II_2. 이차방정식의 근의 판별

[10공수1-02-02] 이차방정식의 실근과 허근을 이해하고, 판별식을 이용하여 이차방정식의 근을 판별할 수 있다.

A : 이차방정식의 실근과 허근의 의미를 설명하고, 판별식을 이용하여 근을 판별할 수 있다.

B : 이차방정식의 실근과 허근의 의미를 이해하고, 판별식을 이용하여 근을 판별할 수 있다.

C : 이차방정식의 실근과 허근을 알고, 판별식을 이용하여 근을 판별할 수 있다.

D : 판별식을 이용하여 간단한 이차방정식의 근을 판별할 수 있다.

E : 안내된 절차에 따라 이차방정식의 판별식의 값을 구할 수 있다.

II_3. 이차방정식의 근과 계수의 관계

[10공수1-02-03] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 설명할 수 있다.

A, B : 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해하여 설명할 수 있다.

C, D : 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.

E : 이차방정식의 근과 계수의 관계를 안다.

1 방정식의 뜻

문자를 포함하는 등식 중에서 문자가 특정한 값을 가질 때만 성립하는 등식을 '방정식'이라 하고, 등호가 성립하도록 하는 문자의 특정한 값을 그 방정식의 '근' 또는 '해'라 한다.

✡ 한 근이 주어진 방정식

$f(x)=0$의 한 근이 α이면

(1) $f(\alpha)=0$

(2) $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$

2 이차방정식의 풀이 ❶

(1) 인수분해를 이용한 풀이

$(ax-b)(cx-d)=0$ $(a\neq 0,\ c\neq 0)$의 근은

$$x=\frac{b}{a} \text{ 또는 } x=\frac{d}{c}$$

(2) 완전제곱식을 이용한 풀이

$(x-p)^2=q$일 때, $x=p\pm\sqrt{q}$

(3) 근의 공식을 이용한 풀이

① $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$의 근은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

2 이차방정식의 풀이 ❷

② $ax^2+2b'x+c=0$ $(a\neq 0)$의 근은

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

(4) 절댓값 기호를 포함한 방정식

$$|A|=\begin{cases} A & (A\geq 0) \\ -A & (A<0) \end{cases}$$

를 이용하여 절댓값 기호를 없앤 후, 방정식을 푼다.

✡ $|f(x)|=k$ 꼴의 방정식의 풀이

절댓값 안의 x의 식의 부호를 파악해야 한다.

즉, $f(x)\geq 0$, $f(x)<0$일 때로 x의 값의 범위를 나누자.

따라서 $f(x)=0$인 x의 값을 기준으로 구간을 나누어 방정식을 푼다.

3 이차방정식의 근의 판별

(1) 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서

$D=b^2-4ac$을 '판별식(判別式, Discriminant)'이라 한다.

(2) 이차방정식의 근의 판별

① $D>0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 실근 ┐ 실근을 가질 때,

② $D=0 \Leftrightarrow$ 중근(실근) ┘ $D \geq 0$

③ $D<0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 허근

✡ 판별식의 활용 ❶

(1) 계수에 허수가 포함되어 있으면 판별식을 사용하면 안 된다.

⇨ 복소수의 상등을 이용!!

단, 중근을 가질 조건에서는 $D=0$

(2) 일차항의 계수가 짝수($b=2b'$) $\Rightarrow$ $D/4=(b')^2-ac$

(3) 실근을 갖는다. $\Leftrightarrow$ $D \geq 0$

(4) 실수를 계수로 갖는 이차방정식은

복소수의 범위에서는 반드시 근을 갖는다.

(5) 실수를 계수로 갖는 이차방정식의 두 허근은

서로 켤레복소수이다.

✡ 판별식의 활용 ❷

(6) 실수 조건에의 활용 ⇨ 부정방정식

$f(x, y)=0$의 x와 y에 실수 조건이 있는 경우

$\Rightarrow$ x (또는 y)에 대하여 정리

$\Rightarrow$ 이차방정식이 실근을 가지므로, $D \geq 0$

(7) ┌ 이차식 $f(x, y)$가 두 일차식의 곱으로 인수분해된다.

└ 이차식 $f(x, y)=0$이 두 직선을 나타낸다.

$\Rightarrow$ D_1의 $D_2=0$

(8) 이차부등식이 모든 실수에 대하여 성립하기 위한 조건

(9) 이차곡선과 직선의 위치 관계

✡ 판별식의 활용 ❸ : $D=b^2-4ac=0$

(1) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근를 갖는다.

(2) 이차식 ax^2+bx+c가 완전제곱식이다.

