

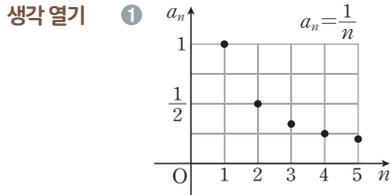
I 수열의 극한

1 수열의 극한

01 수열의 극한

11 ~ 15쪽

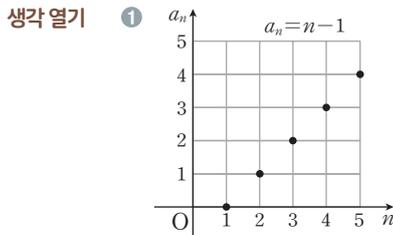
준비하기 (1) $a_n = \frac{1}{n^2}$ (2) $a_n = 2n - 1$



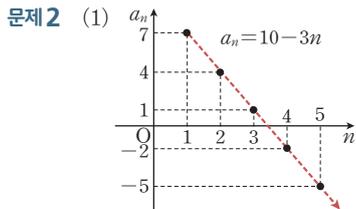
② 0에 한없이 가까워진다.

생각 특독 α

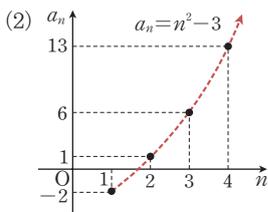
문제 1 (1) 2 (2) 1



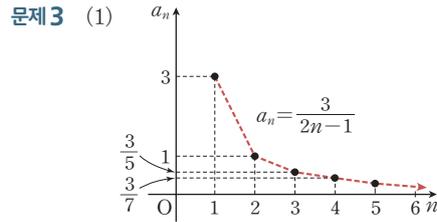
② 한없이 커진다.



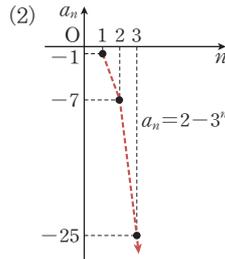
따라서 수열 $\{10 - 3n\}$ 은 음의 무한대로 발산한다.



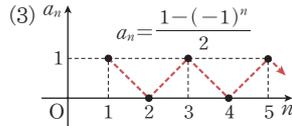
따라서 수열 $\{n^2 - 3\}$ 은 양의 무한대로 발산한다.



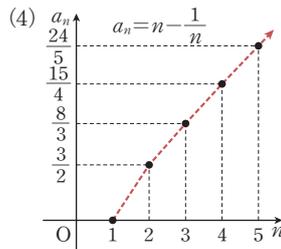
따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2n-1} = 0$ 이다.



따라서 수열 $\{2 - 3^n\}$ 은 발산한다.



따라서 수열 $\left\{\frac{1 - (-1)^n}{2}\right\}$ 은 발산한다.



따라서 수열 $\left\{n - \frac{1}{n}\right\}$ 은 발산한다.

생각 넓히기 ① 예시 $a_n = \frac{n+1}{n^2}$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이고,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{4n^2 - 4n + 1} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{4n^2} = 0$$

② 예시 $a_{2n-1} = 1, a_{2n} = 0$ 이면 수열 $\{a_n\}$ 은

$$\{a_n\} : 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

이므로 발산한다.

즉, 두 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 과 $\{a_{2n}\}$ 이 각각 수렴한다고 해서 수열 $\{a_n\}$ 이 반드시 수렴하는 것은 아니다.

준비하기 (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{1}{2}$

- 생각 열기 ① $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$
 ② $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 5$
 ③ 같다.

