23 문제 이해 함수 $f(x)g(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to3} f(x)g(x)=f(3)g(3)$$ ▶ 10%

해결 과정 $f(3)=1$, $g(3)=3+a$이므로

$$f(3)g(3)=3+a$$ ▶ 30%

$$\lim_{x\to3+} f(x)g(x)=\lim_{x\to3+}(x-2)(x+a)$$
$$=3+a$$
$$\lim_{x\to3-} f(x)g(x)=\lim_{x\to3-}(x-1)(x+a)$$
$$=2(3+a)$$
$$=6+2a$$ ▶ 40%

답 구하기 따라서 $3+a=6+2a$이므로

$$a=-3$$ ▶ 20%

24 해결 과정 $g(x)=f(x)-x^2-4x$라 하면 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다. ▶ 20%

사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$이 열린구간 $(0,\ 1)$과 열린구간 $(1,\ 2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 가지려면

$$g(0)g(1)<0,\quad g(1)g(2)<0$$

이어야 한다. 이때

$$g(0)=f(0)=1>0,$$
$$g(2)=f(2)-12=1>0$$

이므로 $g(1)<0$이어야 한다. ▶ 50%

답 구하기 $g(1)=f(1)-5$
$$=a^2-a-6$$
$$=(a+2)(a-3)<0$$

에서 $-2<a<3$ ▶ 30%

Ⅱ 다항함수의 미분법

1 미분계수와 도함수

01 미분계수 53~59쪽

준비하기 **1** 5 **2** (1) 4 (2) 2

생각 열기 60 m/s

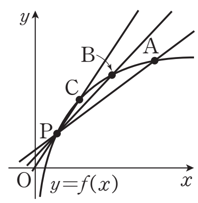
생각톡톡 0

문제 1 (1) -4 (2) $-4-\Delta x$

문제 2 (1) 3 (2) 7

문제 3 -4.8 m/s

생각 열기 ❶



❷ 점 P에서 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선

문제 4 (1) 8 (2) -4

문제 5 $f'(b)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(a)$

함께하기 ❶ $x-a$, $x-a$, $f'(a)$, $f(a)$

❷ 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

문제 6 $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 그런데

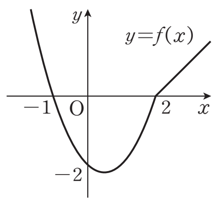
$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{2|x-1|}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{2(x-1)}{x-1}$$
$$=2$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{2|x-1|}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{-2(x-1)}{x-1}$$
$$=-2$$

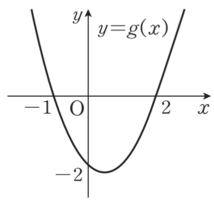
이므로 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$은 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)=2|x-1|$은 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

생각 넓히기 ❶ 함수 $f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같고, 함수 $g(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]

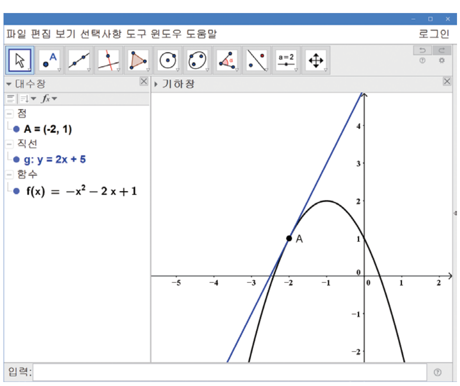


[그림 2]

❷ 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않고, 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

❸ 함수 $f(x)$의 그래프는 $x=2$에서 꺾여 있고, $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다. 또, $g(x)$의 그래프는 $x=2$에서 매끄럽게 연결되어 있고, $g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

공학적 도구 60쪽



$f(x)=-x^2-2x+1$이라 하면

$$f'(-2)=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{(-x^2-2x+1)-1}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}(-x)$$
$$=2$$

따라서 기하창에 그려진 곡선 $y=-x^2-2x+1$ 위의 점 $(-2,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 2로 미분계수 $f'(-2)$와 같음을 알 수 있다.

