✡ 삼차방정식의 해법

삼차방정식의 해법은 다음 공식을 이용한다.

$$
\begin{aligned}
&a^3+b^3+c^3-3abc \\
&\quad=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right) \\
&\quad=(a+b+c)\left(a+b\omega+c\omega^2\right)\left(a+b\omega^2+c\omega\right) \qquad \cdots\cdots ①
\end{aligned}
$$

여기서 ω는 방정식 $x^3=1$의 허근 중의 하나이므로

$$\omega^3=1,\ 1+\omega+\omega^2=0$$

을 만족한다.

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $\cdots\cdots$ ②

에 대하여

$$x=t-\frac{b}{3a} \qquad \cdots\cdots ③$$

로 놓고, 이것을 ②에 대입하면

$$t^3+3pt+q=0 \qquad \cdots\cdots ④$$

을 얻는다. 이때 $p,\ q$는

$$p=\frac{1}{3}\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2}\right),\ q=\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

이다. 여기서

$$AB=-p,\ A^3+B^3=-q \qquad \cdots\cdots ⑥$$

인 두 수 $A,\ B$를 구할 수 있으면 ④는

$$t^3+(-A)^3+(-B)^3-3t(-A)(-B)=0$$

과 같이 나타낼 수 있다.

이것은 ①에 의하여

$$(t-A-B)\left(t-A\omega-B\omega^2\right)\left(t-A\omega^2-B\omega\right)=0$$

이 되고, 방정식 ④를 만족시키는 t의 값은

$$t=A+B,\ t=A\omega+B\omega^2,\ t=A\omega^2+B\omega$$

이다. 따라서 방정식 ②의 근은 ③에 의하여

$$x=A+B-\frac{b}{3a},\ x=A\omega+B\omega^2-\frac{b}{3a},$$

$$x=A\omega^2+B\omega-\frac{b}{3a} \qquad \cdots\cdots ⑦$$

이다. 이것을 **타르탈리아-카르다노의 공식**이라고 한다.

✡ 사차방정식의 해법

사차방정식의 근의 공식은 **페라리의 공식**이라고 불린다.

사차방정식

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

을 변형하면

$$a^2x^4+abx^3=-acx^2-adx-ae$$

이고, 다시 미지수 u를 도입하면

$$\left(ax^2+\frac{b}{2}x+u\right)^2$$

$$=\left(\frac{b^2}{4}+2au-ac\right)x^2+(bu-ad)x+\left(u^2-ae\right)$$

가 된다.

이 식의 우변이 x에 대한 완전제곱식이 되도록 u의 값을 정하려면 판별식이 0이 되도록 하면 된다. 즉,

$$(bu-ad)^2-4\left(\frac{b^2}{4}+2au-ac\right)\left(u^2-ae\right)=0 \quad \cdots \text{ ②}$$

이다.

이것은 u에 대한 삼차방정식이므로 그 풀이가 가능하다.

u에 관한 방정식 ②의 한 근을 α라고 하면

$$\left(ax^2+\frac{b}{2}x+\alpha\right)^2=(px+q)^2$$

과 같이 변형되고, p, q는 a, b, c, d, e로 표시된다.

이 식은 다음 두 이차방정식

$$ax^2+\frac{b}{2}x+\alpha=px+q,\ ax^2+\frac{b}{2}x+\alpha=-px-q$$

로 분해된다.

따라서 이 두 이차방정식을 풀면 사차방정식 ①의 4개의 근을 얻는다.

✡ 오차방정식의 해

16세기 이탈리아의 수학자들이 삼차방정식과 사차방정식의 일반적인 해법을 발견한 이래 많은 수학자들이 오차방정식의 해를 구할 수 있는 일반적인 해법을 찾으려고 노력했다. 그러나 그로부터 200여년이 지난 19세기 초까지도 그 해법을 발견하지 못했다.

가우스(Gauss, K. F., 1777~1855)는 1797년에 '복소수를 계수로 하는 n차의 대수방정식이 복소수의 범위에서 반드시 근을 갖는다'는 것을 보였는데 이 정리를 '대수학의 기본 정리'라고 한다. 가우스의 정리에 따르면 이차방정식 $x^2+1=0$의 근을 구하기 위해 실수에서 복소수로 수를 확장할 수 있다.

마찬가지 논리로 계수가 복소수인 n차방정식

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \quad \cdots ①$$

을 풀기 위해 $f(x)$가 일차식의 곱으로 완전히 인수분해 되어야 하고, 그러기 위해서는 '수의 개념을 복소수보다 더 큰 범위로 확장할 필요가 있는가?'라는 문제가 제기된다. 그런데 방정식의 근을 구하기 위해서 수의 개념을 복소수에서 더 이상 확장할 필요가 없다는 해답을 찾아낸 수학자가 바로 가우스이다. 즉, 방정식 ①이 적어도 하나의 복소수의 근을 가짐을 보인 것이다.

'방정식의 기본 정리'는 '계수가 복소수인 n차방정식의 근은 모두 복소수이고, 모든 근의 중복도(重複度)의 합은 방정식의 차수 n과 같다.'라는 내용으로 가우스의 '대수학의 기본 정리'를 이용하여 얻을 수 있다.

노르웨이의 수학자 아벨(Abel, N. H., 1802~1829)은 19세기 초에 오차방정식의 해법을 발견했다고 생각했으나 곧 그것은 착오였음이 밝혀졌다. 그러자 그는 ‘과연 해법이 존재할까?’라는 의문을 가지게 되었고, 그 의문을 토대로 연구한 결과 ‘오차 이상의 방정식의 일반적인 해법은 계수들의 사칙연산과 제곱 및 제곱근의 연산 범위 내에서는 구할 수 없다’는 사실을 알아냈다.