



[www.ebsi.co.kr](http://www.ebsi.co.kr)

수능특강 수학영역 기하



# 정답과 풀이

## 01 포물선

유제

본문 5~9쪽

- 1 ②      2 ②      3 ⑤      4 ④      5 ②  
6 ⑤

### Level 1 기초 연습

본문 10쪽

- 1 ⑤      2 ②      3 ③      4 ①

### Level 2 기본 연습

본문 11쪽

- 1 ⑤      2 3      3 ⑤      4 ②

### Level 3 실력 완성

본문 12쪽

- 1 ①      2 ⑤      3 ④

## 03 쌍곡선

유제

본문 29~33쪽

- 1 16      2 ⑤      3 ③      4 ②      5 ⑤  
6 4

### Level 1 기초 연습

본문 34쪽

- 1 ③      2 ④      3 ⑤      4 ②

### Level 2 기본 연습

본문 35쪽

- 1 ①      2 4      3 ⑤      4 ④

### Level 3 실력 완성

본문 36쪽

- 1 ④      2 ①      3 25

## 02 타원

유제

본문 17~21쪽

- 1 ⑤      2 24      3 49      4 ⑤      5 20  
6 ②

### Level 1 기초 연습

본문 22쪽

- 1 ①      2 ⑤      3 ②      4 ⑤

### Level 2 기본 연습

본문 23쪽

- 1 ③      2 ③      3 16      4 28

### Level 3 실력 완성

본문 24쪽

- 1 ⑤      2 ④      3 ①

## 04 벡터의 연산

유제

본문 41~45쪽

- 1 36      2 ③      3 ⑤      4 ③      5 ②  
6 ③

### Level 1 기초 연습

본문 46~47쪽

- 1 ②      2 ③      3 ①      4 ③      5 ⑤  
6 ③      7 ④      8 ②

### Level 2 기본 연습

본문 48~49쪽

- 1 ③      2 ④      3 24      4 ⑤      5 ⑤  
6 ③      7 4      8 ②

### Level 3 실력 완성

본문 50쪽

- 1 ③      2 ③      3 ⑤

## 05 평면벡터의 성분과 내적

유제

본문 55~63쪽

- 1 ③      2 ②      3 10      4 ②      5 ①  
6 ①      7 ⑤      8 ④      9 ①      10 ②

### Level 1 기초 연습

본문 64~65쪽

- 1 ④      2 ③      3 ②      4 ④      5 ⑤  
6 ④      7 ⑤      8 ①

### Level 2 기본 연습

본문 66쪽

- 1 ②      2 ③      3 ④      4 ③

### Level 3 실력 완성

본문 67쪽

- 1 ①      2 4      3 ③

## 07 공간좌표

유제

본문 87~93쪽

- 1 ①      2 25      3 ⑤      4 ③      5 ②  
6 4      7 6      8 ⑤

### Level 1 기초 연습

본문 94~95쪽

- 1 ②      2 ③      3 20      4 ①      5 10  
6 ⑤      7 ③      8 ①

### Level 2 기본 연습

본문 96~97쪽

- 1 ②      2 ③      3 16      4 ④      5 ②  
6 ④      7 ⑤      8 ④

### Level 3 실력 완성

본문 98쪽

- 1 25      2 14      3 ③

## 06 공간도형

유제

본문 71~77쪽

- 1 3      2 ⑤      3 84      4 ②      5 22

### Level 1 기초 연습

본문 78~79쪽

- 1 ④      2 8      3 ⑤      4 ②      5 12  
6 70      7 ②      8 ③

### Level 2 기본 연습

본문 80~81쪽

- 1 ③      2 66      3 ②      4 ①      5 ⑤  
6 11

### Level 3 실력 완성

본문 82쪽

- 1 ③      2 ③      3 ①



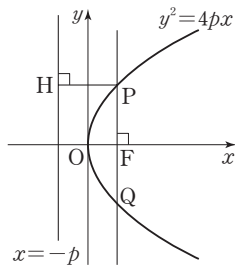
## 01 포물선

유제

본문 5~9쪽

- 1 ②      2 ②      3 ⑤      4 ④      5 ②  
6 ⑤

1



포물선  $y^2=4px$ 에서 초점은  $F(p, 0)$ 이고, 준선의 방정식은  $x=-p$ 이다.

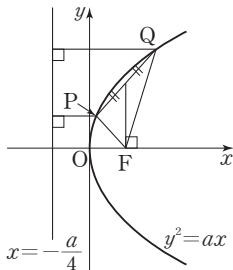
점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} = \overline{PH} = 2p$$

$$\text{따라서 } \frac{\overline{OF}}{\overline{PQ}} = \frac{p}{4p} = \frac{1}{4}$$

답 ②

- 2 포물선  $y^2=ax$ 에서 초점은  $F(\frac{a}{4}, 0)$ 이고, 준선의 방정식은  $x=-\frac{a}{4}$ 이다.



두 점 P, Q의  $x$ 좌표를 각각  $p, q$ 라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} = p - \left(-\frac{a}{4}\right) = p + \frac{a}{4},$$

$$\overline{QF} = q - \left(-\frac{a}{4}\right) = q + \frac{a}{4} \text{ 이므로}$$

$$\overline{PF} + \overline{QF} = \left(p + \frac{a}{4}\right) + \left(q + \frac{a}{4}\right)$$

$$= p + q + \frac{a}{2} = 12 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

이때 선분 PQ의 중점의  $x$ 좌표가 초점의  $x$ 좌표와 같으므로

$$\frac{p+q}{2} = \frac{a}{4}$$

$$p+q = \frac{a}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑧을 ⑦에 대입하면

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = 12, a = 12$$

답 ②

- 3 포물선  $y^2=8(x-a)$ 는 포물선  $y^2=8x$ 를  $x$ 축의 방향으로  $a$ 만큼 평행이동한 것이므로 준선의 방정식은

$$x = -2 + a \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

포물선  $y^2=-4x-4$ , 즉  $y^2=-4(x+1)$ 은 포물선

$y^2=-4x$ 를  $x$ 축의 방향으로  $-1$ 만큼 평행이동한 것이므로 준선의 방정식은

$$x = 1 - 1$$

$$x = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

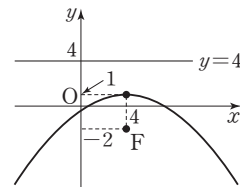
두 준선 ⑦, ⑧이 일치하므로

$$-2 + a = 0$$

따라서  $a = 2$

답 ⑤

4



초점이  $F(4, -2)$ , 준선이  $y=4$ 이므로 그림과 같이 꼭짓점의 좌표는  $(4, 1)$ 이다.

꼭짓점  $(4, 1)$ 과 준선  $y=4$  사이의 거리가 3이므로 구하는 포물선은 포물선  $x^2=-12y$ 를  $x$ 축의 방향으로 4만큼,  $y$ 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{즉, } (x-4)^2 = -12(y-1)$$

따라서  $a = -4, b = -12, c = -1$ 이므로

$$a + b + c = -4 + (-12) + (-1) = -17$$

답 ④

### 다른 풀이

포물선 위의 점을  $P(x, y)$ 라 하고 점 P에서 준선  $y=4$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} = \overline{PH}$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y+2)^2} = |y-4|$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x^2 - 8x + 12y + 4 = 0$$

$$\text{즉, } (x-4)^2 = -12(y-1)$$

따라서  $a = -4$ ,  $b = -12$ ,  $c = -1$ 이므로

$$a+b+c = -4 + (-12) + (-1) = -17$$

- 5 점 P의 좌표를  $(a, b)$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ )이라 하면 점  $P(a, b)$ 가 포물선  $y^2 = 6x$  위의 점이므로

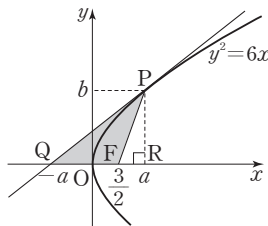
$$b^2 = 6a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$y^2 = 6x = 4 \times \frac{3}{2} \times x$ 에서 초점은  $F(\frac{3}{2}, 0)$ 이다.

포물선  $y^2 = 6x$  위의 점  $P(a, b)$ 에서의 접선의 방정식은

$$by = 3(x+a) \text{이므로}$$

$$Q(-a, 0)$$



$$\overline{PQ} = \sqrt{(2a)^2 + b^2} = \sqrt{4a^2 + b^2} = 3\sqrt{6}$$

$$4a^2 + b^2 = 54 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$4a^2 + 6a = 54$$

$$2a^2 + 3a - 27 = 0$$

$$(a-3)(2a+9) = 0$$

$$a = 3 \text{ 또는 } a = -\frac{9}{2}$$

이때  $a > 0$ 이므로  $a = 3$ 이고,  $b > 0$ 이므로

$$\textcircled{1} \text{에서 } b = 3\sqrt{2}$$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 R라 하면

$$\overline{FQ} = \frac{9}{2}, \overline{PR} = 3\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 FPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times 3\sqrt{2} = \frac{27\sqrt{2}}{4}$$

답 ②

- 6 포물선  $y^2 = 2x = 4 \times \frac{1}{2} \times x$ 에서 초점은  $F(\frac{1}{2}, 0)$ 이다.

포물선에 접하고 기울기가  $\frac{1}{3}$ 인 직선  $l$ 의 방정식은

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선  $l$ 이 x축과 만나는 점이 A이므로

$$A(-\frac{9}{2}, 0)$$

점  $F(\frac{1}{2}, 0)$ 을 지나고 직선  $l$ 과 수직인 직선의 방정식은

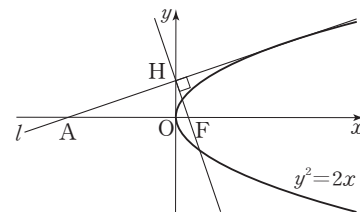
$$y = -3(x - \frac{1}{2})$$

$$\text{즉, } y = -3x + \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

직선 ①과 직선 ②이 만나는 점이 H이므로

$$H(0, \frac{3}{2})$$

$$\overline{AF} = \frac{1}{2} - (-\frac{9}{2}) = 5$$



따라서 삼각형 AFH의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 5 \times \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$$

답 ⑤

### Level 1 기초 연습

본문 10쪽

1 ⑤      2 ②      3 ③      4 ①

- 1 포물선  $y^2 = -x = 4 \times (-\frac{1}{4}) \times x$ 에서

초점은  $F(-\frac{1}{4}, 0)$ 이고, 준선의 방정식은  $x = \frac{1}{4}$ 이다.

점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PH} = \overline{PF} = 2$$

따라서 점 P의 x좌표는

$$\frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}$$

답 ⑤



- 2 포물선의 정의에 의하여 두 점  $F(0, 2)$ ,  $(8, k)$  사이의 거리는 점  $(8, k)$ 와 직선  $y = -4$  사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{8^2 + (k-2)^2} = |k - (-4)|$$

양변을 제곱하면

$$k^2 - 4k + 68 = k^2 + 8k + 16$$

$$12k = 52$$

$$\text{따라서 } k = \frac{13}{3}$$

답 ②

### 다른 풀이

포물선의 초점이  $F(0, 2)$ 이고, 직선  $y = -4$ 가 준선인 포물선은 초점이  $(0, 3)$ 이고 직선  $y = -3$ 이 준선인 포물선  $x^2 = 12y$ 를  $y$ 축의 방향으로  $-1$ 만큼 평행이동한 것이다.

즉, 포물선의 방정식은

$$x^2 = 12(y+1)$$

점  $(8, k)$ 가 이 포물선 위의 점이므로

$$8^2 = 12(k+1)$$

$$\text{따라서 } k = \frac{13}{3}$$

- 3 점  $(3, 6)$ 이 포물선  $y^2 = 4px$  위의 점이므로

$$6^2 = 12p$$

$$p = 3$$

즉, 포물선의 방정식은  $y^2 = 12x$

포물선  $y^2 = 12x$  위의 점  $(3, 6)$ 에서의 접선의 방정식은

$$6y = 6(x+3)$$

$$y = x+3$$

직선  $y = x+3$ 이  $x$ 축과 만나는 점의 좌표가  $(-3, 0)$ 이고,  $y$ 축과 만나는 점의 좌표가  $(0, 3)$ 이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$$

답 ③

- 4 포물선  $y^2 = 8x = 4 \times 2 \times x$ 에서 초점은  $F(2, 0)$ 이다. 포물선  $y^2 = 8x$ 에 접하는 기울기가 4인 직선의 방정식은

$$y = 4x + \frac{2}{4} = 4x + \frac{1}{2}$$

따라서 점 A의 좌표가  $(-\frac{1}{8}, 0)$ 이므로 선분 AF의 길이는

$$2 - (-\frac{1}{8}) = \frac{17}{8}$$

답 ①

## Level 2 기본 연습

본문 1쪽

1 ⑤

2 3

3 ⑤

4 ②

- 1 포물선  $y^2 = ax$  위의 점  $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y_1 y = \frac{a}{2}(x + x_1)$$

이 직선이 점  $(5, 0)$ 을 지나므로

$$\frac{a}{2}(5 + x_1) = 0$$

$$x_1 = -5$$

포물선  $y^2 = ax$ 의 준선이 직선  $x = -\frac{a}{4}$ 이므로 점 P에서

직선  $x = -\frac{a}{4}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PH} = \overline{PF} = 7$$

$$\text{또 } \overline{PH} = -\frac{a}{4} - x_1 = -\frac{a}{4} + 5 \text{이므로}$$

$$-\frac{a}{4} + 5 = 7$$

따라서  $a = -8$

답 ⑤

- 2 초점이  $(0, 2)$ 이고 직선  $y = -2$ 가 준선인 포물선의 방정식은

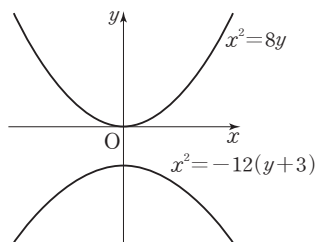
$$x^2 = 8y$$

점  $(0, -6)$ 을 지나고  $x$ 축에 접하는 원의 반지름의 길이를  $r$ 라 하면 원의 중심과 점  $(0, -6)$  사이의 거리가  $r$ 이고, 원의 중심과  $x$ 축 사이의 거리도  $r$ 이다. 따라서 포물선의 정의에 의하여 원의 중심이 나타내는 도형은 초점이  $(0, -6)$ 이고  $x$ 축이 준선인 포물선이다.

즉, 이 포물선은 포물선  $x^2 = -12y$ 를  $y$ 축의 방향으로  $-3$ 만큼 평행이동한 것이므로 원의 중심이 나타내는 도형의 방정식은

$$x^2 = -12(y+3)$$

두 포물선은 그림과 같으므로 선분 PQ의 길이는 두 점 P, Q가 각각 포물선의 꼭짓점일 때 최소이다.



포물선  $x^2=8y$ 의 꼭짓점의 좌표는  $(0, 0)$ 이고, 포물선  $x^2=-12(y+3)$ 의 꼭짓점의 좌표는  $(0, -3)$ 이므로 선분 PQ의 길이의 최솟값은 3이다.

☐ 3

- 3 직선  $l$ 은 포물선  $y^2=4x$ 에 접하는 기울기가 2인 직선을  $x$ 축의 방향으로  $m$ 만큼 평행이동한 것과 같다.

포물선  $y^2=4x$ 에 접하는 기울기가 2인 직선의 방정식이

$$y=2x+\frac{1}{2} \text{ 이므로 직선 } l \text{의 방정식은}$$

$$y=2(x-m)+\frac{1}{2}$$

$$\text{즉, } 2x-y-2m+\frac{1}{2}=0$$

포물선  $y^2=4x$ 의 초점의 좌표가  $(1, 0)$ 이므로 포물선  $y^2=4x$ 의 초점과 직선  $l$  사이의 거리는

$$\frac{\left| 2-0-2m+\frac{1}{2} \right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

$$\left| -2m+\frac{5}{2} \right|=5$$

$$(i) -2m+\frac{5}{2} \geq 0 \text{ 일 때}$$

$$-2m+\frac{5}{2}=5$$

$$m=-\frac{5}{4}$$

$$(ii) -2m+\frac{5}{2} < 0 \text{ 일 때}$$

$$2m-\frac{5}{2}=5$$

$$m=\frac{15}{4}$$

이때  $m > 0$ 이므로 (i), (ii)에 의하여

$$m=\frac{15}{4}$$

☐ 5

- 4 포물선  $y^2=2x+a$ 에서

$$y^2=2\left(x+\frac{a}{2}\right)$$

이므로 포물선  $y^2=2x+a$ 는 포물선  $y^2=2x$ 를  $x$ 축의 방향으로  $-\frac{a}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.

포물선  $y^2=2x$ 의 초점이  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 이므로 포물선  $y^2=2x+a$

의 초점은  $\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{2}, 0\right)$ 이다.

이때 포물선  $y^2=2x+a$ 의 초점이 원점이므로

$$\frac{1}{2}-\frac{a}{2}=0 \text{에서 } a=1$$

즉, 포물선  $y^2=2x+1$ 의 꼭짓점은  $C\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 이다.

포물선  $y^2=2x+1$ 과 직선  $y=\sqrt{3}x$ 가 만나는 점의  $x$ 좌표는  $3x^2-2x-1=0$ 에서

$$(3x+1)(x-1)=0$$

$$x=-\frac{1}{3} \text{ 또는 } x=1$$

$$\text{즉, } A(1, \sqrt{3}), B\left(-\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\text{따라서 } S_1=\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}, S_2=\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{12}$$

이므로

$$S_1-S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{12}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

☐ 2

#### 다른 풀이

포물선  $y^2=2x+a$ 에서

$$y^2=2\left(x+\frac{a}{2}\right)$$

이므로 포물선  $y^2=2x+a$ 는 포물선  $y^2=2x$ 를  $x$ 축의 방향으로  $-\frac{a}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.

포물선  $y^2=2x$ 의 초점이  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 이므로 포물선  $y^2=2x+a$

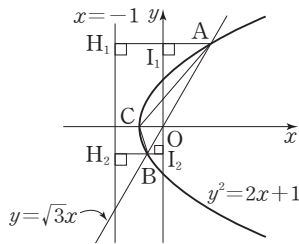
의 초점은  $\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{2}, 0\right)$ 이다.

이때 포물선  $y^2=2x+a$ 의 초점이 원점이므로

$$\frac{1}{2}-\frac{a}{2}=0 \text{에서 } a=1$$

따라서 포물선  $y^2=2x+1$ 의 꼭짓점은  $C\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 이고, 준선의 방정식이  $x=-1$ 이다.

그림과 같이 두 점 A, B에서 직선  $x=-1$ 에 내린 수선의 발을 각각  $H_1, H_2$ 라 하고, 두 점 A, B에서  $y$ 축에 내린 수선의 발을 각각  $I_1, I_2$ 라 하자.



포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AO} = \overline{AH_1}, \overline{BO} = \overline{BH_2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

원점과 직선  $x = -1$  사이의 거리가 1이므로

$$\overline{AI_1} = \overline{AH_1} - 1, \overline{BI_2} = 1 - \overline{BH_2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 직선 AB의 기울기가  $\sqrt{3}$ 이므로

$$\angle OAI_1 = \angle OBI_2 = 60^\circ$$

$$\text{즉, } \overline{AO} : \overline{AI_1} = 2 : 1, \overline{BO} : \overline{BI_2} = 2 : 1$$

$$2\overline{AI_1} = \overline{AO}, 2\overline{BI_2} = \overline{BO} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서

$$2(\overline{AH_1} - 1) = \overline{AH_1}, 2(1 - \overline{BH_2}) = \overline{BH_2}$$

$$\overline{AH_1} = 2, \overline{BH_2} = \frac{2}{3}$$

$$\text{즉, } \overline{AO} = 2, \overline{BO} = \frac{2}{3}$$

삼각형 OAC에서 밑변을  $\overline{CO}$ , 높이를  $\overline{OI_1}$ 라 하면

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

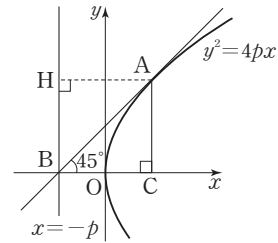
삼각형 OCB에서 밑변을  $\overline{OC}$ , 높이를  $\overline{OI_2}$ 라 하면

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$\text{따라서 } S_1 - S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

직선의 기울기가 1이므로 직선과  $x$ 축이 이루는 각의 크기가  $45^\circ$ 이고,  $\angle BCA = 90^\circ$ 이므로

$$\overline{CA} = \overline{BC} = a + p$$



이때 삼각형 ABC의 넓이가 6이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CA} = \frac{1}{2} (a + p)^2 = 6$$

$$(a + p)^2 = 12 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 A에서 포물선  $y^2 = 4px$ 의 준선  $x = -p$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = a + p$$

즉,  $\overline{CA} = \overline{AH}$ 이므로 포물선의 정의에 의하여 점 C가 포물선  $y^2 = 4px$ 의 초점이 된다.

포물선  $y^2 = 4px$ 의 초점의 좌표가  $(p, 0)$ 이고, 점 C의  $x$ 좌표와 점 A의  $x$ 좌표가 같으므로

$$a = p$$

이것을  $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$(2p)^2 = 12$$

$$4p^2 = 12$$

$$p^2 = 3$$

이때  $p > 0$ 이므로  $p = \sqrt{3}$

답 ①

### Level 3 실력 완성

본문 12쪽

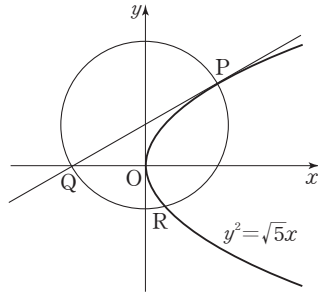
1 ①      2 ⑤      3 ④

- 1 포물선  $y^2 = 4px$  ( $p > 0$ ) 위의 점 A에서의 접선의 기울기가 1이므로 접선의 방정식은  $y = x + p$ 이다. 즉, 점 B의 좌표는  $(-p, 0)$   
점 A의  $x$ 좌표를  $a$ 라 하면  
 $\overline{BC} = a + p$

- 2 점 P의 좌표를  $(x_1, y_1)$ 이라 하면 포물선  $y^2 = \sqrt{5}x$  위의 점 P에서의 접선의 방정식은  $y_1 y = \frac{\sqrt{5}}{2}(x + x_1)$ 이므로 점 Q의 좌표는  $(-x_1, 0)$ 이다.  
선분 PQ가 세 점 P, Q, R를 지나는 원의 현이므로 원의 중심은 선분 PQ의 수직이등분선 위에 있다.  
선분 PQ의 중점의  $x$ 좌표가  $\frac{x_1 + (-x_1)}{2} = 0$ 이므로 선분 PQ의 중점은  $y$ 축 위에 있다. 이때 원의 중심이  $y$ 축 위에 있으므로 선분 PQ의 중점이 원의 중심이다.



즉, 선분 PQ가 세 점 P, Q, R를 지나는 원의 지름이다.



이때 원의 넓이가  $\frac{21}{5}\pi$ 이므로

$$\left(\frac{PQ}{2}\right)^2 \pi = \frac{21}{5}\pi$$

$$\frac{\{x_1 - (-x_1)\}^2 + (y_1 - 0)^2}{4} = \frac{21}{5}$$

이때  $y_1^2 = \sqrt{5}x_1$ 이므로  $x_1^2 = \frac{y_1^4}{5}$

$$\frac{y_1^4}{5} + \frac{y_1^2}{4} = \frac{21}{5}$$

$$4y_1^4 + 5y_1^2 - 84 = 0$$

$$(y_1 - 2)(y_1 + 2)(4y_1^2 + 21) = 0$$

이때 점 P는 제1사분면에 있으므로  $y_1 > 0$ , 즉  $y_1 = 2$

따라서 세 점 P, Q, R를 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + (y - 1)^2 = \frac{21}{5}$$

점 R는 원  $x^2 + (y - 1)^2 = \frac{21}{5}$ 과 포물선  $y^2 = \sqrt{5}x$ 의 교점  
이므로

$$\frac{y^4}{5} + y^2 - 2y - \frac{16}{5} = 0$$

$$y^4 + 5y^2 - 10y - 16 = 0$$

$$(y + 1)(y - 2)(y^2 + y + 8) = 0$$

이때 점 R는 제4사분면에 있으므로

$$y = -1$$

따라서 점 R의  $y$ 좌표는  $-1$ 이다.