문제 1 (1) -2 (2) 3 (3) $-\frac{5}{2}$

문제 2 (1) 0 (2) -18 (3) 5

문제 3 (1) -2 (2) 0 (3) $-\frac{3}{2}$ (4) 1

문제 4 (1) 양의 무한대로 발산 (2) 음의 무한대로 발산

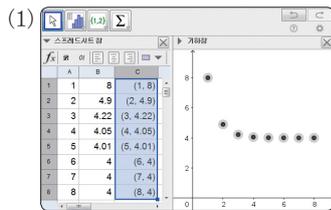
문제 5 (1) 거짓, [반례] $a_n = n, b_n = -n$
 (2) 참
 (3) 거짓, [반례] $a_n = \frac{1}{n}, b_n = n$

문제 6 (1) 0 (2) 0

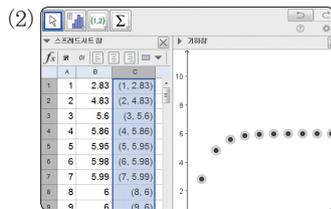
문제 7 5

공학적 도구

21쪽



따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$ 이다.



따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6$ 이다.

준비하기 (1) $a_n = 2^n$ (2) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

생각 열기 ①

	1단계	2단계	3단계	...	n단계	...
a_n	2	4	8	...	2^n	...
b_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$...	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$...

- ② a_n : 한없이 커진다.
 b_n : 0에 한없이 가까워진다.

문제 1 (1) 수렴, 0 (2) 발산 (3) 발산 (4) 수렴, 0

문제 2 수렴, 0

문제 3 (1) 발산 (2) 수렴, -6
 (3) 수렴, 0 (4) 발산

문제 4 (1) $|r| > 1$ 일 때 r 에 수렴, $r = 1$ 일 때 $\frac{1}{2}$ 에 수렴,
 $|r| < 1$ 일 때 0에 수렴한다.
 (2) $|r| > 1$ 일 때 0에 수렴, $r = 1$ 일 때 1에 수렴,
 $|r| < 1$ 일 때 r 에 수렴, $r = -1$ 일 때 발산한다.

생각 넓히기 선영: $a > b$, 경수: $a < b$

I -1 중단원 마무리하기

26 ~ 28쪽

01 (1) 발산 (2) 수렴, 0 (3) 발산 (4) 수렴, 0

02 (1) $\frac{1}{2}$ (2) -2 (3) $\frac{2}{3}$

03 2

04 (1) 발산 (2) 수렴, 0 (3) 발산 (4) 수렴, 0

05 3

06 $a = 0, b = 4$

07 (1) 3 (2) 8

08 문제 이해 모든 자연수 n 에 대하여

$$\frac{n+1}{3n+2} \leq a_n \leq \frac{n+1}{3n+1}$$

▶ 50 %

해결과정 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n+2} = \frac{1}{3}$ 이고

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n+1} = \frac{1}{3}$ 이다. ▶ 30%

답구하기 따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}$ ▶ 20%

09 (1) $-1 < x \leq \frac{1}{3}$ (2) $1 < x \leq 100$

10 (1) $|r| > 1$ 일 때, 즉 $r > 1$ 또는 $r < -1$ 이면 $-1 < \frac{1}{r} < 1$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r}\right)^n = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n + r}{r^{n+1} + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}}{r + \left(\frac{1}{r}\right)^n} \\ &= \frac{1+0}{r+0} = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

(2) $|r| < 1$ 일 때, 즉 $-1 < r < 1$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n + r}{r^{n+1} + 1} = \frac{0+r}{0+1} = r$$

(3) $r = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n + r}{r^{n+1} + 1} = \frac{1+1}{1+1} = 1$$

11 $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ 에서

$a_{2n-1} = \sin \frac{(2n-1)\pi}{2}$ 이므로

$a_1 = \sin \frac{\pi}{2} = 1,$

$a_3 = \sin \frac{3\pi}{2} = -1,$

$a_5 = \sin \frac{5\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{2} = 1,$

$a_7 = \sin \frac{7\pi}{2} = \sin \frac{3\pi}{2} = -1,$

⋮

따라서 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 발산한다.

