Ⅲ_1. 등차수열과 등비수열

[12수학Ⅰ03-01] 수열의 뜻을 안다.
[12수학Ⅰ03-02] 등차수열의 뜻을 알고,
일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.
[12수학Ⅰ03-03] 등비수열의 뜻을 알고,
일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

① 수열(sequence)의 뜻과 일반항

(1) 자연수 중에서 3의 배수를 작은 수부터 차례로 나열하면

$$3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \cdots$$

이다. 이와 같이 차례로 나열한 수의 열을 '수열'이라 하고, 수열을 이루는 각각의 수를 그 수열의 '항(term)'이라고 한다.

(2) 수열을 나타낼 때는 각 항에 번호를 붙여

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

과 같이 나타내며, 앞에서부터 차례로 첫째항, 둘째항, 셋째항, $\cdots$, n째항, $\cdots$ 또는 제1항, 제2항, 제3항, $\cdots$, 제n항, $\cdots$ 이라고 한다. 이때 n의 식으로 나타낸 제n항 a_n을 수열의 '일반항'이라고 하며 일반항이 a_n인 수열을 간단히 $\{a_n\}$으로 나타낸다.

2 등차수열(arithemetic sequence)의 뜻과 일반항 ❶

(1) 등차수열의 뜻 ⇨ (차) $=$ (뒤) $-$ (앞) $=$ (일정) $\overset{\text{def}}{=} d$

첫째항부터 차례로 일정한 수를 더하여 만들어지는 수열을 '등차수열'이라 하고, 더하는 일정한 수를 '공차(difference)'라고 한다.

(2) 등차수열의 일반항

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n = a + (n-1)d \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

2 등차수열(arithemetic sequence)의 뜻과 일반항 ❷

☑ 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에서

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a_1 + d = a + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a+d) + d = a + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a+2d) + d = a + 3d$$

$$\vdots$$

이므로 일반항 a_n은

$$a_n = a + (n-1)d \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

예 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

✡ 등차수열

(1) 등차수열의 뜻 : (차) = (뒤) − (앞) = (일정) $\stackrel{\text{def}}{=} d$

① $a_{n+1} - a_n = d \iff a_{n+1} = a_n + d$

↳ $a_{n+k} - a_n = k \times d \quad \therefore\ a_{n+k} = a_n + k \times d$

② $d = a_2 - a_1 = \dfrac{a_n - a_1}{n-1} = \dfrac{a_m - a_n}{m-n}$

(2) 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

제n항에 공차 d를 더하면 제$(n+1)$항이 되므로

$\therefore\ a_{n+1} = a_n + d$ (단, $n = 1, 2, 3, \cdots$)

3 등차중항 ❶

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때,

b를 a와 c의 '등차중항'이라고 한다.

이때 b가 a와 c의 등차중항이면 $b - a = c - b$이므로

$$2b = a + c,\ \text{즉}\ b = \frac{a+c}{2}$$

가 성립한다. 역으로 $b = \dfrac{a+c}{2}$이면 $b - a = c - b$이므로

세 수 a, b, c는 이 순서대로 등차수열을 이루고

b는 a와 c의 등차중항이다.

예 세 수 3, x, 11이 이 순서대로 등차수열을 이루면

x는 3과 11의 등차중항이므로 $x = \dfrac{3+11}{2} = 7$

③ 등차중항 ❷

☑ a와 c의 등차중항 $b=\dfrac{a+c}{2}$는 a와 c의 산술평균

① $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} = a_{n-p} + a_{n+p}$

② $a_n + a_{n+1} = a_{n-1} + a_{n+2}$: 첨자의 합이 같다.

④ 등차수열의 합 ❶

(1) 첫째항이 a, 제n항이 l인 등차수열 $\{a_n\}$의

첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n = \frac{n(a+l)}{2}$$

(2) 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의

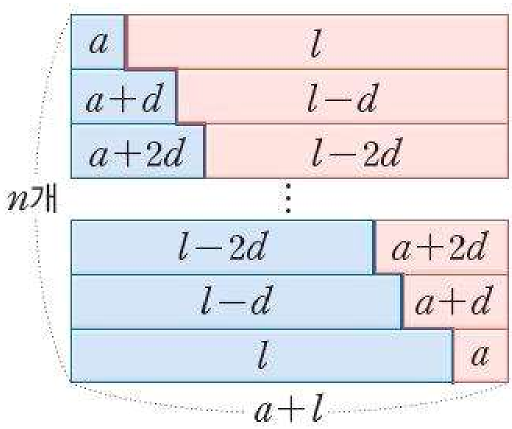
첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

4 등차수열의 합 ❷

(1) 첫째항이 a, 공차가 d, 제n항이 l인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면,

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (l-2d) + (l-d) + l \quad \cdots ㉠$$