⑤

- 3 포물선  $y^2 = a(x + b)$ 는 포물선  $y^2 = ax$ 를  $x$ 축의 방향으로  $-b$ 만큼 평행이동한 것이므로 초점 F의 좌표는

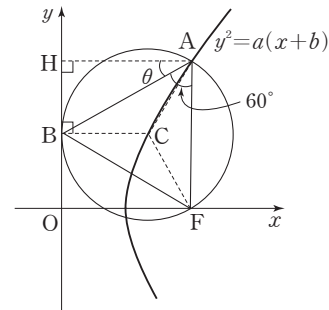
$$\left(\frac{a}{4} - b, 0\right) \text{이고, 준선의 방정식은 } x = -\frac{a}{4} - b \text{이다.}$$

이때 준선이  $y$ 축이므로

$$-\frac{a}{4} - b = 0 \quad \cdots \text{㉠}$$

원이 포물선의 준선과 점 B에서 접하므로 준선에 수직이고 점 B를 지나는 직선 위에 원의 중심 C가 있다.

즉,  $\overline{BC} = \overline{CF}$ 이므로 포물선의 정의에 의하여 점 C는 그림과 같이 포물선 위의 점이다.



점 A에서  $y$ 축에 내린 수선의 발을 H,  $\angle BAH = \theta$ 라 하자.

점 A의  $x$ 좌표가  $2^3\sqrt{7}$ 이므로

$$\overline{AH} = 2^3\sqrt{7}$$

$$\overline{AB} = \frac{\overline{AH}}{\cos \theta} = \frac{2^3\sqrt{7}}{\cos \theta}$$

포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF} = \overline{AH} = 2^3\sqrt{7}$$

삼각형 ABF의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AF} \times \sin(\angle FAB)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2^3\sqrt{7}}{\cos \theta} \times 2^3\sqrt{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \times 3^3\sqrt{49}}{\cos \theta}$$

이때 삼각형 ABF의 넓이가 7이므로

$$\frac{\sqrt{3} \times 3^3\sqrt{49}}{\cos \theta} = 7$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3} \times 3^3\sqrt{49}}{7}$$

$$\text{즉, } \overline{AB} = \frac{2^3\sqrt{7}}{\cos \theta} = \frac{2^3\sqrt{49}}{\sqrt{3}}$$

또  $\angle ABC = \angle BAH = \theta$ ,  $\overline{AC} = \overline{BC}$ 이므로 삼각형 ABC에서

$$\overline{AB} = 2\overline{BC} \cos \theta$$

$$\frac{2^3\sqrt{49}}{\sqrt{3}} = 2\overline{BC} \times \frac{\sqrt{3} \times 3^3\sqrt{49}}{7}$$

$$\overline{BC} = \frac{7}{3}$$

호 BF의 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로

$$\angle FCB = 2 \times \angle FAB = 120^\circ$$

원점 O에 대하여  $\angle OFC = 60^\circ$



$$\begin{aligned}\overline{OF} &= \overline{BC} + \overline{CF} \cos(\angle OFC) \\ &= \frac{7}{3} + \frac{7}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{7}{2}\end{aligned}$$

이때 초점 F의 좌표가  $(\frac{a}{4} - b, 0)$ 이므로

$$\frac{a}{4} - b = \frac{7}{2} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\textcircled{I}, \textcircled{L} \text{에서 } a=7, b=-\frac{7}{4}$$

$$\text{따라서 } a+b=7-\frac{7}{4}=\frac{21}{4}$$

답 ④

QR코드 앱을 사용해 추가 정보를 확인하세요.



## 수능특강 사용설명서

수능특강 지문·자료·문항 분석 능력 향상  
연계교재를 위한 가장 친절한 가이드

## 02 타원

유제

본문 17~21쪽

- 1 ⑤      2 24      3 49      4 ⑤      5 20  
6 ②

- 1 두 점  $F(3, 0)$ ,  $F'(-3, 0)$ 에 대하여  $\overline{PF} + \overline{PF'} = 14$ 를 만족시키는 점  $P$ 가 나타내는 도형은 두 초점이  $F$ ,  $F'$ 이고 장축의 길이가 14인 타원이다.

이 타원의 방정식을  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ )이라 하면

$$a^2 - b^2 = 3^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$2a = 14 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에서  $a^2 = 49$ ,  $b^2 = 40$ 이므로 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{40} = 1$$

이 도형이 점  $(5, k)$ 를 지나므로

$$\frac{25}{49} + \frac{k^2}{40} = 1$$

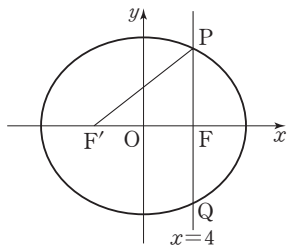
$$k^2 = \frac{960}{49}$$

이때  $k$ 는 양수이므로

$$k = \frac{8\sqrt{15}}{7}$$

답 ⑤

2



$\overline{FF'} = 8$ ,  $\overline{PF} = 6$ 이므로 직각삼각형  $PF'F$ 에서

$$\overline{PF'} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

따라서 장축의 길이는 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} + \overline{PF} = 10 + 6 = 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 타원의 방정식을  $\frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $b > 0$ )으로 놓으면

$F(4, 0)$ 이므로

$$4^2 = 8^2 - b^2$$

$$b^2 = 48 \text{에서}$$

$$b = 4\sqrt{3}$$

따라서 단축의 길이는

$$2b = 8\sqrt{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에서 장축의 길이와 단축의 길이의 합은

$$16 + 8\sqrt{3}$$

따라서  $m = 16$ ,  $n = 8$ 이므로

$$m + n = 16 + 8 = 24$$

답 24

- 3 타원  $\frac{(x-2)^2}{49} + \frac{y^2}{45} = 1$ 은 타원  $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{45} = 1$ 을  $x$ 축의

방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 타원  $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{45} = 1$ 의

두 초점의 좌표가  $(-2, 0)$ ,  $(2, 0)$ 이므로 타원

$\frac{(x-2)^2}{49} + \frac{y^2}{45} = 1$ 의 두 초점의 좌표는  $(0, 0)$ ,  $(4, 0)$ 이다.

$\overline{OP} = a$ ,  $\overline{PQ} = b$ 라 하면 타원의 정의에 의하여

$$a + b = 2 \times 7 = 14$$

이때  $a > 0$ ,  $b > 0$ 이므로

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a = b \text{일 때 성립한다.})$$

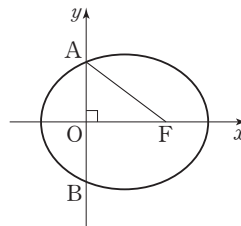
$$14 \geq 2\sqrt{ab}, \quad 7 \geq \sqrt{ab}$$

$$ab \leq 49$$

따라서  $\overline{OP} \times \overline{PQ}$ 의 최댓값은 49이다.

답 49

- 4 조건을 만족시키는 타원을 나타내면 그림과 같다.



이때  $\overline{AB} = 6$ 이므로  $\overline{AO} = 3$

타원 위의 점에서 두 초점까지의 거리의 합이 8이므로

$$\overline{AF} + \overline{AO} = \overline{AF} + 3 = 8 \text{에서}$$

$$\overline{AF} = 5$$

또한 삼각형  $AOF$ 는 직각삼각형이므로

$$\overline{OF} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$



타원의 장축의 길이가 8이므로  
 $2a=8$ 에서  $a=4$ ,  $a^2=16$   
 두 초점 사이의 거리가 4이므로  
 $2\sqrt{a^2-b^2}=4$ 에서  $\sqrt{a^2-b^2}=2$   
 $16-b^2=4$ ,  $b^2=12$   
 또 타원의 중심의 좌표가  $(2, 0)$ 이므로  $m=2$   
 따라서  $m+a^2+b^2=2+16+12=30$

답 ⑤

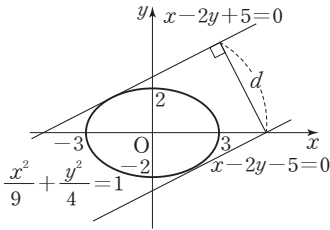
- 5 타원  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에 접하고 기울기가  $\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{9 \times \frac{1}{4} + 4} = \frac{1}{2}x \pm \frac{5}{2}$$

즉, 두 접선의 방정식은

$$x-2y+5=0, x-2y-5=0$$

이 두 직선 사이의 거리는 직선  $x-2y-5=0$  위의 점  $(5, 0)$ 과 직선  $x-2y+5=0$  사이의 거리와 같으므로



$$d = \frac{|5+5|}{\sqrt{1+(-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{따라서 } d^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$$

답 20

- 6 점 P의 좌표를  $(x_1, y_1)$  ( $x_1 > 0, y_1 > 0$ )이라 하자.

타원  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$  위의 점  $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

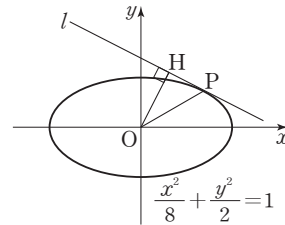
$$\frac{x_1x}{8} + \frac{y_1y}{2} = 1, \text{ 즉 } x_1x + 4y_1y - 8 = 0$$

원점 O와 직선  $x_1x + 4y_1y - 8 = 0$  사이의 거리가  $\overline{OH}$ 이므로

$$\overline{OH} = \frac{|-8|}{\sqrt{x_1^2 + (4y_1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{x_1^2 + 16y_1^2}}$$

또 점  $P(x_1, y_1)$ 은 타원 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{8} + \frac{y_1^2}{2} = 1, \text{ 즉 } x_1^2 = 8 - 4y_1^2$$



직각삼각형 OPH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{PH}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OH}^2$$

$$= (x_1^2 + y_1^2) - \frac{64}{x_1^2 + 16y_1^2}$$

$$= 8 - 4y_1^2 + y_1^2 - \frac{64}{8 - 4y_1^2 + 16y_1^2}$$

$$= 8 - 3y_1^2 - \frac{16}{2 + 3y_1^2}$$

$$= 10 - \left\{ (2 + 3y_1^2) + \frac{16}{2 + 3y_1^2} \right\}$$

이때

$$(2 + 3y_1^2) + \frac{16}{2 + 3y_1^2} \geq 2\sqrt{(2 + 3y_1^2) \times \frac{16}{2 + 3y_1^2}} = 8$$

이므로

$$\overline{PH}^2 \leq 10 - 8 = 2 \quad \left( \text{단, 등호는 } y_1^2 = \frac{2}{3} \text{ 일 때 성립한다.} \right)$$

따라서 선분 PH의 길이의 최댓값은  $\sqrt{2}$ 이다.

답 ②

### Level 1 기초 연습

본문 22쪽

1 ①      2 ⑤      3 ②      4 ⑤

- 1 타원  $x^2 - 6x + 10y^2 = 1$ 에서

$$x^2 - 6x + 9 + 10y^2 = 10$$

$$\frac{(x-3)^2}{10} + y^2 = 1$$

이 타원은 타원  $\frac{x^2}{10} + y^2 = 1$ 을  $x$ 축의 방향으로 3만큼 평행

이동한 것이므로 타원  $x^2 - 6x + 10y^2 = 1$ 의 두 초점 사이의

거리는 타원  $\frac{x^2}{10} + y^2 = 1$ 의 두 초점 사이의 거리와 같다.

이때 타원  $\frac{x^2}{10} + y^2 = 1$ 의 두 초점의 좌표가

$(3, 0), (-3, 0)$ 이므로 타원  $x^2 - 6x + 10y^2 = 1$ 의 두 초점 사이의 거리는 6이다.

답 ①

2 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  위의 점  $(2, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{y}{b^2} = 1$$

이 직선이  $x$ 축과 만나는 점의 좌표가  $(4, 0)$ 이므로

$$\frac{2 \times 4}{a^2} = 1$$

$$a^2 = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 점  $(2, -1)$ 이 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  위의 점이므로

$$\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$$

①을 대입하면

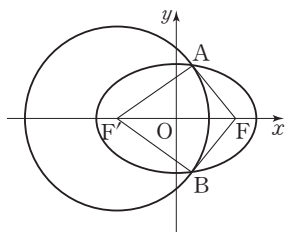
$$\frac{4}{8} + \frac{1}{b^2} = 1$$

$$b^2 = 2$$

$$\text{따라서 } a^2 + b^2 = 8 + 2 = 10$$

답 ⑤

3



타원의 정의에 의하여

$$\overline{FA} + \overline{F'A} = 14, \overline{FB} + \overline{F'B} = 14 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때  $\overline{F'A}, \overline{F'B}$ 은 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\overline{F'A} = \overline{F'B} = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$\overline{FA} = 6, \overline{FB} = 6$$

$$\text{따라서 } \overline{FA} + \overline{FB} = 6 + 6 = 12$$

답 ②

4  $a = 3b$ 이므로 두 점  $A(a, 0), B(0, b)$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-b}{a} = \frac{-b}{3b} = -\frac{1}{3}$$

타원  $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{23} = 1$ 에 접하는 기울기가  $-\frac{1}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{3}x \pm \sqrt{18 \times \frac{1}{9} + 23}$$

$$y = -\frac{1}{3}x \pm 5$$

(i)  $y = -\frac{1}{3}x + 5$ 인 경우

$$a = 15, b = 5$$

(ii)  $y = -\frac{1}{3}x - 5$ 인 경우

$$a = -15, b = -5$$

$a, b$ 가 양수이므로 (i), (ii)에서

$$a = 15, b = 5$$

$$\text{따라서 } a + b = 20$$

답 ⑤

## Level 2 기본 연습

본문 23쪽

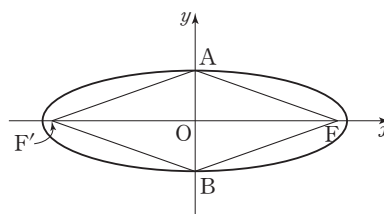
1 ③

2 ③

3 16

4 28

1



타원  $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 의 초점 중  $x$ 좌표가 음수인 점을  $F'$ 이라

하면 타원의 정의에 의하여

$$\overline{FA} + \overline{F'A} = 6, \overline{FB} + \overline{F'B} = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 두 점  $F, F'$ 이  $y$ 축에 대하여 대칭이므로

$$\overline{FA} = \overline{F'A}, \overline{FB} = \overline{F'B} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$\overline{FA} = 3, \overline{FB} = 3$$

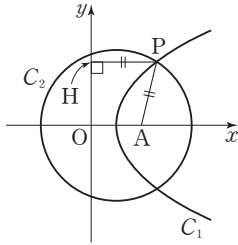
선분  $AB$ 의 길이는 타원의 단축의 길이와 같으므로 2이다.



따라서 삼각형 ABF의 둘레의 길이는  
 $\overline{FA} + \overline{FB} + \overline{AB} = 3 + 3 + 2 = 8$

답 ③

2



점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 P가 초점이  
 점 A(4, 0)이고 준선이 y축인 포물선 위의 점이므로 포물  
 선의 정의에 의하여

$$\overline{PH} = \overline{PA} = 5$$

즉, 점 P의 x좌표는 5이다.

초점이 점 A(4, 0)이고 준선이 y축인 포물선의 방정식이  
 $y^2 = 8(x - 2)$ 이고, 점 P가 제1사분면에 있으므로 점 P의  
 좌표는 (5,  $2\sqrt{6}$ )

즉, 원점 O에 대하여

$$\overline{OP} = \sqrt{5^2 + (2\sqrt{6})^2} = 7$$

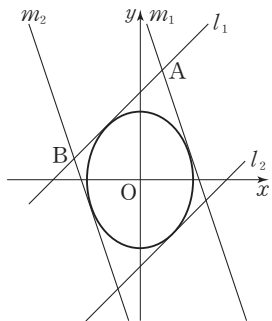
$$\overline{OP} + \overline{PA} = 7 + 5 = 12$$

타원  $C_2$ 의 두 초점이 원점과 점 A이므로 타원의 성질에 의  
 하여 타원의 장축의 길이는 12이다.

답 ③

3 타원  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$ 에 접하는 기울기가 1인 직선의 방정식이  
 $y = x \pm \sqrt{3+5}$ 이므로 두 직선  $l_1, l_2$ 의 방정식은 각각  
 $y = x + 2\sqrt{2}, y = x - 2\sqrt{2}$ 이다.

타원  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$ 에 접하는 기울기가 -3인 직선의 방정  
 식이  $y = -3x \pm \sqrt{3 \times 9 + 5}$ 이므로 두 직선  $m_1, m_2$ 의 방정  
 식은 각각  $y = -3x + 4\sqrt{2}, y = -3x - 4\sqrt{2}$ 이다.



두 직선  $l_1 : y = x + 2\sqrt{2}, m_1 : y = -3x + 4\sqrt{2}$ 가 만나는  
 점 A의 좌표는  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2})$ 이고,

두 직선  $l_1 : y = x + 2\sqrt{2}, m_2 : y = -3x - 4\sqrt{2}$ 가 만나는  
 점 B의 좌표는  $(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 4$$

두 직선  $l_1, l_2$ 가 원점에 대하여 대칭이므로 두 직선  $l_1, l_2$   
 사이의 거리는 원점과 직선  $l_1 : x - y + 2\sqrt{2} = 0$  사이의 거  
 리의 2배이다.

$$\text{즉, } 2 \times \frac{|0 - 0 + 2\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 4$$

네 직선  $l_1, l_2, m_1, m_2$ 로 둘러싸인 도형은 두 직선  $l_1, l_2$ 가  
 서로 평행하고 두 직선  $m_1, m_2$ 가 서로 평행하므로 평행사  
 변형이다.

즉, 네 직선  $l_1, l_2, m_1, m_2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\overline{AB} \times (\text{두 직선 } l_1, l_2 \text{ 사이의 거리}) = 4 \times 4 = 16$$

답 16

4 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  위의 점 P(2, 3)에서의 접선의 방정식은  
 $\frac{2x}{a^2} + \frac{3y}{b^2} = 1$ 이므로 점 Q의 좌표는  $(\frac{a^2}{2}, 0)$ 이다.

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 2c \times 3 = 3c$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{a^2}{2} - c\right) \times 3 = \frac{3}{2} \left(\frac{a^2}{2} - c\right)$$

$$S_1 : S_2 = 2 : 3 \text{ 이므로}$$

$$3c : \frac{3}{2} \left(\frac{a^2}{2} - c\right) = 2 : 3$$

$$\frac{a^2}{2} - c = 3c$$

$$a^2 = 8c \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{이때 } b^2 = a^2 - c^2 \text{ 이므로}$$

$$b^2 = 8c - c^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

또 점 P(2, 3)이 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  위의 점이므로

$$\frac{4}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

①, ②를 ③에 대입하면

$$\frac{4}{8c} + \frac{9}{8c - c^2} = 1$$

$$\frac{(8-c) + 18}{2c(8-c)} = 1$$

$$2c^2 - 17c + 26 = 0$$

$$(c-2)(2c-13)=0$$

이때  $c$ 가 자연수이므로  $c=2$

따라서  $a^2=8 \times 2=16$ ,  $b^2=8 \times 2 - 2^2=12$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 16 + 12 = 28$$

28

### Level 3 실력 완성

본문 24쪽

1 ⑤      2 ④      3 ①

1 타원  $3x^2 + y^2 - 2y - 11 = 0$ 에서

$$3x^2 + (y-1)^2 = 12$$

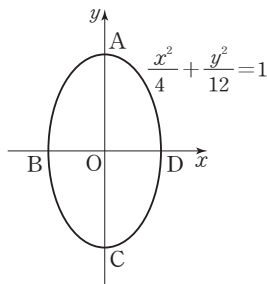
$$\frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{12} = 1$$

이 타원은 타원  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1$ 을  $y$ 축의 방향으로 1만큼 평행

이동한 도형이므로 타원  $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{12} = 1$ 의 네 꼭짓점과

중심 중 3개의 점을 지나는 원의 넓이는 타원  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1$ 의 네 꼭짓점과 중심 중 3개의 점을 지나는 원의 넓이와 같다.

즉, 타원  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1$ 의 네 꼭짓점과 중심 중 3개의 점을 지나는 원의 넓이의 최댓값과 최솟값을 구하면 된다.



그림과 같이 타원  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1$ 의 네 꼭짓점은  $A(0, 2\sqrt{3})$ ,

$B(-2, 0)$ ,  $C(0, -2\sqrt{3})$ ,  $D(2, 0)$ 이고, 중심은  $O(0, 0)$ 이므로 이 5개의 점 중 3개의 점을 지나는 원의 넓이는 다음과 같다.

(i) 세 점 중 한 점이 타원의 중심  $O(0, 0)$ 인 경우

택한 세 점으로 가능한 경우는  $O, A, B$  또는  $O, B, C$  또는  $O, C, D$  또는  $O, D, A$ 로 4가지이다. 두 점  $A$ 와  $C$ 가 원점에 대하여 대칭이고, 두 점  $B$ 와  $D$ 가 원점에 대하여 대칭이므로 4가지 경우의 원의 넓이가 모두 같다. 즉, 택한 세 점이  $O, A, B$ 인 경우의 원의 넓이를 구하면 된다.

삼각형  $OAB$ 는  $\angle BOA = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 선분  $AB$ 가 외접원의 지름이다.

$$\overline{AB} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

따라서 세 점 중 한 점이 타원의 중심  $O(0, 0)$ 인 경우는 모두 외접원의 반지름의 길이가 2이므로 넓이는  $4\pi$ 이다.

(ii) 세 점이  $A, B, D$  또는  $B, C, D$ 인 경우

두 점  $A$ 와  $C$ 가  $x$ 축에 대하여 대칭이므로 이 2가지 경우의 원의 넓이는 같다. 즉, 택한 세 점이  $A, B, D$ 인 경우의 원의 넓이를 구하면 된다.

$$\overline{AD} = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4$$

$$\overline{BD} = 4$$

이므로 삼각형  $ABD$ 는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이다.

삼각형  $ABD$ 의 외접원의 반지름의 길이를  $R_1$ 이라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{4}{\sin 60^\circ} = 2R_1$$

$$R_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

따라서 세 점이  $A, B, D$  또는  $B, C, D$ 인 경우는 모두 원의 넓이가  $\frac{16}{3}\pi$ 이다.

(iii) 세 점이  $A, B, C$  또는  $A, C, D$ 인 경우

두 점  $B$ 와  $D$ 가  $y$ 축에 대하여 대칭이므로 이 2가지 경우의 원의 넓이는 같다. 즉, 택한 세 점이  $A, B, C$ 인 경우의 원의 넓이를 구하면 된다.

$$\overline{BC} = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4$$

(ii)에서 두 삼각형  $ABD$ ,  $BCD$ 가 모두 정삼각형이므로

$$\angle ABD = \angle CBD = 60^\circ$$

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 120^\circ$$

이때  $\overline{AC} = 4\sqrt{3}$ 이므로 삼각형  $ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를  $R_2$ 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = 2R_2$$

$$R_2 = 4$$



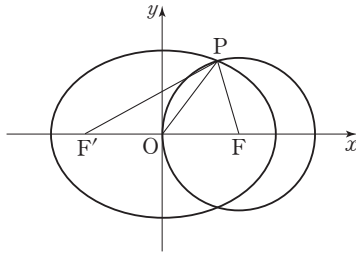
따라서 세 점 A, B, C 또는 A, C, D인 경우는 모두 원의 넓이가  $16\pi$ 이다.