또, $a_{2n} = \sin \frac{2n\pi}{2} = \sin n\pi$ 이므로

$a_2 = \sin \pi = 0,$

$a_4 = \sin 2\pi = 0,$

$a_6 = \sin 3\pi = 0,$

⋮

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 0$

따라서 수열 $\{a_{2n}\}$ 은 수렴하고, 그 극한값은 0이다.

12 $\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}} < a_n < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$ 에서 양 끝 변의 분모를 유리화하면

$$\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2} < a_n < \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$$

위의 부등식에 $n=1, 2, 3, \dots$ 을 차례대로 대입하면

$$\sqrt{4} - \sqrt{3} < a_1 < \sqrt{3} - \sqrt{2},$$

$$\sqrt{5} - \sqrt{4} < a_2 < \sqrt{4} - \sqrt{3},$$

$$\sqrt{6} - \sqrt{5} < a_3 < \sqrt{5} - \sqrt{4},$$

⋮

$$\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2} < a_n < \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$$

이때 각 변끼리 더하면

$$\sqrt{n+3} - \sqrt{3} < \sum_{k=1}^n a_k < \sqrt{n+2} - \sqrt{2}$$

따라서

$$\frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{3}}{\sqrt{n+1}} < \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{\sqrt{n+1}} < \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{2}}{\sqrt{n+1}}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{3}}{\sqrt{n+1}} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{2}}{\sqrt{n+1}} = 1$ 이

므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{\sqrt{n+1}} = 1$$

13 **해결과정** 두 지수함수 $y=4^x, y=3^x$ 의 그래프와 직선 $x=n$ 의 교점 P_n, Q_n 의 좌표는

$P_n(n, 4^n), Q_n(n, 3^n)$

이므로 $\overline{P_n Q_n} = 4^n - 3^n$ ▶ 20%

또, 두 점 P_{n+1}, Q_{n+1} 의 좌표는

$P_{n+1}(n+1, 4^{n+1}), Q_{n+1}(n+1, 3^{n+1})$

이므로 $\overline{P_{n+1} Q_{n+1}} = 4^{n+1} - 3^{n+1}$ ▶ 20%

답구하기 따라서 구하는 극한값은

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{P_{n+1} Q_{n+1}}}{\overline{P_n Q_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} - 3^{n+1}}{4^n - 3^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - 3\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$= 4$

▶ 60%

2 급수

01 급수

30~33쪽

준비하기 (1) $\frac{n}{n+1}$ (2) $\sqrt{n+1}-1$

생각 열기 1

문제 1 (1) 수렴, $-\frac{1}{2}$ (2) 수렴, $\frac{1}{2}$ (3) 발산 (4) 발산

함께하기 ① $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$
 ② $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1})$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1}$
 $= S - S = 0$

문제 2 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2n}-n) = 1 \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n-1} = \frac{1}{3} \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

생각톡톡 성립하지 않는다.

문제 3 (1) 4 (2) 33

02 등비급수

34~36쪽

준비하기 1 $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 2 -1

생각 열기 ① $a_1=1, a_2=\frac{1}{4}, a_3=\left(\frac{1}{4}\right)^2, \dots$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이다.

② $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

문제 1 (1) 수렴, $\frac{2}{3}$ (2) 발산 (3) 수렴, $\frac{3}{10}$ (4) 발산

문제 2 (1) $\frac{8}{3}$ (2) $-\frac{1}{2}$

생각 넓히기 ① $0 < x < 4$ ② 3

03 등비급수의 활용

37~39쪽

준비하기 (1) $\frac{3}{4}$ (2) $\frac{2}{3}$

생각 열기 ① $0.\dot{1}3 = 0.13 + 0.0013 + 0.000013 + \dots$
 ② 첫째항: 0.13, 공비: 0.01

문제 1 (1) $\frac{328}{999}$ (2) $\frac{401}{198}$

문제 2 16π

문제 3 40억 원

생각 넓히기 ① $\frac{a}{4}$ ② $\frac{a}{16}$ ③ $\frac{a}{3}$

탐구 & 융합

40쪽

탐구 ①

	1단계	2단계	3단계	4단계	...
늘어나는 넓이	$\frac{1}{3}A$	$\frac{4}{27}A$	$\frac{16}{243}A$	$\frac{64}{2187}A$...

