

## I\_4. 원의 방정식

[10공수2-01-04] 원의 방정식을 구하고,  
그래프를 그릴 수 있다.

A : 원의 정의를 이용하여 원의 방정식을 유도할 수 있으며,  
원의 방정식을 구하고  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  꼴의  
원의 방정식의 그래프를 그릴 수 있다.

B : 원의 방정식을 구하고,  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  꼴의  
원의 방정식의 그래프를 그릴 수 있다.

C : 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이가 주어졌을 때  
원의 방정식을 구하고,  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  꼴의  
원의 방정식의 그래프를 그릴 수 있다.

D :  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  꼴의 원의 방정식의 그래프를  
그릴 수 있다.

E : 안내된 절차에 따라  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  꼴의  
원의 방정식의 그래프를 그릴 수 있다.

## I\_5. 원과 직선의 위치 관계

[10공수2-01-05] 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를  
판단하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

A : 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 다양한 방법으로  
판단하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

- B : 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 다양한 방법으로 판단하고, 이를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.
- C : 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 다양한 방법으로 판단할 수 있다.
- D : 판별식을 이용하여 좌표평면에서 원과 직선의 위치 관계를 판단할 수 있다.
- E : 원과 직선의 위치 관계를 안다.

## 1 여러 가지 원의 방정식 1

### (1) 원의 방정식 만들기

① 중심이 점  $(a, b)$ 이고 점  $(x_1, y_1)$ 을 지나는 원의 방정식은

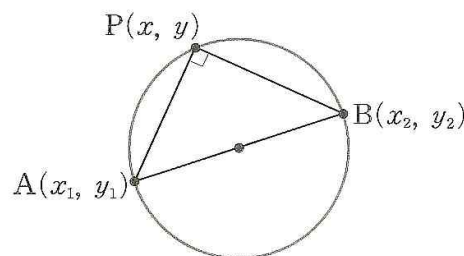
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2$$

② 두 점  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은  $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

$$\because (\overline{AP} \text{의 기}) \times (\overline{BP} \text{의 기}) = -1$$

$$\checkmark (\text{중심의 좌표}) = (\overline{AB} \text{의 중점})$$

$$(\text{반지름의 길이}) = \overline{AB} \div 2$$



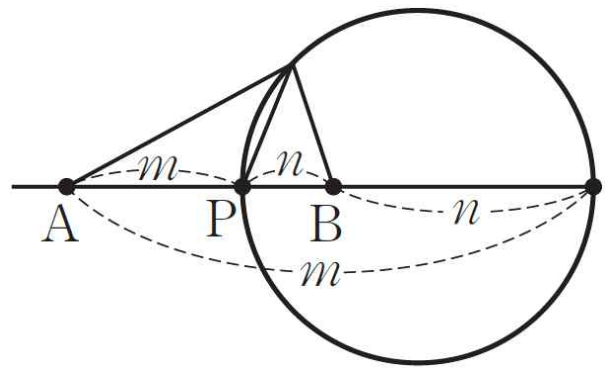
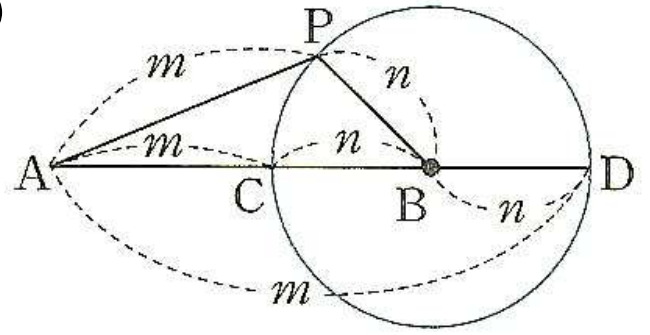
③ 두 점  $(x_1, 0), (x_2, 0)$ 을 지나는 원의 방정식은