(i), (ii), (iii)에서 원의 넓이의 최댓값  $M$ 은  $16\pi$ 이고, 최솟값  $m$ 은  $4\pi$ 이므로

$$M - m = 12\pi$$

답 ⑤

2



원의 반지름의 길이를  $r$ 라 하면

$$\overline{FO} = \overline{FP} = r$$

삼각형 POF에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{OP}^2 = \overline{FO}^2 + \overline{FP}^2 - 2 \times \overline{FO} \times \overline{FP} \times \cos(\angle OFP)$$

$$6 = r^2 + r^2 - 2 \times r \times r \times \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{2}r^2 = 6$$

$$r > 0 \text{ 이므로 } r = 2$$

$$\text{즉, } \overline{FO} = \overline{FP} = 2$$

타원의 초점 중  $x$ 좌표가 음수인 점을  $F'$ 이라 하면

$$\overline{F'O} = \overline{FO} = 2 \text{ 이므로}$$

$$\overline{F'F} = 4$$

삼각형 PF'F에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{PF'}^2 = \overline{F'F}^2 + \overline{FP}^2 - 2 \times \overline{F'F} \times \overline{FP} \times \cos(\angle OFP)$$

$$= 4^2 + 2^2 - 2 \times 4 \times 2 \times \frac{1}{4}$$

$$= 16$$

$$\overline{PF'} > 0 \text{ 이므로 } \overline{PF'} = 4$$

타원의 정의에 의하여

$$2a = \overline{PF'} + \overline{PF} = 4 + 2 = 6$$

$$a = 3$$

초점의 좌표가  $(2, 0)$ 이므로

$$a^2 - b^2 = 4$$

$$b^2 = 9 - 4 = 5$$

$$\text{따라서 } a^2 + b^2 = 9 + 5 = 14$$

답 ④

3 초점 중 한 점이 원점이고, 타원이 직선  $y=t$ 와 만나는 두 점 P, Q가 항상  $y$ 축에 대하여 대칭이므로 타원 C는  $y$ 축에 대하여 대칭이다.

즉, 타원 C의 원점이 아닌 초점도  $y$ 축 위에 있으므로 타원 C의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-c)^2}{b^2} = 1 \quad (b > a > 0, b^2 = a^2 + c^2)$$

이라 할 수 있다.

선분 PQ의 길이가  $t=4$ 에서 최댓값 6을 가지려면  $t=4$ 일 때의 선분 PQ가 타원 C의 단축이어야 하므로 타원 C의 중심의 좌표가  $(0, 4)$ 이고, 단축의 길이가 6이다.

즉,  $c=4$ ,  $2a=6$ 이므로

$$b^2 = a^2 + c^2 = 9 + 16 = 25$$

따라서 타원 C의 방정식은

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$$

$t=8$ 일 때, 타원 C가 직선  $y=8$ 과 만나는 두 점의 좌표는

$$\text{각각 } \left(\frac{9}{5}, 8\right), \left(-\frac{9}{5}, 8\right) \text{ 이고, 타원 C는 타원 } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

을  $y$ 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 타원 C 위의

점  $\left(\frac{9}{5}, 8\right)$ 에서의 접선은 타원  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$  위의 점

$\left(\frac{9}{5}, 4\right)$ 에서의 접선을  $y$ 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{즉, } \frac{\frac{9}{5}x}{9} + \frac{4y}{25} = 1 \text{ 을 } y \text{ 축의 방향으로 4만큼 평행이동한}$$

$$\frac{x}{5} + \frac{4(y-4)}{25} = 1 \text{ 이다.}$$

또 타원 C 위의 점  $\left(-\frac{9}{5}, 8\right)$ 에서의 접선은 타원

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 \text{ 위의 점 } \left(-\frac{9}{5}, 4\right) \text{에서의 접선을 } y \text{ 축의 방향}$$

으로 4만큼 평행이동한 것이므로  $-\frac{\frac{9}{5}x}{9} + \frac{4y}{25} = 1$ 을  $y$ 축

$$\text{의 방향으로 4만큼 평행이동한 } -\frac{x}{5} + \frac{4(y-4)}{25} = 1 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 두 직선 } \frac{x}{5} + \frac{4(y-4)}{25} = 1, -\frac{x}{5} + \frac{4(y-4)}{25} = 1$$

이 만나는 점의 좌표가  $\left(0, \frac{41}{4}\right)$ 이므로 구하는  $y$ 좌표는  $\frac{41}{4}$ 이다.

답 ①



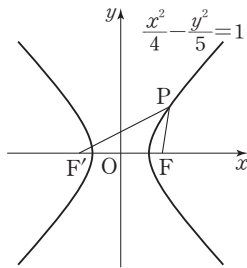
# 03 쌍곡선

유제

본문 29~33쪽

1 16      2 ⑤      3 ③      4 ②      5 ⑤  
6 4

1



$F(c, 0), F'(-c, 0) (c > 0)$ 이라 하면

$$c^2 = 4 + 5 = 9$$

이므로

$$F(3, 0), F'(-3, 0)$$

한편, 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 4 \text{ 이므로}$$

$$\overline{PF'} = 3 + 4 = 7$$

따라서  $\overline{PF} = 3, \overline{PF'} = 7, \overline{F'F} = 6$  이므로

삼각형  $PF'F$ 의 둘레의 길이는

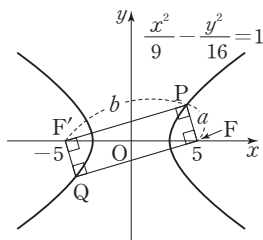
$$3 + 7 + 6 = 16$$

답 16

2 쌍곡선  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 초점은

$$F(\sqrt{9+16}, 0), F'(-\sqrt{9+16}, 0)$$

$$\text{즉, } F(5, 0), F'(-5, 0)$$



직사각형  $PF'QF$ 에서  $\overline{PF} = a, \overline{PF'} = b$ 로 놓으면 점 P가 제1사분면에 있으므로  $b > a$ 이고 쌍곡선의 정의에 의하여

$$b - a = 6, \text{ 즉 } b = a + 6 \text{ 이다.}$$

이때 삼각형  $PF'F$ 는  $\angle FPF' = 90^\circ$ 인 직각삼각형이고

$$\overline{FF'} = 10 \text{ 이므로}$$

$$a^2 + b^2 = a^2 + (a + 6)^2 = 10^2$$

$$a^2 + 6a - 32 = 0$$

$$\text{이때 } a > 0 \text{ 이므로 } a = -3 + \sqrt{41}, b = 3 + \sqrt{41}$$

따라서 직사각형  $PF'QF$ 의 둘레의 길이는

$$2(a + b) = 2 \times 2\sqrt{41}$$

$$= 4\sqrt{41}$$

답 ⑤

3  $x^2 - y^2 + 4y = 0$ 에서

$$x^2 - (y^2 - 4y + 4) = -4$$

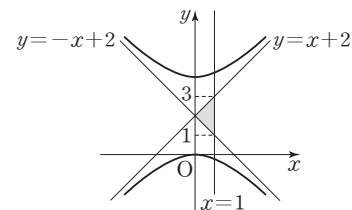
$$x^2 - (y - 2)^2 = -4$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{(y - 2)^2}{4} = -1$$

이때 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y - 2 = x \text{ 또는 } y - 2 = -x$$

$$\text{즉, } y = x + 2 \text{ 또는 } y = -x + 2$$

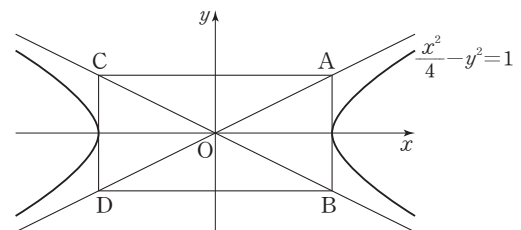


따라서 두 점근선의 교점이  $(0, 2)$ 이고, 두 점근선과 직선  $x = 1$ 의 교점이 각각  $(1, 3), (1, 1)$ 이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (3 - 1) \times 1 = 1$$

답 ③

4





두 점 A, B의  $x$ 좌표는 쌍곡선  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 의 꼭짓점의  $x$ 좌표 중 양수인 것과 같고, 두 점 C, D의  $x$ 좌표는 쌍곡선의 꼭짓점의  $x$ 좌표 중 음수인 것과 같다.

쌍곡선  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 에  $y=0$ 을 대입하면

$$\frac{x^2}{4} = 1 \text{에서}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2 \text{ 또는 } x = -2$$

즉, 두 점 A, B의  $x$ 좌표는 모두 2이고, 두 점 C, D의  $x$ 좌표는 모두 -2이므로

$$\overline{AC} = \overline{BD} = 4$$

쌍곡선의 점근선의 방정식은  $y = \frac{1}{2}x$  또는  $y = -\frac{1}{2}x$ 이므로

네 점 A, B, C, D의 좌표는 각각

$$(2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1)$$

$$\text{즉, } \overline{AB} = \overline{CD} = 2$$

따라서 사각형 ACDB의 둘레의 길이는

$$2 \times (4 + 2) = 12$$

답 ②

- 5 쌍곡선  $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ 에 접하고 기울기가 1인 접선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{12 \times 1 - 4} = x \pm 2\sqrt{2}$$

이때 두 직선  $y = x + 2\sqrt{2}$ 와  $y = x - 2\sqrt{2}$  사이의 거리는 점  $(0, 2\sqrt{2})$ 와 직선  $x - y - 2\sqrt{2} = 0$  사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는

$$\frac{|0 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4$$

답 ⑤

- 6 두 점 A, B를 각각 제1사분면, 제4사분면에 있는 점이라 하자.

쌍곡선  $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 의 점근선의 방정식은

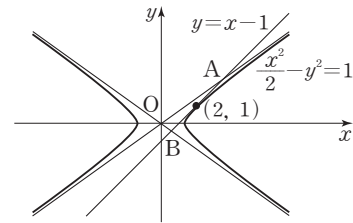
$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x \quad \dots\dots ㉠$$

$$\text{또는 } y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x \quad \dots\dots ㉡$$

쌍곡선 위의 점  $(2, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{2} - y = 1$$

$$\text{즉, } y = x - 1 \quad \dots\dots ㉢$$



㉠, ㉢에서

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x = x - 1$$

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{2}x = 1$$

$$x = \frac{2}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2(2 + \sqrt{2})}{4 - 2} = 2 + \sqrt{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} \times (2 + \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}$$

$$A(2 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$$

㉡, ㉢에서

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}x = x - 1$$

$$\frac{2 + \sqrt{2}}{2}x = 1$$

$$x = \frac{2}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2(2 - \sqrt{2})}{4 - 2} = 2 - \sqrt{2}$$

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times (2 - \sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2}$$

$$B(2 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$$

따라서 선분 AB의 길이는

$$\sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4$$

답 4

### Level 1 기초 연습

본문 34쪽

1 ③      2 ④      3 ⑤      4 ②

- 1 쌍곡선  $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = -1$ 의 두 초점의 좌표가  $(0, 4), (0, -4)$ 이므로 두 초점 사이의 거리  $p$ 는 8이다.

쌍곡선  $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = -1$ 의 주축의 길이  $q$ 는  $2 \times 3 = 6$ 이다.

따라서  $p+q=14$

답 ③

- 2 쌍곡선  $\frac{x^2}{23} - \frac{y^2}{11} = 1$ 에 접하는 기울기가 3인 직선의 방정식이

$$y = 3x \pm \sqrt{23 \times 9 - 11} = 3x \pm 14$$

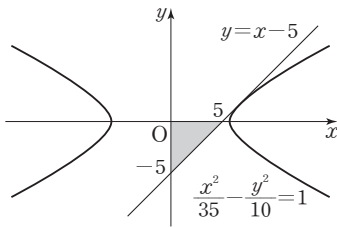
이므로 두 직선  $y = 3x + 14$ ,  $y = 3x - 14$ 가 모두 쌍곡선

$$\frac{x^2}{23} - \frac{y^2}{11} = 1$$
에 접한다.

따라서  $k=14$

답 ④

- 3 쌍곡선  $\frac{x^2}{35} - \frac{y^2}{10} = 1$  위의 점  $(7, 2)$ 에서의 접선의 방정식이  
이  $\frac{7x}{35} - \frac{2y}{10} = 1$ , 즉  $x - y = 5$ 이므로 이 접선이  $x$ 축과 만나는 점의 좌표는  $(5, 0)$ ,  $y$ 축과 만나는 점의 좌표는  $(0, -5)$ 이다.



따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 5 = \frac{25}{2}$$

답 ⑤

- 4 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{8} = 1$ 의 점근선의 방정식이

$$y = \frac{2\sqrt{2}}{a}x \text{ 또는 } y = -\frac{2\sqrt{2}}{a}x$$

이므로 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{8} = 1$ 을  $y$ 축의 방향으로  $m$ 만큼 평행

이동한 것의 점근선의 방정식은

$$y = \frac{2\sqrt{2}}{a}x + m \text{ 또는 } y = -\frac{2\sqrt{2}}{a}x + m$$

이 직선 중 하나가 직선  $y = 2x + 5$ 와 일치해야 한다.

$$a > 0 \text{ 이므로 } \frac{2\sqrt{2}}{a} = 2 \text{ 에서 } a = \sqrt{2} \text{ 이고, } m = 5$$

따라서  $a^2 = 2$ 이고,  $m = 5$ 이므로

$$a^2 + m = 7$$

답 ②

## Level 2 기본 연습

본문 35쪽

1 ①      2 4      3 ⑤      4 ④

- 1 쌍곡선  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = -1$ 의 점근선 중 기울기가 양수인 직선

의 방정식이  $y = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}x$ , 즉  $y = 2x$ 이므로 이 직선과 평행하

고 쌍곡선  $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{8} = 1$ 에 접하는 직선의 기울기가 2이다.

즉, 점선의 방정식은

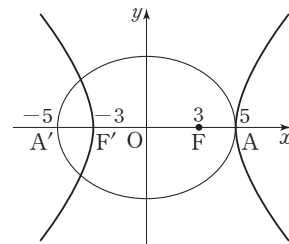
$$y = 2x \pm \sqrt{3 \times 4 - 8} = 2x \pm 2$$

따라서  $y$ 절편이 양수인 직선  $l$ 의 방정식은  $2x - y + 2 = 0$ 이므로 점  $(0, 1)$ 과 직선  $l$  사이의 거리는

$$\frac{|0 - 1 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

답 ①

- 2 타원  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 초점은  $F(3, 0)$ ,  $F'(-3, 0)$ 이고, 네 꼭짓점 중  $x$ 축 위의 두 점은  $A(5, 0)$ ,  $A'(-5, 0)$ 이다.



쌍곡선  $\frac{(x+k)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 꼭짓점이 두 점

$F'(-3, 0)$ ,  $A(5, 0)$ 이므로



$$2|a|=8 \text{에서 } |a|=4, a^2=16$$

또 쌍곡선  $\frac{(x+k)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 중심이  $(1, 0)$ 이고, 한 초점이 점  $A'(-5, 0)$ 이므로

$$k=-1, a^2+b^2=36$$

$$a^2=16 \text{이므로 } b^2=20$$

$$\text{따라서 } k \times (a^2 - b^2) = -1 \times (16 - 20) = 4$$

답 4

- 3 쌍곡선  $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$  위의 점  $P(2, k)$ 에서의 접선의 방정식은  $2x - \frac{ky}{b^2} = 1$ 이므로 이 직선이  $x$ 축과 만나는 점  $Q$ 의 좌표는  $(\frac{1}{2}, 0)$ 이다.

쌍곡선  $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 꼭짓점 중  $x$ 좌표가 음수인 점  $A$ 의 좌표는  $(-1, 0)$ 이다.

또  $c^2 = 1 + b^2 > 1$ 이고,  $c > 0$ 이므로  $c > 1$

$$\overline{F'A} = -1 - (-c) = c - 1$$

$$\overline{AQ} = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2}$$

$$\overline{QF} = c - \frac{1}{2}$$

세 수  $\overline{F'A}, \overline{AQ}, \overline{QF}$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

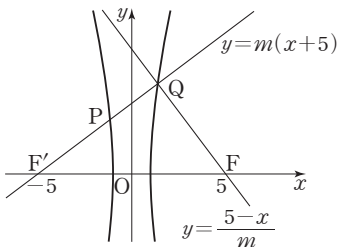
$$2\overline{AQ} = \overline{F'A} + \overline{QF}$$

$$2 \times \frac{3}{2} = (c-1) + (c - \frac{1}{2})$$

$$\text{따라서 } c = \frac{9}{4}$$

답 5

4



두 점  $F'(-5, 0), F(5, 0)$ 이 쌍곡선  $x^2 - \frac{y^2}{24} = 1$ 의 초점이다.

점  $Q$ 에서 만나는 두 직선  $y = m(x+5), y = \frac{5-x}{m}$ 가 각각 점  $F'(-5, 0), F(5, 0)$ 을 지나므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{QF'} - \overline{QF} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 두 직선  $y = m(x+5), y = \frac{5-x}{m}$ 가 서로 수직이므로

삼각형  $QF'F$ 에서

$$\overline{QF'}^2 + \overline{QF}^2 = \overline{F'F}^2$$

①을 대입하면

$$(\overline{QF} + 2)^2 + \overline{QF}^2 = 100$$

$$\overline{QF}^2 + 2\overline{QF} - 48 = 0$$

$$(\overline{QF} - 6)(\overline{QF} + 8) = 0$$

$$\overline{QF} > 0 \text{이므로 } \overline{QF} = 6$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \overline{QF'} = \overline{QF} + 2 = 8$$

쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} - \overline{PF'} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

삼각형  $QPF$ 에서

$$\overline{PQ}^2 + \overline{QF}^2 = \overline{PF}^2$$

$$(\overline{QF'} - \overline{PF'})^2 + \overline{QF}^2 = \overline{PF}^2$$

②을 대입하면

$$\{8 - (\overline{PF} - 2)\}^2 + 36 = \overline{PF}^2$$

$$100 - 20\overline{PF} + \overline{PF}^2 + 36 = \overline{PF}^2$$

$$\overline{PF} = \frac{34}{5}$$

따라서 점  $(5, 0)$ 과 점  $P$  사이의 거리는  $\frac{34}{5}$ 이다.

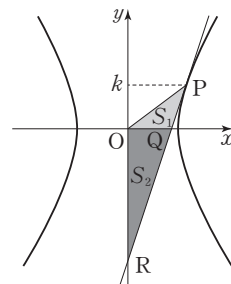
답 4

### Level 3 실력 완성

본문 36쪽

1 ④      2 ①      3 25

1



점 P의 y좌표를  $k$  ( $k > 0$ )이라 하자.

쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  위의 점 P(4,  $k$ )에서의 접선의 방정식은

$$\frac{4x}{a^2} - \frac{ky}{b^2} = 1$$

이므로  $x$ 축과 만나는 점 Q의 좌표는  $(\frac{a^2}{4}, 0)$ 이고,  $y$ 축과

만나는 점 R의 좌표는  $(0, -\frac{b^2}{k})$ 이다.

이때  $S_1 : S_2 = 1 : 3$ 이고 점 P의 y좌표가  $k$ 이므로 점 R의 y좌표는  $-3k$ 이다.

$$\text{즉, } -\frac{b^2}{k} = -3k$$

$$b^2 = 3k^2$$

이때 점 P(4,  $k$ )가 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  위의 점이므로

$$\frac{16}{a^2} - \frac{k^2}{3k^2} = 1$$

$$a^2 = 12$$

따라서 이 쌍곡선의 주축의 길이는

$$2|a| = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

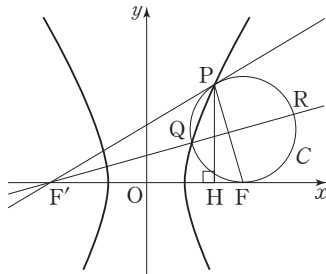
답 ④

2 직선  $F'F$ 가 원  $C$ 의 접선이므로  $\overline{F'F}^2 = \overline{F'Q} \times \overline{F'R}$ 이다.

즉,  $(2c)^2 = 64$ 이고,  $c > 0$ 이므로  $c = 4$

또 직선  $F'P$ 와  $x$ 축이 모두 원  $C$ 의 접선이므로

$$\overline{F'P} = \overline{F'F} = 8$$



점 P에서  $x$ 축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H의 좌표가 (3, 0)이므로

$$\overline{F'H} = 7, \overline{HF} = 1$$

직각삼각형  $PF'H$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{PH}^2 &= \overline{PF'}^2 - \overline{F'H}^2 \\ &= 64 - 49 = 15 \end{aligned}$$

직각삼각형  $PHF$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{PF}^2 &= \overline{PH}^2 + \overline{HF}^2 \\ &= 15 + 1 = 16 \end{aligned}$$

$$\overline{PF} = 4$$

쌍곡선의 정의에 의하여

$$2|a| = \overline{PF'} - \overline{PF} = 8 - 4 = 4$$

$$|a| = 2, a^2 = 4$$

$$\text{또 } b^2 = c^2 - a^2 = 4^2 - 4 = 12$$

$$\text{따라서 } a^2 - b^2 = 4 - 12 = -8$$

답 ①

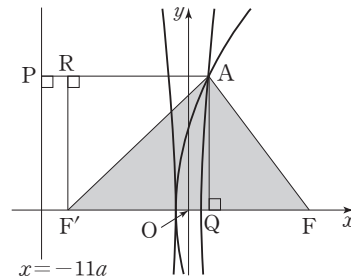
3 두 초점 F, F'이  $y$ 축에 대하여 대칭이고, 직선  $y = 4\sqrt{5}x$ 가 점근선인 쌍곡선 위의 점 A에 대하여  $\overline{AF'} - \overline{AF} = 2a$ 이므로 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{80a^2} = 1$$

이때  $\overline{AF'} - \overline{AF} = 2a > 0$ 에서 점 F의  $x$ 좌표가 양수이어야 하므로 쌍곡선의 두 초점은  $F(9a, 0)$ ,  $F'(-9a, 0)$ 이다.

포물선  $y^2 = 40a(x + a)$ 는 포물선  $y^2 = 40ax$ 를  $x$ 축의 방향으로  $-a$ 만큼 평행이동한 것이고, 포물선  $y^2 = 40ax$ 의 초점의 좌표가  $(10a, 0)$ , 준선의 방정식이  $x = -10a$ 이므로 포물선  $y^2 = 40a(x + a)$ 의 초점의 좌표는  $(9a, 0)$ , 준선의 방정식은  $x = -11a$ 이다.

그림과 같이 점 A에서 직선  $x = -11a$ 와  $x$ 축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고, 점 F'에서 직선 PA에 내린 수선의 발을 R라 하자.



삼각형  $AF'F$ 의 넓이가 360이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{F'F} \times \overline{AQ} = 360$$

$$\frac{1}{2} \times 18a \times \overline{AQ} = 360$$

$$\overline{AQ} = \frac{40}{a}$$



$\overline{AF} = p$ 라 하자.

포물선의 정의에 의하여  $\overline{PA} = \overline{AF} = p$ 이고,

$\overline{PR} = 2a$ 이므로

$$\overline{RA} = \overline{PA} - \overline{PR} = p - 2a$$

$$\text{즉, } \overline{F'Q} = \overline{RA} = p - 2a$$

쌍곡선의 정의에 의하여  $\overline{AF'} - \overline{AF} = 2a$ 이므로

$$\overline{AF'} = p + 2a$$

직각삼각형  $AF'Q$ 에서

$$\overline{AQ}^2 = \overline{AF'}^2 - \overline{F'Q}^2$$

$$\left(\frac{40}{a}\right)^2 = (p + 2a)^2 - (p - 2a)^2$$

$$p = \frac{200}{a^3} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

직각삼각형  $AQF$ 에서

$$\overline{AQ}^2 = \overline{AF}^2 - \overline{QF}^2$$

$$\left(\frac{40}{a}\right)^2 = p^2 - \{18a - (p - 2a)\}^2$$

$$p - 10a = \frac{40}{a^3} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{200}{a^3} - 10a = \frac{40}{a^3}$$

$$a^4 = 16$$

$$(a + 2)(a - 2)(a^2 + 4) = 0$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = 2$$

$$\textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } p = \frac{200}{8} = 25$$

따라서 선분  $AF$ 의 길이는 25이다.