(3) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축에 접한다.

(4) 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$이 이중근을 갖는다.

$\Leftrightarrow$ $(x-\alpha)(ax^2+px+q)=0$으로 인수분해되면

$\Rightarrow$ $a\alpha^2+p\alpha+q=0$ 또는 $p^2-4aq=0$

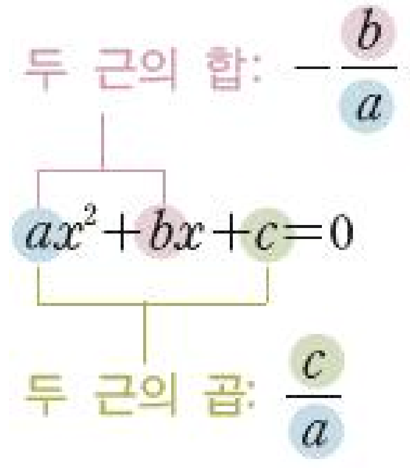
(5) 복이차방정식 $ax^4+bx^2+c=0$이 이중근을 갖는다.

① 이중근 2개 $\Leftrightarrow$ $b^2-4ac=0$

② 이중근 1개 $\Leftrightarrow$ $b \neq 0,\ c=0$

($\because$ 이중근의 값이 0인 경우밖에 없다.)

$\boxed{4}$ 이차방정식의 근과 계수의 관계



(1) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의
두 근을 α, β라 하면

① 합 : $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$

② 곱 : $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

③ 차 : $|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$ $\because$ $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

(2) 두 수 α, β를 근으로 갖고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

$\therefore$ x^2-(두 수의 합)$x+$(두 수의 곱)$=0$

✡ 이차방정식의 작성

이차방정식 $at^2+bt+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

(1) $-\alpha$, $-\beta$를 근으로 갖는 이차방정식

$\Rightarrow ax^2-bx+c=0$ ($\because$ $-t=x \Rightarrow t=-x$)

(2) $k\alpha$, $k\beta$를 근으로 하는 이차방정식 (k는 상수)

$\Rightarrow ax^2+kbx+ck^2=0$ ($\because$ $kt=x \Rightarrow t=(k/x)$)

(3) $\alpha+k$, $\beta+k$를 근으로 이차방정식

⇨ $a(x-k)^2+b(x-k)+c=0$ ($\because$ $t+k=x$)

(4) $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$를 근으로 하는 이차방정식 (k는 상수)

⇨ $cx^2+bx+a=0$ (단, $c\neq 0$) ($\because$ $(1/t)=x$)

5 이차방정식의 켤레근

(1) 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의
한 근이 $p+qi$이면 다른 한 근은 $p-qi$이다.
(단, p와 q는 실수이고 $q \neq 0$이다.)

(2) 계수가 유리수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의
한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$이다.
(단, p와 q는 유리수이고 $q \neq 0$, $\sqrt{m}$은 무리수이다.)

6 이차방정식의 실근의 부호 ❶

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하고 이 이차방정식의 판별식을 $D=b^2-4ac$라 하면

(1) 두 근이 모두 양수 $\Leftrightarrow D \geq 0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

(2) 두 근이 모두 음수 $\Leftrightarrow D \geq 0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

(3) 두 근이 서로 다른 부호 $\Leftrightarrow \alpha\beta<0$

$\boxed{6}$ 이차방정식의 실근의 부호 ❷

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하고 이 이차방정식의 판별식을 $D=b^2-4ac$라 하면

(1) 두 근이 모두 양 $\Leftrightarrow$ $D \geq 0,\ \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$

$\Leftrightarrow$ $D \geq 0,\ ab<0,\ ac>0$

(2) 두 근이 모두 음 $\Leftrightarrow$ $D \geq 0,\ \alpha+\beta<0,\ \alpha\beta>0$

$\Leftrightarrow$ $D \geq 0,\ ab>0,\ ac>0$

(3) 두 근이 서로 다른 부호 $\Leftrightarrow$ $\alpha\beta<0$ $\Leftrightarrow$ $ac<0$

① |양근| > |음근| $\Leftrightarrow$ $\alpha+\beta>0,\ \alpha\beta<0$

② |양근| < |음근| $\Leftrightarrow$ $\alpha+\beta<0,\ \alpha\beta<0$

③ |양근| = |음근| $\Leftrightarrow$ $\alpha+\beta=0,\ \alpha\beta<0$

(4) 한 근만이 0 $\Leftrightarrow$ $\alpha\beta=0,\ \alpha+\beta\neq 0$