점 (4, 1)은 직선 l 위의 점이므로 점 P_4의 좌표는 $P_4(4, 1)$이다.

즉, $x_4=4$이다. (참)

ㄴ. $y_k=1$이면 점 P_k의 좌표는 (4, 1)이어야 하고 ㄱ에서 $k=4$이다.

$y_k=2$이면 점 P_k의 좌표는 (3, 2)이어야 하고 곡선 $y=\log_k x$가 점 (3, 2)를 지나야 하므로 $2=\log_k 3$, $k^2=3$, $k=\sqrt{3}$

이때 $\sqrt{3}<k<4$이면 곡선 $y=\log_k x$는 두 점 (3, 2), (4, 1)을 양 끝 점으로 하는 선분과 만나므로 $1\leq y_k\leq 2$를 만족시키는 실수 k의 범위는 $\sqrt{3}\leq k\leq 4$이고 k의 최솟값은 $\sqrt{3}$이다. (참)

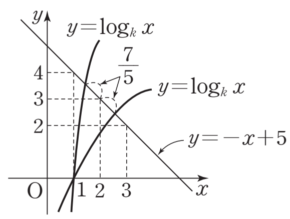
ㄷ. $\left(\frac{7}{5}\right)^2=\frac{49}{25}<\frac{50}{25}=2$이므로 $\frac{7}{5}<\sqrt{2}$

점 A(2, 3)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원과 직선 l의 교점은 (1, 4), (3, 2)이므로 점 A(2, 3)을 중심으로 하고 반지름

의 길이가 $\frac{7}{5}$인 원과 직선 l의 두 교점의 x좌표를 각각

p, q $(p<q)$라 하면 $1<p<q<3$

이때 1보다 큰 실수 k에 대하여 $1<x_k<5$이므로 $x_k=p$, $x_k=q$를 만족시키는 실수 k가 각각 하나씩 존재한다.



따라서 $\overline{\mathrm{AP}_k}=\frac{7}{5}$을 만족시키는 1보다 큰 실수 k의 개수는 2이다.

(참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

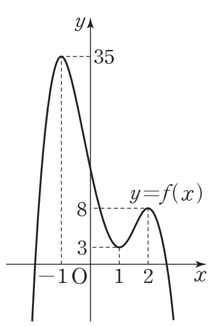
21

$f'(x)=-12x^3+24x^2+12x-24=-12(x-2)(x+1)(x-1)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

이때 $f(-1)=35$, $f(1)=3$, $f(2)=8$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$g(x)=f(|x|-a)=\begin{cases} f(-x-a) & (x<0) \\ f(x-a) & (x\geq 0) \end{cases}$에서 두 함수 $f(-x-a)$와 $f(x-a)$는 모든 실수 x에서 미분가능하다.

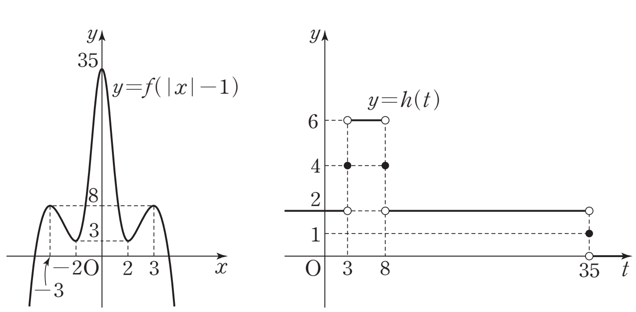
이때 $g(-x)=g(x)$이므로 곡선 $y=g(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.

따라서 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $g'(0)=0$이어야 한다.

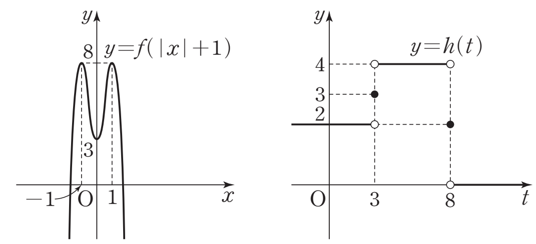
$x\geq 0$일 때 곡선 $y=g(x)$, 즉 $y=f(x-a)$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이고,

$f'(-1)=f'(1)=f'(2)=0$이므로

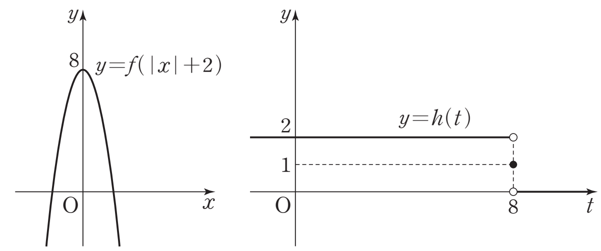
$a=1$ 또는 $a=-1$ 또는 $a=-2$



[$a=1$일 때]



[$a=-1$일 때]



[$a=-2$일 때]

위의 그림에서 조건 (나)를 만족시키는 두 정수 a, b는 다음과 같다.

(ⅰ) $a=1$일 때

$\lim_{t\to 3-} h(t)=2$, $\lim_{t\to 3+} h(t)=6$

$\lim_{t\to 8-} h(t)=6$, $\lim_{t\to 8+} h(t)=2$

이때 $\lim_{t\to b-} h(t)\geq \lim_{t\to b+} h(t)$를 만족시키는 정수 b는 8이다.

(ⅱ) $a=-1$일 때

$b=4$, 5, 6, 7일 때

$\lim_{t\to b-} h(t)=\lim_{t\to b+} h(t)=4$

이때 $b=4$, 5, 6, 7은 모두 $\lim_{t\to b-} h(t)\geq \lim_{t\to b+} h(t)$를 만족시킨다.

(ⅲ) $a=-2$일 때

$\lim_{t\to b-} h(t)+\lim_{t\to b+} h(t)=8$인 정수 b는 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 조건 (나)를 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b)는

$(1, 8)$, $(-1, 4)$, $(-1, 5)$, $(-1, 6)$, $(-1, 7)$

이므로 $n=5$

$a+b$의 최솟값은 $m=-1+4=3$

$a+b$의 최댓값은 $M=1+8=9$

따라서 $n+m+M=5+3+9=17$

답 ④

22

$f'(x)=6x^2+6x$이므로

$f'(5)=6\times 5^2+6\times 5=180$

답 180

23

직선 $y=\frac{1}{5}x+\frac{1}{10}$이 x축과 이루는 예각의 크기가 θ이므로

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{5}$

따라서 $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=5$

답 5

24

$2^x=t$라 하면 $t>0$이고

$8^x-4^{x+1}-2^x+4=0$에서

$(2^x)^3-4\times(2^x)^2-2^x+4=0$

$t^3-4t^2-t+4=0$

$(t+1)(t-1)(t-4)=0$

$t>0$이므로 $t=1$ 또는 $t=4$

즉, $2^x=1$ 또는 $2^x=4$이므로

$x=0$ 또는 $x=2$

따라서 방정식 $8^x-4^{x+1}-2^x+4=0$을 만족시키는 모든 실근의 합은

$0+2=2$

답 2

25

6명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $6!$

세 쌍의 부부가 부부끼리는 모두 이웃하게 서는 경우의 수는 다음과 같다.

부부끼리는 한 조로 생각하여 세 조를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!$

각 조에서 부부끼리 순서를 바꾸는 경우의 수는 $2!$이므로 세 쌍의 부부가 부부끼리는 모두 이웃하게 서는 경우의 수는

$3!\times2!\times2!\times2!=3\times2^4$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{3\times2^4}{6!}=\dfrac{1}{15}$이므로

$p+q=15+1=16$

답 16

26

$$f(x)g(x)=\begin{cases}(-x+9)\{a(x+1)-2\} & (x<a)\\ (2x-9)\{a(x+1)-2\} & (x\ge a)\end{cases}$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=a$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to a-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a+}f(x)g(x)=f(a)g(a)$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to a-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a-}(-x+9)(ax+a-2)$

$=(-a+9)(a^2+a-2)$

$\lim\limits_{x\to a+}f(x)g(x)=f(a)g(a)=(2a-9)(a^2+a-2)$이므로

$(-a+9)(a^2+a-2)=(2a-9)(a^2+a-2)$에서

$(a^2+a-2)\{(2a-9)-(-a+9)\}=0$

$(a^2+a-2)(3a-18)=0$

$3(a+2)(a-1)(a-6)=0$

$a=-2$ 또는 $a=1$ 또는 $a=6$

$a_1=-2$, $a_3=6$이므로

$10\times(a_3-a_1)=10\times\{6-(-2)\}=80$

답 80

27

조건 (나)에서

$a_{16}+a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}+a_{21}=\sum\limits_{k=1}^{21}a_k-\sum\limits_{k=1}^{15}a_k$

$=(2\times11-1)-(2\times8-1)$

$=21-15=6$

조건 (가)에서

$a_{16}+a_{18}+a_{20}=\sum\limits_{k=1}^{10}a_{2k}-\sum\limits_{k=1}^{7}a_{2k}$

$=2^{10-1}-2^{7-1}=2^9-2^6$

$=512-64=448$

따라서 $a_{17}+a_{19}+a_{21}=6-448=-442$이므로

$|a_{17}+a_{19}+a_{21}|=|-442|=442$

답 442

다른 풀이

조건 (가)에서 2 이상의 자연수 n에 대하여

$a_{2n}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{2k}-\sum\limits_{k=1}^{n-1}a_{2k}$

$=2^{n-1}-2^{n-2}$

$=2\times2^{n-2}-2^{n-2}$

$=2^{n-2}$ ...... ㉠

조건 (나)에서 모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n+1}+a_{2n}=\sum\limits_{k=1}^{2n+1}a_k-\sum\limits_{k=1}^{2n-1}a_k$

$=\{2(n+1)-1\}-(2n-1)$

$=2$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n+1}=(a_{2n+1}+a_{2n})-a_{2n}$

$=2-2^{n-2}$

따라서

$|a_{17}+a_{19}+a_{21}|$

$=|a_{2\times8+1}+a_{2\times9+1}+a_{2\times10+1}|$

$=|(2-2^6)+(2-2^7)+(2-2^8)|$

$=|(-62)+(-126)+(-254)|$

$=442$

28

첫 번째 시행에서 나온 두 숫자가 서로 다른 사건을 X, 두 번째 시행에서 나온 두 숫자가 서로 같은 사건을 Y라 하면 구하는 확률을 $\mathrm{P}(Y|X)$이다.

첫 번째 시행에서 두 숫자가 서로 같을 확률은

$\mathrm{P}(X^C)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$이므로

$\mathrm{P}(X)=1-\dfrac{2}{9}=\dfrac{7}{9}$

첫 번째 시행에서 꺼낸 두 구슬에 적힌 숫자가 서로 다르고, 두 번째 시행에서 꺼낸 두 구슬에 적힌 숫자가 서로 같은 경우와 그 확률은 다음과 같다.