02 도함수 61~66쪽

준비하기 (1) -2 (2) 6

생각 열기 ❶

a	$\cdots$	0	1	2	3	4	$\cdots$
$f'(a)$	$\cdots$	0	2	4	6	8	$\cdots$

❷ $f'(a)=2a$

문제 1 (1) $f'(x)=1,\ f'(1)=1$

(2) $f'(x)=2x+5,\ f'(1)=7$

(3) $f'(x)=0,\ f'(1)=0$

(4) $f'(x)=6x^2,\ f'(1)=6$

생각 열기 ❶ 차수가 하나씩 낮아지고, 각 항의 지수가 계수로 온다.

❷ $y'=nx^{n-1}$

문제 2 (1) $y'=15x^{14}$

(2) $y'=28x^{27}$

(3) $y'=0$

(4) $y'=0$

함께하기 $f(x+h)-f(x),\ f(x+h)-f(x),\ f'(x),$
$f(x+h),\ g(x+h),\ f(x+h),\ g(x+h),$
$f'(x)$

문제 3 (1) $y'=14x-1$

(2) $y'=-10x+6$

(3) $y'=-12x^2+6x-2$

(4) $y'=5x^4+9x^2-4x+1$

생각톡톡 $y'=2f'(x)f(x)$

문제 4 (1) $y'=8x+1$

(2) $y'=-6x^2+38x-23$

(3) $y'=-20x^3+27x^2+20x-18$

(4) $y'=5x^4+24x^3-14x-42$

생각 넓히기 ❶ 함수 $y=f(x)g(x)h(x)$에 대하여

$$\begin{aligned} y' &= \{f(x)g(x)h(x)\}' \\ &= [\{f(x)g(x)\}h(x)]' \\ &= \{f(x)g(x)\}'h(x) \\ &\qquad +\{f(x)g(x)\}h'(x) \\ &= \{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}h(x) \\ &\qquad +f(x)g(x)h'(x) \\ &= f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x) \\ &\qquad +f(x)g(x)h'(x) \end{aligned}$$

❷ [방법 1] $y'=-5x^4+8x^3+6x^2-12x+3$

[방법 2] $y'=-5x^4+8x^3+6x^2-12x+3$

Ⅱ-1 중단원 마무리하기 68~71쪽

01 -1

02 2

03 8

04 (1) -7 (2) 8

05 (1) $y'=35x^4$ (2) $y'=-4x^3+6x$

(3) $y'=2x^2-\frac{3}{2}x-1$ (4) $y'=-16x-31$

06 해결 과정 x의 값이 -1에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned} &\frac{f(a)-f(-1)}{a-(-1)} \\ &=\frac{(a^2+2a+2)-\{(-1)^2+2\times(-1)+2\}}{a+1} \\ &=\frac{(a+1)^2}{a+1} \\ &=a+1 \end{aligned}$$ ▶ 40 %

또, $f(x)=x^2+2x+2$에서

$f'(x)=2x+2$

이므로 $f'(1)=2\times1+2=4$ ▶ 40 %

답 구하기 따라서 $a+1=4$이므로

$a=3$ ▶ 20 %

07 (1) 6 (2) -2

08 10

09 $f'(d)<f'(b)<f'(c)<f'(a)$

10 (ⅰ) $\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1+}(x-1)^2=0$,

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1-}(x-1)=0$,

$f(1)=0$

에서

$$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1-} f(x)=f(1)$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ⅱ) $$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)^2-0}{x-1}=\lim_{x\to1+}(x-1)=0$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)-0}{x-1}=1$$

따라서 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$은 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

11 $a=-1$, $m=3$

12 해결 과정 $f(x)=ax^2+bx+c$에서 $f(2)=-6$이므로

$f(2)=4a+2b+c=-6$ …… ① ▶ 30 %

또, $f'(x)=2ax+b$에서 $f'(0)=3$, $f'(1)=7$이므로

$f'(0)=b=3$ …… ②

$f'(1)=2a+b=7$ …… ③ ▶ 40 %

답 구하기 ①, ②, ③을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=3$, $c=-20$ ▶ 30 %