답 25

QR코드 앱을 사용해 추가 정보를 확인하세요.



## 수능 기출의 미래

두꺼운 분량, 답답한 해설에서 벗어나  
학습 효율을 극대화한 기출문제집

## 04 벡터의 연산

유제

본문 41~45쪽

- 1 36      2 ③      3 ⑤      4 ③      5 ②  
6 ③

- 1 두 벡터  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AP}$ 의 크기가 서로 같으므로

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} = 3$$

이때 직각삼각형 ABC에서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} &= \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= 5\end{aligned}$$

이므로  $\angle CAB = \theta$ 라 하면

$$\sin \theta = \frac{4}{5}$$

따라서 삼각형 ABP의 넓이 S는

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB} \times \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{4}{5} \\ &= \frac{18}{5}\end{aligned}$$

이므로

$$10S = 36$$

답 36

- 2  $\angle BMA = 90^\circ$ ,  $\angle MAB = 30^\circ$ 이므로

$$\overrightarrow{AM} = 2 \cos 30^\circ = \sqrt{3}$$

그러므로

$$|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{AM}| = \overrightarrow{AM} = \sqrt{3}$$

또  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CD}$ 이고

$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BC}$ 이므로

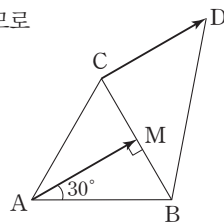
$\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{BC}$ 이다.

그러므로  $\angle DCB = 90^\circ$ 이다.

따라서 삼각형 DCB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 2 = \sqrt{3}$$

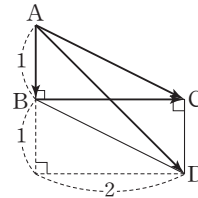
답 ③



$$\begin{aligned}3 \quad \vec{b} &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \\ &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= \vec{a} + \vec{0} \\ &= \vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$



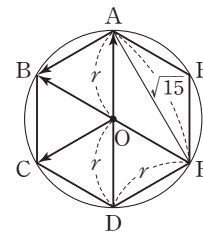
그림과 같이 사각형 ABDC가 평행사변형이 되도록 점 D를 잡으면  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ 이므로

$$\begin{aligned}|\vec{a} + \vec{b}| &= |\vec{a}| = |\overrightarrow{AD}| \\ &= \sqrt{2^2 + 2^2} \\ &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}4 \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB} &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}) \\ &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \\ &= \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OA} \\ &= \overrightarrow{EA}\end{aligned}$$

따라서  $|\overrightarrow{EA}| = \sqrt{15}$



중심이 O인 원의 반지름의 길이를 r라 하면

직각삼각형 ADE에서

$$\overrightarrow{AD} = 2r, \overrightarrow{DE} = r, \overrightarrow{EA} = \sqrt{15} \text{이므로}$$

$$(2r)^2 = r^2 + (\sqrt{15})^2$$

$$3r^2 = 15, r^2 = 5$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \times r^2 = 5\pi$$

답 ③



5  $3(\vec{x} + \vec{a} - 2\vec{b}) = 4(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) - \vec{x}$ 에서

$$3\vec{x} + 3\vec{a} - 6\vec{b} = 4\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{x}$$

$$4\vec{x} = 4\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{a} + 6\vec{b}$$

$$= \vec{a} + 8\vec{b}$$

$$\vec{x} = \frac{1}{4}\vec{a} + 2\vec{b}$$

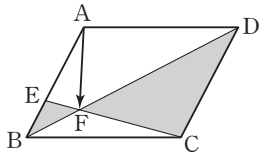
따라서  $m = \frac{1}{4}$ ,  $n = 2$ 이므로

$$mn = \frac{1}{2}$$

답 ②

6 두 삼각형 FEB와 FCD가 서로 닮은 삼각형이고 변 AB를 2 : 1로 내분하는 점이 E이므로

$\overline{EB} : \overline{CD} = 1 : 3$ , 즉  $\overline{EF} : \overline{FC} = 1 : 3$ 이다.



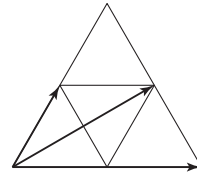
$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{EC}$$

따라서  $m = \frac{2}{3}$ ,  $n = \frac{1}{4}$ 이므로

$$mn = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

답 ③



따라서  $k=1$  또는  $k=2$  또는  $k=2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ 이므로 서로

다른 모든  $k$ 의 값의 곱은

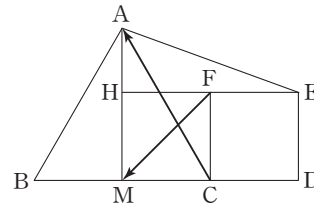
$$1 \times 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

답 ②

2  $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{EC}$ 이므로

$$\overrightarrow{FM} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{EA}$$

따라서 두 직선 AM, EF의 교점을 H라 하면



$$\overline{EH} = 2, \overline{AH} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1$$

이므로

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{FM} + \overrightarrow{CA}|^2 &= |\overrightarrow{EA}|^2 \\ &= 2^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 \\ &= 8 - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

답 ③

### Level 1 기초 연습

본문 46~47쪽

- 1 ②    2 ③    3 ①    4 ③    5 ⑤  
6 ③    7 ④    8 ②

1 그림과 같이 정삼각형들의 꼭짓점 6개 중 한 점을 시점으로 하고 다른 한 점을 종점으로 하는 벡터 중 크기가 서로 다른 벡터는 다음과 같이 3가지이다.

3  $\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{QP}$ 이므로 벡터  $\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ}$ 의 크기의 최댓값은 벡터  $\overrightarrow{QP}$ 의 크기의 최댓값과 같다.

그런데 두 점 P, Q는 원 C 위의 점이므로 선분 PQ가 원 C의 지름이 될 때  $\overrightarrow{QP}$ 의 크기가 최대가 된다.

즉,  $|\overrightarrow{QP}| \leq 2 \times 3 = 6$ 이므로  $\overrightarrow{QP}$ 의 크기의 최댓값은 6이다.

답 ①



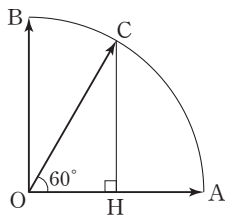
$$\begin{aligned}
 4 \quad & \overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_4O_2} - \overrightarrow{O_3B} - \overrightarrow{O_3A} \\
 &= (\overrightarrow{O_4O_2} + \overrightarrow{O_2O_1}) - (\overrightarrow{O_1B} - \overrightarrow{O_1O_3}) - (\overrightarrow{O_1A} - \overrightarrow{O_1O_3}) \\
 &= \overrightarrow{O_4O_1} - \overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{O_1O_3} - \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{O_1O_3} \\
 &= -\overrightarrow{O_1O_4} - \overrightarrow{O_1B} - \overrightarrow{O_1A} + 2\overrightarrow{O_1O_3} \\
 &= -2\overrightarrow{O_1B} - \overrightarrow{O_1B} - \overrightarrow{O_1A} + 4\overrightarrow{O_1A} \\
 &= 3\overrightarrow{O_1A} - 3\overrightarrow{O_1B} \\
 &= 3\vec{a} - 3\vec{b} \\
 &\text{따라서 } m=3, n=-3 \text{ 이므로} \\
 &m+n=0
 \end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned}
 5 \quad & \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - \vec{d} \\
 &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DB} \\
 &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} \\
 &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} \\
 &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} \\
 &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \\
 &= \overrightarrow{BD} \\
 &\text{따라서 } |\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - \vec{d}| = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}
 \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}
 6 \quad & \text{그림과 같이 점 C에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면 } \angle COA = 60^\circ \text{ 이므로 } \overline{OC} = 1 \text{ 에서} \\
 & \overline{OH} = \frac{1}{2}, \overline{CH} = \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &\text{따라서 } \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OB} \text{ 이므로} \\
 &m = \frac{1}{2}, n = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &\text{즉, } mn = \frac{\sqrt{3}}{4}
 \end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned}
 7 \quad & \vec{x} + \vec{y} = (\vec{a} + 2\vec{b}) + (2\vec{a} + m\vec{b}) \\
 &= 3\vec{a} + (m+2)\vec{b} \\
 &\vec{x} - 2\vec{y} = (\vec{a} + 2\vec{b}) - 2(2\vec{a} + m\vec{b}) \\
 &= -3\vec{a} + (2-2m)\vec{b}
 \end{aligned}$$

이때 두 벡터  $\vec{x} + \vec{y}$ ,  $\vec{x} - 2\vec{y}$ 가 서로 평행하므로 0이 아닌 실수  $t$ 에 대하여

$$\vec{x} + \vec{y} = t(\vec{x} - 2\vec{y})$$

가 성립한다.

$$\text{즉, } 3\vec{a} + (m+2)\vec{b} = -3t\vec{a} + t(2-2m)\vec{b} \text{ 에서}$$

$$3 = -3t, m+2 = t(2-2m) \text{ 이므로}$$

$$t = -1, m = 4$$

답 ④

$$\begin{aligned}
 8 \quad & \text{세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로} \\
 & \overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC} \quad (t \neq 0 \text{인 실수}) \text{가 성립한다.}
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} = t(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA})$$

$$(-\vec{a} - 5\vec{b}) - (2\vec{a} + \vec{b}) = t\{(m\vec{a} - 2\vec{b}) - (2\vec{a} + \vec{b})\}$$

$$\text{에서 } -3\vec{a} - 6\vec{b} = t(m-2)\vec{a} - 3t\vec{b}$$

$$-3 = t(m-2), -6 = -3t \text{ 이므로}$$

$$t = 2, m = \frac{1}{2}$$

답 ②

## Level 2 기본 연습

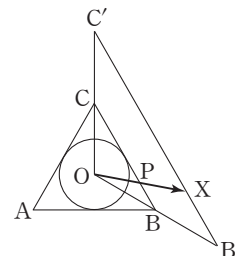
본문 48~49쪽

1 ③	2 ④	3 24	4 ⑤	5 ⑤
6 ③	7 4	8 ②		

$$1 \quad \overrightarrow{OX} = 2\overrightarrow{OP} \text{ 에서 } |\overrightarrow{OX}| = 2|\overrightarrow{OP}| \text{ 이므로 벡터 } \overrightarrow{OX} \text{의 종점 X가 나타내는 도형의 길이는}$$

$$\overrightarrow{OB'} = 2\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC'} = 2\overrightarrow{OC}$$

를 만족시키는 두 점 B', C'을 잇는 선분의 길이와 같다.



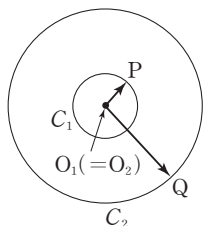


이때 삼각형 OBC와 OB'C'은 닮음비가 1 : 2인 닮은 삼각형이므로

$$\overline{B'C'} = 2\overline{BC} = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

답 ③

- 2 두 원  $C_1, C_2$ 의 중심  $O_1, O_2$ 가 일치하도록 두 원  $C_1, C_2$ 를 그리면 그림과 같다.



따라서  $|\overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_2Q}| = |\overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_1Q}|$ 이고 최댓값은 두 벡터  $\overrightarrow{O_1P}, \overrightarrow{O_1Q}$ 가 같은 방향일 때이고, 최솟값은 두 벡터  $\overrightarrow{O_1P}, \overrightarrow{O_1Q}$ 가 서로 반대 방향일 때이다. 즉,

$$|\overrightarrow{O_1Q}| - |\overrightarrow{O_1P}| \leq |\overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_1Q}| \leq |\overrightarrow{O_1P}| + |\overrightarrow{O_1Q}|$$

$$3 - 1 \leq |\overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_1Q}| \leq 1 + 3$$

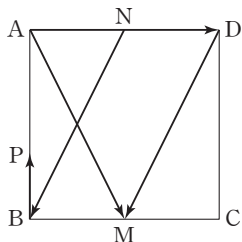
$$2 \leq |\overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_1Q}| \leq 4$$

따라서  $|\overrightarrow{O_1P} + \overrightarrow{O_2Q}| = k$ 를 만족시키는 서로 다른 정수  $k$ 는 2, 3, 4이므로 그 합은

$$2 + 3 + 4 = 9$$

답 ④

- 3  $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DM}$ 이고 변 AD의 중점을 N이라 하면  $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{NB}$



즉,

$$|\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{DM}| = |\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{NB}| = |\overrightarrow{NP}|$$

따라서 점 P가 점 B에 있을 때  $|\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}|$ 는 최대이고, 점 P가 점 A에 있을 때  $|\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}|$ 는 최소이므로

$$M = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}, m = 2$$

$$\text{즉, } M^2 + m^2 = 20 + 4 = 24$$

답 24

- 4 조건 (가)에서  $\vec{a} = \frac{1}{4}\vec{b}$ 이므로  $\vec{b} = 4\vec{a}$ 이다.

이것을 조건 (나)의 등식

$$4(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{c} - 3\vec{b} = 2(\vec{c} + 3\vec{a}) \text{에 대입하면}$$

$$4(\vec{a} - 4\vec{a}) + \vec{c} - 3(4\vec{a}) = 2(\vec{c} + 3\vec{a})$$

$$-12\vec{a} + \vec{c} - 12\vec{a} = 2\vec{c} + 6\vec{a}$$

$$\vec{c} = -30\vec{a}$$

$$|\vec{a}| = 3 \text{이므로}$$

$$|\vec{c}| = |-30\vec{a}| = 30|\vec{a}| = 30 \times 3 = 90$$

답 ⑤

- 5  $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CB}$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF}$$

$$= \overrightarrow{CD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$$

$$= \overrightarrow{CD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{BE} + m\overrightarrow{CF} = n\overrightarrow{CA} \text{에서}$$

$$\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}\right) + m\left(\overrightarrow{CD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}\right) = n(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB})$$

$$\left(\frac{2}{3} + m\right)\overrightarrow{CD} + \left(-1 + \frac{2}{3}m\right)\overrightarrow{CB} = n\overrightarrow{CD} + n\overrightarrow{CB}$$

$$\text{이때 } \frac{2}{3} + m = n, -1 + \frac{2}{3}m = n \text{이므로}$$

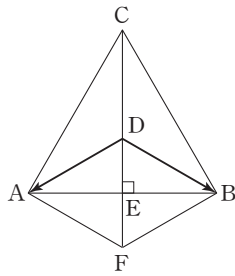
$$\frac{2}{3} + m = -1 + \frac{2}{3}m, 2 + 3m = -3 + 2m$$

$$\text{따라서 } m = -5, n = -\frac{13}{3} \text{이므로}$$

$$mn = \frac{65}{3}$$

답 ⑤

6



변 AB의 중점을 E라 하고 그림과 같이 사각형 AFBD가 평행사변형이 되도록 점 F를 잡으면 점 D가 정삼각형 ABC의 무게중심이므로

$$|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{DF}| = |2\overrightarrow{DE}| = 2|\overrightarrow{DE}| = 2$$

즉,  $|\overrightarrow{DE}| = 1$ 이므로 삼각형 DAE에서

$$|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{3}$$

따라서 정삼각형 ABC의 한 변의 길이는  $2\sqrt{3}$ 이므로 정삼각형 ABC의 넓이는

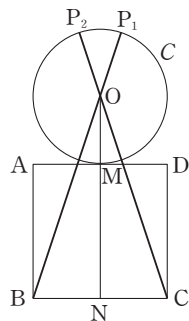
$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3}$$

답 ③

7 두 벡터  $\overrightarrow{OP}$ ,  $\overrightarrow{OQ}$ 가 서로 평행하므로 0이 아닌 실수  $t$ 에 대하여

$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OQ}$$

즉, 세 점 O, P, Q는 한 직선 위의 점이고, 변 BC의 중점을 N이라 하면  $|\overrightarrow{PQ}|$ 는 선분 PQ의 길이와 같으므로 선분 PQ의 길이가 최대일 때는 그림과 같이 점 P가 점  $P_1$ , 점 Q가 점 B 또는 점 P가 점  $P_2$ , 점 Q가 점 C에 있을 때이고 최소일 때는 그림과 같이 점 P가 점 M, 점 Q가 점 N에 있을 때이다.



이때  $\overline{BN} = 1$ ,  $\overline{ON} = 3$ 이므로

$$\overline{OB} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

따라서  $M = \sqrt{10} + 1$ ,  $m = 2$ 이므로

$$M + m = (\sqrt{10} + 1) + 2 = 3 + \sqrt{10}$$

즉,  $p = 3$ ,  $q = 1$ 이므로

$$p + q = 4$$

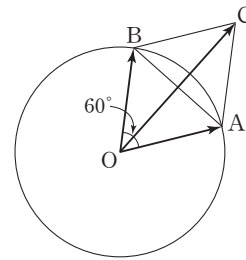
답 4

8  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ 에서

$$\overrightarrow{OA} - (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$$

$$2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$



따라서 점 C가 나타내는 도형은 중심이 O이고 반지름의 길이가  $|\overrightarrow{OC}|$ 인 원이다.

이때 삼각형 OAB는 정삼각형이므로

$$|\overrightarrow{OC}| = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 \times 2 = 2\sqrt{3}$$

따라서 점 C가 나타내는 도형의 넓이는

$$\pi \times (2\sqrt{3})^2 = 12\pi$$

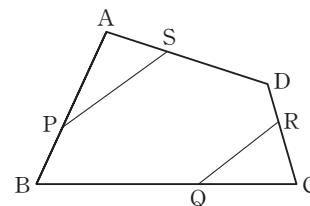
답 ②

Level 3 실력 완성

본문 50쪽

1 ③ 2 ③ 3 ⑤

1 조건 (가)에 의하여 네 점 P, Q, R, S는 그림과 같다.





이때

$$\begin{aligned}\triangle APS &= \frac{1}{2} \times \overline{AP} \times \overline{AS} \times \sin(\angle BAD) \\ &= \frac{1}{2} k(1-k) \times \overline{AB} \times \overline{AD} \times \sin(\angle BAD) \\ &= k(1-k) \times \triangle ABD\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}\triangle CRQ &= \frac{1}{2} \times \overline{CR} \times \overline{CQ} \times \sin(\angle BCD) \\ &= \frac{1}{2} k(1-k) \times \overline{CD} \times \overline{CB} \times \sin(\angle BCD) \\ &= k(1-k) \times \triangle CDB\end{aligned}$$

따라서 육각형 PBQRDS의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}S &= \square ABCD - \triangle APS - \triangle CRQ \\ &= \square ABCD - k(1-k)(\triangle ABD + \triangle CDB) \\ &= \square ABCD - k(1-k) \times \square ABCD \\ &= (k^2 - k + 1) \times \square ABCD\end{aligned}$$

조건 (나)에 의하여  $\square ABCD = \frac{5}{4}S$ 이므로

$$S = (k^2 - k + 1) \times \frac{5}{4}S$$

$$4S = 5(k^2 - k + 1)S, (5k^2 - 5k + 1)S = 0$$

$$S > 0 \text{이므로 } 5k^2 - 5k + 1 = 0$$

$$0 < k < 1 \text{이므로 } k = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}$$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$$\frac{5 - \sqrt{5}}{10} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{10} = \frac{1}{5}$$

답 ③

2  $4\overline{AP} = \overline{PB} + 3\overline{CP}$ 에서

$$4\overline{AP} = \overline{AB} - \overline{AP} + 3\overline{AP} - 3\overline{AC}$$

$$2\overline{AP} = \overline{AB} - 3\overline{AC}$$

$$\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{3}{2}\overline{AC}$$

또한 점 D는 직선 BP 위의 점이므로 0이 아닌 실수 m에 대하여  $\overline{BD} = m\overline{BP}$ 라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AD} &= \overline{AB} + \overline{BD} \\ &= \overline{AB} + m\overline{BP} \\ &= \overline{AB} + m(\overline{AP} - \overline{AB}) \\ &= (1-m)\overline{AB} + m\overline{AP} \\ &= (1-m)\overline{AB} + m\left(\frac{1}{2}\overline{AB} - \frac{3}{2}\overline{AC}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}m\right)\overline{AB} - \frac{3m}{2}\overline{AC}\end{aligned}$$

또한 점 D는 직선 AC 위의 점이므로 0이 아닌 실수 n에 대하여  $\overline{AD} = n\overline{AC}$ 라 하면

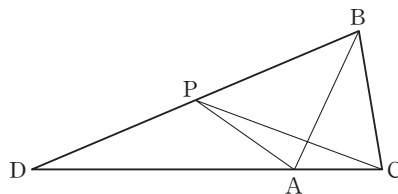
$$n\overline{AC} = \left(1 - \frac{1}{2}m\right)\overline{AB} - \frac{3m}{2}\overline{AC}$$

따라서  $n = -\frac{3m}{2}$ ,  $1 - \frac{1}{2}m = 0$ 이므로

$$m = 2, n = -3$$

$$\text{즉, } \overline{BD} = 2\overline{BP}, \overline{AD} = -3\overline{AC}$$

따라서 삼각형 ABC와 두 점 P, D의 위치 관계는 그림과 같다.



$$\text{즉, } \overline{CD} = 4\overline{CA}, \overline{BD} = 2\overline{BP} \text{이므로}$$

$$S = \frac{3}{4} \triangle PDC$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \triangle BDC$$

$$= \frac{3}{8} \triangle BDC$$

$$T = \frac{1}{2} \triangle BDC$$

$$\text{따라서 } \frac{S}{T} = \frac{\frac{3}{8} \triangle BDC}{\frac{1}{2} \triangle BDC} = \frac{3}{4}$$

답 ③

#### 다른 풀이

$$4\overline{AP} = \overline{PB} + 3\overline{CP} \text{에서}$$

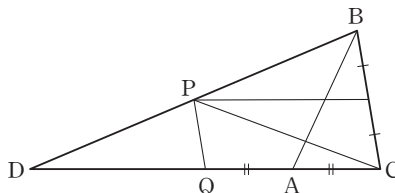
$$4(\overline{CP} - \overline{CA}) = (\overline{CB} - \overline{CP}) + 3\overline{CP}$$

$$2\overline{CP} = 4\overline{CA} + \overline{CB}$$

$$\overline{CP} = 2\overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{CB}$$

이므로 점 P는  $\overline{BD}$ 의 중점이다.

또한 점 Q도  $\overline{CD}$ 의 중점이다.



$$\begin{aligned}
 S &= \frac{3}{4} \triangle PDC \\
 &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \triangle BDC \\
 &= \frac{3}{8} \triangle BDC
 \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2} \triangle BDC$$

$$\text{따라서 } \frac{S}{T} = \frac{\frac{3}{8} \triangle BDC}{\frac{1}{2} \triangle BDC} = \frac{3}{4}$$

- 3**  $\angle APB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ 이므로  
 $\angle PAB = 180^\circ - \angle APB - \angle ABP$   
 $= 60^\circ - \angle ABP$   
 $= \angle ABC - \angle ABP$   
 $= \angle PBC$

또한  $\angle BPC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ 이므로 두 삼각형 PAB, PBC는 닮은 삼각형이고 닮음비는  $\overline{AB} : \overline{BC} = 2 : 3$ 이다.