(i) 주머니 A, B에서 첫 번째로 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 각각 1, 4일 확률은

$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$

이때 주머니 A, B에서 두 번째로 꺼낸 두 구슬에 적힌 숫자가 서로 같을 확률은

$\frac{2}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(ii) 주머니 A에서 첫 번째로 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 1이고, 주머니 B에서 첫 번째로 꺼낸 구슬에 적힌 숫자는 2, 3 중의 하나일 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

이때 주머니 A, B에서 두 번째로 꺼낸 두 구슬에 적힌 숫자가 서로 같을 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(iii) 주머니 A, B에서 첫 번째로 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 2 또는 3이면서 서로 다를 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

이때 주머니 A, B에서 두 번째로 꺼낸 두 구슬에 적힌 숫자가 서로 같을 확률은 0이다.

(iv) 주머니 A에서 첫 번째로 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 2 또는 3이고, 주머니 B에서 첫 번째로 꺼낸 구슬에 적힌 숫자는 4일 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

이때 주머니 A, B에서 두 번째로 꺼낸 두 구슬에 적힌 숫자가 서로 같을 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(i)~(iv)에서

$$\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{1}{9}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{9}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{9}\times 0+\frac{2}{9}\times\frac{1}{4}$$
$$=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$$

이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{9}}=\frac{3}{14}$$

따라서 $p+q=14+3=17$

답 17

다른 풀이

첫 번째로 꺼낸 구슬에 적힌 두 숫자가 서로 다른 경우의 수는

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4)

의 7이다.

이때 각 경우마다 두 번째로 꺼내는 경우의 수는 각각 $2\times2=4$이다.

한편, 위의 각 경우마다 두 번째로 꺼낸 구슬에 적힌 숫자가 서로 같은 경우는 다음과 같다.

(1, 2) ⇨ (3, 3)

(1, 3) ⇨ (2, 2)

(1, 4) ⇨ (2, 2), (3, 3)

(2, 3) ⇨ 없음

(2, 4) ⇨ (3, 3)

(3, 2) ⇨ 없음

(3, 4) ⇨ (2, 2)

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{7\times4}=\frac{3}{14}$이므로 $p+q=14+3=17$

29

그림 R_n에 그려진 모든 원의 개수는

$$2+2^2+2^3+\cdots+2^n=\frac{2(2^n-1)}{2-1}$$
$$=2^{n+1}-2$$

이므로 8개의 그림 R_1, R_2, R_3, $\cdots$, R_8에 그려진 모든 원의 개수의 합은

$$a=\sum_{k=1}^{8}(2^{k+1}-2)=\sum_{k=1}^{8}2^{k+1}-\sum_{k=1}^{8}2$$
$$=\frac{2^2(2^8-1)}{2-1}-2\times8$$
$$=2^{10}-20=1004$$

한편, 그림 R_1에는 지름의 길이가 다음과 같은 원이 각각 1개씩 있다.

$2\times\frac{2}{3}$, $2\times\frac{1}{3}$

이때 그림 R_2에는 그림 R_1의 원 중 지름의 길이가 $2\times\frac{2}{3}$인 원의 내부에 지름의 길이가

$\left(2\times\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}$, $\left(2\times\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{3}$

인 원이 각각 1개씩 그려지고, 지름의 길이가 $2\times\frac{1}{3}$인 원의 내부에 지름의 길이가

$\left(2\times\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{3}$, $\left(2\times\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}$

인 원이 각각 1개씩 그려진다.

또 그림 R_3에는 그림 R_2에서 새로 그려진 각 원의 내부에 지름의 길이가 다음과 같은 원이 각각 1개씩 그려진다.

$2\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$ ⇨ $\left(2\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}$, $\left(2\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{3}$

$2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$ ⇨ $\left(2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{3}$, $\left(2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}$

$2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$ ⇨ $\left(2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}$, $\left(2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{3}$

$2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$ ⇨ $\left(2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{3}$, $\left(2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}$

이와 같이 그림 R_n $(n\geq2)$에는 그림 R_{n-1}에서 새로 그려진 2^{n-1}개의 원 C_k $(k=1, 2, 3, \cdots, 2^{n-1})$의 내부에 지름의 길이가 원 C_k의 지름의 길이의 $\frac{2}{3}$배인 원과 $\frac{1}{3}$배인 원이 각각 1개씩 그려진다.

따라서 그림 R_n에서 새로 그려진 2^n개의 원의 지름의 길이는

$2\times p_1\times p_2\times p_3\times\cdots\times p_n$

$\left(\text{단, } p_i=\frac{2}{3}\text{ 또는 } p_i=\frac{1}{3},\ i=1, 2, 3, \cdots, n\right)$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

따라서 그림 R_n에서 처음으로 그린 2^n개의 원 중에서 지름의 길이가 $2\times\left(\frac{2}{3}\right)^r\left(\frac{1}{3}\right)^{n-r}$ $(0\leq r\leq n)$인 원의 개수는 p_1, p_2, p_3, $\cdots$, p_n 중에서 $\frac{2}{3}$를 r개, $\frac{1}{3}$을 $n-r$개 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_n\mathrm{C}_r$개이다.

따라서 그림 R_9에 그려진 원 중에서 지름의 길이가 $\frac{16}{3^9}$, 즉 $2\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^6$인 원의 개수는

$$b={}_9\mathrm{C}_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$$

따라서 $a-b=1004-84=920$

답 920

30

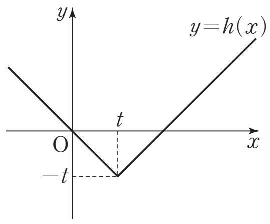
$|x-t|=f(x)+t$에서

$|x-t|-t=f(x)$

$h(x)=|x-t|-t$라 하면

$$h(x)=\begin{cases} -x & (x<t) \\ x-2t & (x\ge t) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



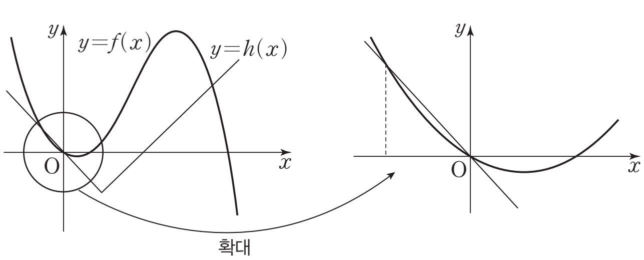
집합 A_t의 원소의 개수는 함수 $y=h(x)$의 그래프와 곡선 $y=f(x)$의 서로 다른 교점의 개수와 같고, 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 음수인 삼차함수이므로 $g(t)$는 1 이상의 자연수의 값을 갖는다.

이때 조건 (가), (나)에서 $g(t)=3$을 만족시키는 실수 t는 오직 $t=\frac{1}{3}$, $t=\frac{5}{12}$뿐이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프와 곡선 $y=f(x)$는 $t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=\frac{5}{12}$일 때만 서로 다른 세 점에서 만난다.

조건 (가)에서 $0\in A_{\frac{1}{3}}$, $0\in A_{\frac{5}{12}}$이고 함수 $y=h(x)$의 그래프는 $t=\frac{1}{3}$, $t=\frac{5}{12}$일 때 점 $(0, 0)$을 지나므로 곡선 $y=f(x)$는 점 $(0, 0)$을 지난다.

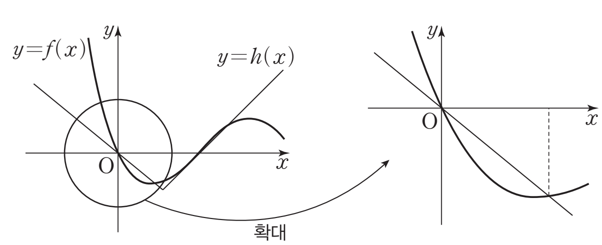
$x<t$인 경우 $h(x)=-x$이므로 $f'(0)$의 값의 범위에 따라 다음 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $f'(0)>-1$이라고 가정하면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x$의 위치 관계는 그림과 같고 $t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=\frac{5}{12}$일 때 방정식 $f(x)=h(x)$를 만족시키는 0보다 작은 실근이 존재한다.



이때 두 집합 $A_{\frac{1}{3}}$, $A_{\frac{5}{12}}$의 원소 중 가장 작은 원소가 0이라는 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $f'(0)<-1$이라고 가정하면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x$의 위치 관계는 그림과 같다.



$x<\frac{1}{3}$일 때 직선 $y=-x$와 곡선 $y=f(x)$가 서로 다른 두 점에서 만나면 $x\ge\frac{1}{3}$일 때 직선 $y=x-\frac{2}{3}$와 곡선 $y=f(x)$는 오직 한 점에서만 만나야 하고, $x\ge\frac{5}{12}$일 때 직선 $y=x-\frac{5}{6}$와 곡선 $y=f(x)$는 오직 한 점에서만 만나야 하므로 $\frac{1}{3}<t<\frac{5}{12}$인 모든 실수 t에 대하여 직선 $y=x-2t$와 곡선 $y=f(x)$는 오직 한 점에서만 만난다.

즉, 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

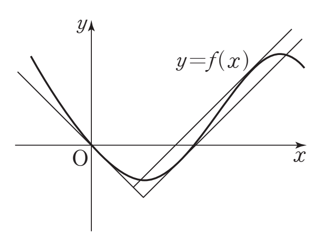
$x<\frac{5}{12}$일 때 직선 $y=-x$와 곡선 $y=f(x)$가 오직 한 점에서만 만나면 $x\ge\frac{1}{3}$일 때 직선 $y=x-\frac{2}{3}$와 곡선 $y=f(x)$는 서로 다른 두 점에서만 만나야 하고, $x\ge\frac{5}{12}$일 때 직선 $y=x-\frac{5}{6}$와 곡선 $y=f(x)$는 서로 다른 두 점에서만 만나야 하므로 $\frac{1}{3}<t<\frac{5}{12}$인 모든 실수 t에 대하여 직선 $y=x-2t$와 곡선 $y=f(x)$는 서로 다른 두 점에서만 만난다.

즉, 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$x<\frac{1}{3}$일 때 직선 $y=-x$와 곡선 $y=f(x)$가 오직 한 점에서만 만나고 $\frac{1}{3}\le x<\frac{5}{12}$일 때 직선 $y=-x$와 곡선 $y=f(x)$가 오직 한 점에서만 만난다고 가정해도 $g(t)=3$을 만족시키는 실수 t가 $t=\frac{1}{3}$, $t=\frac{5}{12}$ 외에도 존재한다.

즉, 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $f'(0)=-1$이어야 하고 $g(t)=3$을 만족시키는 실수 t가 $t=\frac{1}{3}$, $t=\frac{5}{12}$ 외에 존재하지 않으므로 $t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=\frac{5}{12}$일 때 함수 $y=h(x)$의 그래프는 곡선 $y=f(x)$와 점 $(0, 0)$ 이외에 다른 한 점에서도 각각 접한다.