13 -16

14 6

15 10055

16 $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 f(2) - 4f(x)}{x-2}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 f(2) - 4f(2) + 4f(2) - 4f(x)}{x-2}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{\{x^2 f(2) - 4f(2)\} - 4\{f(x) - f(2)\}}{x-2}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{f(2)(x^2-4)}{x-2} - 4\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$= f(2) \times \lim_{x \to 2}(x+2) - 4f'(2)$

$= 4f(2) - 4f'(2)$

$= 4\{f(2) - f'(2)\}$

17 주어진 식에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0) = f(0) + f(0)$

에서 $f(0)=0$이므로

$$f'(7) = \lim_{h \to 0} \frac{f(7+h) - f(7)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(7) + f(h) - f(7)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$
$$= f'(0) = 3$$

따라서 $f'(0)=3$이다.

18 ㄱ. [반례] $f(x)=x^2+1$이면 $f'(x)=2x$이므로

$f'(0)=0$이지만 $f(0)=1 \neq 0$이다.

ㄴ. 다항함수는 모든 실수 x에 대하여 연속이므로

$\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$

ㄷ. $h(x)=h(-x)$이므로

$$h'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{h(-x) - h(0)}{-x} \times (-1) \right\}$$
$$= -h'(0)$$

따라서 $h'(0)=0$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

19 조건 ㈎에서 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{2x^3+3x-1} = 1$이므로 $f(x)$의 최고차항은 $2x^3$이다.

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=6x^2+2ax+b$

한편, 조건 ㈏에서 $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{x} = 1$이고 $\lim_{x \to 0} x = 0$이므로 $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$이다.

즉, $f'(0)=0$이므로 $\quad b=0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{6x^2+2ax}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} (6x+2a)$$
$$= 2a = 1$$

$a = \frac{1}{2}$

따라서 $f'(x)=6x^2+x$이므로

$f'(1)=6+1=7$

20 해결 과정 다항식 $x^{10}-x^4+3x^2+1$을 이차식 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$x^{10}-x^4+3x^2+1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ …… ①

①의 양변에 $x=1$을 대입하면

$4=a+b$ …… ②

▶ 40 %

①의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10x^9-4x^3+6x$

$=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

이 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$12=a$ ▶ 20 %

$a=12$를 ②에 대입하면

$b=-8$ ▶ 20 %

답 구하기 따라서 구하는 나머지는 $12x-8$이다.

▶ 20 %

2 도함수의 활용

01 접선의 방정식 73~75쪽

준비하기 $y=3x-2$

생각 열기 ❶ 2

❷ 예시 점 (a, b)를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식이 $y-b=m(x-a)$임을 이용하면, 접선 l의 방정식을 구할 수 있다.

문제 1 (1) $y=x+6$ (2) $y=-3x-4$

문제 2 (1) $y=2x-14$
(2) $y=2x-2$ 또는 $y=2x+2$

문제 3 (1) $y=x$ 또는 $y=-15x-16$ (2) $y=3x+2$

생각 넓히기 ❶ $\left(1, \frac{3}{2}\right)$
❷ $\frac{1}{2}$

02 평균값 정리 76~80쪽

준비하기 모든 실수에서 연속이다.

생각 열기 ❶ $a=-4$, $b=2$
❷ -1
❸ $-4<-1<2$이므로 c는 a와 b 사이에 있다.

문제 1 (1) 3 (2) $\frac{5}{3}$

문제 2 함수 $f(x)=|x|$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 $f(-1)=f(1)$이지만 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 존재하지 않는다.
따라서 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 미분불가능하므로 롤의 정리를 적용할 수 없다.

생각톡톡 평균값 정리에서 $f(a)=f(b)$인 경우가 롤의 정리이다.