$$(x - x_1)(x - x_2) + y(y - k) = 0$$

## ① 여러 가지 원의 방정식 ②

### (3) 아폴로니우스의 원

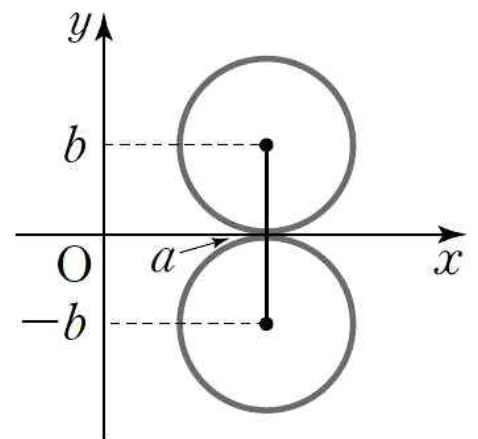
두 점 A, B로부터의 거리의  
비가  $m : n$ 인 점 P는  $\overline{AB}$ 를  
 $m : n$ 으로 내분하는 점 C와 외분하는 점 D를  
지름의 양 끝점으로 하는 원 위에 있다.



## ☆ 축에 접하는 원의 방정식 ①

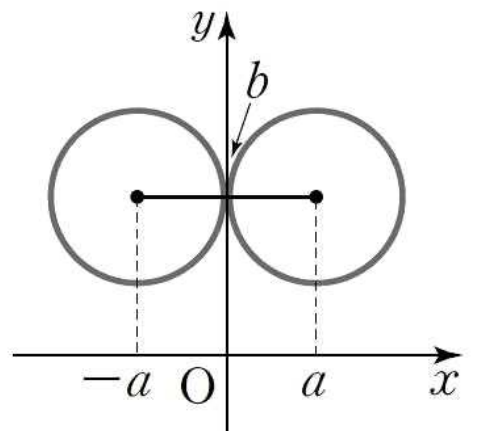
### (1) $x$ 축에 접하는 원

- ① (반지름) = |(중심의  $y$ 좌표)|
- ② 중심 :  $(a, b)$ , 반지름 :  $|b|$
- ③  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = b^2$



### (2) $y$ 축에 접하는 원

- ① (반지름) = |(중심의  $x$ 좌표)|
- ② 중심 :  $(a, b)$ , 반지름 :  $|a|$
- ③  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2$



## ☆ 축에 접하는 원의 방정식 ②

(3)  $x, y$  축에 접하는 원

① 1사, 3사

중심 :  $(a, a)$ , 반지름 :  $|a|$

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$$

② 2사, 4사

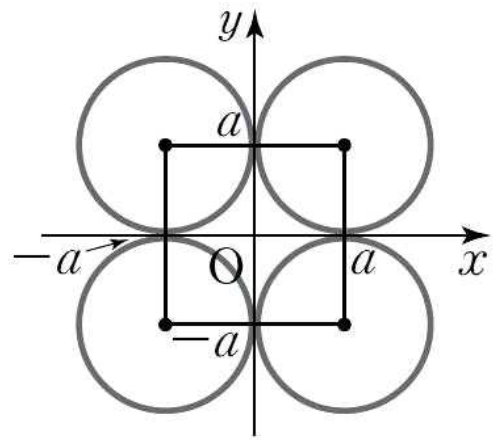
중심 :  $(a, -a)$ , 반지름 :  $|a|$

$$(x - a)^2 + (y + a)^2 = a^2$$

☑ 1사 & 4사  $\Rightarrow a > 0$

2사 & 3사  $\Rightarrow a < 0$

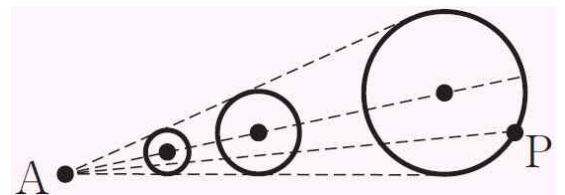
이때, 원의 중심이 직선  $y = x$  또는  $y = -x$  위에 있다.