조건 (가)에서 $A_{\frac{1}{3}}=\{0, a, 2\}$ $(0<a<2)$이므로 $t=\frac{1}{3}$일 때 함수 $y=h(x)$의 그래프와 곡선 $y=f(x)$는 점 $(2, h(2))$에서 접한다.

$t=\frac{1}{3}$일 때 $x\ge\frac{1}{3}$에서 $h(x)=x-\frac{2}{3}$이므로

$f'(2)=1$, $f(2)=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

$f'(0)=-1$, $f'(2)=1$이므로 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 k $(k<0)$라 하면 $f'(x)=3kx(x-2)+(x-1)$로 놓을 수 있다.

즉, $f'(x)=3kx^2-(6k-1)x-1$

이때 $f(0)=0$이므로

$$\begin{aligned} f(x)&=\int_0^x f'(t)dt \\ &=\int_0^x \{3kt^2-(6k-1)t-1\}dt \end{aligned}$$

$$=\left[kt^3-\frac{6k-1}{2}t^2-t\right]_0^x$$
$$=kx^3-\frac{6k-1}{2}x^2-x$$

$f(2)=\frac{4}{3}$이므로

$f(2)=8k-2(6k-1)-2=-4k=\frac{4}{3}$

$k=-\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x-\frac{2}{3}$의 교점의 x좌표를 구하면

$-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x=x-\frac{2}{3}$에서

$2x^3-9x^2+12x-4=0$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x-\frac{2}{3}$는 점 $(2,\ f(2))$에서 접하므로 위의 방정식은 $x=2$를 근으로 갖고 좌변은 $(x-2)^2$을 인수로 갖는다.

즉, $(x-2)^2(2x-1)=0$

$x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

따라서 $a=\frac{1}{2}$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x-\frac{5}{6}$의 교점의 x좌표를 구하면

$-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x=x-\frac{5}{6}$에서

$2x^3-9x^2+12x-5=0$

$x=1$을 대입하면 성립하므로 좌변을 인수분해하면

$(x-1)^2(2x-5)=0$

$x=1$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

$1<\frac{5}{2}$이므로 $b=1,\ c=\frac{5}{2}$

따라서

$$\int_{a+\frac{1}{2}}^{c+\frac{1}{2}}\{f(x)+x\}dx=\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}\{f(x)+x\}dx$$
$$=\int_1^3\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{2}x^3\right]_1^3$$
$$=\left(-\frac{27}{4}+\frac{27}{2}\right)-\left(-\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{27}{4}-\frac{5}{12}=\frac{19}{3}$$

따라서 $p=3,\ q=19$이므로

$p+q=3+19=22$

답 22

실전 모의고사 4회

본문 154~161쪽

01 ④	02 ②	03 ②	04 ④	05 ④
06 ④	07 ②	08 ③	09 ①	10 ①
11 ③	12 ④	13 ③	14 ④	15 ④
16 ①	17 ②	18 ③	19 ⑤	20 ⑤
21 ④	22 6	23 17	24 10	25 4
26 121	27 54	28 67	29 230	30 94

01

${}_3\Pi_2=3^2=9$

답 ④

02

$$\lim_{x\to4}\frac{2\sqrt{x}-4}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{2(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{2(x-4)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{2}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{2}$$

답 ②

03

$(\log_9 16-\log_3 2)\times\log_2 9$

$=(\log_{3^2}4^2-\log_3 2)\times\log_2 9$

$=(\log_3 4-\log_3 2)\times\log_2 9$

$=\log_3 2\times\log_2 9$

$=\log_3 2\times\frac{\log_3 9}{\log_3 2}$

$=\log_3 9$

$=\log_3 3^2=2$

답 ②

04

$6\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A$

$=\frac{1}{2}\times3\times\overline{AC}\times\sin120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times3\times\overline{AC}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 $\overline{AC}=8$

답 ④

05

두 사건 A와 B가 서로 배반사건이므로 $P(A\cap B)=0$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

이때 $P(A\cup B)=3P(B)$이므로

$3P(B)=P(A)+P(B)$

$P(B)=\frac{1}{2}P(A)$

이때 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

따라서 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

답 ④

06

$\mathrm{E}(X)=np=6$

$\mathrm{V}(X)=np(1-p)=6(1-p)$이므로

$6(1-p)=4$

$p=\frac{1}{3}$

$np=6$에서 $n=\frac{6}{p}=18$

답 ④

07

$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1}(x^3+3x^2+ax)dx$

$=\int_{-1}^{1}(x^3+ax)dx+\int_{-1}^{1}3x^2dx$

$=0+\left[x^3\right]_{-1}^{1}$

$=2$

$f'(x)=3x^2+6x+a$에서 $f'(0)=a$

따라서 $a=2$

답 ②

08

$f(0)=3$, $\lim_{x\to-1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to1+}f(x)=1$이므로

$f(0)+\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=3+1+1=5$

답 ③

09

함수 $f(x)$가 $x=b$에서 극소이므로 $f'(b)=0$

이때 $f(b)=0$이므로 삼차식 $f(x)$는 $(x-b)^2$을 인수로 갖는다.

$f(a)=0$이고 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=(x-a)(x-b)^2=(x-a)(x^2-2bx+b^2)$

$f'(x)=(x^2-2bx+b^2)+(x-a)(2x-2b)$

$=(x-b)^2+2(x-a)(x-b)$

$=(x-b)\{(x-b)+2(x-a)\}$

$=(x-b)(3x-2a-b)$

$f'(x)=0$에서 $x=b$ 또는 $x=\frac{2a+b}{3}$

함수 $f(x)$가 $x=b$에서 극소이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{2a+b}{3}$에서 극댓값을 갖는다.

$b-a=6$에서 $b=a+6$이므로

$\frac{2a+b}{3}=\frac{2a+(a+6)}{3}=a+2$

$f(x)=(x-a)(x-b)^2=(x-a)(x-a-6)^2$에서

$f(a+2)=\{(a+2)-a\}\times\{(a+2)-a-6\}^2$

$=2\times(-4)^2$

$=2\times16=32$

답 ①

10

$f'\left(\frac{1}{3}\right)=f'(1)=0$이므로

$f'(x)=a\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)$ (단, $a>0$)

$f'(0)=1$에서 $\frac{1}{3}a=1$, $a=3$

즉, $f'(x)=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)=(3x-1)(x-1)=3x^2-4x+1$

$f(x)=\int(3x^2-4x+1)dx$

$=x^3-2x^2+x+C$ (C는 적분상수)

에서 $f(-1)=0$이므로

$-1-2-1+C=0$, 즉 $C=4$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+x+4$이므로

$f(2)=8-8+2+4=6$

답 ①

다른 풀이

$f'\left(\frac{1}{3}\right)=f'(1)=0$이므로

$f'(x)=a\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)$ (단, $a>0$)

$f'(0)=1$에서 $\frac{1}{3}a=1$, $a=3$

즉, $f'(x)=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)=(3x-1)(x-1)$

$=3x^2-4x+1$

$f(2)-f(-1)=\int_{-1}^{2}(3x^2-4x+1)dx$

$=\left[x^3-2x^2+x\right]_{-1}^{2}$

$=(8-8+2)-(-1-2-1)=6$

$f(-1)=0$이므로 $f(2)=6$

11

$\sum_{k=1}^{5}(a_k+4k^3)=512$, $\sum_{k=1}^{5}\{b_k+(2k-2)^3\}=16$에서

$\sum_{k=1}^{5}(2a_k+8k^3)=1024$, $\sum_{k=1}^{5}\{b_k+8(k-1)^3\}=16$이므로

$\sum_{k=1}^{5}(2a_k+8k^3)-\sum_{k=1}^{5}\{b_k+8(k-1)^3\}=1024-16$

$\sum_{k=1}^{5}(2a_k-b_k)+\sum_{k=1}^{5}(8k^3)-\sum_{k=1}^{4}(8k^3)=1008$

$\sum_{k=1}^{5}(2a_k-b_k)+8\times5^3=1008$

따라서 $\sum_{k=1}^{5}(2a_k-b_k)=8$

답 ③

12

곡선 $y=2^{f(x)}$은 점 $(0, 4)$를 지나므로

$4=2^{f(0)}$, $2^{f(0)}=2^2$, $f(0)=2$ ······ ㉠

$5f(0)=2g(0)$에서

$g(0)=\frac{5}{2}\times 2=5$ ······ ㉡

두 곡선 $y=2^{f(x)}$, $y=2^{g(x)}$이 점 $(1, 8)$에서 만나므로

$8=2^{f(1)}$, $8=2^{g(1)}$, $2^{f(1)}=2^{g(1)}=2^3$

$f(1)=3$, $g(1)=3$ ······ ㉢

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 ㉠, ㉢에서

$b=2$, $a+b=3$이므로 $a=1$, $b=2$

즉, $f(x)=x+2$

$g(x)=cx+d$ (c, d는 상수)라 하면 ㉡, ㉢에서

$d=5$, $c+d=3$이므로 $c=-2$, $d=5$

즉, $g(x)=-2x+5$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}\le 4^{g(x)}$에서

$(2^{-1})^{f(x)}\le(2^2)^{g(x)}$, $2^{-f(x)}\le 2^{2g(x)}$

밑이 2로 1보다 크므로

$-f(x)\le 2g(x)$, $-(x+2)\le 2(-2x+5)$, $3x\le 12$

$x\le 4$

따라서 부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}\le 4^{g(x)}$을 만족시키는 자연수 x의 개수는 4이다.

답 ④

13

함수 $f(x)$의 최댓값은 3이므로

$|a|+b=3$ ······ ㉠

함수 $f(x)$의 최솟값은 1이므로

$-|a|+b=1$ ······ ㉡

두 식 ㉠과 ㉡을 더하면 $2b=4$에서 $b=2$이다.

이때 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$에서 $a+b=1$이므로 $a+2=1$

즉, $a=-1$

한편, $0\le x\le 2\pi$에서 $0\le 2x\le 4\pi$이므로

방정식 $\cos 2x=-1$의 해는

$2x=\pi$ 또는 $2x=3\pi$

즉, $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

따라서 구하는 모든 해의 합은 $\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi=2\pi$

답 ③

14

한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 6의 약수인 사건을 A, 동전의 앞면이 나온 횟수가 3인 사건을 X라 하자.