따라서  $\overline{PA} = 4a$ 라 하면  $\overline{PB} = 6a$ ,  $\overline{PC} = 9a$ 이고

$\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$ 이므로 세 삼각형 PAB, PBC, PCA의 넓이를 각각  $S_1, S_2, S_3$ 이라 하면  
 $S_1 : S_2 : S_3 = \overline{PA} \times \overline{PB} : \overline{PB} \times \overline{PC} : \overline{PC} \times \overline{PA}$

$$\begin{aligned}
 &= 4a \times 6a : 6a \times 9a : 9a \times 4a \\
 &= 4 : 9 : 6
 \end{aligned}$$

이때 직선 AP와 변 BC의 교점을 D라 하면

$$\overline{BD} : \overline{CD} = S_1 : S_3 = 4 : 6 = 2 : 3$$

$$\begin{aligned}
 \overline{AP} : \overline{AD} &= (S_1 + S_3) : (S_1 + S_2 + S_3) \\
 &= 10 : 19
 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 \overline{AP} &= \frac{10}{19} \overline{AD} \\
 &= \frac{10}{19} \left( \overline{AB} + \frac{2}{5} \overline{BC} \right) \\
 &= \frac{10}{19} \overline{AB} + \frac{4}{19} \overline{BC}
 \end{aligned}$$

따라서  $m = \frac{10}{19}$ ,  $n = \frac{4}{19}$ 이므로

$$m + n = \frac{14}{19}$$

답 ⑤

QR코드 앱을 사용해 추가 정보를 확인하세요.



## 수능연계교재의 VOCA 1800 / 국어 어휘

연계교재의 어휘 학습을 각 한 권으로!  
수능특강, 수능완성의 중요 · 핵심 어휘 수록



## 05 평면벡터의 성분과 내적

유제

본문 55~63쪽

1 ③	2 ②	3 10	4 ②	5 ①
6 ①	7 ⑤	8 ④	9 ①	10 ②

1 점 P는 선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \frac{2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}}{2+1} \\ &= \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}\end{aligned}$$

점 Q는 선분 BC를 2 : 1로 외분하는 점이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= \frac{2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}}{2-1} \\ &= 2\vec{b} - \vec{a}\end{aligned}$$

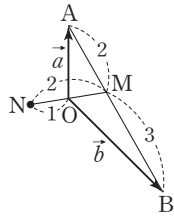
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} &= \left(\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}\right) + (2\vec{b} - \vec{a}) \\ &= -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{8}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

따라서  $m = -\frac{2}{3}$ ,  $n = \frac{8}{3}$  이므로

$$m - n = -\frac{10}{3}$$

답 ③

2



$$\overrightarrow{OM} = \frac{2\vec{b} + 3\vec{a}}{2+3}$$

$$= \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON} &= -\overrightarrow{OM} \\ &= -\frac{3}{5}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OA} \\ &= \left(-\frac{3}{5}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b}\right) - \vec{a}\end{aligned}$$

$$= -\frac{8}{5}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b}$$

따라서  $k = -\frac{8}{5}$ ,  $l = -\frac{2}{5}$  이므로

$$k - l = -\frac{8}{5} - \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{6}{5}$$

답 ②

다른 풀이

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a} \text{ 이므로}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1 \times \overrightarrow{AM} - 2 \times \overrightarrow{AO}}{1-2}$$

$$= 2\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AM}$$

$$= 2(-\vec{a}) - \frac{2}{5}(\vec{b} - \vec{a})$$

$$= -\frac{8}{5}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b}$$

따라서  $k = -\frac{8}{5}$ ,  $l = -\frac{2}{5}$  이므로

$$k - l = -\frac{8}{5} - \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{6}{5}$$

3  $1-p=q-3$ ,  $q+3=4p+2$  이므로

$$p+q=4, 4p-q=1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$p=1, q=3$$

$$\text{따라서 } p^2 + q^2 = 1^2 + 3^2 = 10$$

답 10

4  $\vec{a} + \vec{b} = 2(\vec{a} - \vec{b})$  에서

$$\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\vec{a} = 3\vec{b}$$

이때  $\vec{a} = (x+y, 3)$ ,  $\vec{b} = (1, x-y)$  이므로

$$(x+y, 3) = (3, 3(x-y))$$

$$x+y=3, x-y=1$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=2, y=1$$

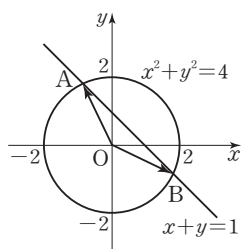
$$\text{따라서 } xy=2$$

답 ②

- 5  $\vec{a}=(x-1, x), \vec{b}=(2x, -x+1)$ 에서  
 $\vec{a} \cdot \vec{b}=(x-1, x) \cdot (2x, -x+1)$   
 $=2x(x-1)+x(-x+1)$   
 $=x^2-x$   
 $=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$   
 따라서  $x=\frac{1}{2}$ 일 때,  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 의 최솟값은  $-\frac{1}{4}$ 이다.

답 ①

6



$x+y=1$ 에서  $y=1-x$ 이므로  
 $A(a, 1-a), B(b, 1-b)$ 라 하면  
 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}=(a, 1-a) \cdot (b, 1-b)$   
 $=ab+(1-a)(1-b)$   
 $=2ab-(a+b)+1 \quad \dots\dots ㉠$

$x^2+(1-x)^2=4$ 에서  
 $2x^2-2x-3=0$   
 이때 이차방정식  $2x^2-2x-3=0$ 의 두 실근이  $a, b$ 이고 이  
 차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+b=1, ab=-\frac{3}{2}$$

이므로 이 식을 ㉠에 대입하면

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}=2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)-1+1$$

$$=-3$$

답 ①

- 7  $|\vec{a}+2\vec{b}|^2=(\vec{a}+2\vec{b}) \cdot (\vec{a}+2\vec{b})$ 이므로  
 $|\vec{a}|^2+4\vec{a} \cdot \vec{b}+4|\vec{b}|^2=4^2=16$   
 $2^2+4\vec{a} \cdot \vec{b}+4 \times 3^2=16$   
 따라서  $\vec{a} \cdot \vec{b}=-6$

답 ⑤

- 8  $\vec{a}+\vec{b}=(1, 2)+(2k, -k)$   
 $=(1+2k, 2-k)$   
 $\vec{a}-\vec{b}=(1, 2)-(2k, -k)$   
 $=(1-2k, 2+k)$   
 이므로  
 $(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b})=(1+2k)(1-2k)+(2-k)(2+k)$   
 $=5-5k^2 \quad \dots\dots ㉠$

또

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(1+2k)^2+(2-k)^2}$$

$$=\sqrt{5+5k^2}$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(1-2k)^2+(2+k)^2}$$

$$=\sqrt{5+5k^2}$$

이므로

$$(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}+\vec{b}| |\vec{a}-\vec{b}| \cos 120^\circ$$

$$=\frac{-5-5k^2}{2} \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠, ㉡ \text{에서 } 10-10k^2=-5-5k^2$$

따라서  $k=\pm\sqrt{3}$ 에서  $k$ 가 양의 실수이므로  
 $k=\sqrt{3}$

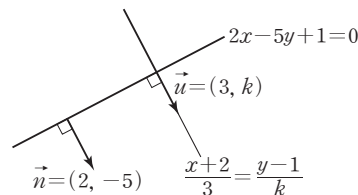
답 ④

- 9 직선  $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{k}$ 의 방향벡터를  $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u}=(3, k)$$

직선  $2x-5y+1=0$ 의 법선벡터를  $\vec{n}$ 이라 하면

$$\vec{n}=(2, -5)$$



두 직선이 서로 수직이므로 두 벡터  $\vec{u}, \vec{n}$ 은 서로 평행하다.

따라서  $\vec{u}=t\vec{n}$  ( $t$ 는 0이 아닌 실수)로 놓으면

$$(3, k)=t(2, -5)$$

$$3=2t, k=-5t$$

따라서  $t=\frac{3}{2}$ 이므로

$$k=-5 \times \frac{3}{2}=-\frac{15}{2}$$

답 ①



$$10 \quad \vec{p} \cdot \vec{p} - 2\vec{b} \cdot \vec{p} + (\vec{b} + \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

$$\vec{p} \cdot \vec{p} - 2\vec{b} \cdot \vec{p} + \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\vec{p} \cdot \vec{p} - 2\vec{b} \cdot \vec{p} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a}$$

$$(\vec{p} - \vec{b}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a}$$

$$|\vec{p} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2$$

$$|\vec{p} - \vec{b}| = |\vec{a}|$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가  $|\vec{a}|$ 인 원이다.

이때  $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ 이므로 점 P가 나타내는 도형의 길이는

$$2\pi \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}\pi$$

답 ②

### 다른 풀이

$\vec{p} = (x, y)$ 라 하면

$$\vec{p} \cdot \vec{p} = |\vec{p}|^2 = x^2 + y^2$$

$$2\vec{b} \cdot \vec{p} = 2(3, 0) \cdot (x, y) = 6x$$

$$(\vec{b} + \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = (2, 2) \cdot (4, -2) = 4$$

이므로

$$x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0$$

$$\text{즉, } (x-3)^2 + y^2 = 5$$

이므로 점 P가 나타내는 도형은 중심이 (3, 0)이고 반지름의 길이가  $\sqrt{5}$ 인 원이다.

따라서 점 P가 나타내는 도형의 길이는

$$2\pi \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}\pi$$

### Level 1 기초 연습

본문 64~66쪽

1 ④

2 ③

3 ②

4 ④

5 ⑤

6 ④

7 ⑤

8 ①

$$1 \quad \vec{AE} = \frac{2}{5}\vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{AD} = \frac{2\vec{AB} + 3\vec{AD}}{2+3}$$

이므로 점 E는 선분 BD를 3 : 2로 내분하는 점이다.

$$\text{이때 } |\vec{BD}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{이므로}$$

$$|\vec{BE}| = 5 \times \frac{3}{5} = 3$$

답 ④

2  $\vec{AB} = 4\vec{AC}$ 이므로 점 C는 선분 AB를 1 : 3으로 내분하는 점이다.

$$\text{즉, } \vec{PC} = \frac{\vec{PB} + 3\vec{PA}}{1+3} = \frac{3}{4}\vec{PA} + \frac{1}{4}\vec{PB}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$ab = \frac{3}{16}$$

답 ③

$$\begin{aligned} 3 \quad \vec{a} - 2\vec{b} &= (2, 1) - 2(-1, 3) \\ &= (2, 1) - (-2, 6) \\ &= (2+2, 1-6) \\ &= (4, -5) \end{aligned}$$

따라서 벡터  $\vec{a} - 2\vec{b}$ 의 모든 성분의 합은

$$4 + (-5) = -1$$

답 ②

4  $\vec{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$ 이고 정삼각형에서 내접원의 중심은 무게중심과 같으므로 점 O는 정삼각형 ABC의 무게중심이다.

$$\vec{OA} = \frac{2}{3} \times 2\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\vec{OD} = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

또한 삼각형 OBD는 직각삼각형이므로

$$\begin{aligned} &(\vec{OB} - \vec{OA}) \cdot \vec{OD} \\ &= \vec{OB} \cdot \vec{OD} - \vec{OA} \cdot \vec{OD} \\ &= |\vec{OB}| |\vec{OD}| \cos 60^\circ - |\vec{OA}| |\vec{OD}| \cos 180^\circ \\ &= |\vec{OD}|^2 + |\vec{OA}| |\vec{OD}| \\ &= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4 \end{aligned}$$

답 ④

### 다른 풀이

삼각형 ABD는  $\angle BAD = 30^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\begin{aligned} &(\vec{OB} - \vec{OA}) \cdot \vec{OD} = \vec{AB} \cdot \vec{OD} \\ &= |\vec{AB}| |\vec{OD}| \cos 30^\circ \\ &= 4 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 4 \end{aligned}$$



5  $\vec{a} \cdot \vec{b} = (k, 2) \cdot (k-5, 3)$

$$= k(k-5) + 2 \times 3$$

$$= k^2 - 5k + 6 = 2$$

$$k^2 - 5k + 4 = 0$$

$$(k-1)(k-4) = 0$$

따라서  $k=1$  또는  $k=4$ 이므로 모든 실수  $k$ 의 값의 합은  
 $1+4=5$

답 ⑤

6  $\vec{a} + 2\vec{b} = (-1, 2) + 2(2, 1) = (3, 4)$

$$2\vec{a} + \vec{b} = 2(-1, 2) + (2, 1) = (0, 5)$$

이므로 두 벡터  $\vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $2\vec{a} + \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기  $\theta$ 에 대하여

$$\cos \theta = \frac{(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{a} + 2\vec{b}| |2\vec{a} + \vec{b}|}$$

$$= \frac{3 \times 0 + 4 \times 5}{\sqrt{3^2 + 4^2} \sqrt{0^2 + 5^2}}$$

$$= \frac{20}{5 \times 5}$$

$$= \frac{4}{5}$$

답 ④

7 두 벡터  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $-\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ 가 서로 수직이므로

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \left(-\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right)$$

$$= -|\vec{a}|^2 + \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3}|\vec{b}|^2$$

$$= -2^2 - \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3} \times 3^2$$

$$= -1 - \frac{2}{3}|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$= -1 - \frac{2}{3} \times 2 \times 3 \times \cos \theta$$

$$= -1 - 4 \cos \theta = 0$$

$$\text{즉, } \cos \theta = -\frac{1}{4} \text{ 이므로}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

$$= \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{4}$$

답 ⑤

8 직선  $l$ 의 법선벡터가  $\vec{n} = (1, -1)$ 이므로 직선  $l$ 의 방정식은

$$1 \times (x-3) - 1 \times (y-4) = 0$$

$$\text{즉, } x - y + 1 = 0$$

따라서 원점  $O$ 와 직선  $l$  사이의 거리는

$$\frac{|0 - 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 ①

## Level 2 기본 연습

본문 68쪽

1 ②

2 ③

3 ④

4 ③

1  $\vec{q} = (l, m)$  ( $l, m$ 은  $l < m$ 인 100 이하의 자연수)라 하면

$$\vec{p} + 2\vec{q} = (50, 51) + 2(l, m)$$

$$= (50 + 2l, 51 + 2m)$$

$$1 \leq 50 + 2l < 51 + 2m \leq 100$$

$$-\frac{49}{2} \leq l \text{ 이고 } 2l < 1 + 2m, m \leq \frac{49}{2}$$

따라서  $1 \leq l < m \leq 24$ 이므로 구하는  $\vec{q}$ 의 개수는

$${}_{24}C_2 = \frac{24 \times 23}{2 \times 1} = 276$$

답 ②

2  $\angle AOB = \theta$ 라 하면  $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로

$$-1 < \cos \theta < 1$$

$$k = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| |\vec{OB}| \cos \theta$$

$$= 2 \times 3 \times \cos \theta = 6 \cos \theta$$

에서

$$-6 < k < 6$$

따라서 정수  $k$ 의 개수는

$$6 - (-6) - 1 = 11$$

답 ③

3 조건 (가), (나)에 의하여

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a} + 2\vec{b}|^2$$

$$= (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$$

$$= |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 16 \quad \dots \textcircled{1}$$



$$\begin{aligned}
 |\vec{d}|^2 &= \left| \frac{-\vec{a}+2\vec{b}}{4} \right|^2 \\
 &= \left( \frac{-\vec{a}+2\vec{b}}{4} \right) \cdot \left( \frac{-\vec{a}+2\vec{b}}{4} \right) \\
 &= \frac{1}{16} |\vec{a}|^2 - \frac{1}{4} \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4} |\vec{b}|^2 = 1
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 16 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

㉠, ㉡에서

$$|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 = 16 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

또한 두 직선 AB와 CD가 서로 수직이므로

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

$$(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) = 0$$

$$(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{d} - \vec{c}) = 0$$

$$(\vec{b} - \vec{a}) \cdot \left( \frac{-5\vec{a} - 6\vec{b}}{4} \right) = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ 이므로}$$

$$5|\vec{a}|^2 - 6|\vec{b}|^2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉢}, \textcircled{㉣} \text{에서 } |\vec{a}|^2 = \frac{48}{13}, |\vec{b}|^2 = \frac{40}{13}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 \vec{c} \cdot \vec{d} &= \frac{1}{4} (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (-\vec{a} + 2\vec{b}) \\
 &= \frac{1}{4} (4|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2) \\
 &= \frac{1}{4} \left( 4 \times \frac{40}{13} - \frac{48}{13} \right) = \frac{28}{13}
 \end{aligned}$$

답 ④

4  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ 라 하면

$$\vec{c} = \frac{2\vec{b} + \vec{a}}{2+1} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$$

$$\vec{d} = \frac{2\vec{b} - \vec{a}}{2-1} = -\vec{a} + 2\vec{b} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{c} \cdot \vec{d} &= \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3} \cdot (-\vec{a} + 2\vec{b}) \\
 &= \frac{-|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2}{3} = \frac{-1+4}{3} = 1
 \end{aligned}$$

따라서  $\angle AOB = \angle COD = \theta$ 라 하면

$$0^\circ < \theta < 90^\circ \text{ 이고}$$

$$\begin{aligned}
 |\vec{c}|^2 &= \left| \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3} \right|^2 \\
 &= \frac{|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2}{9}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{4\vec{a} \cdot \vec{b} + 5}{9}$$

$$\begin{aligned}
 |\vec{d}|^2 &= |-\vec{a} + 2\vec{b}|^2 \\
 &= |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \\
 &= 5 - 4\vec{a} \cdot \vec{b}
 \end{aligned}$$

또한

$$\cos(\angle AOB) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\begin{aligned}
 \cos(\angle COD) &= \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{c}| |\vec{d}|} \\
 &= \frac{3}{\sqrt{4\vec{a} \cdot \vec{b} + 5} \times \sqrt{5 - 4\vec{a} \cdot \vec{b}}}
 \end{aligned}$$

이므로  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x$  ( $0 < x < 1$ )이라 하면

$$x = \frac{3}{\sqrt{4x+5} \sqrt{-4x+5}}$$

$$3 = x\sqrt{25-16x^2}$$

양변을 제곱하면

$$9 = x^2(25-16x^2)$$

$$16x^4 - 25x^2 + 9 = 0$$

$$(x^2-1)(16x^2-9) = 0$$

$$\text{따라서 } x^2 = 1 \text{ 또는 } x^2 = \frac{9}{16}$$

$$\text{이때 } 0 < x < 1 \text{ 이므로 } x = \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3}{4}$$

답 ③

### Level 3 실력 완성

본문 67쪽

1 ①

2 4

3 ③

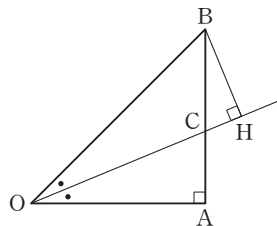
1  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 라 하자.

$$\text{이때 } |\vec{b}| = |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ 이고}$$

직선 OH는  $\angle AOB$ 의 이등분선이므로

직선 OH와 변 AB의 교점을 C라 하면

$$\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{OA} : \overline{OB} = 1 : \sqrt{2}$$



즉, 변 AB를  $1 : \sqrt{2}$ 로 내분하는 점이 C이므로

$$\overrightarrow{OH} = k(\sqrt{2}\vec{a} + \vec{b}) \quad (k > 0)$$

으로 놓을 수 있다.

또한  $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{OH}$ 이므로

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OH} &= (\overrightarrow{OH} - \vec{b}) \cdot \overrightarrow{OH} \\ &= |\overrightarrow{OH}|^2 - \vec{b} \cdot \overrightarrow{OH} = 0 \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{OH}|^2 = \vec{b} \cdot \overrightarrow{OH}$$

$$|k(\sqrt{2}\vec{a} + \vec{b})|^2 = \vec{b} \cdot \{k(\sqrt{2}\vec{a} + \vec{b})\}$$

$$k^2(2|\vec{a}|^2 + 2\sqrt{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2)$$

$$= k(\sqrt{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2)$$

$$k^2(2 + 2\sqrt{2} \times 1 \times \sqrt{2} \times \cos 45^\circ + 2)$$

$$= k(\sqrt{2} \times 1 \times \sqrt{2} \times \cos 45^\circ + 2)$$

$$k^2(4 + 2\sqrt{2}) = k(\sqrt{2} + 2)$$

$$k > 0 \text{이므로 } k = \frac{\sqrt{2} + 2}{4 + 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{즉, } \overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\vec{a} + \vec{b}) \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{2}\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\text{따라서 } m = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1, n = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

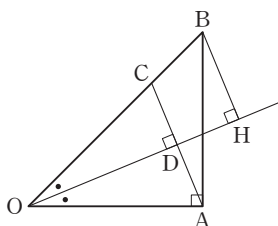
$$m + n = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$

### 다른 풀이

$\overrightarrow{OB} = \sqrt{2}\vec{a}$ 이고 변 OB 위에  $\overrightarrow{OC} = 1$ 인 점 C를 잡는다.

삼각형 OAC는 이등변삼각형이므로 두 직선 AC와 OH는 서로 수직이다. 두 직선 AC와 OH의 교점을 D라 하면

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{OB}\right) \end{aligned}$$



이때 두 삼각형 OCD와 OBH는 닮음이고 닮음비는  $1 : \sqrt{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} &= \sqrt{2}\overrightarrow{OD} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{OB}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{OB}\right) - \overrightarrow{OA} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } m = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1, n = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$m + n = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$

## 2 $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$ 이므로 두 조건 (가), (나)에 의하여

$$(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}) \cdot (\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB})$$

$$= (\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}) \cdot \{x\overrightarrow{PA} + (y-1)\overrightarrow{PB}\}$$

$$= x|\overrightarrow{PA}|^2 - (y-1)|\overrightarrow{PB}|^2 = 0$$

$$x|\overrightarrow{PA}|^2 = (y-1)|\overrightarrow{PB}|^2$$

$$\text{이때 } k = \frac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{PA}|} \quad (k > 0) \text{이라 하면}$$

$$x = k^2(y-1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또한 } |\overrightarrow{BA}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 \text{이므로}$$

$$|\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}|^2 = |\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}|^2$$

$$|\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}|^2 = |x\overrightarrow{PA} + (y-1)\overrightarrow{PB}|^2$$

$$|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 = x^2|\overrightarrow{PA}|^2 + (y-1)^2|\overrightarrow{PB}|^2$$

$$(x^2 - 1)|\overrightarrow{PA}|^2 = \{1 - (y-1)^2\}|\overrightarrow{PB}|^2$$

$$= \{1 - (y-1)^2\}k^2|\overrightarrow{PA}|^2$$

$$x^2 - 1 = \{1 - (y-1)^2\}k^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$k^4(y-1)^2 - 1 = \{1 - (y-1)^2\}k^2$$

$$k^4(y-1)^2 + k^2(y-1)^2 = k^2 + 1$$

$$k^2(y-1)^2(k^2 + 1) = k^2 + 1$$

$$k^2(y-1)^2 = 1$$

$$k(y-1) = 1 \text{ 또는 } k(y-1) = -1$$

$$\text{즉, } y-1 = \frac{1}{k} \text{ 또는 } y-1 = -\frac{1}{k}$$

그런데  $k > 0$ 이고 조건 (나)를 만족시키기 위해서는  $x < 0$ 이어야 하므로



$$\begin{aligned}
 x &= -k, y = 1 - \frac{1}{k} \\
 x + y &= -k + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \\
 &= 1 - \left(k + \frac{1}{k}\right) \\
 &\leq 1 - 2\sqrt{k \times \frac{1}{k}} \\
 &= 1 - 2 = -1
 \end{aligned}$$

(단, 등호는  $k = \frac{1}{k}$ , 즉  $k = 1$ 일 때 성립한다.)

즉,  $x + y$ 가 최댓값을 가질 때,  $\overrightarrow{PC} = -\overrightarrow{PA}$ 이므로 점 P는 선분 AC의 중점이다.

따라서 삼각형 PAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$

## 참고

점 P를 정사각형 ABCD의 대각선의 교점이라 하면

$$\overrightarrow{PE} = x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB}$$

에서  $x + y = 1$ 일 때 점 E는 직선 AB 위의 점이 된다.