함께하기 ❶ $h(a)=0$, $h(b)=0$이므로 $h(a)=h(b)$이다.
❷ 함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하며 $h(a)=h(b)$이다.
따라서 롤의 정리에 의하여 $h'(c)=0$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.
이때 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$이므로

$$\begin{aligned} h'(c) &= f'(c)-g'(c) \\ &= f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ &= 0 \end{aligned}$$

즉, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

문제 3 (1) 1 (2) $\frac{\sqrt{21}}{3}$

문제 4 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $h(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하며 열린구간 (a, b)에 속하는 모든 x에 대하여

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$$

따라서 $h(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 상수함수이므로

$$h(x)=f(x)-g(x)=k \ (k\text{는 상수})$$

즉, $f(x)=g(x)+k$

생각 넓히기 ❶ 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(0, 4)$에 적어도 하나 존재한다. 즉, $f(4)=f(0)+4f'(c)$이고 $f'(x)\le 7$이므로

$$\begin{aligned} f(4) &= f(0)+4f'(c) \\ &= -5+4f'(c) \\ &\le -5+4\times 7 \\ &= 23 \end{aligned}$$

따라서 $f(4)$의 값이 될 수 있는 가장 큰 값은 23이다.

❷ 함수 $f(x)$가 주어진 조건을 만족시킨다고 하면 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=f'(c)$$

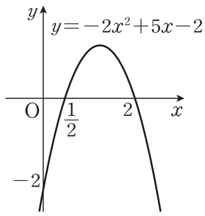
인 c가 열린구간 $(0, 4)$에 적어도 하나 존재한다. 그런데

$$\begin{aligned} \frac{f(4)-f(0)}{4-0} &= \frac{6-(-2)}{4-0} \\ &= 2 \end{aligned}$$

즉, $f'(c)=2$인 c가 존재하므로 $f'(x)<2$인 조건에 모순이다.
따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$는 존재하지 않는다.

03 함수의 증가와 감소, 극대와 극소 82~88쪽

준비하기



생각 열기 고도가 높아지고 있는 구간:
4 km 지점부터 6 km 지점 사이,
12 km 지점부터 16 km 지점 사이
고도가 낮아지고 있는 구간:
6 km 지점부터 12 km 지점 사이,
16 km 지점부터 23 km 지점 사이

문제 1 (1) 닫힌구간 $[-1, 0]$에서 증가, 닫힌구간 $[0, 3]$에서 감소
(2) 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 감소, 닫힌구간 $[1, 3]$에서 증가

문제 2 (1) 구간 $(-\infty, -2]$와 구간 $[2, \infty)$에서 증가하고, 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 감소한다.
(2) 닫힌구간 $[-3, 1]$에서 증가하고,
구간 $(-\infty, -3]$과 구간 $[1, \infty)$에서 감소한다.

문제 3 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, a]$에서 증가하고, 구간 $[a, \infty)$에서 감소한다.
또, 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[b, c]$에서 증가하고, 구간 $(-\infty, b]$와 구간 $[c, \infty)$에서 감소한다.

생각 열기 ❶ 10시 40분, 23시 22분
❷ 4시 44분, 17시 18분

생각톡톡 상수함수는 모든 실수에 대하여 극값을 갖는다.

문제 4 [수지] $y=|x+1|$
이유: 함수 $f(x)=|x+1|$은 $x=-1$에서 극솟값 0을 갖지만 $x=-1$에서 미분가능하지 않으므로 $f'(-1)$이 존재하지 않는다.
[민수] $y=x^3$
이유: 함수 $f(x)=x^3$의 도함수 $f'(x)=3x^2$에서 $f'(0)=0$이지만 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

함께하기 ❶ 증가, 감소, 극대
❷ 감소, 증가, 극소

문제 5 (1) 극댓값: 5, 극솟값: -27
(2) 극댓값: -2, 극솟값: -18

문제 6 $a=0$, $b=-3$, 극솟값: -1

생각 넓히기 ❶ -2, 1, 3
❷ $x=-2$ 또는 $x=3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=-2$ 또는 $x=3$에서 극솟값을 갖는다.
또, $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖는다.