## ☆ 원과 닮음

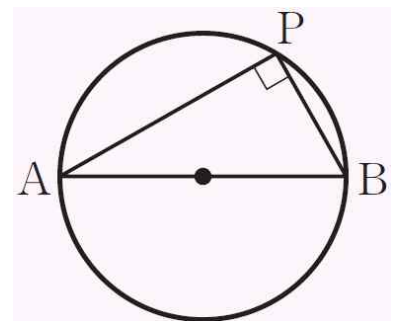
원 위의 점 P와 원 밖의 점 A에 대하여  $\overline{AP}$ 를 내분하거나 외분하는

점은 점 A를 닮음의 중심으로 하는 또 다른 원 위에 있다.



## ☆ 원주각과 중심각의 관계

두 점 A, B에 대하여  $\angle APB$ 가 직각이 되게 하는 점 P는 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 원 위에 있다.



## ② 원과 직선의 위치 관계 ①

### (1) 원의 접선의 방정식

- ① 원  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  위의 점  $(x_1, y_1)$ 에서  
원에 접하는 접선의 방정식은

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

- ② 원  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 에 접하는 기울기가  $m$ 인  
접선의 방정식은  $y = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1} + b$

### ☆ 이차곡선 위의 점 $(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식

- (1)  $x^2$  자리에  $x_1x$ ,  $y^2$  자리에  $y_1y$

- (2)  $x$  자리에  $\frac{x_1 + x}{2}$ ,  $y$  자리에  $\frac{y_1 + y}{2}$

- (3)  $(x - a)^2$  자리에  $(x_1 - a)(x - a)$   
 $(y - b)^2$  자리에  $(y_1 - b)(y - b)$

## ☆ 원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선의 방정식

원 밖의 점  $(x_0, y_0)$ 에서 원  $x^2 + y^2 = r^2$ 에 그은 접선

(1) Let 접점 :  $P(a, b)$

① 접선의 방정식 :  $ax + by = r^2 \Rightarrow ax_0 + by_0 = r^2$

② 점  $P(a, b)$  :  $a^2 + b^2 = r^2$

①과 ②를 연립 : 점  $P(a, b) \Rightarrow$  ①에 대입

(2) Let 접선의 기울기 :  $m$

① 접선의 방정식 :  $y = mx \pm \sqrt{m^2 + 1}$

② 점  $(x_0, y_0)$  :  $\pm \sqrt{m^2 + 1} = y_0 - mx_0$

③ 제곱 :  $m$ 의 값  $\Rightarrow$  점  $(x_0, y_0)$ 을 지나는 직선의 방정식

☑  $m$ 의 값이 하나일 경우 :  $x = x_0$  ( $\because$  접선은 항상 2개)

## ② 원과 직선의 위치 관계 ②

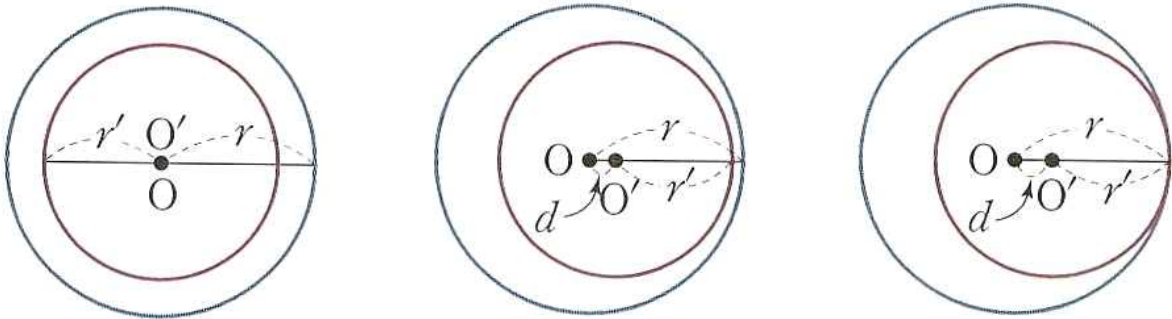
(2) 원과 직선의 위치 관계

위치 관계	연립방정식의 해의 개수 (이차방정식의 판별식 $D$ )	원의 중심과 직선 사이의 거리 $d$ 와 반지름의 길이 $r$
서로 다른 두 점에서 만난다. 	서로 다른 두 실근 ( $D > 0$ )	$d < r$
접한다. 	중근 ( $D = 0$ )	$d = r$
만나지 않는다. 	서로 다른 두 허근 ( $D < 0$ )	$d > r$