(i) 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 6의 약수인 경우

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$\mathrm{P}(X|A)$는 동전을 5번 던져서 앞면이 나온 횟수가 3일 확률이므로

$\mathrm{P}(X|A)={}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$

$\mathrm{P}(A\cap X)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(X|A)=\frac{2}{3}\times\frac{5}{16}=\frac{5}{24}$

(ii) 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 6의 약수가 아닌 경우

$\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(X|A^C)$은 동전을 4번 던져서 앞면이 나온 횟수가 3일 확률이므로

$\mathrm{P}(X|A^C)={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(A^C\cap X)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(X|A^C)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X)=\mathrm{P}(A\cap X)+\mathrm{P}(A^C\cap X)$

$=\frac{5}{24}+\frac{1}{12}=\frac{7}{24}$

답 ④

15

조건 (가)에서 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to 2}\{f(x)-3\}=f(2)-3=0$

즉, $f(2)=3$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x}\right\}$

$=f'(2)\times\frac{1}{2}=2$

즉, $f'(2)=4$

조건 (나)에서 $h\to 0$일 때 (분자)$\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$\lim_{h\to 0}\{g(2+h)-1\}=g(2)-1=0$

즉, $g(2)=1$

$\lim_{h\to 0}\frac{2h}{g(2+h)-1}=\lim_{h\to 0}\frac{2}{\frac{g(2+h)-g(2)}{h}}$

$=\frac{2}{\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}}$

$=\frac{2}{g'(2)}=3$

즉, $g'(2)=\frac{2}{3}$

$h(x)=f(x)g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$h'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)$

$=4\times 1+3\times\frac{2}{3}=6$

답 ④

16

방정식 $|a|+|b|+|c|=10$을 만족시키는 0이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

${}_{3}\mathrm{H}_{10-3}\times 2^3={}_{9}\mathrm{C}_7\times 2^3=36\times 8=\boxed{288}$

이다. 이 중에서 부등식 $(a-1)(b-1)>0$을 만족시키는 0이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하자.

(i) $a-1>0$, $b-1>0$인 경우

$a>1$, $b>1$에서 $a\ge 2$, $b\ge 2$이다.

즉, 이 경우의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

방정식 $a+b+|c|=10$ $(a\ge 2,\ b\ge 2,\ |c|\ge 1)$을 만족시키는 0이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같으므로

${}_{3}\mathrm{H}_{10-5}\times 2={}_{7}\mathrm{C}_5\times 2=21\times 2=\boxed{42}$

이다.

(ii) $a-1<0$, $b-1<0$인 경우

$a<1$, $b<1$에서 a, b는 0이 아닌 정수이므로 모두 음의 정수이다.

$a'=-a$, $b'=-b$라 하면 $a'\ge 1$, $b'\ge 1$이다.

즉, 이 경우의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

방정식 $a'+b'+|c|=10$ $(a'\ge 1,\ b'\ge 1,\ |c|\ge 1)$을 만족시키는 0이 아닌 정수 a', b', c의 모든 순서쌍 (a', b', c)의 개수와 같으므로

${}_{3}\mathrm{H}_{10-3}\times 2={}_{9}\mathrm{C}_7\times 2=36\times 2=\boxed{72}$

이다.

(i), (ii)에서 방정식 $|a|+|b|+|c|=10$과 부등식 $(a-1)(b-1)\le 0$을 동시에 만족시키는 0이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$\boxed{288}-(\boxed{42}+\boxed{72})=174$

이다.

이상에서 $p=288$, $q=42$, $r=72$이므로

$p+q+r=288+42+72=402$

답 ①

17

(i) $x<1$일 때

$g(x)=-(x-1)-(x-k)=-2x+1+k$

이므로 $g(x)>k-1$

(ii) $1\le x<k$일 때

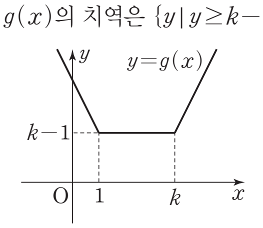
$g(x)=(x-1)-(x-k)=k-1$

(iii) $x\ge k$일 때

$g(x)=(x-1)+(x-k)=2x-1-k$

이므로 $g(x)\ge k-1$

(i), (ii), (iii)에서 함수 $g(x)$의 치역은 $\{y\,|\,y\ge k-1\}$이다.



(iv) $k-1\ge 5$일 때

$(f\circ g)(x)=-1$이므로 함수 $(f\circ g)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(v) $k-1<5$일 때

$g(a)=g(b)=5$인 a, b $(a<1,\ b>k)$가 존재한다.

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}-1 & (x\le a)\\ 3 & (a<x<b)\\ -1 & (x\ge b)\end{cases}$$

이므로 함수 $(f\circ g)(x)$가 $x=a$, $x=b$에서 불연속이다.

(iv), (v)에서 함수 $(f\circ g)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면

$k-1\ge 5$이므로 $k\ge 6$

따라서 실수 k의 최솟값은 6이다.

답 ②

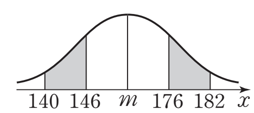
18

$\mathrm{P}(140\le X\le 176)=\mathrm{P}(140\le X\le 146)+\mathrm{P}(146\le X\le 176)$,

$\mathrm{P}(146\le X\le 182)=\mathrm{P}(146\le X\le 176)+\mathrm{P}(176\le X\le 182)$

이므로 조건 (가)에 의해

$\mathrm{P}(140\le X\le 146)=\mathrm{P}(176\le X\le 182)$



이때 $146-140=182-176=6$이므로 확률밀도함수의 그래프의 성질에 의해

$m=\dfrac{140+182}{2}=\dfrac{146+176}{2}=161$

$Z=\dfrac{X-161}{\sigma}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르고 조건 (나)에서

$\mathrm{P}(140\le X\le 146)+\mathrm{P}(X\ge 182)$

$=\mathrm{P}(176\le X\le 182)+\mathrm{P}(X\ge 182)$

$=\mathrm{P}(X\ge 176)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{176-161}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{15}{\sigma}\right)$

$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{15}{\sigma}\right)=0.1056$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{15}{\sigma}\right)=0.5-0.1056=0.3944$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.25)=0.3944$이므로

$\dfrac{15}{\sigma}=1.25$, $\sigma=12$

따라서 $m+\sigma=161+12=173$

답 ③

19

$\angle\mathrm{APB}=\theta$ $(\angle\mathrm{ACB}<\theta<180^\circ-\angle\mathrm{ACB})$라 하면

$\angle\mathrm{APC}=180^\circ-\theta$이다.

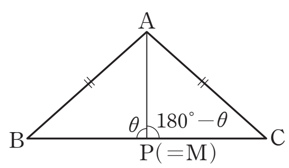
이때 삼각형 ABP에서 사인법칙에 의해

$\dfrac{\overline{\mathrm{BP}}}{\sin(\angle\mathrm{BAP})}=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin(\angle\mathrm{APB})}$이고,

삼각형 APC에서 사인법칙에 의해

$\dfrac{\overline{\mathrm{CP}}}{\sin(\angle\mathrm{CAP})}=\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\angle\mathrm{APC})}$이므로

$$\frac{\overline{\mathrm{BP}}}{\sin(\angle\mathrm{BAP})}+\frac{\overline{\mathrm{CP}}}{\sin(\angle\mathrm{CAP})}$$
$$=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin(\angle\mathrm{APB})}+\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\angle\mathrm{APC})}$$
$$=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\theta}+\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(180^\circ-\theta)}$$
$$=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\theta}+\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\theta}$$
$$=\frac{\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\theta}=\frac{2\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\theta}$$



이때 삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 이등변삼각형이므로 그림과 같이 점 P가 선분 BC의 중점 M과 일치할 때 $\theta=90^\circ$이므로 $\sin\theta=1$이 되어

$\frac{\overline{\mathrm{BP}}}{\sin(\angle\mathrm{BAP})}+\frac{\overline{\mathrm{CP}}}{\sin(\angle\mathrm{CAP})}$는 최솟값 $2\overline{\mathrm{AB}}$를 갖는다.

즉, 점 P가 선분 BC의 중점 M과 일치할 때 $\overline{\mathrm{AP}}=4$이고, $2\overline{\mathrm{AB}}=12$에서 $a=6$이다.

삼각형 ABM에서 $\overline{\mathrm{BM}}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}$이므로 $b=2\times2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

따라서 $ab=6\times4\sqrt{5}=24\sqrt{5}$

답 ⑤

20

함수 $f(x)=3\log_2(x-1)$의 그래프 위의 점을 (a, b)라 하면

$b=3\log_2(a-1)$

$a=2^{\frac{b}{3}}+1$

이때 a, b가 모두 자연수이려면 $\frac{b}{3}$가 자연수이어야 하므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=2^n+1$, $f(a_n)=3n$

ㄱ. $f(a_n)=3n$이므로 $f(a_{n+1})=3n+3$
따라서 모든 자연수 n에 대하여 $f(a_{n+1})=f(a_n)+3$이다. (참)

ㄴ. 점 $(a_3, f(a_3))$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이고, $a_3=2^3+1=9$, $f(a_3)=9$이므로 점 $(a_3, f(a_3))$은 직선 $y=x$ 위의 점이다.
따라서 곡선 $y=f(x)$는 점 $(a_3, f(a_3))$에서 직선 $y=x$와 만난다. (참)

ㄷ. $\sum_{k=1}^{8}\{a_k+f(a_k)\}=\sum_{k=1}^{8}(2^k+1+3k)$
$=\frac{2(2^8-1)}{2-1}+8+3\times\frac{8\times9}{2}$
$=626$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

21

함수 $f(x)=x^3-3(a+1)x^2+12ax-3a-5$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2-6(a+1)x+12a$

$f'(x)=0$에서

$x^2-2(a+1)x+4a=0$

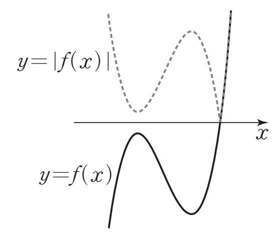
$(x-2a)(x-2)=0$

$x=2a$ 또는 $x=2$

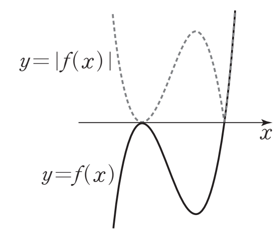
조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 극솟값 p를 가지므로 $2a\neq2$, 즉 $a\neq1$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2a$ 또는 $x=2$에서 각각 극댓값 또는 극솟값을 갖는다.

조건 (나)에서 함수 $|f(x)|$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 실수 k의 값이 오직 하나 존재하고, 조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 극솟값 p에 대하여 $p<0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

즉, 함수 $f(x)$의 극댓값을 q라 할 때, $q\leq0$이어야 한다.

(i) $a<1$일 때 $2a<2$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(2a)=(2a)^3-3(a+1)\times(2a)^2+12a\times2a-3a-5$
$=8a^3-12a^3-12a^2+24a^2-3a-5$
$=-4a^3+12a^2-3a-5$

$f(2a)\leq0$에서 $-4a^3+12a^2-3a-5\leq0$

$(a-1)(2a+1)(2a-5)\geq0$

이때 $a<1$이므로 $(2a+1)(2a-5)\leq0$, $-\frac{1}{2}\leq a\leq\frac{5}{2}$

즉, $-\frac{1}{2}\leq a<1$

(ii) $a>1$일 때 $2a>2$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(2)=2^3-3(a+1)\times2^2+12a\times2-3a-5=9a-9$

$f(2)\leq0$에서 $9a-9\leq0$

이때 $a>1$이므로 $f(2)\leq0$을 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

따라서 $-\frac{1}{2}\leq a<1$일 때 함수 $f(x)$는 조건을 만족시키므로 두 집합

$A=\{a\,|\,\alpha<a<\beta\}$, $B=\left\{a\,\middle|\,-\frac{1}{2}\leq a<1\right\}$

에 대하여 $A\subset B$이어야 한다.