탐구 & 융합 89쪽

탐구 ❶ $\frac{2}{3}$

❷ $r=\frac{1}{2}$일 때의 기포 알갱이는 더 작아져서 사라지게 되고, $r=\frac{3}{4}$일 때의 기포 알갱이는 수면으로 올라가서 터지게 된다.

04 함수의 그래프 90~93쪽

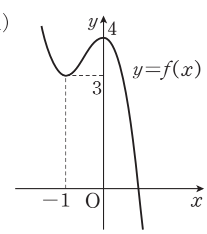
준비하기 최댓값: 4, 최솟값: 0

생각 열기 ❶

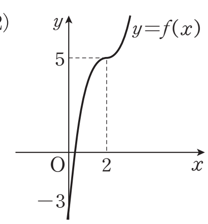
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	1	↗

❷ ↗이면 그래프가 오른쪽 위로 올라가고, ↘이면 그래프가 오른쪽 아래로 내려간다.

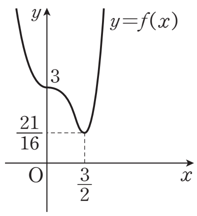
문제 1 (1)



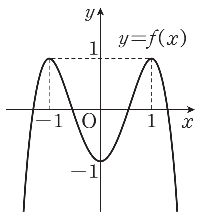
(2)



문제 2 (1)



(2)



문제 3 (1) 최댓값: 5, 최솟값: 1

(2) 최댓값: 10, 최솟값: $-\frac{5}{4}$

문제 4 $8\sqrt{2}$

문제 5 (1) 3500000원 (2) 300벌

탐구 & 융합 94쪽

$\frac{375\sqrt{3}}{2}\pi$

05 방정식과 부등식에의 활용 95~97쪽

준비하기 **1** 2

2 모든 실수 x에 대하여

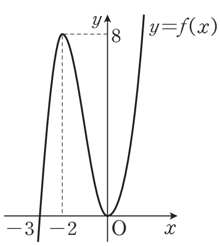
$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

생각 열기 ❶ 3

❷ 3

문제 1 (1) 1 (2) 4

문제 2 (1)



(2) (i) $-8<k<0$일 때, 3개

(ii) $k=-8$ 또는 $k=0$일 때, 2개

(iii) $k<-8$ 또는 $k>0$일 때, 1개

(3) (i) $-8<k<0$일 때, 3개

(ii) $k=-8$ 또는 $k=0$일 때, 2개

(iii) $k<-8$ 또는 $k>0$일 때, 1개

문제 3 (1) $f(x)=2x^3-3x^2+1$이라 하면

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↘	0	↗

$x\geq0$일 때 $f(x)$의 최솟값은 0이므로

$f(x)\geq0$, 즉 $2x^3-3x^2+1\geq0$

따라서 $x\geq0$일 때, 부등식 $2x^3-3x^2\geq-1$이 성립한다.

(2) $f(x)=x^4-4x-(-3)$

$=x^4-4x+3$

이라 하면

$f'(x)=4x^3-4$

$=4(x^3-1)$

$=4(x-1)(x^2+x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

모든 실수 x에 대하여 $f(x)$의 최솟값은 0이므로

$f(x)\geq0$

즉, $x^4-4x+3\geq0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^4-4x\geq-3$이 성립한다.

문제 4 $k\leq-1$

탐구 & 융합 98쪽

(i) $-8<k<100$일 때, 3개

(ii) $k=-8$ 또는 $k=100$일 때, 2개

(iii) $k<-8$ 또는 $k>100$일 때, 1개

06 속도와 가속도 99~101쪽

준비하기 -40

생각 열기 ❶ $-5h+15$

❷ 15

문제 1 (1) 속도: 5, 가속도: 6 (2) 2

문제 2 (1) $\frac{5}{2}$초, $\frac{25}{2}$ m (2) -10 m/s

생각 넓히기 ❶ $x=1.5t$
❷ $f(t)=3t$
❸ 3 m/s

Ⅱ-2 중단원 마무리하기 102~105쪽

01 (1) $y=4x-3$ (2) $y=8x-5$

02 1

03 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\sqrt{3}$

04 (1) 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$과 구간 $[1, \infty)$에서 증가하고, 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 감소한다.
또, $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 6, $x=1$에서 극솟값 -2를 갖는다.
(2) 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 3]$에서 증가하고, 구간 $[3, \infty)$에서 감소한다.
또, $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값 32를 갖는다.