## ☆ 두 원의 위치 관계 ①

두 원의 반지름의 길이를 각각  $r, r'$  라 하고, 두 원의 중심 사이의 거리(중심거리)를  $d$  라 할 때,

(o) 두 원의 중심이 일치한다(동심원).  $\Leftrightarrow d = 0$

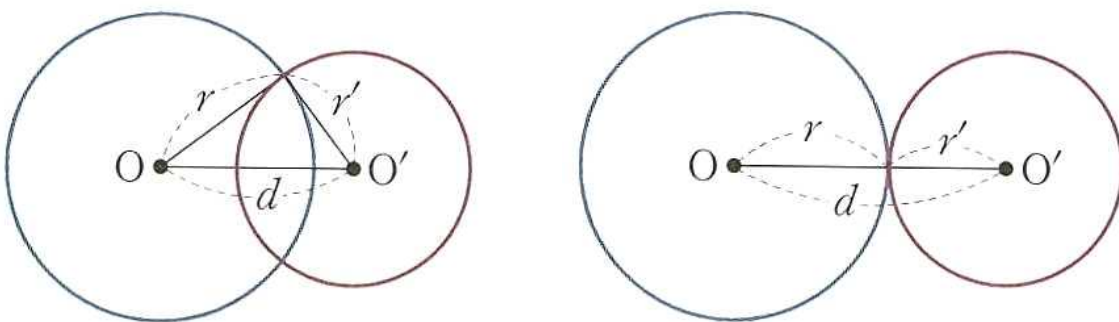


(1) 한 원이 다른 원의 내부에 있다.  $\Leftrightarrow d < |r - r'|$

(2) 두 원이 내접한다.  $\Leftrightarrow d = |r - r'|$

## ☆ 두 원의 위치 관계 ②

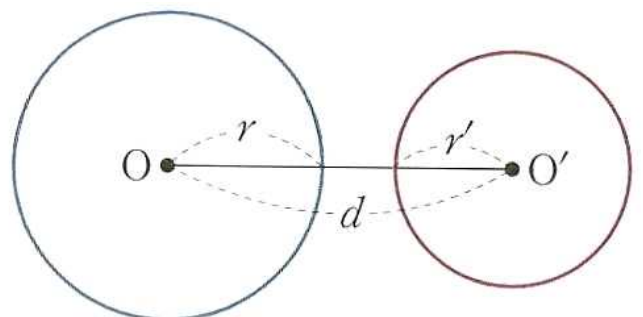
(3) 두 원이 두 점에서 만난다.  $\Leftrightarrow |r - r'| < d < r + r'$



(4) 두 원이 외접한다.  $\Leftrightarrow d = r + r'$

(5) 한 원이 다른 원의 외부에 있다.

$$\Leftrightarrow d > r + r'$$



## ☆ 두 원의 교점을 지나는 도형

두 원  $\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$  의 교점을 지나는  
도형의 방정식은

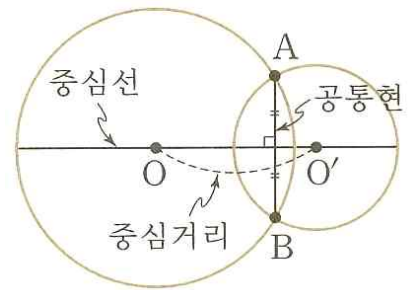
$$x^2 + y^2 + ax + by + c + k(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0$$