또한  $x + y = -1$ 일 때 점 E는 직선 CD 위의 점이 된다.

답 4

## 3 원점 O에 대하여

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} = 1 \text{이고}$$

조건 (나)에 의하여

$$\angle POQ = 90^\circ$$

즉,  $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ}$ 이다.

따라서  $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ ,  $\overrightarrow{OQ} = \vec{q}$ ,  $\overrightarrow{OR} = \vec{r}$ 라 하면

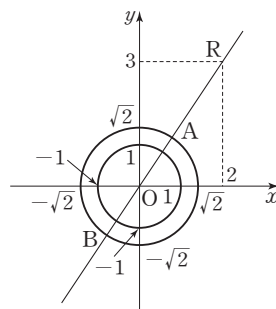
$$\begin{aligned}
 &\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} \\
 &= (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR}) \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR}) \\
 &= (\vec{p} - \vec{r}) \cdot (\vec{q} - \vec{r}) \\
 &= \vec{p} \cdot \vec{q} - \vec{p} \cdot \vec{r} - \vec{r} \cdot \vec{q} + |\vec{r}|^2 \\
 &= -\vec{r} \cdot (\vec{p} + \vec{q}) + (2^2 + 3^2) \\
 &= 13 - \vec{r} \cdot (\vec{p} + \vec{q})
 \end{aligned}$$

이때  $\vec{p} + \vec{q} = \vec{a}$ 라 하면

$$|\vec{p} + \vec{q}| = |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

이므로 벡터  $\vec{a}$ 의 중점이 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가  $\sqrt{2}$ 인 원이다.

따라서  $\vec{r} \cdot (\vec{p} + \vec{q})$ 가 최댓값과 최솟값을 갖는 경우는  $\vec{a}$ 의 중점이 그림과 같이 직선 OR가 원  $x^2 + y^2 = 2$ 와 만나는 두 점 A, B일 때 각각 최댓값과 최솟값을 갖는다.



즉,  $\vec{r} \cdot (\vec{p} + \vec{q})$ 의 최댓값은

$$\sqrt{2^2 + 3^2} \times \sqrt{2} \cos 0^\circ = \sqrt{26}$$

$\vec{r} \cdot (\vec{p} + \vec{q})$ 의 최솟값은

$$\sqrt{2^2 + 3^2} \times \sqrt{2} \cos 180^\circ = -\sqrt{26}$$

따라서  $M = 13 + \sqrt{26}$ ,  $m = 13 - \sqrt{26}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 Mm &= (13 + \sqrt{26})(13 - \sqrt{26}) \\
 &= 169 - 26 \\
 &= 143
 \end{aligned}$$

답 ③

## 06 공간도형

유제

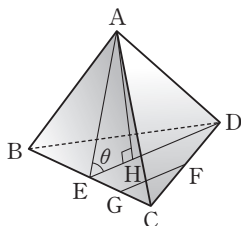
본문 71~77쪽

1 3      2 ⑤      3 84      4 ②      5 22

- 1 직선 BC와 평행한 직선은 직선 ED이므로  
 $a=1$   
 직선 BC와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 AD, AE이므로  
 $b=2$   
 따라서  $a+b=1+2=3$

답 3

2



삼각형 CDE에서 두 점 F, G는 각각 선분 CD와 선분 CE의 중점이므로

$$\overline{FG} \parallel \overline{DE}$$

따라서 두 직선 AE, FG가 이루는 각의 크기는 두 직선 AE, DE가 이루는 각의 크기와 같다.

한편, 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 삼각형 BCD의 무게중심과 일치한다.

$$\overline{EH} = \frac{1}{3} \overline{DE} = \frac{1}{3} \overline{AE} \text{이므로 직각삼각형 AEH에서}$$

$$\cos \theta = \frac{\overline{EH}}{\overline{AE}} = \frac{1}{3}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

답 ⑤

- 3 정삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 M이라 하면  
 $\overline{AM} \perp \overline{BC}$

또 점 P에서 평면  $\alpha$ 에 내린 수선의 발이 점 A이므로

$$\overline{PA} \perp \alpha$$

삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{PM} \perp \overline{BC}$$

선분 BC 위의 임의의 점 Q에 대하여  $\overline{PA} \perp \overline{AQ}$ 이므로

직각삼각형 PAQ에서

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{PA}^2 + \overline{AQ}^2} = \sqrt{6^2 + \overline{AQ}^2}$$

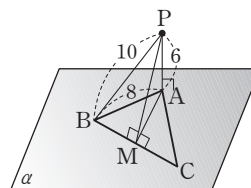
이때  $\overline{AM} \leq \overline{AQ} \leq \overline{AB}$ 이므로

점 Q의 위치가 점 B(또는 점 C)일 때, 선분 PQ의 길이는 최댓값을 가진다.

즉,  $\overline{PB} = 10$ 이다.

직각삼각형 PBA에서  $\overline{PA} = 6$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{\overline{PB}^2 - \overline{PA}^2} \\ &= \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \end{aligned}$$



점 Q의 위치가 점 M일 때, 선분 PQ의 길이는 최솟값을 가진다.

직각삼각형 PBM에서

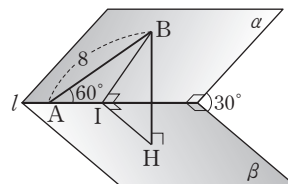
$$\begin{aligned} \overline{PM} &= \sqrt{\overline{PB}^2 - \overline{BM}^2} \\ &= \sqrt{10^2 - 4^2} = 2\sqrt{21} \end{aligned}$$

따라서  $k = 2\sqrt{21}$ 이므로

$$k^2 = (2\sqrt{21})^2 = 84$$

답 84

4



점 B에서 교선  $l$ 에 내린 수선의 발을 I라 하면

$$\overline{BH} \perp \beta, \overline{BI} \perp l$$

이므로 삼수선의 정리에 의하여



$$\overline{HI} \perp l$$

따라서  $\angle BIH = 30^\circ$

이때  $\overline{AB} = 8$ 이므로 삼각형 ABI에서

$$\overline{BI} = 8 \sin 60^\circ$$

$$= 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 4\sqrt{3}$$

따라서 삼각형 BIH에서

$$\overline{BH} = \overline{BI} \sin 30^\circ$$

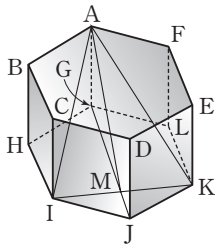
$$= 4\sqrt{3} \sin 30^\circ$$

$$= 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

답 ②

- 5 그림과 같이 두 선분 GJ, IK가 만나는 점을 M이라 하면  $\overline{GM} \perp \overline{IK}$



점 A에서 평면 GHIJKL에 내린 수선의 발은 점 G이므로

$$\overline{AG} \perp (\text{평면 GHIJKL})$$

삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{AM} \perp \overline{IK}$$

한편, 직각삼각형 AGM에서

$$\overline{AG} = 2, \overline{GM} = 3 \text{이므로}$$

$$\overline{AM} = \sqrt{\overline{AG}^2 + \overline{GM}^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

이때 두 평면 AIK, GHIJKL이 이루는 예각의 크기를  $\theta$ 라

하면  $\angle AMG = \theta$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\overline{GM}}{\overline{AM}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\text{이때 } S = \pi \times \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}\pi \text{이므로}$$

$$\left(\frac{S}{\pi}\right)^2 = \frac{9}{13}$$

따라서  $p = 13, q = 9$ 이므로

$$p + q = 13 + 9 = 22$$

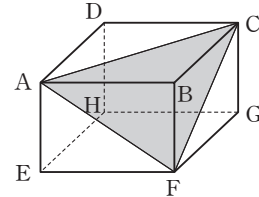
답 22

# Level 1 기초 연습

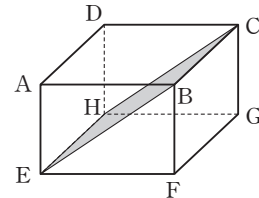
본문 78~79쪽

- |      |     |     |     |      |
|------|-----|-----|-----|------|
| 1 ④  | 2 8 | 3 ⑤ | 4 ② | 5 12 |
| 6 70 | 7 ② | 8 ③ |     |      |

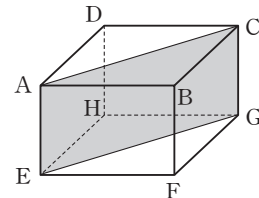
- 1 ① 세 점 A, C, F는 한 직선 위에 있지 않다.  
따라서 세 점 A, C, F는 삼각형 ACF를 포함하는 한 평면을 결정한다.



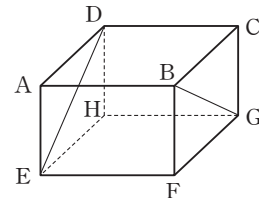
- ② 점 B는 직선 CE 위에 있지 않다.  
따라서 점 B와 직선 CE는 삼각형 BCE를 포함하는 한 평면, 즉 평면 BCHE를 결정한다.



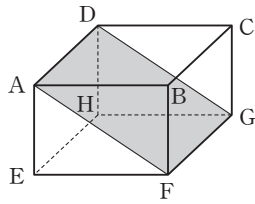
- ③ 직선 AE와 직선 EG는 한 점 E에서 만난다.  
따라서 직선 AE와 직선 EG는 삼각형 AEG를 포함하는 한 평면, 즉 평면 AEGC를 결정한다.



- ④ 직선 DE와 직선 BG는 서로 평행하지도 않고, 한 점에서 만나지도 않는다.  
즉, 직선 DE와 직선 BG는 꼬인 위치에 있으므로 한 평면을 결정하지 않는다.



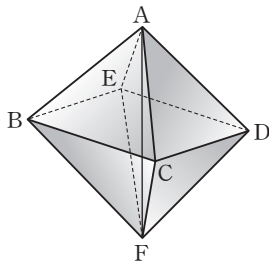
- ⑤ 직선 AF와 직선 GD는 서로 평행하다.  
따라서 직선 AF와 직선 GD는 평면 AFGD를 결정한다.



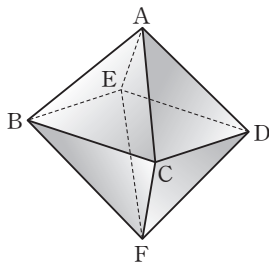
이상에서 한 평면을 결정하지 않는 것은 ④이다.

답 ④

2



직선 AF와 꼬인 위치에 있는 직선은  
직선 BC, CD, DE, EB이므로  
 $p=4$



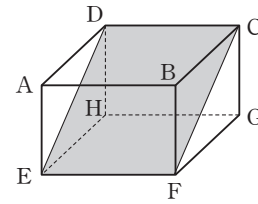
직선 AD와 꼬인 위치에 있는 직선은  
직선 BC, BE, CF, EF이므로  
 $q=4$   
따라서  $p+q=4+4=8$

답 8

참고

사각형 ABFD는 정사각형이므로 직선 AD와 직선 BF는  
서로 평행하다.

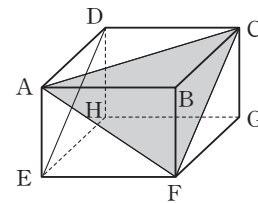
- 3  $\neg$ ,  $\overline{DE}=\overline{CF}$ 이고  $\overline{DC}=\overline{EF}$ 이므로 사각형 CDEF는 평행  
사변형이다.



따라서 직선 DE와 직선 CF는 평행하다. (참)

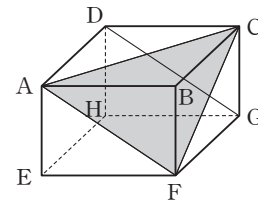
$\neg$ ,  $\neg$ 에서 직선 DE는 평면 ACF에 포함되는 직선 CF와  
평행하다.

또 직선 DE는 직선 AC와 꼬인 위치에 있으므로 직선  
DE는 평면 ACF에 포함되지 않는다.



따라서 직선 DE는 평면 ACF와 평행하다. (참)

$\neg$ ,  $\neg$ ,  $\neg$ 과 같은 방법으로 직선 DG는 직선 AF와 평행하  
고, 직선 DG는 평면 ACF 위에 있지 않음을 알 수 있다.



따라서 직선 DG는 평면 ACF와 평행하다.

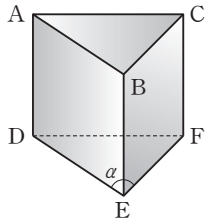
즉, 평면 ACF는 두 직선 DE, DG와 모두 평행하다.

따라서 평면 ACF는 두 직선 DE, DG를 포함하는 평  
면 DEG와 평행하다. (참)

이상에서 옳은 것은  $\neg$ ,  $\neg$ ,  $\neg$ 이다.

답 ⑤

- 4 직선 AB와 직선 DE는 평행하므로 직선 AB와 직선 EF  
가 이루는 예각의 크기는 직선 DE와 직선 EF가 이루는 예  
각의 크기와 같다.  
즉,  $\alpha = \angle DEF$ 이다.

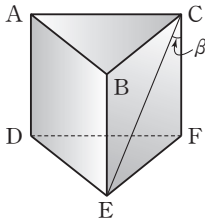


그런데 삼각형 DEF는 정삼각형이므로  
 $\alpha = 60^\circ$

따라서  $\cos \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

직선 AD와 직선 CF는 평행하므로 직선 AD와 직선 CE가 이루는 예각의 크기는 직선 CF와 직선 CE가 이루는 예각의 크기와 같다.

즉,  $\beta = \angle FCE$ 이다.



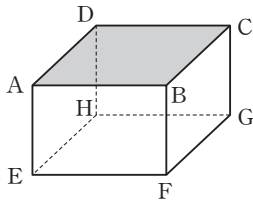
그런데 삼각형 CEF는 직각이등변삼각형이므로  
 $\beta = 45^\circ$

따라서  $\cos \beta = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

그러므로  $\cos \alpha \times \cos \beta = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

답 ②

- 5  $\overline{BF} \perp \overline{AB}$ ,  $\overline{BF} \perp \overline{BC}$ 이므로 직선 BF는 평면 ABCD와 서로 수직이다.



따라서 직선 BF는 평면 ABCD 위의 모든 직선과 서로 수직이므로 직선 BF는 평면 ABCD 위의  $6(= {}_4C_2)$ 개의 직선 AB, BC, CD, DA, AC, BD와 모두 수직이다.  
 마찬가지로 직선 BF는 평면 EFGH와 서로 수직이므로 직선 BF는 평면 EFGH 위의  $6(= {}_4C_2)$ 개의 직선

EF, FG, GH, HE, EG, FH와 모두 수직이다.  
 따라서 구하는 직선의 개수는

$$6 + 6 = 12$$

답 12

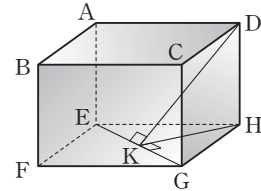
#### 참고

- ① 직선 BF는 세 직선 AE, DH, CG와 모두 평행하다.  
 ② 직선 BF와 직선 BE는 수직이 아니다. 한편,  $\overline{BE} \parallel \overline{CH}$ 이므로 직선 BF와 직선 CH는 서로 수직이 아니다.  
 마찬가지로 직선 BF와 직선 AF, DG, BG, AH, CF, DE, BH, DF, CE, AG는 모두 수직이 아니다.

- 6  $\overline{DH} \perp \overline{EH}$ ,  $\overline{DH} \perp \overline{GH}$ 이므로  
 $\overline{DH} \perp$  (평면 EFGH)

또 선분 EG는 평면 EFGH 위에 있고,  $\overline{DK} \perp \overline{EG}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{HK} \perp \overline{EG}$$



직각삼각형 HEG에서

$$\overline{EG} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\overline{HE} \times \overline{HG} = \overline{HK} \times \overline{EG} \text{이므로}$$

$$\overline{HK} = \frac{\overline{HE} \times \overline{HG}}{\overline{EG}} = \frac{2 \times 1}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

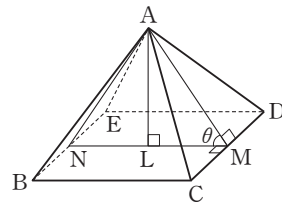
이때  $\overline{DH} = \sqrt{2}$ 이므로 직각삼각형 DKH에서

$$\overline{DK} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{\frac{4}{5} + 2} = \frac{\sqrt{70}}{5}$$

따라서  $n = 70$

답 70

- 7 선분 CD의 중점을 M, 선분 BE의 중점을 N이라 하자.





삼각형 ACD는 정삼각형이므로

$$\overline{AM} \perp \overline{CD}$$

또  $\overline{NM} \parallel \overline{BC}$ 이고  $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ 이므로

$$\overline{NM} \perp \overline{CD}$$

따라서 평면 ACD와 평면 BCDE가 이루는 예각의 크기는  $\theta = \angle AMN$

한편, 정사각뿔의 한 모서리의 길이를  $a$ 라 하면 삼각형 ANM

은  $\overline{AM} = \overline{AN} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ,  $\overline{MN} = \overline{BC} = a$ 인 이등변삼각형이므로

로 선분 MN의 중점을 L이라 하면 직각삼각형 ALM에서

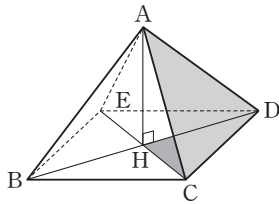
$$\cos \theta = \frac{\overline{ML}}{\overline{AM}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ②

### 다른 풀이

점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 정사각형 BCDE의 두 대각선의 교점이다.

따라서 정삼각형 ACD의 평면 BCDE 위로의 정사영은 삼각형 HCD이다.



이때 정사각뿔의 한 모서리의 길이를  $a$ 라 하고, 정삼각형 ACD의 넓이를  $S$ , 직각이등변삼각형 HCD의 넓이를  $S'$ 이라 하면

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2, S' = \frac{1}{4}a^2$$

이므로

$$\cos \theta = \frac{S'}{S} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{\sqrt{3}a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

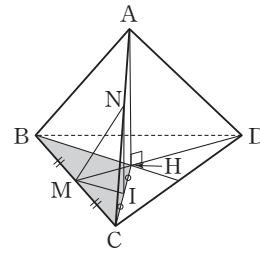
- 8 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 정삼각형 BCD의 무게중심이다.

따라서 점 N에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{AH} \parallel \overline{NI}$ 이므로 점 I는 선분 HC의 중점이다.

이때 점 M은 선분 BC의 중점이므로

$$\overline{MI} = \frac{1}{2}\overline{BH} \quad \dots\dots ㉠$$



한편, 점 M은 평면 BCD 위의 점이므로 선분 MN의 평면 BCD 위로의 정사영은 선분 MI이다.

그런데

$$\overline{BH} = \overline{DH}$$

$$= \frac{2}{3}\overline{DM}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이므로 ㉠에서

$$\overline{MI} = \frac{1}{2}\overline{BH} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

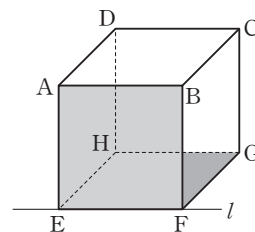
답 ③

### Level 2 기본 연습

본문 80~81쪽

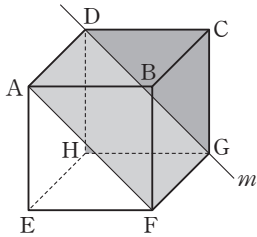
- 1 ③      2 66      3 ②      4 ①      5 ⑤  
6 11

- 1 평면 ABF는 평면 ABFE와 일치하고, 평면 EHG는 평면 EHGF와 일치하므로 평면 ABF와 평면 EHG의 교선  $l$ 은 직선 EF이다.





또 평면 AFG는 평면 AFGD와 일치하고, 평면 CDH는 평면 CDHG와 일치하므로 평면 AFG와 평면 CDH의 교선  $m$ 은 직선 DG이다.



이때 직선 EF와 직선 HG는 평행하므로 직선 EF와 직선 DG가 이루는 각의 크기는 직선 HG와 직선 DG가 이루는 각의 크기와 같다.

그런데 삼각형 DHG는 직각이등변삼각형이므로  $\angle DGH = 45^\circ$

따라서 두 직선  $l, m$ 이 이루는 각의 크기  $\theta = 45^\circ$ 이므로

$$\cos \theta = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 ③

## 2 삼각형 DEF의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{DE} \times \overline{DF} \times \sin 120^\circ &= \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

한편, 삼각형 DEF에서 코사인법칙에 의하여  $\overline{EF}^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos 120^\circ$

$$= 1 + 4 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 7$$

따라서  $\overline{EF} = \sqrt{7}$

선분 AD는 평면 DEF와 수직이고,

$\overline{AH} \perp \overline{EF}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{DH} \perp \overline{EF}$

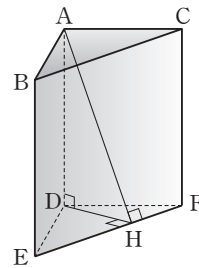
따라서 삼각형 DEF의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{EF} \times \overline{DH} = \frac{1}{2} \times \sqrt{7} \times \overline{DH} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{\sqrt{7}}{2} \times \overline{DH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{이므로}$$

$$\overline{DH} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$



한편,  $\overline{AD} \perp$  (평면 DEF)이고 선분 DH는 평면 DEF 위에 있으므로

$$\overline{AD} \perp \overline{DH}$$

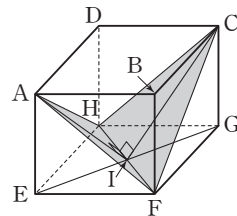
직각삼각형 ADH에서

$$\overline{AH} = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{66}{7}}$$

$$\text{따라서 } 7 \times \overline{AH}^2 = 7 \times \frac{66}{7} = 66$$

답 66

## 3



정사각형 EFGH의 두 대각선 FH, EG의 교점을 I라 하면 점 I는 선분 FH의 중점이다.

이때  $\overline{AF} = \overline{AH} = \overline{CF} = \overline{CH}$ 이므로 두 삼각형 AFH, CFH는 모두 이등변삼각형이다.

따라서  $\overline{AI} \perp \overline{FH}$ ,  $\overline{CI} \perp \overline{FH}$ 이므로 두 평면 AFH, CFH가 이루는 각의 크기는  $\angle AIC$ 이다.

$\overline{EF} = 2$ 이므로

$$\overline{EI} = \frac{1}{2} \overline{EG} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

이때  $\overline{AE} = h$ 이므로 직각삼각형 AEI에서

$$\overline{AI} = \sqrt{h^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{h^2 + 2}$$

마찬가지로  $\overline{CI} = \sqrt{h^2 + 2}$ 이고  $\overline{AC} = 2\sqrt{2}$ 이다.

이때 평면 AFH와 평면 CFH가 수직이려면

$\angle AIC = 90^\circ$ 이어야 하므로

$$\overline{AI}^2 + \overline{CI}^2 = \overline{AC}^2$$

$$\text{즉, } (h^2 + 2) + (h^2 + 2) = (2\sqrt{2})^2 \text{에서}$$

$$h^2 = 2 \text{이므로}$$

$$h = \sqrt{2}$$

답 ②

참고

두 점 A, C는 평면 BDHF에 대하여 대칭이고  
 $\angle AIC = 90^\circ$ 이므로  $\angle EIA = \angle GIC = 45^\circ$ 이다.  
 따라서 직각이등변삼각형 AEI에서

$$h = \overline{AE} = \overline{EI} = \frac{1}{2} \overline{EG} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

4.  $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = a$ 라 하면

직각이등변삼각형 OBC에서

$$\overline{BC} = \sqrt{2}a \text{이므로}$$

$$\overline{OM} = \overline{BM} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

같은 방법으로

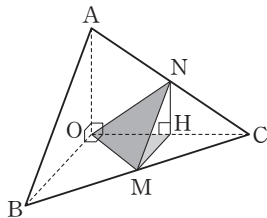
$$\overline{ON} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\text{한편, } \overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

이므로 삼각형 OMN은 한 변의 길이가  $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 인 정삼각형이다.