즉, $-\frac{1}{2}\leq\alpha<\beta\leq1$에서 $m=-\frac{1}{2}$, $M=1$이므로

$M+m=1+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

답 ④

22

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면

$\frac{1}{2}\times r^2\times\frac{5}{3}\pi=30\pi$에서 $r^2=36$

따라서 $r=6$

답 6

23

a_5는 a_2와 a_8의 등차중항이므로

$\frac{a_2+a_8}{2}=a_5$

$\frac{5+a_8}{2}=11$

따라서 $a_8=17$

답 17

24

점 P의 시각 t $(t\ge 0)$에서의 위치 x가 $x=t^3-6t^2+pt+q$이므로

점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 속도 v는 $v=\frac{dx}{dt}=3t^2-12t+p$

점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 가속도 a는 $a=\frac{dv}{dt}=6t-12$

점 P의 가속도가 0일 때의 시각 t를 구하면 $a=0$에서

$6t-12=0$, $t=2$

$t=2$일 때 점 P의 속도 v가 -3이므로

$-3=3\times 2^2-12\times 2+p$, $-3=-12+p$, $p=9$

$t=2$일 때 점 P의 위치 x가 3이므로

$3=2^3-6\times 2^2+9\times 2+q$, $3=2+q$, $q=1$

따라서 $p+q=9+1=10$

답 10

25

다항식 $(2x-y)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(2x)^r(-y)^{5-r}={}_5C_r2^r(-1)^{5-r}x^ry^{5-r}$이다.

$(2x-y)^5$의 전개식에서 x^2y^3의 계수는 $r=2$일 때이므로

${}_5C_2\,2^2(-1)^3=-40$

$(2x-y)^5$의 전개식에서 x^3y^2의 계수는 $r=3$일 때이므로

${}_5C_3\,2^3(-1)^2=80$

따라서 다항식 $(3x+ay)(2x-y)^5$의 전개식에서 x^3y^3의 계수는

$3\times(-40)+a\times 80=-120+80a$

즉, $-120+80a=200$에서 $a=4$

답 4

26

곡선 $y=a_nx^2-2a_{n+1}x+a_{n+2}$가 x축에 접하려면

이차방정식 $a_nx^2-2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a_{n+1})^2-a_na_{n+2}=0$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이므로 공비를 r $(r\ne 0)$라 하면

$a_n=r^{n-1}$

$r^{n-1}x^2-2r^nx+r^{n+1}=0$

$x=3$이 중근이므로

$r^{n-1}(3^2-2r\times 3+r^2)=0$

$r^2-6r+9=0$

$(r-3)^2=0$

$r=3$

따라서 $\sum_{k=1}^{5}a_k=\frac{a_1(r^5-1)}{r-1}=\frac{3^5-1}{3-1}=121$

답 121

27

점 A_1은 x축 위의 점이므로 y좌표가 0이고 $0=\log_a x$에서 점 A_1의 x좌표는 1이다.

점 B_1의 x좌표는 점 A_1의 x좌표와 같으므로 1이고 $\overline{A_1B_1}=3$에서

$B_1(1, 3)$이므로 $3=b^1$

즉, $b=3$

점 A_2의 y좌표는 점 B_1의 y좌표와 같으므로 3이고 $\overline{B_1A_2}=3$에서

$A_2(4, 3)$이므로 $3=\log_a 4$

즉, $a^3=4$ ······ ㉠

점 B_2의 x좌표는 점 A_2의 x좌표와 같으므로 4이고 점 B_2의 y좌표를 y_1이라 하면

$y_1=3^4=81$

점 A_3의 y좌표는 점 B_2의 y좌표와 같으므로 81이고 점 A_3의 x좌표 k에 대하여

$\log_a k=81$, $k=a^{81}$

이때 ㉠에서 $a^3=4$이므로

$k=a^{81}=(a^3)^{27}=4^{27}=2^{54}$

따라서 $\log_2 k=\log_2 2^{54}=54$

답 54

28

이 고등학교 학생 n명을 임의추출하여 1주일 동안의 수면 시간을 조사한 표본평균이 $\overline{x_1}$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}$

즉, $a=\overline{x_1}-1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}$, $b=\overline{x_1}+1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}$

이때 $a+b=84$이므로

$a+b=2\times\overline{x_1}=84$, $\overline{x_1}=42$

또 이 고등학교 학생 $4n$명을 다시 임의추출하여 1주일 동안의 수면 시간을 조사한 표본평균이 $\overline{x_2}$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-2.58\times\frac{2}{\sqrt{4n}}\le m\le\overline{x_2}+2.58\times\frac{2}{\sqrt{4n}}$

즉, $\overline{x_2}-2.58\times\frac{1}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x_2}+2.58\times\frac{1}{\sqrt{n}}$이므로

$a+0.268=\overline{x_2}-2.58\times\frac{1}{\sqrt{n}}$, $b-0.268=\overline{x_2}+2.58\times\frac{1}{\sqrt{n}}$

이때 $a+b=84$이므로

$a+b=2\times\overline{x_2}=84$

$\overline{x_2}=42$
한편,
$0.268=(a+0.268)-a$
$=\left(42-2.58\times\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\left(42-1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$
$=-2.58\times\frac{1}{\sqrt{n}}+1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}$
$=\frac{1.96\times2-2.58}{\sqrt{n}}=\frac{1.34}{\sqrt{n}}$
$\sqrt{n}=\frac{1.34}{0.268}=5$, $n=5^2=25$
따라서 $n+\overline{x_2}=25+42=67$

답 67

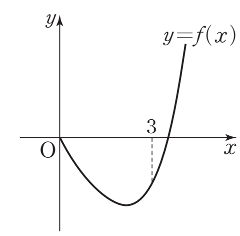
29

조건 (가), (나)에 의해 $f(x)=5$인 집합 X의 원소 x의 개수는 1 또는 2이다.
(ⅰ) $f(x)=5$인 원소 x가 1개인 경우
집합 X의 원소 중에서 $f(x)=5$인 원소 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_1=5$
조건 (나)에서 $\sum_{k=1}^{5} f(k)=14$이므로 $f(x)=5$가 아닌 나머지 네 함숫값을 a, b, c, d라 하면
$a+b+c+d=9$ (a, b, c, d는 4 이하의 자연수)
$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$이라 하면
$a'+b'+c'+d'=5$ (a', b', c', d'은 3 이하의 음이 아닌 정수)
이 방정식을 만족시키는 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는 중복조합의 수 ${}_4H_5$에서 a', b', c', d' 중 하나가 4인 경우의 수와 5인 경우의 수를 뺀 것과 같으므로
${}_4H_5-12-4={}_{4+5-1}C_5-16={}_8C_5-16={}_8C_3-16$
$=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}-16=40$
따라서 $f(x)=5$인 원소 x가 1개인 함수 f의 개수는
$5\times40=200$
(ⅱ) $f(x)=5$인 원소 x가 2개인 경우
집합 X의 원소 중에서 $f(x)=5$인 원소 2개를 택하는 경우의 수는
${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$
조건 (나)에서 $\sum_{k=1}^{5} f(k)=14$이므로 $f(x)=5$가 아닌 나머지 세 함숫값을 a, b, c라 하면
$a+b+c=4$ (a, b, c는 4 이하의 자연수)
이 방정식을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$(2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$, $(1, 1, 2)$의 3이다.
따라서 $f(x)=5$인 원소 x가 2개인 함수 f의 개수는
$10\times3=30$
(ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 함수 f의 개수는
$200+30=230$

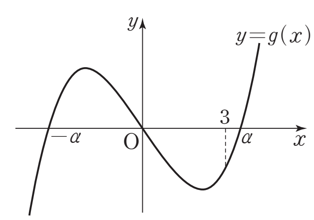
답 230

30

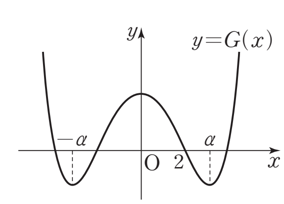
삼차함수 $f(x)$를
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a>0$)라 하자.
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로 $f'(0)=-28$에서 $c=-28$
또한 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.
$\lim_{x\to0+} g(x)=\lim_{x\to0-} g(x)=g(0)$에서
$\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0-} \{-f(-x)\}=f(0)$
즉, $f(0)=-f(0)$이므로 $f(0)=0$, $d=0$
따라서 함수 $f(x)$는 $f(x)=ax^3+bx^2-28x$이다.
이때 $a>0$이고 $f(0)=0$, $f(3)<0$이므로 $x\geq0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

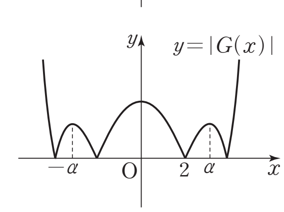


한편, 함수 $g(x)$에서 $x<0$일 때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x>0$일 때의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프이므로 양수 α에 대하여 $f(\alpha)=0$이라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.

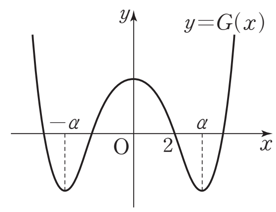


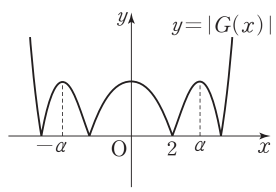
함수 $G(x)$를 $G(x)=\int_2^x g(t)dt$라 하면 $G(2)=0$이고
$G'(x)=g(x)$이다.
또한 모든 실수 x에 대하여 $\int_{-x}^{x} g(t)dt=0$이므로
$\int_{-x}^{2} g(t)dt+\int_2^x g(t)dt=0$
$-\int_2^{-x} g(t)dt+\int_2^x g(t)dt=0$
$-G(-x)+G(x)=0$이므로 $G(x)=G(-x)$
즉, 함수 $y=G(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, 함수 $G(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=-\alpha$와 $x=\alpha$에서 극솟값을 갖는다.
이때 $0<2<3<\alpha$이므로 $G(0)$과 $G(\alpha)$의 값에 따라 함수 $y=G(x)$의 그래프와 함수 $y=|G(x)|$의 그래프는 그림과 같다.
(ⅰ) $G(0)>|G(\alpha)|$일 때