② $\frac{1}{3}A + \frac{4}{27}A + \frac{16}{243}A + \frac{64}{2187}A + \dots$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} A$

$= \frac{\frac{1}{3}A}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{3}{5}A$

③ [1단계의 도형의 둘레의 길이는

$\left(\frac{1}{3} \times 4\right) \times 3 = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)$

[2단계의 도형의 둘레의 길이는

$\left\{\left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) \times 4 \times 4\right\} \times 3 = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2$

⋮

따라서 [n단계의 도형의 둘레의 길이는

$3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$

④ 눈송이 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$A + \frac{3}{5}A = \frac{8}{5}A \text{ 이므로 유한하지만 둘레의 길이는}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 3 \times \left(\frac{4}{3} \right)^n \right\} = \infty \text{ 이므로 무한히 커진다.}$$

I -2 중단원 마무리하기

41~43쪽

01 (1) 발산 (2) 수렴, 4 02 (1) 수렴, $\frac{1}{2}$ (2) 발산

03 (1) 발산 (2) 수렴, $\frac{8}{9}$ 04 (1) $\frac{8}{5}$ (2) 2

05 $\frac{1}{2}$ 06 $\frac{1}{6}$

07 **문제 이해** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ▶ 20%

해결 과정 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1}$
 $= 5$ ▶ 40%

답구하기 따라서 구하는 극한값은

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2S_n + a_n + 1}{S_{n-1} - a_n - 3} = \frac{2 \times 5 + 0 + 1}{5 - 0 - 3} = \frac{11}{2} \quad \blacktriangleright 40\%$$

08 $\frac{5}{8}$ 09 16

10 $\frac{27}{35}$ 11 $\frac{16}{3}\pi$

12 $x - 3y + 3 = 0$ 에서 $x = 3y - 3 = 3(y - 1)$
 직선 $x - 3y + 3 = 0$ 위의 점 중에서 x, y 좌표가 모두
 자연수인 점의 좌표는

$$(3, 2), (6, 3), (9, 4), \dots, (3n, n+1), \dots$$

$$\text{이므로 } a_n = 3n, b_n = n + 1$$

따라서 구하는 급수의 합은

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n b_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n(n+1)} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

13 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_n = ar^{n-1},$$

$$a_{2n} = ar^{2n-1} = ar \times (r^2)^{n-1}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-r} = 6,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \frac{ar}{1-r^2} = \frac{ar}{(1+r)(1-r)} = 2$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 3, r = \frac{1}{2}$

따라서 구하는 급수의 합은

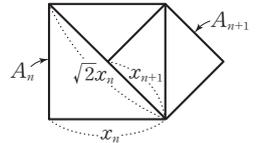
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} a^2 (r^2)^{n-1} = \frac{a^2}{1-r^2} \\ &= \frac{3^2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 12 \end{aligned}$$

14 **해결 과정** 정사각형 A_n 의 한 변의 길이를 x_n , 넓이를 a_n 이라 하면

$$x_1 = 4, a_1 = 4^2 = 16 \quad \blacktriangleright 10\%$$

오른쪽 그림에서

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} x_n$$



이므로

$$a_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 a_n = \frac{1}{2} a_n \quad \blacktriangleright 60\%$$

답구하기 따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 16, 공비가

$\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{16}{1 - \frac{1}{2}} = 32 \quad \blacktriangleright 30\%$$