05 (1) 1 (2) 2

06 (1) 속도: 4, 가속도: 2 (2) 시각: 1, 위치: -1

07 $y=-12x+11$

08 1

09 $a=-\frac{4}{3}$, $b=\frac{7}{3}$

10 -23

11 2

12 -140

13 해결 과정 $F(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$$F(x)=(x^3-x^2-x+1)-(-x^2+2x+a)$$
$$=x^3-3x+1-a$$
$$F'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$F'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
그런데 $0\le x\le 2$이므로 $x=1$ ▶ 30 %

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$	$1-a$	↘	$-1-a$	↗	$3-a$

함수 $F(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $-1-a$를 가지므로 닫힌구간 $[0, 2]$에서 $f(x)\ge g(x)$, 즉 $F(x)\ge 0$이 성립하려면

$-1-a\ge 0$, $a\le -1$ ▶ 20 %

답 구하기 따라서 실수 a의 최댓값은 -1이다. ▶ 50 %

14 1

15 문제 이해 $f(x)=x^4+12$라 하면

$f'(x)=4x^3$

접점의 좌표를 (a, a^4+12)라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=4a^3$

이므로 접선의 방정식은

$y-(a^4+12)=4a^3(x-a)$ …… ① ▶ 20 %

해결 과정 이 접선이 원점을 지나므로

$-a^4-12=-4a^4$, $a^4-4=0$

$a=-\sqrt{2}$ 또는 $a=\sqrt{2}$

그런데 접점은 제1사분면에 있으므로

$a=\sqrt{2}$ ▶ 30 %

$a=\sqrt{2}$를 ①에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$y=8\sqrt{2}x$ ▶ 30 %

답 구하기 이때 접선이 점 $(k, 32)$를 지나므로

$32=8\sqrt{2}k$, 즉 $k=2\sqrt{2}$ ▶ 20 %

16 $x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 항상 $f(x_1)>f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.
$f(x)=ax^3-3x^2+(a+2)x+1$에서

$f'(x)=3ax^2-6x+(a+2)$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 하므로

$a<0$ …… ①

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-3a(a+2)\le 0$

$a^2+2a-3\ge 0$, $(a-1)(a+3)\ge 0$

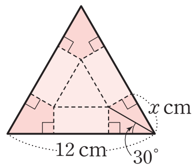
$a\le -3$ 또는 $a\ge 1$ …… ②

①, ②에서 $a\le -3$

17 상자의 밑면은 한 변의 길이가 $(12-2x)$ cm인 정삼각형이므로 그 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}(12-2x)^2\,(\mathrm{cm}^2)$

또, 상자의 높이는 오른쪽 그림에서



$x\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}x\,(\mathrm{cm})$

상자의 부피를 $V(x)\,\mathrm{cm}^3$라 하면

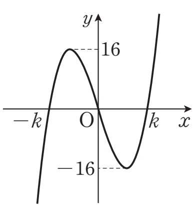
$$V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(12-2x)^2\times\frac{\sqrt{3}}{3}x$$
$$=x^3-12x^2+36x\;(0<x<6)$$
$$V'(x)=3x^2-24x+36$$
$$=3(x-2)(x-6)$$

$0<x<6$이므로 $V'(x)=0$에서 $x=2$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗	32	↘	

따라서 $x=2$일 때 상자의 부피가 최대가 된다.