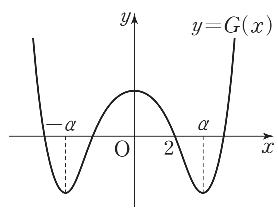


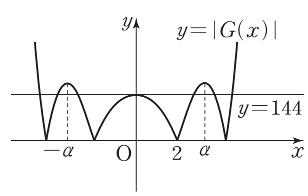
(ii) $G(0)=|G(\alpha)|$일 때





(iii) $G(0)<|G(\alpha)|$일 때

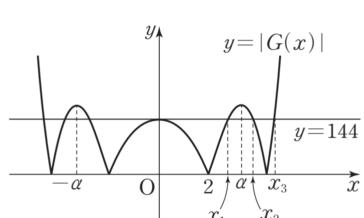




$n(A)=7$이므로 방정식 $|G(x)|=144$의 서로 다른 실근의 개수가 7이려면 함수 $y=G(x)$의 그래프와 함수 $y=|G(x)|$의 그래프는 (iii)의 경우만 가능하고, 이때 $G(0)=144$이다.

$$\begin{aligned} G(0) &= \int_2^0 g(x)dx \\ &= -\int_0^2 g(x)dx \\ &= -\int_0^2 f(x)dx \\ &= -\int_0^2 (ax^3+bx^2-28x)dx \\ &= -\left[\frac{1}{4}ax^4+\frac{1}{3}bx^3-14x^2\right]_0^2 \\ &= -4a-\frac{8}{3}b+56=144 \end{aligned}$$

이므로 $a+\frac{2}{3}b=-22$ …… ㉠



그림과 같이 방정식 $|G(x)|=144$의 서로 다른 세 양의 실근을 x_1, x_2, x_3 $(x_1<x_2<x_3)$이라 하면 $3\in A$, $\alpha>3$에서 $x_1=3$이고, $G(3)=-144$이다.

$$\begin{aligned} G(3) &= \int_2^3 g(x)dx \\ &= \int_2^3 f(x)dx \\ &= \int_2^3 (ax^3+bx^2-28x)dx \\ &= \left[\frac{1}{4}ax^4+\frac{1}{3}bx^3-14x^2\right]_2^3 \\ &= \frac{65}{4}a+\frac{19}{3}b-70=-144 \end{aligned}$$

이므로 $\frac{65}{4}a+\frac{19}{3}b=-74$ …… ㉡

㉡$-$㉠$\times\frac{19}{2}$를 하면 $\frac{27}{4}a=135$에서 $a=20$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=-63$

즉, $f(x)=20x^3-63x^2-28x$

$f'(x)=60x^2-126x-28$이므로

$f'(1)=60-126-28=-94$

따라서 $|f'(1)|=94$

답 94

실전 모의고사 5회

본문 162~168쪽

01 ①	02 ⑤	03 ④	04 ①	05 ③
06 ④	07 ③	08 ④	09 ①	10 ⑤
11 ①	12 ②	13 ④	14 ①	15 ④
16 ③	17 ⑤	18 ②	19 ④	20 ⑤
21 ②	22 36	23 58	24 30	25 35
26 128	27 75	28 122	29 35	30 28

01

$(4^{-2})^{\frac{1}{3}}=4^{-2\times\frac{1}{3}}=4^{-\frac{2}{3}}=(2^2)^{-\frac{2}{3}}=2^{-\frac{4}{3}}$,

$\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$이므로

$(4^{-2})^{\frac{1}{3}}\times\sqrt[3]{2}=2^{-\frac{4}{3}}\times2^{\frac{1}{3}}=2^{-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}}=2^{-1}=\frac{1}{2}$

답 ①

02

$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}(x+2)=2+2=4$

답 ⑤

03

$\int_{-2}^{2}(3x^2+2x-1)dx=2\int_{0}^{2}(3x^2-1)dx$

$=2\Big[x^3-x\Big]_0^2$

$=2\times\{(8-2)-(0-0)\}=12$

답 ④

04

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$에서

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$에서

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$

따라서

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{2}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{10}=\frac{11}{20}$

답 ①

05

$\lim_{x\to1}f(x)=1$이고 $\lim_{x\to0+}f(x)=3$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)+\lim_{x\to0+}f(x)=1+3=4$

답 ③

06

$\log_3 18+\log_{\frac{1}{3}} 2=\log_3 18-\log_3 2$

$=\log_3\frac{18}{2}=\log_3 9$

$=\log_3 3^2=2$

답 ④

07

그림에서 삼각함수의 정의에 의하여

$\sin\theta=\frac{b}{3}$이므로

$\frac{b}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$에서 $b=\sqrt{6}$

한편, $\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$이므로 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$

θ는 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

그림에서 삼각함수의 정의에 의하여

$\cos\theta=\frac{a}{3}$이므로

$\frac{a}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 $a=-\sqrt{3}$

따라서 $ab=-3\sqrt{2}$

답 ③

08

서로 다른 4개의 접시에 7개의 사탕을 담는 중복조합의 수는

${}_4\mathrm{H}_7={}_{10}\mathrm{C}_7={}_{10}\mathrm{C}_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

C, D에만 사탕 7개를 담는 중복조합의 수는

${}_2\mathrm{H}_7={}_8\mathrm{C}_7={}_8\mathrm{C}_1=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$120-8=112$

답 ④

다른 풀이

(i) A에 적어도 1개 이상의 사탕이 담기는 경우의 수는

A에 사탕 한 개를 담고 나머지 6개의 사탕을 4개의 접시에 담는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_6={}_9\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

(ii) B에 적어도 1개 이상의 사탕이 담기는 경우의 수는

(i)과 같은 방법으로 84

(iii) A, B 모두 적어도 1개 이상의 사탕이 담기는 경우의 수는
A, B에 각각 사탕 한 개를 담고 나머지 5개의 사탕을 4개의 접시에 담는 중복조합의 수와 같으므로

$_4H_5={}_8C_5={}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$84+84-56=112$

09

최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$의 도함수는 최고차항의 계수가 -3인 이차함수이므로 주어진 그래프에서

$f'(x)=-3x(x-2)=-3x^2+6x$

$f(x)=\int f'(x)dx=-x^3+3x^2+C$ (C는 적분상수)

한편, $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$이고 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 $f(0)=C$를 가지고, $x=2$에서 극댓값 $f(2)=C+4$를 갖는다.

이때 극댓값과 극솟값의 합이 10이므로

$C+(C+4)=10$에서 $C=3$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은

$C+4=7$

답 ①

10

$\frac{1}{2}a_{2n+1}=a_{2n-1}$에서 $a_{2n+1}=2a_{2n-1}$ …… ㉠

$\frac{1}{3}a_{2n+2}=a_{2n}$에서 $a_{2n+2}=3a_{2n}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 식에

$n=1$을 각각 대입하면

$a_3=2a_1$, $a_4=3a_2=3a_1$

$n=2$를 각각 대입하면

$a_5=2a_3=2(2a_1)=2^2a_1$

$a_6=3a_4=3(3a_1)=3^2a_1$

$n=3$을 각각 대입하면

$a_7=2a_5=2(2^2a_1)=2^3a_1$

$a_8=3a_6=3(3^2a_1)=3^3a_1$

따라서 $a_7+a_8=2^3a_1+3^3a_1=35a_1$이므로

$k=35$

답 ⑤

11

주어진 그림에서 삼각함수의 주기가 $4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$이므로

$\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}=\frac{8}{3}$에서 $b=\frac{3}{4}$

최댓값은 4, 최솟값은 0이므로

$|a|+c=4$, $-|a|+c=0$에서 $|a|=2$, $c=2$

$f(x)=a\sin\frac{3}{4}\pi x+2$라 하면

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 D$(2, 4)$를 지나므로

$f(2)=-a+2=4$에서 $a=-2$

따라서 $abc=-2\times\frac{3}{4}\times2=-3$

답 ①

12

$(x^2+2)^5(x^2-2)^5=\{(x^2+2)(x^2-2)\}^5=(x^4-4)^5$에서

$(x^4-4)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(x^4)^{5-r}(-4)^r={}_5C_r(-4)^r x^{20-4r}$

이므로 x^8항은 $20-4r=8$, 즉 $r=3$일 때이다.

따라서 x^8의 계수는

${}_5C_3\times(-4)^3={}_5C_2\times(-4)^3=\frac{5\times4}{2\times1}\times(-64)=-640$

답 ②

13

상자 B에서 꺼낸 1개의 사탕이 포도맛 사탕인 사건을 X라 하고, 상자 A에서 꺼낸 사탕이 딸기맛 사탕 1개, 포도맛 사탕 1개인 사건을 Y라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(Y|X)$이다.

(i) 상자 A에서 딸기맛 사탕 1개, 포도맛 사탕 1개를 꺼내는 경우
상자 A에서 딸기맛 사탕 1개, 포도맛 사탕 1개를 꺼낼 확률은
$\frac{1\times{}_4C_1}{{}_5C_2}=\frac{2}{5}$이므로 상자 B에서 포도맛 사탕을 꺼낼 확률은
$\frac{2}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{8}{35}$

(ii) 상자 A에서 포도맛 사탕 2개를 꺼내는 경우
상자 A에서 포도맛 사탕 2개를 꺼낼 확률은 $\frac{{}_4C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{5}$이므로
상자 B에서 포도맛 사탕을 꺼낼 확률은
$\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}=\frac{15}{35}$

(i), (ii)는 서로 배반사건이므로 상자 B에서 포도맛 사탕을 꺼낼 확률은

$\frac{8}{35}+\frac{15}{35}=\frac{23}{35}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{8}{35}}{\frac{23}{35}}=\frac{8}{23}$$

답 ④

14

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}$이므로

$b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$
$=3a_{n+1}=3(a+nd)$
$=3a+3nd$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $3a+3d$, 공차가 $3d$인 등차수열이다.

$b_{11}-b_9=2\times3d=4$에서 $d=\frac{2}{3}$

$b_9+b_{10}+b_{11}=3b_{10}=3\left(3a+30\times\frac{2}{3}\right)=9a+60$

$9a+60=6$에서 $a=-6$

$a_k=-6+(k-1)\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}k-\frac{20}{3}$이므로

$\frac{2}{3}k-\frac{20}{3}>0$에서 $k>10$

따라서 $a_k>0$을 만족시키는 k의 최솟값은 11이다.

답 ①

15

이 도시의 직장인이 주말에 책을 읽는 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(123,\ 10^2)$을 따른다.

이때 이 도시의 직장인 중 25명을 임의추출했으므로 표본의 크기는 $n=25$이고 이 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=123$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}=\frac{10}{\sqrt{25}}=2$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(123,\ 2^2)$을 따른다.

따라서 확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-123}{2}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\geq 120)&=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-123}{2}\geq\frac{120-123}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\geq -1.5)=\mathrm{P}(Z\leq 1.5)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)\\&=0.5+0.4332=0.9332\end{aligned}$$

답 ④

16

$\log a^{a-7}<\log a^{\frac{5}{2}}<\log a^{2a-1}$에서 밑 10이 1보다 크므로

$a^{a-7}<a^{\frac{5}{2}}<a^{2a-1}$

$a>1$이므로 $a-7<\frac{5}{2}<2a-1$에서

$a-7<\frac{5}{2}$이고 $\frac{5}{2}<2a-1$, 즉 $a<\frac{19}{2}$이고 $a>\frac{7}{4}$

그러므로 $\frac{7}{4}<a<\frac{19}{2}$

따라서 구하는 자연수는 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9의 8개이다.