삼각형 OMN의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left( \frac{\sqrt{2}}{2}a \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2$$



점 N에서 평면 OBC에 내린 수선의 발을 H라 하면 H는 선분 OC의 중점이므로 삼각형 OMH의 넓이는 삼각형 OBC의 넓이의  $\frac{1}{4}$ 이다.

삼각형 OMH의 넓이를  $S'$ 이라 하면

$$S' = \frac{1}{4} \times \left( \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times \overline{OC} \right) = \frac{1}{8}a^2$$

이때 삼각형 OMN의 평면 OBC 위로의 정사영이 삼각형 OMH이므로

$$S' = S \times \cos \theta$$

$$\text{즉, } \frac{1}{8}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 \times \cos \theta \text{이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ①

5. ㄱ. 두 점 M, N은 각각 두 선분 AB, AD의 중점이므로

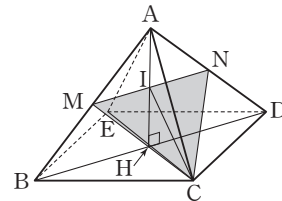
$$\overline{MN} \parallel \overline{BD}$$

사각형 BCDE는 정사각형이므로

$$\overline{BD} \perp \overline{CE}$$

따라서  $\overline{CE} \perp \overline{MN}$  (참)

ㄴ. 점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 정사각형 BCDE의 두 대각선의 교점이다.



ㄱ에서  $\overline{BD} \perp \overline{CE}$ 이고,

$\overline{AH} \perp$  (평면 BCDE)에서

$\overline{AH} \perp \overline{BD}$ 이므로

$\overline{BD} \perp$  (평면 ACE)

따라서 직선 BD는 평면 ACE 위의 모든 직선과 수직이다.

이때  $\overline{BD} \parallel \overline{MN}$ 이고, 직선 AE는 평면 ACE 위에 있으므로

$\overline{AE} \perp \overline{MN}$  (참)

ㄷ. 두 평면 CMN, ABD의 교선은 직선 MN이다.

두 선분 MN, AH는 평면 ABD 위에 있고, 두 삼각형 ABD, AMN은 모두 직각이등변삼각형이다.

따라서 두 선분 MN, AH의 교점을 I라 하면 점 I는 선분 MN의 중점이고

$$\overline{AI} \perp \overline{MN}$$

또 삼각형 CMN은  $\overline{CM} = \overline{CN}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\overline{CI} \perp \overline{MN}$$



이때  $\angle AIC$ 는 둔각이므로 평면 CMN과 평면 ABD가 이루는 예각은  $\theta = \angle HIC$ 이다.

$\overline{AB} = a$ 라 하면 직각삼각형 ABH에서

$$\overline{AH} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}} \text{이므로}$$

$$\overline{IH} = \frac{1}{2} \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

$$\overline{HC} = \frac{1}{2} \times \overline{EC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

직각삼각형 IHC에서

$$\overline{IC} = \sqrt{\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}a$$

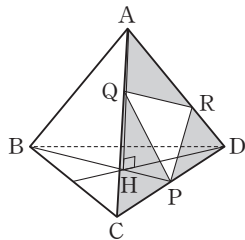
$$\text{따라서 } \cos \theta = \frac{\overline{IH}}{\overline{IC}} = \frac{\frac{a}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}a} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

- 6 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 정삼각형 BCD의 무게중심이고, 삼각형 ACD의 평면 BCD 위로의 정사영은 삼각형 HCD이다.  
이때 정삼각형 BCD의 넓이를 S라 하면 정삼각형 ACD의 넓이도 S이고, 삼각형 HCD의 넓이는  $\frac{S}{3}$ 이므로 두 평면 ACD, BCD가 이루는 예각의 크기를  $\theta$ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{\frac{S}{3}}{S} = \frac{1}{3}$$



한편,  $\overline{AQ} = 2$ ,  $\overline{AR} = 4$ ,  $\angle QAR = 60^\circ$ 이므로 삼각형 AQR의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$$

$\overline{CQ} = 4$ ,  $\overline{CP} = 3$ ,  $\angle QCP = 60^\circ$ 이므로 삼각형 CPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$$

$\overline{DP} = 3$ ,  $\overline{DR} = 2$ ,  $\angle PDR = 60^\circ$ 이므로

삼각형 DRP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

따라서 삼각형 PQR의 넓이는 삼각형 ACD의 넓이에서 세 삼각형 AQR, CPQ, DRP의 넓이의 합을 뺀 값이므로

$$9\sqrt{3} - \left(2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

삼각형 PQR의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이는

$$\frac{5\sqrt{3}}{2} \times \cos \theta = \frac{5\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{6} \text{이므로}$$

$$p + q = 6 + 5 = 11$$

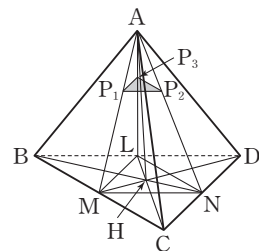
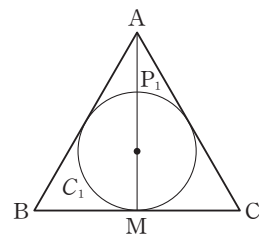
답 11

Level 3 실력 완성

본문 82쪽

1 ③      2 ③      3 ①

1



세 변 BC, CD, BD의 중점을 각각 M, N, L이라 하자. 정삼각형 ABC의 내접원  $C_1$  위의 점 중 점 A에 가장 가까운 점  $P_1$ 은 원  $C_1$ 이 선분 AM과 만나는 점 중 점 M이 아닌 점이고, 내접원의 중심은 정삼각형 ABC의 무게중심과 일치하므로

$$\overline{AP_1} : \overline{AM} = 1 : 3$$

$$\text{같은 방법으로 } \overline{AP_2} : \overline{AN} = 1 : 3$$

따라서 두 삼각형  $AP_1P_2$ ,  $AMN$ 은 닮음비가 1 : 3인 닮은 도형이므로

$$\begin{aligned}\overline{P_1P_2} &= \frac{1}{3} \times \overline{MN} = \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} \times \overline{BD} \right) \\ &= \frac{1}{6} \times 12 = 2\end{aligned}$$

같은 방법으로  $\overline{P_2P_3} = \overline{P_1P_3} = 2$ 이므로 삼각형  $P_1P_2P_3$ 은 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

따라서 정삼각형  $P_1P_2P_3$ 의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

또한  $\overline{P_1P_2} \parallel \overline{MN}$ ,  $\overline{P_2P_3} \parallel \overline{NL}$ ,  $\overline{P_1P_3} \parallel \overline{ML}$ 이므로 평면  $P_1P_2P_3$ 은 평면  $BCD$ 와 평행하다.

따라서 평면  $ABC$ 와 평면  $BCD$ 가 이루는 예각의 크기를  $\theta$ 라 하면 평면  $P_1P_2P_3$ 과 평면  $ABC$ 가 이루는 예각의 크기도  $\theta$ 이다.

한편, 점  $A$ 에서 평면  $BCD$ 에 내린 수선의 발을  $H$ 라 하면 삼각형  $ABC$ 의 평면  $BCD$  위로의 정사영은 삼각형  $HBC$ 이다.

이때 점  $H$ 는 정삼각형  $BCD$ 의 무게중심이므로 삼각형  $HBC$ 의 넓이는 삼각형  $ABC$ 의 넓이의  $\frac{1}{3}$ 이다.

$$\text{즉, } \cos \theta = \frac{1}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧에서 정삼각형  $P_1P_2P_3$ 의 평면  $ABC$  위로의 정사영의 넓이는

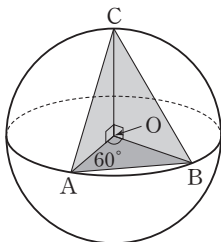
$$\sqrt{3} \times \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ③

2  $\angle AOC = \angle BOC = 90^\circ$ 이므로 직선  $OC$ 는 두 직선  $OA$ ,  $OB$ 와 모두 수직이다.

즉, 직선  $OC$ 는 평면  $OAB$ 와 수직이다.

이때  $\angle AOB = 60^\circ$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 네 점  $O$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ 는 그림과 같다.



ㄱ. 평면  $AOC$ 과 평면  $BOC$ 의 교선은 직선  $OC$ 이고,

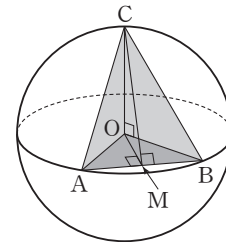
$\overline{AO} \perp \overline{OC}$ ,  $\overline{BO} \perp \overline{OC}$ 이므로 평면  $AOC$ 과 평면  $BOC$ 가 이루는 예각의 크기는

$$\angle AOB = 60^\circ \text{ (참)}$$

ㄴ. 평면  $ABC$ 와 평면  $OAB$ 의 교선은 직선  $AB$ 이다. 선분  $AB$ 의 중점을  $M$ 이라 하면

$\overline{OC} \perp (\text{평면 } OAB)$ 이고  $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{CM} \perp \overline{AB}$$



따라서 두 평면  $ABC$ ,  $OAB$ 가 이루는 예각의 크기는  $\angle OMC = \alpha$ 이다.

한편,  $\overline{OA} = \overline{OB} = 2$ ,  $\angle AOB = 60^\circ$ 이므로 삼각형  $OAB$ 는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

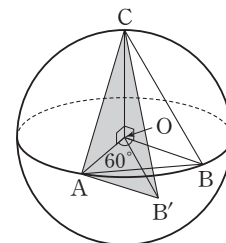
$$\text{따라서 } \overline{AB} = 2 \text{이고, } \overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \overline{AB} = \sqrt{3}$$

직각삼각형  $COM$ 에서

$$\overline{CM} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7} \text{이므로}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OM}}{\overline{CM}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7} \text{ (참)}$$

ㄷ. 점  $O$ 가 점  $A$ 에 오도록 선분  $OB$ 를 평행이동할 때, 점  $B$ 가 옮겨진 점을  $B'$ 이라 하면 직선  $OB$ 와 직선  $AC$ 가 이루는 예각의 크기는 두 직선  $AB'$ ,  $AC$ 가 이루는 예각의 크기와 같다.



$\overline{AO} = \overline{AB'} = 2$ ,  $\angle OAB' = 120^\circ$ 이므로 삼각형  $OAB'$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{OB'}^2 &= 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \cos 120^\circ \\ &= 4 + 4 - 8 \times \left( -\frac{1}{2} \right) = 12\end{aligned}$$



에서  $\overline{OB'} = 2\sqrt{3}$

직각삼각형  $COB'$ 에서

$$\overline{CB'} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

삼각형  $CAB'$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CB'}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB'}^2 - 2 \times \overline{AC} \times \overline{AB'} \times \cos(\angle CAB')$$

$$4^2 = (2\sqrt{2})^2 + 2^2 - 2 \times 2\sqrt{2} \times 2 \times \cos(\angle CAB')$$

이므로

$$\cos(\angle CAB') = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

이때  $\beta$ 는 예각이므로

$$\cos \beta = \cos(180^\circ - \angle CAB')$$

$$= -\cos(\angle CAB')$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ (거짓)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

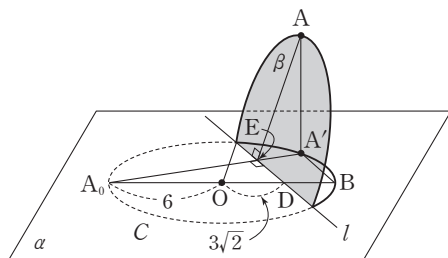
3 평면  $\alpha$ 에서 점  $A$ 의 위치를 점  $A_0$ 이라 하자.

원  $C$  위의 점  $A_0$ 을 포함하는 호를 직선  $l$ 을 접는 선으로 하여 접을 때, 점  $A$ 는 직선  $l$ 과 수직인 평면 위를 움직인다.

따라서 이 평면을  $\gamma$ 라 하고, 평면  $\gamma$ 와 직선  $l$ 의 교점을  $E$ 라 하면

$$\overline{A_0E} \perp l \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$\overline{AE} \perp l \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$



$\overline{AA'} \perp \alpha$ 이므로 ㉡에서 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{A'E} \perp l \quad \cdots \cdots \text{㉢}$$

따라서 두 평면  $\alpha$ 와  $\beta$ 가 이루는 예각의 크기는

$$\theta = \angle AEA'$$

한편, 세 점  $A_0, E, A'$ 은 한 평면  $\alpha$  위에 있으므로 ㉠, ㉢

에서 세 점  $A_0, E, A'$ 은 한 직선 위에 있다.

선분  $A_0B$ 는 원  $C$ 의 지름이므로

$$\overline{A_0A'} \perp \overline{BA'}$$

두 직각삼각형  $A_0DE, A_0BA'$ 은 서로 닮은 도형이고

$\overline{OD} = 3\sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{A_0D} : \overline{DB} = \overline{A_0E} : \overline{EA'}$$

$$\text{즉, } (6 + 3\sqrt{2}) : (6 - 3\sqrt{2}) = \overline{A_0E} : \overline{EA'}$$

따라서 직각삼각형  $AEA'$ 에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{EA'}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{EA'}}{\overline{A_0E}} = \frac{6 - 3\sqrt{2}}{6 + 3\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{2}$$

$$= 3 - 2\sqrt{2}$$

답 ①

# 07 공간좌표

유제

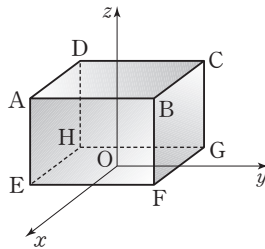
본문 87~93쪽

1 ①	2 25	3 ⑤	4 ③	5 ②
6 4	7 6	8 ⑤		

- 1 점 P(2, -1, 3)을  $x$ 축에 대하여 대칭이동시킨 점은 Q(2, 1, -3)  
 점 Q(2, 1, -3)을  $yz$ 평면에 대하여 대칭이동시킨 점은 R(-2, 1, -3)  
 따라서  $a = -2$ ,  $b = 1$ ,  $c = -3$ 이므로  
 $a + b + c = (-2) + 1 + (-3) = -4$

답 ①

2



- 조건 (가)에서 세 모서리 AD, AB, AE가 각각  $x$ 축,  $y$ 축,  $z$ 축에 평행하고 조건 (나)에서 점 E를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점이 점 G이므로 선분 EG의 중점은 원점이다.  
 조건 (다)에서 꼭짓점 B의 좌표가 (2, 3, 5)이므로 점 B에서  $xy$ 평면에 내린 수선의 발 F의 좌표는 (2, 3, 0)이다.  
 이때 점 F를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점이 점 H이므로 점 H의 좌표는 (-2, -3, 0)이다.  
 따라서  $a = -2$ ,  $b = -3$ ,  $c = 0$ 이므로  
 $(a + b + c)^2 = \{(-2) + (-3) + 0\}^2 = 25$

답 25

- 3 점 A(2, -1, 3)을 원점에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는 (-2, 1, -3)이므로

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{\{3 - (-2)\}^2 + \{2 - 1\}^2 + \{1 - (-3)\}^2} \\ &= \sqrt{25 + 1 + 16} \\ &= \sqrt{42} \end{aligned}$$

답 ⑤

- 4  $\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서  
 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$   
 $(3-3)^2 + (0-3)^2 + (3-0)^2$   
 $= (0-3)^2 + (2-0)^2 + (a-3)^2$   
 $(a-3)^2 = 5$   
 $a-3 = -\sqrt{5}$  또는  $a-3 = \sqrt{5}$   
 즉,  $a = 3 - \sqrt{5}$  또는  $a = 3 + \sqrt{5}$   
 따라서 모든  $a$ 의 값의 합은  
 $(3 - \sqrt{5}) + (3 + \sqrt{5}) = 6$

답 ③

- 5 점 P(2, 10, -5)를  $x$ 축에 대하여 대칭이동시킨 점은 Q(2, -10, 5)  
 선분 PQ를 3 : 2로 내분하는 점 R의 좌표는  
 $\left( \frac{3 \times 2 + 2 \times 2}{3 + 2}, \frac{3 \times (-10) + 2 \times 10}{3 + 2}, \frac{3 \times 5 + 2 \times (-5)}{3 + 2} \right)$

즉, R(2, -2, 1)

따라서  $OR = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$ 

답 ②

- 6 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는  
 $\left( \frac{8+5+(-1)}{3}, \frac{1+(-3)+(-4)}{3}, \frac{9+6+3}{3} \right)$   
 즉, G(4, -2, 6)  
 선분 OG의 중점 M의 좌표는  
 $\left( \frac{0+4}{2}, \frac{0+(-2)}{2}, \frac{0+6}{2} \right)$   
 즉, M(2, -1, 3)  
 따라서  $a = 2$ ,  $b = -1$ ,  $c = 3$ 이므로  
 $a + b + c = 2 + (-1) + 3 = 4$

답 4

- 7 점 (-3, 0, 2)를 중심으로 하고  $yz$ 평면에 접하는 구의 반지름의 길이는  $|-3| = 3$ 이므로 구하는 구의 방정식은  
 $(x+3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 3^2$   
 $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4z + 4 = 0$



따라서  $a=6, b=0, c=-4, d=4$ 이므로  
 $a+b+c+d=6+0+(-4)+4=6$

답 6

- 8 점 C의  $x$ 좌표가 0이므로 점 C는  $yz$ 평면 위에 놓인다.  
 선분 AB의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는

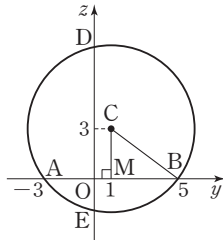
$$\left(\frac{0+0}{2}, \frac{-3+5}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$$

즉,  $M(0, 1, 0)$

점 M을 지나고  $xy$ 평면에 수직인 직선이 구의 중심 C를 지나므로 두 점 C, M의  $x$ 좌표와  $y$ 좌표는 각각 서로 같다.

$a=1$

주어진 구를 S라 하면 구 S와  $yz$ 평면이 만나서 생기는 원은 그림과 같다.



직각삼각형 CMB에서

$$\overline{BM}=5-1=4, \overline{CM}=3 \text{이므로}$$

$$\overline{CB}=\sqrt{\overline{BM}^2+\overline{CM}^2}$$

$$=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

따라서 구 S는 중심이  $C(0, 1, 3)$ 이고 반지름의 길이가 5이므로 구 S의 방정식은

$$x^2+(y-1)^2+(z-3)^2=25 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①에  $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$0^2+(0-1)^2+(z-3)^2=25$$

$$(z-3)^2=24$$

$$z=3\pm 2\sqrt{6}$$

따라서 두 점 D, E의 좌표를 각각

$$(0, 0, 3+2\sqrt{6}), (0, 0, 3-2\sqrt{6})$$

으로 놓으면

$$\overline{DE}=|3-2\sqrt{6}-(3+2\sqrt{6})|$$

$$=4\sqrt{6}$$

따라서 원점을 O라 하면 삼각형 BDE의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{DE} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{6} \times 5 = 10\sqrt{6}$$

답 ⑤

Level 1 기초 연습

본문 94~95쪽

1 ②	2 ③	3 20	4 ①	5 10
6 ⑤	7 ③	8 ①		

- 1 점  $(1, -2, -1)$ 에서  $z$ 축에 내린 수선의 발의 좌표는  
 $(0, 0, -1)$ 이므로

$$a=0, b=0, c=-1$$

$$\text{따라서 } a+b+c=0+0+(-1)=-1$$

답 ②

- 2 점  $(2, 3, -1)$ 을  $zx$ 평면에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는  $(2, -3, -1)$ 이다.

답 ③

- 3 두 점  $(1, 0, 2), (-1, a, 3)$  사이의 거리는

$$\sqrt{(-1-1)^2+(a-0)^2+(3-2)^2}=\sqrt{4+a^2+1}=\sqrt{a^2+5}$$

$$\text{이므로 } \sqrt{a^2+5}=5 \text{에서}$$

$$a^2+5=25$$

$$\text{따라서 } a^2=20$$

답 20

- 4 점 P의 좌표를  $(a, b, c)$ 라 하자.

조건 (가)에서 점 P는  $zx$ 평면 위에 있으므로  $y$ 좌표는 0이다.

즉,  $b=0$

점 P와  $xy$ 평면 사이의 거리는  $|c|$ 이므로 조건 (나)에서

$$|c|=1, \text{ 즉 } c=-1 \text{ 또는 } c=1$$

점 P와  $yz$ 평면 사이의 거리는  $|a|$ 이므로 조건 (나)에서

$$|a|=1, \text{ 즉 } a=-1 \text{ 또는 } a=1$$

이상에서 점 P는

$$(-1, 0, -1), (-1, 0, 1), (1, 0, -1), (1, 0, 1)$$

의 4개가 존재한다.