18 삼차함수 $f(x)$가 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키고 방정식 $|f(x)|=16$이 서로 다른 네 개의 실근을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



$$f(x)=x(x+k)(x-k)$$
$$=x^3-k^2x\;(k>0)$$

라 하면

$$f'(x)=3x^2-k^2$$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}k$ 또는 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}k$

따라서 함수 $f(x)$는

$x=-\frac{\sqrt{3}}{3}k$에서 극댓값 16,

$x=\frac{\sqrt{3}}{3}k$에서 극솟값 -16

을 가지므로

$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}k\right)=16,\quad \frac{\sqrt{3}}{9}k^3-\frac{\sqrt{3}}{3}k^3=16$

$k^3=24\sqrt{3},\quad k=2\sqrt{3}$

따라서 $f(x)=x^3-12x$이므로

$f(3)=-9$

II 대단원 평가하기 106~109쪽

01 2

02 5

03 ③

04 $a=2,\ b=-1$

05 ①

06 $f(x)=x^{2018}+x^{509}-2$라 하면

$f(1)=1+1-2=0$

이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{2018}+x^{509}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f'(1)$$

이때 $f'(x)=2018x^{2017}+509x^{508}$이므로

$f'(1)=2018+509=2527$

07 1

08 (1) $y=-3x+4$ (2) $y=-3x$

09 ①

10 $a=-5,\ b=2,\ c=-1$

11 ②

12 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$라 하면

$f(2)=6$에서

$(2-a)(2-b)(2-c)=6$ …… ①

또,

$$f'(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$$

이고, $f'(2)=3$이므로

$$(2-b)(2-c)+(2-a)(2-c)+(2-a)(2-b)=3 \quad\cdots\cdots ②$$

①, ②에서

$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}$$
$$=\frac{(2-b)(2-c)+(2-a)(2-c)+(2-a)(2-b)}{(2-a)(2-b)(2-c)}$$
$$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

13 $-\frac{1}{2}$

14 $-3\le a\le3$

15 1

16 $f(x)=x^3+kx^2-2kx+3$에서

$$f'(x)=3x^2+2kx-2k$$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-3\times(-2k)\le 0, \qquad k(k+6)\le 0$$

따라서 $-6\le k\le 0$이므로 정수 k는

$$-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$$

의 7개이다.

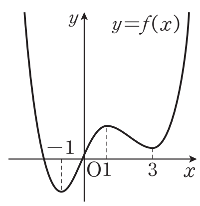
17 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1, 1, 3이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

이때

$$f(-1)<0<f(3)<f(1)$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $f(1)>0$, $f(3)>0$이고 $f(x)$는 열린구간 $(1, 3)$에서 감소하므로 $f(2)>0$이다.

ㄴ. $x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 두 개의 교점을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ② ㄱ, ㄴ이다.

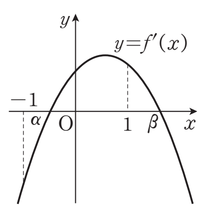
18 $f(x)=-2x^3+ax^2+4a^2x-3$에서

$$f'(x)=-6x^2+2ax+4a^2$$

이차방정식 $f'(x)=0$의 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면

$$-1<\alpha<1, \quad \beta>1$$

이므로 오른쪽 그림에서



$$f'(-1)<0, \quad f'(1)>0$$

$f'(-1)<0$에서

$$-6-2a+4a^2<0$$

$$2a^2-a-3<0$$

$$-1<a<\frac{3}{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

또, $f'(1)>0$에서

$$-6+2a+4a^2>0$$

$$2a^2+a-3>0$$

$$a<-\frac{3}{2} \text{ 또는 } a>1 \qquad \cdots\cdots ②$$

①, ②에서 구하는 a의 값의 범위는

$$1<a<\frac{3}{2}$$

19 40 cm

20 $4x^3-12x+k=0$에서 $\quad k=-4x^3+12x$

$f(x)=-4x^3+12x$라 하면

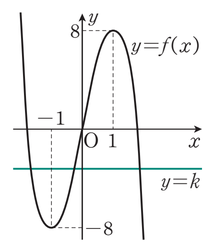
$$f'(x)=-12x^2+12$$

$$=-12(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-8	↗	8	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고, 다른 두 개는 음수가 되는 실수 k의 값의 범위는



$$-8<k<0$$

따라서 정수 k는

$$-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1$$

의 7개이다.