(1)  $k = -1 \Rightarrow$  교점을 지나는 직선(공통현)

$$\therefore (a - a')x + (b - b')y + (c - c') = 0$$

(2)  $k \neq -1 \Rightarrow$  교점을 지나는 원

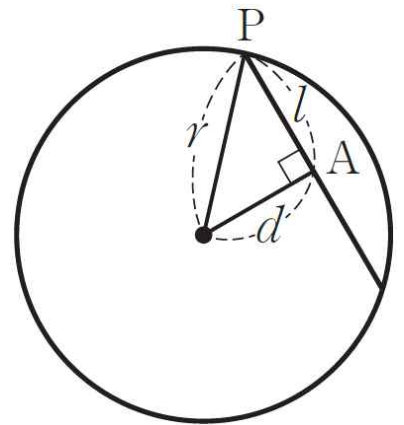
(원  $x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$ 은 제외)



## ☆ 현의 길이

원과 직선이 두 점에서 만날 때,

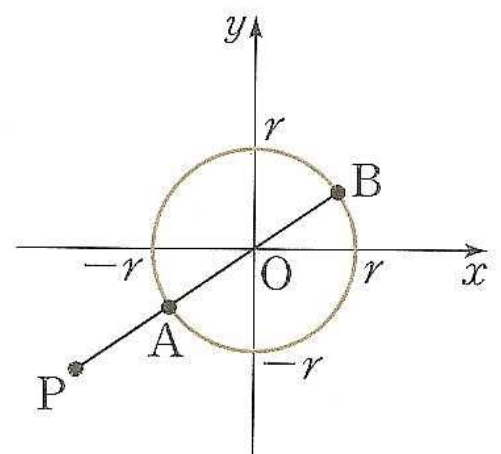
$$(\text{현의 길이}) = 2 \times l = 2 \sqrt{r^2 - d^2}$$