㉠의 우변의 합의 순서를 거꾸로 나타내면

$$S_n = l + (l-d) + (l-2d) + \cdots + (a+2d) + (a+d) + a \quad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 변끼리 더하면

$$2S_n = \underbrace{(a+l) + (a+l) + \cdots + (a+l) + (a+l)}_{n\text{개}}$$

4 등차수열의 합 ❸

$$2S_n = \underbrace{(a+l) + (a+l) + \cdots + (a+l) + (a+l)}_{n\text{개}}$$

$$= n(a+l)$$

$$\therefore\ S_n = \frac{n(a+l)}{2}$$

(2) (1)에서 $l = a + (n-1)d$이므로

$$\therefore\ S_n = \frac{n(a+l)}{2} = \frac{n\{a + a + (n-1)d\}}{2}$$

$$= \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$$

4 등차수열의 합 ❹

예 (1) 첫째항이 -1이고 제10항이 15인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}은

$$S_{10}=\frac{10(-1+15)}{2}=70$$

(2) 첫째항이 50이고 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합 S_{20}은

$$S_{20}=\frac{20\{2\times 50+19\times(-4)\}}{2}=240$$

4 등차수열의 합 ❺

☑ 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\frac{d}{2}n^2+\frac{2a-d}{2}n$$

이므로 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의

첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

상수항이 0인 n에 대한 이차식이다.

✡ 등차수열의 합의 응용 ❶

(1) $S_5 = 5a + 10d = 5 \times a_3$

(2) 배수의 합 : k의 배수를 N_k라 할 때,

$$S(N_a \cup N_b) = S(N_a) + S(N_b) - S(N_a \cap N_b)$$

☑ k의 배수로 이루어진 수열 ⇔ 첫째항과 공차가 모두 k

(3) 등차수열에서 합의 최대

① S_n이 최대 ⇔ 양수항까지의 합 ⇔ $a_n > 0$인 최대의 n

② $S_n = An^2 + Bn$ ⇒ 꼭짓점에서 최대 (단, n은 자연수)

✡ 등차수열의 합의 응용 ❷

(4) 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

S_n, $S_{2n} - S_n$, $S_{3n} - S_{2n}$: 공차가 $n^2 d$인 등차수열

⇨ $S_{2n} - S_n = S_n + n^2 d \Rightarrow S_{2n} = 2S_n + n^2 d$

$S_{3n} - S_{2n} = S_n + 2n^2 d \Rightarrow S_{3n} = 3S_n + 3n^2 d$

(5) 연속한 홀수의 합

$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$,

$3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2 - 1^2$,

$5 + 7 + 9 + \cdots + (2n-1) = n^2 - 2^2$, $\cdots$

$(2m+1) + (2m+3) + \cdots + (2n-1) = n^2 - m^2$

5 수열의 합과 일반항 사이의 관계 ❶

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_1 = a_1$이고, 2이상의 자연수 n에 대하여

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n$$

이므로 $a_1 = S_1$, $a_n = S_n - S_{n-1}$ $(n \geq 2)$이다.

☑ 이 성질은 모든 수열에 대하여 성립한다.

5 수열의 합과 일반항 사이의 관계 ❷

(1) 수열 $\{a_n\}$의 합 S_n에 대하여

① $a_n = S_n - S_{n-1}$ (단, $n \geq 2$)

② $a_1 \Leftarrow S_1$

$$\underbrace{\overbrace{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}^{S_{n-1}}+a_n}_{S_n}$$

(2) 수열 $\{a_n\}$의 합 S_n에 대하여

① $S_0 = 0 \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1}$ (단, 첫째항부터 성립)

② $S_0 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a_n = S_n - S_{n-1} \ (\text{단, } n \geq 2) \\ a_1 \Leftarrow S_1 \end{cases}$

✡ 등차수열의 합과 일반항 사이의 관계

공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

(1) $S_n = An^2 + Bn$ (단, $A \neq 0$) $\Rightarrow S_0 = 0$

첫째항 : $a_1 = A + B$, 공차 : $d = 2A$

$\therefore$ 일반항($n \geq 1$) : $a_n = A + B + (n-1) \times 2A$

(2) $S_n = An^2 + Bn + C$ (단, $A \neq 0$) $\Rightarrow S_0 \neq 0$

첫째항 : $a_1 = A + B + C$, 둘째항부터의 공차 : $d = 2A$

$a_2 = S_2 - S_1 = (4A + 2B + C) - (A + B + C) = 3A + B$

$\therefore$ 일반항($n \geq 2$) : $a_n = 3A + B + (n-2) \times 2A$

☑ $a_n = a_1 + (n-1)d = a_2 + (n-2)d = a_0 + nd$

6 등비수열(geometric sequence)의 뜻과 일반항 ❶

(1) 등비수열의 뜻 ⇨ (비) = (뒤) ÷ (앞) = (일정) $\stackrel{\text{def}}{=} r$

첫째항부터 차례로 일정한 수를 곱하여 만들어지는 수열을 '등비수열'이라 하고, 곱하는 일정한 수를 '공비(ratio)'라고 한다.