21 $k\le -\frac{81}{16}$ **22** 50 m

23 해결 과정 사다리꼴의 제1사분면에 있는 꼭짓점을 $A(a, 4-a^2)$ $(0<a<2)$, 넓이를 $S(a)$라 하면 사다리꼴의 윗변의 길이는 $2a$, 아랫변의 길이는 4이고 높이는 $(4-a^2)$이므로

$$S(a)=\frac{1}{2}(2a+4)(4-a^2)$$

$$=-a^3-2a^2+4a+8 \qquad ▶ 40\,\%$$

$$S'(a)=-3a^2-4a+4$$

$$=-3(a+2)\left(a-\frac{2}{3}\right)$$

a	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$S'(a)$		$+$	0	$-$
$S(a)$		$\nearrow$	$\frac{256}{27}$	$\searrow$

$0<a<2$이므로 $S'(a)=0$에서 $a=\frac{2}{3}$ ▶ 50 %

답 구하기 $S(a)$는 $a=\frac{2}{3}$에서 극대이며 최댓값 $\frac{256}{27}$을 가지므로 사다리꼴의 넓이의 최댓값은 $\frac{256}{27}$이다. ▶ 10 %

24 (1) $f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$-1\leq x\leq 3$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=2$ ▶ 20 %

x	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	11	$\searrow$	-16	$\nearrow$	-9

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 11, 최솟값은 -16이다. ▶ 30 %

(2) 방정식 $x^3-12x=a$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=x^3-12x$와 직선 $y=a$의 교점의 개수와 같다.

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=2$ ▶ 20 %

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16	$\nearrow$

따라서 방정식 $x^3-12x=a$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는

$-16<a<16$ ▶ 30 %

25 해결 과정 t초 후 점 P의 속도를 $v_P(t)$, 점 Q의 속도를 $v_Q(t)$라 하면

$v_P(t)=3t^2-18t=3t(t-6)$,

$v_Q(t)=3t^2-12t=3t(t-4)$ ▶ 50 %

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이려면 $v_P(t)$, $v_Q(t)$의 부호가 반대이어야 하므로

$v_P(t)v_Q(t)=9t^2(t-4)(t-6)<0$ ▶ 30 %

답 구하기 따라서 구하는 t의 값의 범위는

$4<t<6$ ▶ 20 %

III 다항함수의 적분법

1 부정적분과 정적분

01 부정적분 115~120쪽

준비하기 (1) $y'=2$ (2) $y'=3x^2-4x$

생각 열기 ❶ x^2+2, x^2+3, x^2+100 등

❷ x^2이 같고, 상수항만 다르다.

문제 1 (1) $9x+C$ (2) x^3+C (3) x^4-3x+C

문제 2 (1) $f(x)=2x+4$ (2) $f(x)=3x^2+x-1$

함께하기 ❶ $\frac{1}{4}x^4+C$, $\frac{1}{5}x^5+C$

❷ $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

문제 3 (1) $\frac{1}{6}x^6+C$

(2) $\frac{1}{11}x^{11}+C$

(3) $\frac{1}{1000}x^{1000}+C$

문제 4 (1) $-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-3x+C$ (2) $\frac{1}{4}x^4+x+C$

(3) $\frac{1}{3}x^3-5x^2+25x+C$ (4) $2x^3+2x+C$

문제 5 (1) $1-x$ (2) $-\frac{1}{2}x^2+x+C$

문제 6 (1) $f(x)=2x^3-3x+4$

(2) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x-6$

문제 7 $f(x)=x^2+x-3$

생각 넓히기 ❶ (가) x^2+2x (나) x^2+2x+C

❷ 예시 $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)$로 적분상수가 없지만, $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$로 적분상수가 있다.