II_1. 집합의 개념

[10공수2-02-01] 집합의 개념을 이해하고,
집합을 표현할 수 있다.

A : 집합의 개념을 설명하고,
집합을 다양한 방법으로 표현할 수 있다.

B : 집합의 개념을 이해하고,
집합을 다양한 방법으로 표현할 수 있다.

C : 집합의 개념을 알고, 집합을 표현할 수 있다.

D : 집합인 것과 집합이 아닌 것으로 구분하고,
집합을 표현할 수 있다.

E : 집합인 것과 집합이 아닌 것으로 구분할 수 있다.

II_2. 두 집합 사이의 포함 관계

[10공수2-02-02] 두 집합 사이의 포함 관계를 판단할 수 있다.

A : 두 집합 사이의 포함 관계를 판단하여 기호로 표현하고,
그 이유를 설명할 수 있다.

B : 두 집합 사이의 포함 관계를 판단하여 기호로 표현할 수 있다.

C : 간단한 두 집합 사이의 포함 관계를 판단하여
기호로 표현할 수 있다.

D : 간단한 두 집합 사이의 포함 관계를 판단할 수 있다.

E : 안내된 절차에 따라 간단한 두 집합 사이의 포함 관계를 판단할 수 있다.

II_3. 집합의 연산

[10공수2-02-03] 집합의 연산을 수행하고,
벤 다이어그램을 이용하여 나타낼 수 있다.

A : 집합의 연산을 체계적으로 수행하고 벤 다이어그램으로 나타낼 수 있으며, 집합의 연산에 관한 법칙을 벤 다이어그램으로 확인할 수 있다.

B : 집합의 연산을 수행하고 벤 다이어그램으로 나타낼 수 있으며, 집합의 연산에 관한 법칙을 안다.

C : 집합의 연산을 수행하고, 벤 다이어그램으로 나타낼 수 있다.

D : 간단한 집합의 연산을 수행하고, 벤 다이어그램으로 나타낼 수 있다.

E : 간단한 두 집합의 연산을 수행할 수 있다.

1 집합

(1) 집합과 원소

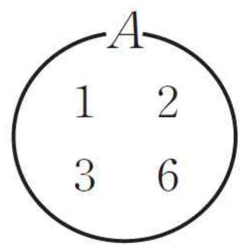
① 집합 : 어떤 기준에 의해 그 대상이 명확한 것들의 모임

② 원소 : 집합을 이루고 있는 대상 하나하나

③ a가 집합 A의 원소일 때, $a \in A$로 나타낸다.

④ 공집합($\varnothing$) : 원소가 하나도 없는 집합

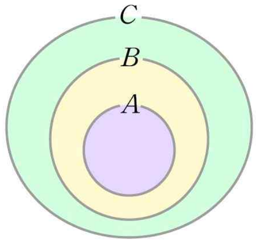
(2) 집합의 표현 방법

원소나열법		조건제시법		벤다이어그램
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$	$=$	$A=\{x \mid x$는 6의 양의 약수$\}$	$=$	

2 집합의 포함 관계

(1) 부분집합 : 집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속할 때, 집합 A를 집합 B의 '부분집합'이라 하고, $A \subset B$로 나타낸다.

(2) 부분집합의 성질



① $\varnothing \subset A$, $A \subset A$, $\varnothing \subset \varnothing$

② $A \subset B$이고 $B \subset C$이면 $A \subset C$

(3) 서로 같은 집합 : $A = B \Leftrightarrow A \subset B$이고 $B \subset A$

(4) 진부분집합 : $A \subset B$이고 $A \neq B$

✡ 집합의 포함 관계의 성질

(1) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \varnothing$

(2) $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$

(3) $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A - B = A \Leftrightarrow B - A = B$

3 부분집합의 개수

집합 $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$일 때, 집합 A의

(1) 부분집합의 개수는 2^n

(2) 진부분집합의 개수는 $2^n - 1$

(3) 특정한 원소 k개를 포함(제외)한 부분집합의 개수는 2^{n-k}

(4) 특정한 원소 k개를 포함하고 또 다른 l개는 제외한 부분집합의 개수는 2^{n-k-l}

(5) 부분집합에 속하는 모든 원소들의 전체 개수는 $n \times 2^{n-1}$

(6) 부분집합에 속하는 모든 원소들의 전체 합계는 $2^{n-1} \times (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$

4 집합의 연산

(1) 집합의 연산

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

① 합집합 : $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 또는 $x \in B\}$

② 교집합 : $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 그리고 $x \in B\}$

③ 여집합 : $A^C = \{x \mid x \in U$ 그리고 $x \notin A\} = U - A$

④ 차집합 : $A - B = \{x \mid x \in A$ 그리고 $x \notin B\}$

$= A \cap B^C = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$

(2) 서로소 : 두 집합 A, B에 대하여 그 교집합이 공집합일 때,
즉 $A \cap B = \varnothing$일 때 두 집합 A, B는 '서로소'라 한다.
이때, 공집합은 모든 집합과 서로소이다.