(2) 등비수열의 일반항

첫째항이 a, 공비가 r ($r \neq 0$)인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n = ar^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

6 등비수열(geometric sequence)의 뜻과 일반항 ❷

☑ 첫째항이 a, 공비가 r $(r \neq 0)$인 등비수열 $\{a_n\}$에서

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a_1 r = ar$$

$$a_3 = a_2 r = (ar)r = ar^2$$

$$a_4 = a_3 r = (ar^2)r = ar^3$$

$$\vdots$$

이므로 일반항 a_n은

$$a_n = ar^{n-1} \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

6 등비수열(geometric sequence)의 뜻과 일반항 ❸

예 ① 첫째항이 2이고 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$의

일반항 a_n은

$$a_n = 2 \times 3^{n-1} \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

② 등비수열 $\{a_n\}$이

$$3, -6, 12, -24, \cdots$$

일 때, 첫째항이 3이고 공비가 -2이므로

등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n = 3 \times (-2)^{n-1} \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

✡ 등비수열

(1) 등비수열의 뜻 : (비) = (뒤) ÷ (앞) = (일정) $\overset{\text{def}}{=} r$

$$a_{n+1} \div a_n = r \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \Leftrightarrow a_{n+1} = r a_n$$

$$\hookrightarrow \frac{a_{n+k}}{a_n} = r^k \quad \therefore\ a_{n+k} = a_n \times r^k$$

(2) 첫째항이 a, 공비가 r $(r \neq 0)$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 제n항에 공비 r를 곱하면 제$(n+1)$항이 되므로

$\therefore\ a_{n+1} = r a_n$ (단, $r \neq 0$, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

7 등비중항 ❶

0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b를 a와 c의 '등비중항'이라고 한다.

이때 b가 a와 c의 등차중항이면 $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b}$이므로

$$b^2 = ac$$

가 성립한다. 역으로 0이 아닌 세 수 a, b, c에 대하여 $b^2 = ac$이면 $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b}$이므로 세 수 a, b, c는 이 순서대로 등비수열을 이루고 b는 a와 c의 등비중항이다.

예 세 수 2, x, 8이 이 순서대로 등비수열을 이루면 x는 2과 8의 등비중항이므로 $x^2 = 2 \times 8 = 16$ $\therefore\ x = \pm 4$

7 등비중항 ❷

☑ $a > 0$, $c > 0$일 때,

a와 c의 등비중항 $b = \sqrt{ac}$는 a와 c의 기하평균

① $\left(a_n\right)^2 = a_{n-1} \times a_{n+1} = a_{n-p} \times a_{n+p}$

② $a_n \times a_{n+1} = a_{n-1} \times a_{n+2}$: 첨자의 합이 같다.

☑ 수열 $\{a_n\}$이 등비수열

$\Leftrightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ (공비) $\Leftrightarrow a_{n+1} = a_n \times r$

$\Leftrightarrow a_n = \underbrace{a_0 \times r^n}_{\text{원리합계}} = a_1 \times r^{n-1} = \dfrac{a_2 \times r^{n-2}}{S_0 \neq 0}$

$\Leftrightarrow \left(a_n\right)^2 = a_{n-1} \times a_{n+1} = a_{n-p} \times a_{n+p}$

8 등비수열의 합 ❶

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의

첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

(1) $r \neq 1$일 때, $S_n = \dfrac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r} = \dfrac{a\left(r^n - 1\right)}{r - 1}$

(2) $r = 1$일 때, $S_n = na$

8 등비수열의 합 ❷

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \qquad \cdots ㉠$$

㉠의 양변에 공비 r을 곱하면

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n \qquad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 변끼리 빼면

$$\begin{array}{rrl} & S_n = & a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\ -) & rS_n = & \quad\;\; ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline & (1-r)S_n = & a \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; - ar^n \end{array}$$

$$(1-r)S_n = a(1-r^n)$$

8 등비수열의 합 ❸

$$(1-r)S_n = a(1-r^n)$$

따라서

$r \neq 1$일 때, $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r = 1$일 때, $S_n = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n\text{개}} = na$

예 첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}은

$$S_{10} = \frac{3(2^{10}-1)}{2-1} = 3 \times 1023 = 3069$$

☑ 첫째항이 a, 공비가 r $(r \neq 1)$인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a}{r-1} \times r^n - \frac{a}{r-1}$$

이때 $\frac{a}{r-1} = A$라 하면 S_n은

$$S_n = Ar^n - A$$

의 꼴임을 알 수 있다.