답 ③

17

(ⅰ) 원 $x^2+y^2=k$가 정사각형 T_n에 내접하는 경우

정사각형 T_1에 내접하는 원의 방정식은 $x^2+y^2=1^2$,

정사각형 T_2에 내접하는 원의 방정식은 $x^2+y^2=2^2$,

정사각형 T_3에 내접하는 원의 방정식은 $x^2+y^2=3^2$,

⋮

정사각형 T_n에 내접하는 원의 방정식은 $x^2+y^2=n^2$

$n^2\leq 400$에서 $n\leq 20$

그러므로 구하는 k의 값의 합은

$p=\sum_{n=1}^{20}n^2=\frac{20\times 21\times 41}{6}=2870$

(ⅱ) 원 $x^2+y^2=k$가 정사각형 T_n에 외접하는 경우

정사각형 T_1에 외접하는 원의 방정식은 $x^2+y^2=(\sqrt{2})^2$,

정사각형 T_2에 외접하는 원의 방정식은 $x^2+y^2=(2\sqrt{2})^2$,

정사각형 T_3에 외접하는 원의 방정식은 $x^2+y^2=(3\sqrt{2})^2$,

⋮

정사각형 T_n에 외접하는 원의 방정식은 $x^2+y^2=(n\sqrt{2})^2$

$(n\sqrt{2})^2\leq 400$, $2n^2\leq 400$이고 n은 자연수이므로 $n\leq 14$

그러므로 구하는 k의 값의 합은

$q=\sum_{n=1}^{14}2n^2=2\times\frac{14\times 15\times 29}{6}=2030$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $p-q=2870-2030=840$

답 ⑤

18

$\overline{\mathrm{AC}}=x\ (x>1)$라 하면 직각삼각형 ABC에서

$\cos A=\frac{1}{x}$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}=1$이므로 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의해

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BD}}^2&=1^2+1^2-2\times 1\times 1\times\cos A\\&=2-2\cos A=2\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{2(x-1)}{x}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{\frac{2(x-1)}{x}}$

직각삼각형 ABC에서 $\sin C=\frac{1}{x}$이고 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{14}$이므로 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin C}=\frac{\sqrt{\frac{2(x-1)}{x}}}{\frac{1}{x}}=2\sqrt{14}$$

$\sqrt{2x(x-1)}=2\sqrt{14}$

위 등식의 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-x=28$

이때 이차방정식 $x^2-x-28=0$의 실근 중 1보다 큰 실근은

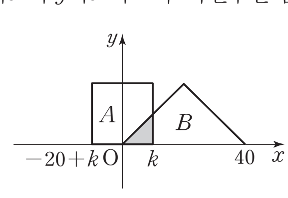
$x=\frac{1+\sqrt{1^2+4\times 1\times 28}}{2}=\frac{1+\sqrt{113}}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=\frac{1+\sqrt{113}}{2}$

답 ②

19

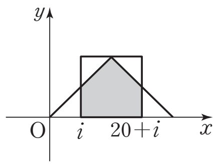
$1\leq k\leq 20$일 때 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점은



$(1,\ 1)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $\cdots$, $(k,\ 1)$, $\cdots$, $(k,\ k)$이므로

$X=1+2+3+\cdots+k=\boxed{\frac{k(k+1)}{2}}$

$k=20+i\ (1\leq i\leq 20)$일 때 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점은



$i=1,\ 2,\ \cdots,\ 19$일 때

$(i,\ 1),\ (i,\ 2),\ \cdots,\ (i,\ i)$

$(i+1,\ 1),\ (i+1,\ 2),\ \cdots,\ (i+1,\ i+1)$

$\vdots$

$(20,\ 1),\ (20,\ 2),\ \cdots,\ (20,\ 20)$

$\vdots$

$(20+i,\ 1),\ (20+i,\ 2),\ \cdots,\ (20+i,\ 20-i)$이고

$i=20$일 때 $(20,\ 1),\ (20,\ 2),\ \cdots,\ (20,\ 20),\ \cdots,\ (39,\ 1)$이므로

$$\begin{aligned}X&=i+(i+1)+\cdots+20+19+\cdots+(20-i)\\&=\{i+(i+1)+\cdots+20\}+\{19+\cdots+(20-i)\}\\&=\frac{(20-i+1)(i+20)}{2}+\frac{i(19+20-i)}{2}\\&=\boxed{-i^2+20i+210}\end{aligned}$$

$g(i)=-i^2+20i+210=-(i-10)^2+310$이므로

$g(10)=310$

$g(10-l)=g(10+l)\ (l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9),\ f(20)=g(20)$

따라서

$\mathrm{P}\left(X=\boxed{\dfrac{k(k+1)}{2}}\right)=\dfrac{1}{40}\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 19)$

$\mathrm{P}(X=\boxed{-i^2+20i+210})=\dfrac{1}{20}\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9,\ 20)$

$\mathrm{P}(X=\boxed{310})=\dfrac{1}{40}\ \ (i=10)$

이상에서 $f(k)=\dfrac{k(k+1)}{2}$, $g(i)=-(i-10)^2+310$, $a=310$이므로

$f(10)+g(3)+a=55+(-49+310)+310=626$

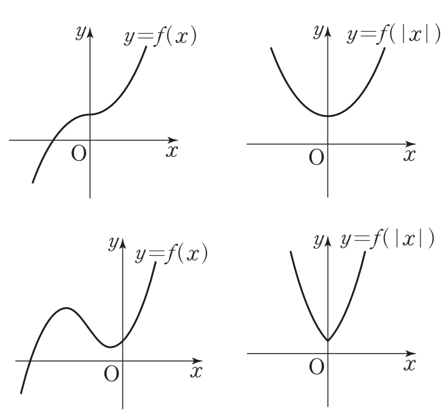
답 ④

20

ㄱ. 함수 $y=f(x)$는 삼차함수이므로 $x>0$에서 극값을 가지는 x의 값의 개수는 0 또는 1 또는 2이다.

(i) $x>0$에서 함수 $y=f(x)$가 극값을 가지는 x의 값의 개수가 0인 경우

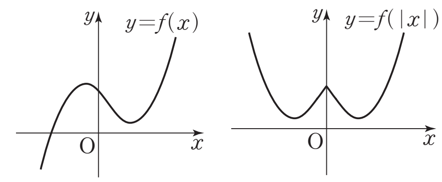
함수 $y=f(x)$와 함수 $y=f(|x|)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



이 경우 $m=1$

(ii) $x>0$에서 함수 $y=f(x)$가 극값을 가지는 x의 값의 개수가 1인 경우

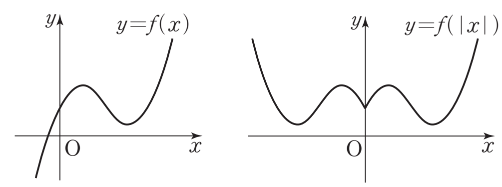
함수 $y=f(x)$와 함수 $y=f(|x|)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



이 경우 $m=3$

(iii) $x>0$에서 함수 $y=f(x)$가 극값을 가지는 x의 값의 개수가 2인 경우

함수 $y=f(x)$와 함수 $y=f(|x|)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



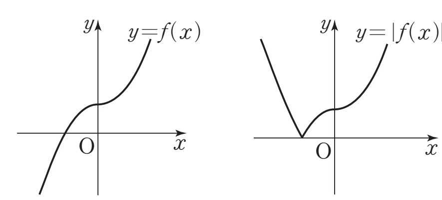
이 경우 $m=5$

(i), (ii), (iii)에서 $1\le m\le 5$이다. (참)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$는 삼차함수이므로 극값을 가지는 x의 값의 개수는 0 또는 2이다.

(i) 함수 $y=f(x)$가 극값을 가지는 x의 값의 개수가 0인 경우

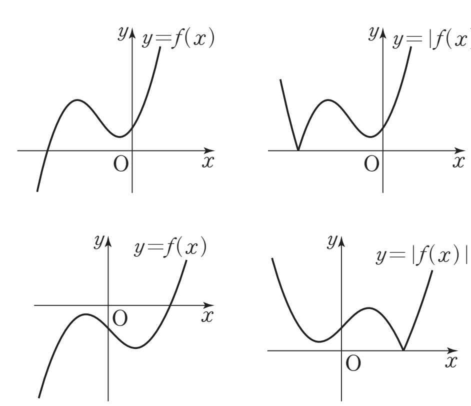
함수 $y=f(x)$와 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



이 경우 $n=1$

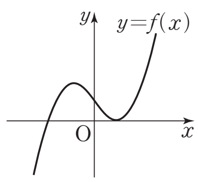
(ii) 함수 $y=f(x)$가 극값을 가지는 x의 값의 개수가 2인 경우

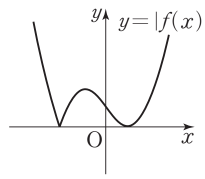
① (극댓값)×(극솟값)>0

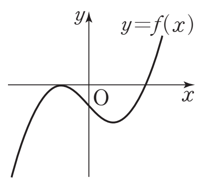


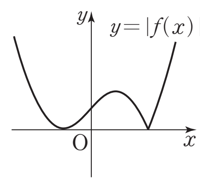
이 경우 $n=3$

② (극댓값)×(극솟값)=0



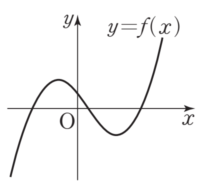


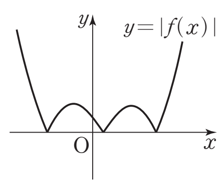




이 경우 $n=3$

③ (극댓값)×(극솟값)<0





이 경우 $n=5$

(ⅰ), (ⅱ)에서 n의 값은 1 또는 3 또는 5이므로 n의 값은 2도 아니고 4도 아니다. (참)

ㄷ. $m+n=4$에서

$m=1$, $n=3$ 또는 $m=3$, $n=1$

그런데 ㄱ, ㄴ의 그림에서 $m=3$, $n=1$은 될 수 없다.

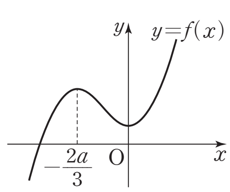
따라서 $m=1$, $n=3$

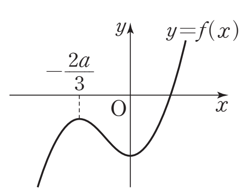
$b=0$이므로 $f(x)=x^3+ax^2+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax=3x\left(x+\dfrac{2a}{3}\right)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\dfrac{2a}{3}$

$m=1$이어야 하므로 $-\dfrac{2a}{3}\le 0$, 즉 $a\ge 0$이다.





$n=3$이기 위해서는 $a\ne 0$이고 $f(0)=c\ge 0$ 또는 $f\left(-\dfrac{2a}{3}\right)\le 0$

이다.