I 대단원 평가하기

44~47쪽

01 ④ 02 4

03 ③ 04 8

23 **해결과정** 두 등비수열 $\{a_n\}$ 과 $\{b_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r} = 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b_1}{1-r} = 6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{을 하면} \quad \frac{a_1 - b_1}{1-r} = 2$$

이때 $a_1 - b_1 = 1$ 이므로

$$\frac{1}{1-r} = 2, \quad 1-r = \frac{1}{2}$$

$$\text{즉,} \quad r = \frac{1}{2}$$

$\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 에 $r = \frac{1}{2}$ 을 각각 대입하면

$$a_1 = 4, \quad b_1 = 3 \quad \blacktriangleright 70\%$$

답구하기 따라서 수열 $\{a_n b_n\}$ 은 첫째항이

$a_1 b_1 = 4 \times 3 = 12$, 공비가 $r^2 = \frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{12}{1 - \frac{1}{4}} = 16 \quad \blacktriangleright 30\%$$

24 **해결과정** 오른쪽 그림에서

$$S_1 = \pi \times 6^2 \times \frac{60}{360} = 6\pi$$

선분 $B_1 B_2$ 를 그으면 삼각형

$B_1 B_2 C_2$ 에서

$$\overline{B_1 C_2} : \overline{B_2 C_2} = \sqrt{3} : 1$$

이므로

$$6 : \overline{B_2 C_2} = \sqrt{3} : 1, \quad \overline{B_2 C_2} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{즉,} \quad S_2 = \pi \times (2\sqrt{3})^2 \times \frac{60}{360} = 2\pi$$

선분 $B_2 B_3$ 을 그으면 삼각형 $B_2 B_3 C_3$ 에서

$$\overline{B_2 C_3} : \overline{B_3 C_3} = \sqrt{3} : 1$$

이므로

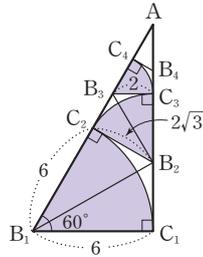
$$2\sqrt{3} : \overline{B_3 C_3} = \sqrt{3} : 1, \quad \overline{B_3 C_3} = 2$$

$$\text{즉,} \quad S_3 = \pi \times 2^2 \times \frac{60}{360} = \frac{2}{3}\pi \quad \blacktriangleright 70\%$$

답구하기 따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 6π , 공비가

$\frac{1}{3}$ 인 등비수열이므로

$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots = \frac{6\pi}{1 - \frac{1}{3}} = 9\pi \quad \blacktriangleright 30\%$$



II 미분법

1 여러 가지 함수의 미분

01 지수함수와 로그함수의 극한

53 ~ 58쪽

준비하기 (1) 5 (2) 2

생각 열기 ① 한없이 커진다. ② 0에 가까워진다.

문제 1 (1) ∞ (2) 0 (3) 0

문제 2 (1) -1 (2) $\frac{1}{2}$

문제 3 (1) ∞ (2) ∞ (3) $-\infty$

문제 4 (1) 2 (2) 0 (3) -1 (4) 1

생각 열기 ① 2.71828...에 한없이 가까워진다.
② 2.71828...에 한없이 가까워진다.

문제 5 (1) e^4 (2) $e^{\frac{1}{4}}$ (3) e^5

문제 6 (1) 0 (2) 7 (3) $-\frac{1}{2}$ (4) $\sqrt{3}$

문제 7 (1) 3 (2) 2 (3) $\frac{1}{\ln a}$ (4) $\ln a$

생각 넓히기 20, 시간이 많이 흐르면 물의 온도가 실내 온도에 가까워진다.

02 지수함수와 로그함수의 미분

60 ~ 62쪽

준비하기 $f'(x) = 2x$

생각 열기 e

생각 톡톡 예시 $f(x) = e^x$

문제 1 (1) $y' = 2^{x-4} \ln 2$
(2) $y' = (3x+8)e^x$

함께하기 $\ln x, \frac{1}{x}, \frac{1}{x \ln a}$