답 ①

- 5 선분 AB를 3 : 4로 외분하는 점의  $z$ 좌표는

$$\frac{3 \times 2 - 4 \times 4}{3 - 4} = \frac{6 - 16}{-1} = 10$$

답 10



- 6 점  $(2, -1, a)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는  $(-2, 1, -a)$ 이므로 점  $(-2, 1, -a)$ 와 점  $(b, c, -3)$ 은 일치한다.  
따라서  $-2=b, 1=c, -a=-3$ 이므로  
 $a+b+c=3+(-2)+1=2$

답 ⑤

**다른 풀이**

두 점  $(2, -1, a), (b, c, -3)$ 을 각각 A, B라 하자.  
두 점 A, B가 원점에 대하여 대칭이면 선분 AB의 중점은 원점이므로  
 $\frac{2+b}{2} = \frac{-1+c}{2} = \frac{a+(-3)}{2} = 0$ 이어야 한다.  
따라서  $b=-2, c=1, a=3$ 이므로  
 $a+b+c=3+(-2)+1=2$

- 7 삼각형 OAB의 무게중심의 좌표는  
 $\left(\frac{0+(-3)+6}{3}, \frac{0+a+5}{3}, \frac{0+4+(-a)}{3}\right)$   
즉,  $\left(1, \frac{a+5}{3}, \frac{-a+4}{3}\right)$   
이 무게중심의  $y$ 좌표와  $z$ 좌표가 서로 같으므로  
 $\frac{a+5}{3} = \frac{-a+4}{3}, a+5=-a+4$   
따라서  $a=-\frac{1}{2}$

답 ③

- 8 구  $(x+2)^2+(y+a)^2+(z-1)^2=2a$ 의 중심의 좌표는  $(-2, -a, 1)$ 이고 반지름의 길이는  $\sqrt{2a}$ 이므로  
 $\sqrt{2a}=4$ 에서  $2a=4^2$   
따라서  $a=8$ 이므로 이 구의 중심의  $y$ 좌표는  
 $-a=-8$

답 ①

**Level 2 기본 연습**

본문 96~97쪽

- 1 ②      2 ③      3 16      4 ④      5 ②  
6 ④      7 ⑤      8 ④

- 1 점  $A(a, b, a-b)$ 에서  $xy$ 평면에 내린 수선의 발 H의 좌표는  
 $(a, b, 0)$   
이때  $H(2, -4, 0)$ 이므로  
 $a=2, b=-4$   
따라서  $A(2, -4, 2-(-4))$ , 즉  $A(2, -4, 6)$ 이므로  
 $\overline{AH}=|6-0|=6$   
한편,  $\overline{OH}=\sqrt{2^2+(-4)^2+0^2}=2\sqrt{5}$ 이고,  $\overline{OH} \perp \overline{AH}$ 이므로 삼각형 OAH의 넓이는  
 $\frac{1}{2} \times \overline{OH} \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 6 = 6\sqrt{5}$

답 ②

- 2 점 C는 선분 AB 위에 있고,  $\overline{AC} : \overline{CB} = 1 : c$ 이므로 점 C는 선분 AB를  $1 : c$ 로 내분하는 점이다.  
선분 AB를  $1 : c$ 로 내분하는 점의  $y$ 좌표는  
 $\frac{1 \times 8 + c \times 2}{1+c}$ 이고 점 C의  $y$ 좌표는 4이므로  
 $\frac{8+2c}{1+c} = 4$ 에서  $8+2c=4+4c$ , 즉  $c=2$   
따라서 선분 AB를  $1 : 2$ 로 내분하는 점 C의 좌표는  
 $\left(\frac{1 \times 2 + 2 \times (-4)}{1+2}, 4, \frac{1 \times a + 2 \times 0}{1+2}\right)$   
즉,  $\left(-2, 4, \frac{a}{3}\right)$ 이므로  
 $b=-2, \frac{a}{3}=-2$   
따라서  $a=-6, b=-2, c=2$ 이므로  
 $a+b+c=-6+(-2)+2=-6$

답 ③

- 3 선분 AB의 중점 M의 좌표는  
 $\left(\frac{2+2}{2}, \frac{3+5}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$ , 즉  $(2, 4, 3)$ 이고,  
점 M에서  $yz$ 평면에 내린 수선의 발 H의 좌표는  $(0, 4, 3)$ 이다.  
따라서 삼각형 ABH의 무게중심의 좌표는  
 $\left(\frac{2+2+0}{3}, \frac{3+5+4}{3}, \frac{4+2+3}{3}\right)$   
즉,  $\left(\frac{4}{3}, 4, 3\right)$ 이므로  
 $a=\frac{4}{3}, b=4, c=3$   
따라서  $a \times b \times c = \frac{4}{3} \times 4 \times 3 = 16$

답 16



4  $\overline{OA}=2$ 이므로 조건 (가)에 의하여

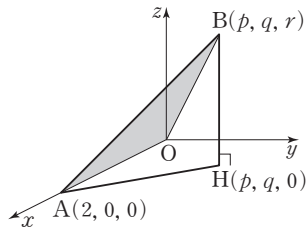
$$\overline{OB}=\sqrt{p^2+q^2+r^2}=2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\sqrt{(p-2)^2+(q-0)^2+(r-0)^2} \\ &=\sqrt{(p-2)^2+q^2+r^2}=2 \quad \dots\dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

점 B에서  $xy$ 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$H(p, q, 0)$$

이때 선분 AB의  $xy$ 평면 위로의 정사영은 선분 AH이므로  
직선 AB와  $xy$ 평면이 이루는 예각의 크기는  $\angle BAH$ 이고,  
조건 (나)에서  $\angle BAH=30^\circ$



이때  $r>0$ 이므로

$$\overline{BH}=|r-0|=r$$

직각삼각형 BAH에서

$$\sin 30^\circ = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}}, \quad \frac{1}{2} = \frac{r}{2}$$

따라서  $r=1$ 이므로  $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$p^2+q^2+1^2=2^2, \quad (p-2)^2+q^2+1^2=2^2$$

$$\text{즉, } p^2+q^2=3 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$(p-2)^2+q^2=3 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}, \textcircled{4}$ 에서  $p^2=(p-2)^2$ 이고  $q>0$ 이므로

$$p=1, \quad q=\sqrt{2}$$

$$\text{따라서 } p \times q \times r = 1 \times \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$$

④

5 점 B의  $y$ 좌표가 0이므로 점 B는  $zx$ 평면 위에 있다.

한편, 조건 (가)에서  $b<0$ 이므로 두 점 A, C의  $y$ 좌표는 모두 음수이다.

따라서 두 점 A, C는  $zx$ 평면에 대하여 같은 쪽에 있고, 점 D는 점 C를  $zx$ 평면에 대하여 대칭이동한 점이다.

따라서  $D(a, -b, c)$ 이고 점 D의  $y$ 좌표는 양수이므로 두 점 A, D는  $zx$ 평면에 대하여 서로 다른 쪽에 있다.

또  $\overline{BC}=\overline{BD}$ 이므로 조건 (가)에서

$$\overline{BD}=6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편, 조건 (나)에서 세 점 A, B, D는 한 직선 위에 있으므로 점 B는 선분 AD 위에 있다.  $\dots\dots \textcircled{2}$

이때

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\sqrt{(1-2)^2+\{0-(-2)\}^2+(3-1)^2} \\ &=\sqrt{1+4+4}=3 \quad \dots\dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

이므로  $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서

$$\overline{AD}=\overline{AB}+\overline{BD}=3+6=9$$

따라서  $\overline{AD}:\overline{BD}=9:6=3:2$ 이므로 점  $D(a, -b, c)$ 는 선분 AB를 3:2로 외분하는 점이다.

$$\text{즉, } a = \frac{3 \times 1 - 2 \times 2}{3 - 2}, \quad -b = \frac{3 \times 0 - 2 \times (-2)}{3 - 2},$$

$$c = \frac{3 \times 3 - 2 \times 1}{3 - 2}$$

$$\text{이므로 } a=-1, \quad b=-4, \quad c=7$$

$$\text{따라서 } a+b+c=-1+(-4)+7=2$$

②

#### 다른 풀이

점 D는 점 C를  $zx$ 평면에 대하여 대칭이동한 점이므로

$$D(a, -b, c)$$

점 B는 선분 AD 위의 점이므로 선분 AD를 1:k ( $k>0$ )으로 내분한 점을 B라 하면 점 B의 좌표는

$$\left( \frac{a+2k}{1+k}, \frac{-b-2k}{1+k}, \frac{c+k}{1+k} \right)$$

이때  $B(1, 0, 3)$ 이므로

$$\frac{a+2k}{1+k}=1, \quad \frac{-b-2k}{1+k}=0, \quad \frac{c+k}{1+k}=3$$

$$\text{따라서 } a=1-k, \quad b=-2k, \quad c=2k+3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이므로  $C(1-k, -2k, 2k+3)$

$$\text{이때 } \overline{BC}=\sqrt{k^2+4k^2+4k^2}=6\text{이므로}$$

$$k^2=4$$

$$k>0\text{이므로 } k=2$$

$$\text{따라서 } \textcircled{1}\text{에서 } a=-1, \quad b=-4, \quad c=7\text{이므로}$$

$$a+b+c=-1+(-4)+7=2$$

6  $zx$ 평면 위의 모든 점의  $y$ 좌표는 0이다.

따라서 구  $(x-a)^2+(y-a+1)^2+(z-a+2)^2=49$ 와  $zx$ 평면이 만나서 생기는 원을 C라 하면 원 C의 방정식은 구의 방정식  $(x-a)^2+(y-a+1)^2+(z-a+2)^2=49$ 에  $y=0$ 을 대입한 식과 같다.

$$\text{즉, } (x-a)^2+(0-a+1)^2+(z-a+2)^2=49$$

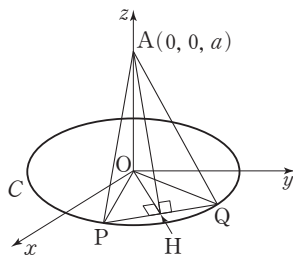
이므로 원 C의 방정식은

$(x-a)^2 + (z-a+2)^2 = 49 - (a-1)^2$  (단,  $y=0$ )  
 이때 원  $C$ 의 넓이는  $24\pi$ 이고 반지름의 길이는  
 $\sqrt{49 - (a-1)^2}$ 이므로  $49 - (a-1)^2 = 24$ 이어야 한다.  
 따라서  $(a-1)^2 = 25$ 에서  
 $a=5+1=6$  또는  $a=-5+1=-4$   
 $a>0$ 이므로  $a=6$

답 ④

7  $xy$ 평면 위에 있는 원  $C : x^2 + y^2 = 9$ 의 중심은 원점  $O$ 이고 반지름의 길이는 3이다.

이때  $z$ 축 위에 있는 점  $A(0, 0, a)$ 에서  $xy$ 평면에 내린 수선의 발은 원점  $O$ 이고, 점  $O$ 에서  $xy$ 평면 위에 있는 직선  $PQ$ 에 내린 수선의 발을  $H$ 라 하면 삼수선의 정리에 의하여  $\overline{AH} \perp \overline{PQ}$  ..... ㉠



한편,  $\overline{OH} \perp \overline{PQ}$  ..... ㉡

이므로 삼각형  $OPH$ 와 삼각형  $OQH$ 는 합동이 되어 점  $H$ 는 선분  $PQ$ 의 중점이다.

따라서  $\overline{PH} = \frac{1}{2}\overline{PQ} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ 이므로 직각삼각형  $OPH$ 에서

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{PH}^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$$

한편,  $xy$ 평면과 평면  $APQ$ 의 교선은 직선  $PQ$ 이므로

㉠, ㉡에서 평면  $APQ$ 와  $xy$ 평면이 이루는 예각의 크기는  $\angle OHA$ 이다.

따라서 직각삼각형  $AOH$ 에서

$$\angle OHA = 60^\circ \text{이므로}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\overline{OA}}{\overline{OH}}$$

이때  $a>0$ 에서  $\overline{OA} = a$ 이므로

$$\sqrt{3} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

따라서  $a = 2\sqrt{6}$

답 ⑤

8 구  $S$ 의 중심은  $A(2, 2, -1)$ 이므로

$$\overline{OA} = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$$

원  $C$  위의 점  $P$ 는 구  $S$  위의 점이고, 구  $S$ 의 반지름의 길이는 2이므로

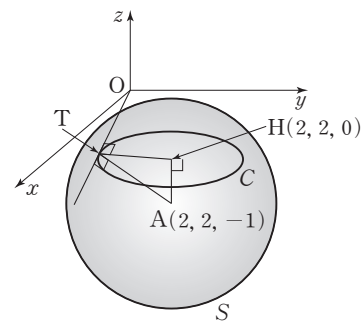
$$\overline{AP} = 2$$

이때  $\overline{AP} \perp \overline{OP}$ 이므로 직각삼각형  $OPA$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AP}^2} \\ &= \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

답 ④

참고



구  $S$ 의 중심  $A$ 에서  $xy$ 평면에 내린 수선의 발을  $H$ 라 하면 점  $H$ 는 원  $C$ 의 중심이다.

또 원점  $O$ 에서 원  $C$ 에 그은 접선 중 하나의 접점을  $T$ 라 하면

$$\overline{HT} \perp \overline{OT}$$

즉,  $\overline{AH} \perp (xy\text{평면})$ 이고  $\overline{HT} \perp \overline{OT}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{AT} \perp \overline{OT}$$

따라서 주어진 문제에서의 점  $P$ 는 점  $T$ 와 일치한다.

### Level 3 실력 완성

본문 98쪽

1 25      2 14      3 ③

1 구  $S$ 의 중심을  $S(a, b, c)$ 라 하고 반지름의 길이를  $r$ 라 하자.

구  $S$ 와  $xy$ 평면,  $yz$ 평면,  $zx$ 평면이 만나서 생기는 세 원  $C_1, C_2, C_3$ 의 중심을 각각  $O_1, O_2, O_3$ 이라 하면  $O_1(a, b, 0), O_2(0, b, c), O_3(a, 0, c)$ 이므로



$$\overline{SO_1} = |c|, \overline{SO_2} = |a|, \overline{SO_3} = |b| \quad \dots\dots ㉑$$

이때 조건 (가)에서 세 원  $C_1, C_2, C_3$ 의 반지름의 길이는 각각 1, 2, 3이므로

$$\overline{SO_1}^2 + 1^2 = \overline{SO_2}^2 + 2^2 = \overline{SO_3}^2 + 3^2 = r^2 \text{에서}$$

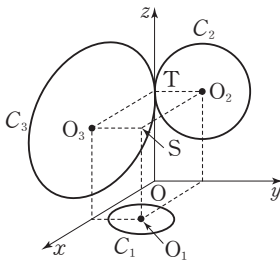
$$\overline{SO_1}^2 = r^2 - 1, \overline{SO_2}^2 = r^2 - 4, \overline{SO_3}^2 = r^2 - 9 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑, ㉒에서

$$c^2 = r^2 - 1, a^2 = r^2 - 4, b^2 = r^2 - 9 \quad \dots\dots ㉓$$

한편, 조건 (나)에서 두 원  $C_2, C_3$ 이 한 점에서만 만나므로 그 교점을 T라 하면 점 T는  $z$ 축 위의 점이고

$$T(0, 0, c)$$



이때  $\overline{ST} = r$ 이므로

$$\sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2 + (c-c)^2} = r$$

$$\text{즉, } a^2 + b^2 = r^2 \quad \dots\dots ㉔$$

㉓, ㉔에서

$$(r^2 - 4) + (r^2 - 9) = r^2 \text{이므로}$$

$$r^2 = 13$$

$$\text{즉, } r = \sqrt{13}$$

따라서 ㉓에서

$$a^2 = 9, b^2 = 4, c^2 = 12 \text{이므로}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 9 + 4 + 12 = 25$$

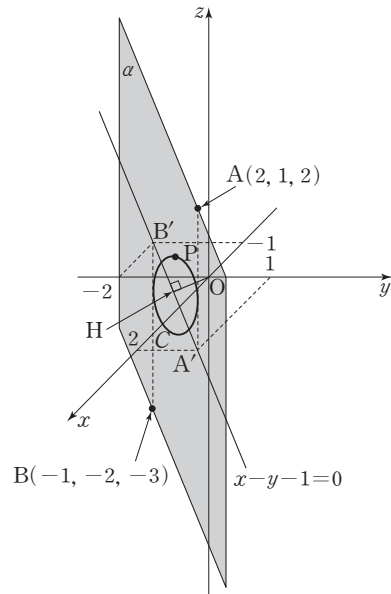
답 25

**2** 구 S는 중심이  $O(0, 0, 0)$ 이고 반지름의 길이가 2이므로 조건 (가)에서

$$\overline{OP} = 2 \quad \dots\dots ㉑$$

두 점 A, B에서  $xy$ 평면에 내린 수선의 발을 각각  $A', B'$ 이라 하면

$$A'(2, 1, 0), B'(-1, -2, 0)$$



이때 두 직선  $AA', BB'$ 은 모두  $xy$ 평면과 수직이므로 네 점 A,  $A', B, B'$ 을 지나는 평면은  $xy$ 평면과 수직이다.

이 평면을  $\alpha$ 라 하면 조건 (나)에서 점 P는 평면  $\alpha$  위에 있다. 따라서 점 P는 구 S와 평면  $\alpha$ 가 만나서 생기는 원 위의 점이다.

점 P가 지나는 이 원을 C라 하자.

구 S의 중심인 원점 O에서 평면  $\alpha$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 원 C의 중심이다.

이때  $xy$ 평면은 구 S의 중심을 지나고 직선  $A'B'$ 은  $xy$ 평면과 평면  $\alpha$ 의 교선이고

$$(xy\text{평면}) \perp \alpha \quad \dots\dots ㉒$$

이므로 점 H는 직선  $A'B'$  위에 있고,

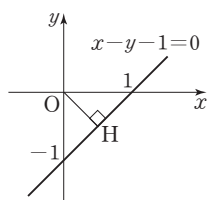
$$\overline{OH} \perp \overline{A'B'} \quad \dots\dots ㉓$$

한편,  $xy$ 평면 위에서 두 점  $A'(2, 1, 0), B'(-1, -2, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 1 = \frac{-2 - 1}{-1 - 2}(x - 2)$$

즉,  $x - y - 1 = 0$ 이므로 ㉒, ㉓에서  $xy$ 평면 위에서 원점과 직선  $A'B'$  사이의 거리는

$$\overline{OH} = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \dots\dots ㉔$$



따라서 ㉠, ㉡에서 원 C의 반지름의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{PH} &= \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OH}^2} \\ &= \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}\end{aligned}$$

이므로 원 C의 둘레의 길이는

$$2 \times \frac{\sqrt{14}}{2} \times \pi = \sqrt{14}\pi$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 모든 점 P가 나타내는 도형의 길이는  $l = \sqrt{14}\pi$ 이므로

$$\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 = 14$$

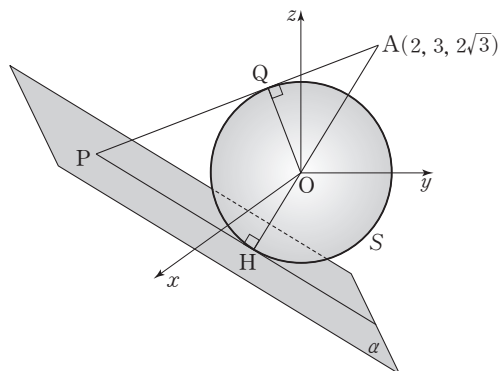
답 14

- 3 구 S :  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 는 중심이 O(0, 0, 0)이고 반지름의 길이가 3이다.

이때  $\overline{OA} = \sqrt{2^2 + 3^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{25} = 5$ 이고,

직선 AP와 구 S는 점 Q에서 접하므로

$$\overline{AQ} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OQ}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$



이때  $\overline{AQ} : \overline{QP} = 1 : p$ 이므로

$$\overline{QP} = p \times \overline{AQ} = 4p$$

점 A에서 평면  $\alpha$ 에 내린 수선의 발을 H라 하자.

주어진 조건을 만족시키는 모든 점 P에 대하여 선분 AP의 길이는 항상 일정하므로 점 P가 평면  $\alpha$  위에서 나타내는 도형은 원이고 이 원의 중심은 직선 AO와 평면  $\alpha$ 의 교점인 점 H이며 점 H는 구 S와 평면  $\alpha$ 의 접점이다.

즉, 평면  $\alpha$ 가 구 S와 점 H에서 접하므로

$$\overline{AH} = \overline{OA} + \overline{OH} = 5 + 3 = 8$$

이때 두 직각삼각형 AQO, AHP는 닮은 도형이므로

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AP}} \quad \dots\dots ㉠$$

이때  $\overline{AP} = \overline{AQ} + \overline{QP} = 4 + 4p = 4(p+1)$ 이므로 ㉠에서

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{4(p+1)} = \frac{2}{p+1}$$

$$4(p+1) = 10$$

$$\text{따라서 } p = \frac{3}{2}$$

답 ③

# 고1~2 내신 중점 로드맵

과목	고교 입문	기초	기본	특화	단기
국어	고등 예비 과정	윤혜정의 나비효과 입문편 어휘가 독해다!	기본서 올림포스	국어 특화 국어 독해의 원리   국어 문법의 원리	단기 특강
영어		내 등급은?	기본서 올림포스 전국연합 학력평가 기출문제집	영어 특화 Grammar POWER   Reading POWER Listening POWER   Voca POWER	
수학		기초 50일 수학 초급 올림포스 닥터링		고급 올림포스 고난도	
사회			기본서 개념완성 + 개념완성 문항편	수학 특화 수학의 왕도	
과학				인공지능 수학과 함께하는 AI 기초	

과목	시리즈명	특징	수준	대상
전과목	고등예비과정	예비 고등학생을 위한 과목별 단기 완성	●	예비 고1
국/영/수	내 등급은?	고1 첫 학력평가 + 반 배치고사 대비 모의고사	●	예비 고1
	올림포스	내신과 수능 대비 EBS 대표 국어 · 수학 · 영어 기본서	●	고1~2
	올림포스 전국연합학력평가 기출문제집	전국연합학력평가 문제 + 개념 기본서	●	고1~2
	단기 특강	단기간에 끝내는 유형별 문항 연습	●	고1~2
한/사/과	개념완성 & 개념완성 문항편	개념 한 권 + 문항 한 권으로 끝내는 한국사 · 탐구 기본서	●	고1~2
국어	윤혜정의 나비효과 입문편	베스트셀러 '개념의 나비효과', '패턴의 나비효과'의 입문편	●	고1~2
	어휘가 독해다!	7개년 학평 · 모평 · 수능 출제 필수 어휘 학습	●	고1~2
	국어 독해의 원리	내신과 수능 대비 문학 · 독서(비문학) 특화서	●	고1~2
	국어 문법의 원리	필수 개념과 필수 문항의 언어(문법) 특화서	●	고1~2
영어	Grammar POWER	구문 분석 트리로 이해하는 영어 문법 특화서	●	고1~2
	Reading POWER	수준과 학습 목적에 따라 선택하는 영어 독해 특화서	●	고1~2
	Listening POWER	수준별 수능형 영어듣기 모의고사	●	고1~2
	Voca POWER	고등학교 영어 교육과정 필수 어휘 단어집	●	고1~2
수학	50일 수학	50일 만에 완성하는 중학~고교 수학의 맥	●	고1~2
	올림포스 닥터링	친절한 개념 설명을 통해 쉽게 연습하는 수학 유형	●	고1~2
	올림포스 고난도	1등급을 위한 고난도 유형 집중 연습	●	고1~2
	수학의 왕도	EBS가 만든 신개념 수학 특화서	●	고1~2
기타	수학과 함께하는 AI 기초	파이선 프로그래밍, AI 알고리즘에 직접 필요한 수학 개념	●	고1~2

# 고2~N수 수능 집중 로드맵



과목	수능 입문	기출 / 연습	연계+연계 보완	고난도	모의고사
국어	수능 감(感)잡기		수능연계교재의 국어 어휘		
영어	뉴수능 스타트	수능 기출의 미래	수능연계교재의 VOCA 1800 수능연계 기출 Vaccine VOCA 2200	수능연계완성 3/4주 특강 고난도 · 신유형	FINAL 실전모의고사
수학	수능특강 Light	강의노트 수능개념	수능특강Q 미니모의고사	수능특강 연계 기출	만점마무리 봉투모의고사
사회			연계 수능특강	수능의 7대 함정	
과학			수능완성	수능완성 사용설명서	고난도 시크릿X 봉투모의고사

과목	시리즈명	특징	수준	영역
수능 입문	수능 감(感) 잡기	동일 개념의 내신과 수능 문항 비교로 수능 입문	●	국/수/영
	뉴수능 스타트	2022학년도 수능 평가원 예시문항 최초 분석	●	국/수/영
	수능특강 Light	수능 연계교재 학습 전 연계교재 입문서	●	국/영
기출/연습	수능개념	EBSi 대표 강사들과 함께하는 수능 개념 다지기	●	전영역
	수능 기출의 미래	올해 수능에 딱 필요한 문제만 선별한 기출 문제집	●	전영역
	수능특강Q 미니모의고사	매일 15분으로 연습하는 고퀄리티 미니모의고사	●	전영역
연계 + 연계 보완	수능특강	최신 수능 경향과 기출 유형을 분석한 종합 개념서	●	전영역
	수능특강 사용설명서	수능 연계교재 수능특강 지문 · 자료 · 문항 분석	●	전영역
	수능특강 연계 기출	수능특강 수록 작품과 지문과 연관된 기출문제 학습	●	국/영
	수능완성	유형 분석과 실전모의고사로 단련하는 문항 연습	●	전영역
	수능완성 사용설명서	수능 연계교재 수능완성 국어 · 영어 지문 분석	●	국/영
	수능연계교재의 국어 어휘	수능 지문과 문항 이해에 필요한 어휘 학습서	●	국어
	수능연계교재의 VOCA 1800	수능특강과 수능완성의 필수 중요 어휘 1800개 수록	●	영어
	수능연계 기출 Vaccine VOCA 2200	수능-EBS 연계 및 평가원 최다 빈출 어휘 선별 수록	●	영어
	수능연계완성 3/4주 특강	단기간에 끝내는 수능 킬러 문항 대비서	●	국/수/영/과
고난도	수능의 7대 함정	아깝게 틀리기 쉬운 영역별 수능 함정 문제 유형 분석	●	국/수/영/사/과
	FINAL 실전모의고사	수능 동일 난도의 최다 분량, 최다 과목 모의고사	●	전영역
모의고사	만점마무리 봉투모의고사	실제 시험지 형태 + OMR카드 실전 훈련 모의고사	●	전영역
	고난도 시크릿X 봉투모의고사	제대로 어려운 고퀄리티 최고난도 모의고사	●	국/수/영

**MEMO**