$f\left(-\dfrac{2a}{3}\right)=\left(-\dfrac{2a}{3}\right)^3+a\left(-\dfrac{2a}{3}\right)^2+c\le 0$

$-\dfrac{8}{27}a^3+\dfrac{4}{9}a^3+c\le 0$

$c\le -\dfrac{4}{27}a^3$

따라서 $a>0$이고 c의 값의 범위는

$c\ge 0$ 또는 $c\le -\dfrac{4}{27}a^3$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

21

$f(x)=x^2-1$, $g(x)=xf(x)=x^3-x$이고

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는

$x^2-1=x^3-x$에서

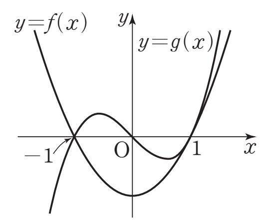
$x(x^2-1)-(x^2-1)=(x-1)^2(x+1)=0$

따라서 $x=-1$ 또는 $x=1$

이때 $f'(x)=2x$, $g'(x)=3x^2-1$이므로

$f'(-1)=-2$, $g'(-1)=2$

$f'(1)=g'(1)=2$ ······ ㉠



조건 (가), (나)에서 함수 $h(x)$는 세 구간 $(-\infty, -1)$, $[-1, 1]$, $(1, \infty)$에서 각각 $h(x)=f(x)$ 또는 $h(x)=g(x)$이어야 한다.

한편, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $h(x)$는 세 구간 $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$에서 모두 미분가능하다.

이때 ㉠에서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 항상 미분가능하므로 조건 (다)에서 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않아야 한다.

따라서 구간 $(-\infty, -1)$에서 $h(x)=f(x)$이면 구간 $[-1, 1]$에서 $h(x)=g(x)$이어야 하고, 구간 $(-\infty, -1)$에서 $h(x)=g(x)$이면 구간 $[-1, 1]$에서 $h(x)=f(x)$이어야 한다.

이때 구간 $(1, \infty)$에서 $h(x)=f(x)$ 또는 $h(x)=g(x)$이다.

따라서 구하는 함수 $h(x)$의 개수는

$2\times 2=4$

답 ②

22

${}_3\mathrm{H}_7={}_{3+7-1}\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=\dfrac{9\times 8}{2\times 1}=36$

답 36

23

$f'(x)=(3x^2-2)(x+3)+(x^3-2x+4)$이므로

$f'(2)=10\times 5+8=58$

답 58

24

$\log_2 4x=\log_2 x+\log_2 4=\log_2 x+2$이므로 함수 $y=\log_2 4x$의 그래프를 y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 곡선은

$y=\log_2 x+2+m$

이 곡선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 곡선은

$x=\log_2 y+2+m$

즉, $y=2^{x-m-2}$ ...... ㉠

함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{5}{2}$만큼 평행이동한 곡선은

$y=2^{x-\frac{5}{2}}$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 두 곡선이 일치하므로

$-m-2=-\frac{5}{2}$

따라서 $m=\frac{1}{2}$이므로

$60m=60\times\frac{1}{2}=30$

답 30

25

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=0$, $\lim_{x\to\infty}\{f(x)+2g(x)\}=-3$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+2g(x)}{f(x)}=0$이다. 즉, $\lim_{x\to\infty}\left\{1+2\times\frac{g(x)}{f(x)}\right\}=0$

$h(x)=1+2\times\frac{g(x)}{f(x)}$라 하면

$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{h(x)-1}{2}$이고 $\lim_{x\to\infty}h(x)=0$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)-1}{2}=-\frac{1}{2}$

따라서

$$10\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2+2f(x)g(x)+1+\frac{f(x)g(x)}{x^2}}{f(x)+4g(x)}$$

$$=10\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+2g(x)+\frac{1}{f(x)}+\frac{g(x)}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x^2}}{1+4\times\frac{g(x)}{f(x)}}$$

$$=10\times\frac{-3+0-\frac{1}{2}\times 1}{1+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=35$$

답 35

26

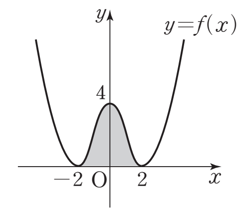
$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^3-4x)dx$

$=\frac{1}{4}x^4-2x^2+C$ (C는 적분상수)

곡선 $y=f(x)$는 y축에 대하여 대칭이고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4$가 서로 다른 세 점에서 만나므로 $f(0)=4$이다.

즉, $C=4$

$f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+4$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서

$S=2\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^4-2x^2+4\right)dx$

$=2\left[\frac{1}{20}x^5-\frac{2}{3}x^3+4x\right]_0^2$

$=2\left(\frac{8}{5}-\frac{16}{3}+8\right)=\frac{128}{15}$

이므로

$15S=15\times\frac{128}{15}=128$

답 128

27

$\frac{a_{k+2}-a_k}{a_ka_{k+2}}=\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+2}}$이므로

$\sum_{k=1}^{10}\frac{a_{k+2}-a_k}{a_ka_{k+2}}$

$=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)$

$=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_4}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_5}\right)+\cdots$

$+\left(\frac{1}{a_9}-\frac{1}{a_{11}}\right)+\left(\frac{1}{a_{10}}-\frac{1}{a_{12}}\right)$

$=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{11}}-\frac{1}{a_{12}}$

$=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}-\frac{a_{11}+a_{12}}{a_{11}a_{12}}$

조건 (가)에서

$a_1=S_1=1$, $a_2=S_2-S_1=3-1=2$,

$a_{11}+a_{12}=S_{12}-S_{10}=13-10=3$

이므로

$\sum_{k=1}^{10}\frac{a_{k+2}-a_k}{a_ka_{k+2}}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}-\frac{a_{11}+a_{12}}{a_{11}a_{12}}$

$=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{3}{a_{11}a_{12}}$

$=\frac{3}{2}-\frac{3}{a_{11}a_{12}}=-\frac{5}{2}$

따라서 $\frac{3}{a_{11}a_{12}}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4$에서 $a_{11}a_{12}=\frac{3}{4}$이므로

$100\times a_{11}\times a_{12}=100\times\frac{3}{4}=75$

답 75

28

주어진 상자를 한 번 던질 때, 2가 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이고

1 또는 4가 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이다.

따라서 $T=k^2$인 자연수 k가 존재하려면 4번의 시행 중 2가 나오는 횟수가 0, 2, 4 중 하나이어야 한다.

(i) 네 번 모두 1 또는 4가 나올 확률은

$${}_4C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$$

(ii) 두 번은 2가 나오고 두 번은 1 또는 4가 나올 확률은

$${}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=6\times\frac{4}{81}=\frac{24}{81}$$

(iii) 네 번 모두 2가 나올 확률은

$${}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{16+24+1}{81}=\frac{41}{81}$$

따라서 $p+q=81+41=122$

답 122

29

$$f(x)=2x^3+ax+b\int_1^x g(t)dt \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=6x^2+a+bg(x) \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$f(x)$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로

$f(1)=f'(1)=0$

㉠, ㉡의 양변에 $x=1$을 각각 대입하면

$f(1)=2+a+b\int_1^1 g(t)dt=2+a=0$에서 $a=-2$

$f'(1)=6-2+bg(1)=0$

$$bg(1)=-4 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉢에서 $g(1)>1$이므로 $b<0$

다항식 $g(x)$의 차수를 n이라 하자.

$n\le 1$일 때, $f(x)$의 최고차항은 $2x^3$이므로 최고차항의 계수가 1이라는 조건을 만족시키지 않는다.

$n\ge 3$일 때, $f(x)$의 최고차항은 $\frac{b}{n+1}x^{n+1}$이고 계수가 1이려면 $b=n+1$이 되어야 하는데 $b<0$이므로 성립하지 않는다.

따라서 $n=2$이고 $g(0)=0$이므로 $g(x)=x^2+cx$ (c는 상수)로 놓을 수 있다.

(i) $f(x)$가 삼차 다항식일 때

$f(x)$의 삼차항의 계수가 1이므로 $f'(x)$의 이차항의 계수는 3이다.

㉡에서 $6+b=3$, $b=-3$

$b=-3$을 ㉢에 대입하면 $g(1)=\frac{4}{3}$

$1+c=\frac{4}{3}$에서 $c=\frac{1}{3}$이므로 $g(x)=x^2+\frac{1}{3}x$

(ii) $f(x)$가 이차 다항식일 때

$f'(x)$는 일차 다항식이므로 ㉡에서 $6+b=0$, $b=-6$

$b=-6$을 ㉢에 대입하면 $g(1)=\frac{2}{3}$

$1+c=\frac{2}{3}$에서 $c=-\frac{1}{3}$이므로 $g(x)=x^2-\frac{1}{3}x$

(i), (ii)에서 $g(x)=x^2+\frac{1}{3}x$ 또는 $g(x)=x^2-\frac{1}{3}x$인데 $g(1)>1$이므로 $g(x)=x^2+\frac{1}{3}x$이다.

따라서

$$\begin{aligned}f(x)&=2x^3-2x-3\int_1^x\left(t^2+\frac{1}{3}t\right)dt\\&=2x^3-2x-3\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{6}t^2\right]_1^x\\&=2x^3-2x-3\left\{\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^2\right)-\frac{1}{2}\right\}\\&=x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

이므로 $f(2)\times g(3)=\frac{7}{2}\times 10=35$

답 35

30

$g(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

조건 (가)에서 $h(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이어야 한다.

그러므로 $x=1$일 때 연속의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to1+}h(x)=\lim_{x\to1-}h(x)=h(1)$$

즉, $\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=f(1)+g(1)$

이므로

$3+1+a+b+c=3(1+a+b+c)$

$$a+b+c=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편, 조건 (나)에서 $h'(x)$는 $x=1$에서 연속이고

$f'(x)=4$, $g'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$$h'(x)=\begin{cases}f'(x)+g'(x) & (x>1)\\ f'(x)g(x)+f(x)g'(x) & (x<1)\end{cases}$$에서

$x=1$일 때 연속의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to1+}h'(x)=\lim_{x\to1-}h'(x)=h'(1) \qquad \cdots\cdots ㉡$$

즉,

$$\lim_{x\to1+}\{f'(x)+g'(x)\}=\lim_{x\to1-}\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}$$

$4+3+2a+b=4(1+a+b+c)+3(3+2a+b)$

$$4a+3b+2c=-3 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉢에서

$a=-\frac{b+4}{2}$, $c=\frac{-b+5}{2}$

$g(x)=x^3-\frac{b+4}{2}x^2+bx+\frac{5-b}{2}$

$g'(x)=3x^2-(b+4)x+b$

$g(2)=8-2(b+4)+2b+\frac{5-b}{2}=\frac{5}{2}-\frac{b}{2}$

$g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}(b+4)+b=-\frac{5}{4}+\frac{b}{2}$

한편, ㉡에서

$h'(1)=7+2a+b=7+2\times\left(-\frac{b+4}{2}\right)+b=3$

따라서 $20\left\{g(2)+g'\left(\frac{1}{2}\right)\right\}+h'(1)=20\times\frac{5}{4}+3=28$

답 28