예를 들어 첫째항이 2, 공비가 5인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n = \frac{2(5^n - 1)}{5 - 1} = \frac{1}{2} \times 5^n - \frac{1}{2}$$

✡ 등비수열의 합과 일반항 사이의 관계

공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

S_n, $S_{2n} - S_n$, $S_{3n} - S_{2n}$: 공비가 r^n인 등비수열

⇨ $S_{2n} - S_n = S_n \times r^n \Rightarrow S_{2n} = S_n \times (1 + r^n)$

$S_{3n} - S_{2n} = S_n \times (r^n)^2 \Rightarrow S_{3n} = S_n(1 + r^n + r^{2n})$

예 $S_3 = 26$, $S_6 = 728$을 만족시키는 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n을 구해 보자.

$$S_6 - S_3 = 728 - 26 = 702 = 26 \times r^3,\ r^3 = 27 \quad \therefore\ r = 3$$

$$S_3 = \frac{a(3^3 - 1)}{3 - 1} = 13a = 26 \quad \therefore\ a = 2,\ S_n = 3^n - 1$$

9 원리합계 ❶

(1) 원리합계 : 원금과 이자를 합한 금액

(2) 복리법 : 이자를 원금에 더하여 그 합계액을
다음 기간의 원금으로 하는 이자 계산 방법

(3) 현재 a원의 n년 후 말의 원리합계

$a_n = a(1+r)^n$: 공비가 $1+r$인 등비수열

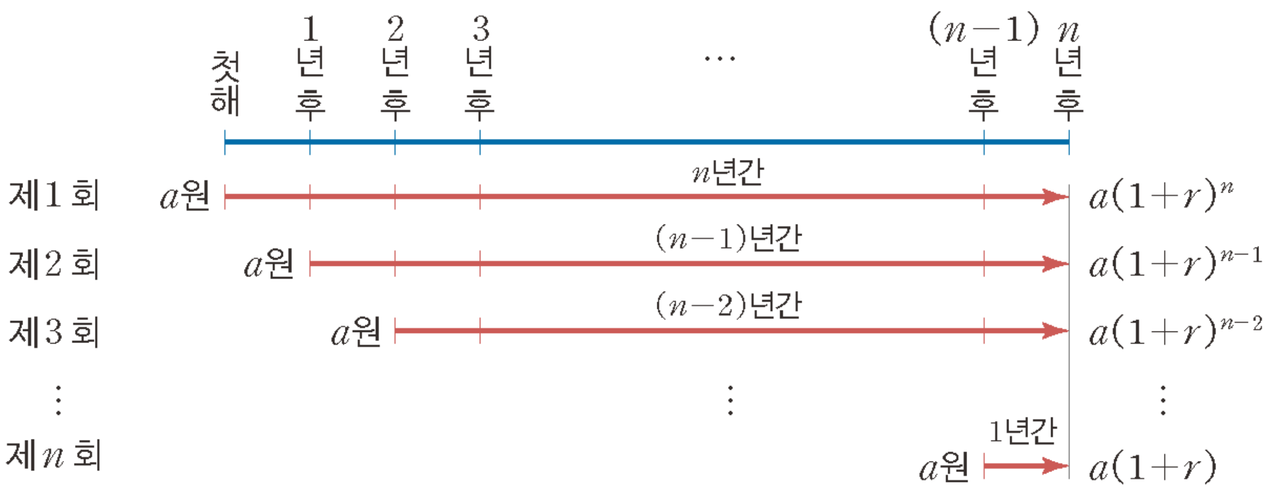
(4) 연이율이 r이고 1년마다 복리로 매년 일정한 금액 a원을 n년 동안 적립할 때, n년 말까지 적립금의 원리합계 S_n은

① 기수(首)불 : $S_n = \dfrac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r}$

② 기말(末)불 : $S_n = \dfrac{a\{(1+r)^n - 1\}}{r}$

9 원리합계 ❷

☑ 연이율이 r이고 1년마다 복리로 매년 초에 일정한 금액 a원을 n년 동안 적립할 때, n년 말까지 적립금의 원리합계 S_n(기수불)은



$$S_n = a(1+r) + a(1+r)^2 + a(1+r)^3 + \cdots + a(1+r)^n$$

9 원리합계 ❸

$$S_n = a(1+r) + a(1+r)^2 + a(1+r)^3 + \cdots + a(1+r)^n$$

☑ S_n은 첫째항이 $a(1+r)$, 공비가 $1+r$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

$$= \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{(1+r)-1} = \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r}$$

☑ 위의 식은 기수(首)불이며, 기말(末)불은 첫째항이 a이다.