## ☆ 밖의 점에서 원에 이르는 거리

(1) 최댓값 :  $\overline{BP} = \overline{OP} + r$

(2) 최솟값 :  $\overline{AP} = \overline{OP} - r$



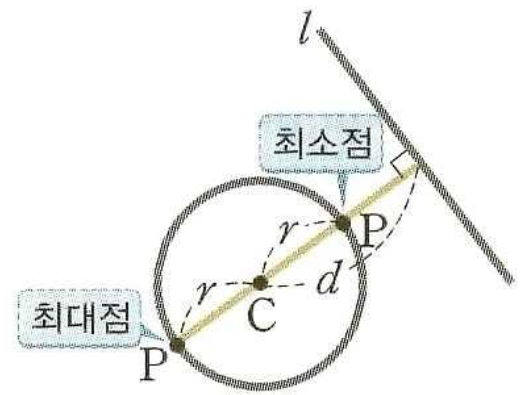


## ☆ 직선에서 원에 이르는 거리

(1) 최댓값 :  $d + r$

(2) 최솟값 :  $d - r$

☑  $d$ 는 원의 중심과 직선 사이의 거리



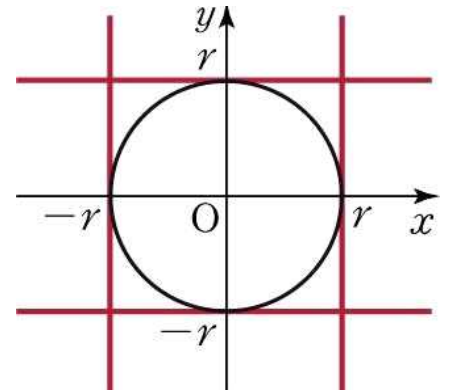
## ☆ 준원 : 한 원에 그은 두 접선이 직교하는 점의 자취

(1) 원  $x^2 + y^2 = r^2$ 의 준원의 방정식

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = (\sqrt{2} r)^2 = 2r^2$$

(2) 원  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 의 준원의 방정식

$$\Rightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = 2r^2$$



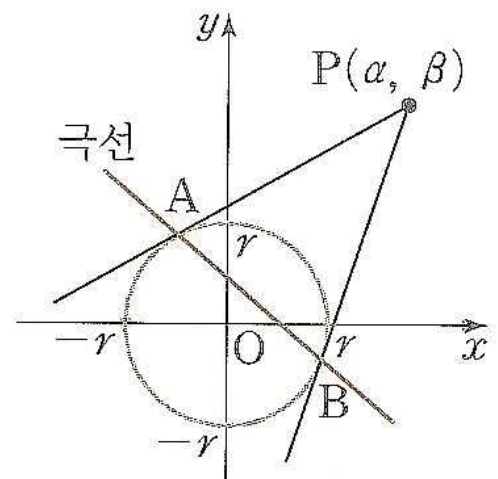
## ☆ 극선 : 원 밖의 점 $P(\alpha, \beta)$ 에서 그은 두 접선의 접점 A, B를 지나는 직선

(1) 원  $x^2 + y^2 = r^2$ 의 극선의 방정식

$$\Rightarrow \alpha x + \beta y = r^2$$

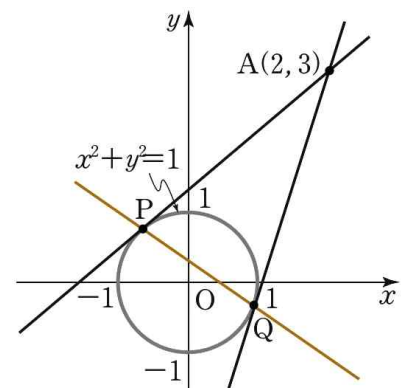
(2) 원  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 의 극선

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\alpha - a)(x - a) \\ + (\beta - b)(y - b) = r^2 \end{aligned}$$



☞ 점  $A(2, 3)$ 에서 원  $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 두 접선의 접점을 지나는 직선(극선)  $\overline{PQ}$ 의 방정식

$$\Rightarrow 2x + 3y = 1$$



☆ 접선의 길이 : 원 밖의 점  $P(x_1, y_1)$ 에서

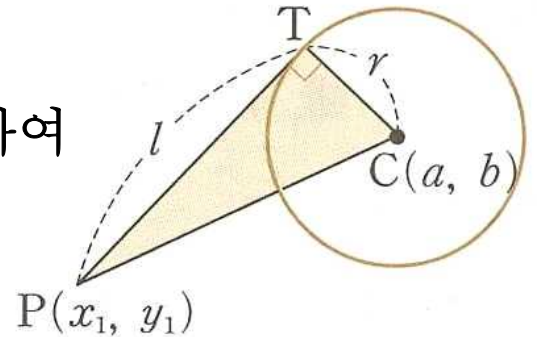
원에 그은 접선의 접점  $T$ 까지의 거리

$$(1) \overline{PT} = \sqrt{\overline{CP}^2 - r^2}$$

(2) 원  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 에 대하여

$$\overline{PT} = \sqrt{\overline{CP}^2 - r^2}$$

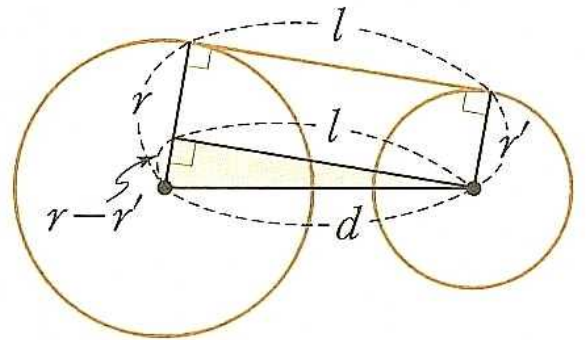
$$= \sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2}$$



☆ 공통접선의 길이

(1) 공통외접선의 길이

$$\Rightarrow l_1 = \sqrt{d^2 - (r - r')^2}$$



(2) 공통내접선의 길이

$$\Rightarrow l_2 = \sqrt{d^2 - (r + r')^2}$$