✡ 합집합과 교집합의 성질

세 집합 A, B, C와 공집합 $\varnothing$, 전체집합 U에 대하여

(1) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \varnothing$

(2) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$

(3) $A \cup U = U$, $A \cap U = A$

(4) $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$

(5) $A \cap B = U \Leftrightarrow A = U$이고 $B = U$

$A \cup B = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing$이고 $B = \varnothing$

(6) 임의의 A에 대하여 $A \cup X = A \Rightarrow X = \varnothing$

임의의 A에 대하여 $A \cap X = A \Rightarrow X = U$

(7) $A \cap B = A \cup C \Leftrightarrow C \subset A \subset B$

$\because (A \cap B) \subset A \subset (A \cup C) \Rightarrow (A \cap B) = A = (A \cup C)$

✡ 여집합과 차집합의 성질

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

(1) $U^C = \varnothing$, $\varnothing^C = U$　　(2) $(A^C)^C = A$

(3) $A \cup A^C = U$, $A \cap A^C = \varnothing$

(4) $A - B = A \cap B^C = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$

☑ $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = n(A \cup B) - n(B)$

(5) ① $A \cup B = U \Leftrightarrow B^C \subset A \Leftrightarrow A^C \subset B$

② $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subset B^C \Leftrightarrow B \subset A^C$

③ $A \cup B = U$이고 $A \cap B = \varnothing$

$\Leftrightarrow A = B^C$이고 $B = A^C$ (집합의 분할)

(6) $(A - B) \cup (B - A) = \varnothing \Leftrightarrow A = B$

5 집합의 연산법칙

(1) 교환법칙 : $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$

(2) 결합법칙 : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

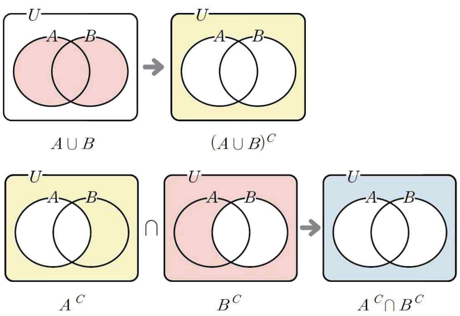
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$

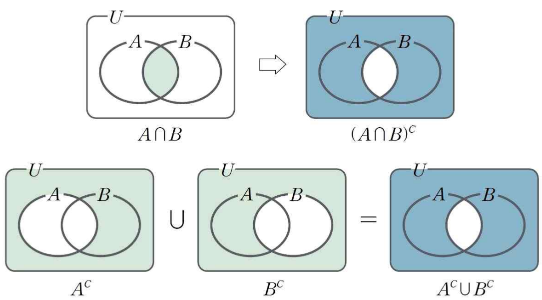
(3) 분배법칙 : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(4) 드모르간의 법칙

① $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$　　② $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$





✡ 드모르간의 법칙과 차집합

여집합에 대한 내용은 대부분의 경우 반드시 전체집합이 전제되어 있는 상황에서만 가능하다.

하지만 전체집합 U의 부분집합 A에 대하여 $A^C = U - A$와 같이 여집합은 차집합으로 나타낼 수 있음을 이해하면 전체집합이 전제되어 있지 않은 경우, 일반적으로 차집합에 대해서도 다음과 같이 드모르간의 법칙과 유사한 정리를 만들 수 있다.

세 집합 A, B, C에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$

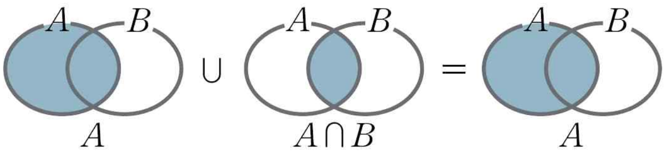
(2) $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$

(3) $C - (A - B) = (C \cap B) \cup (C - A)$

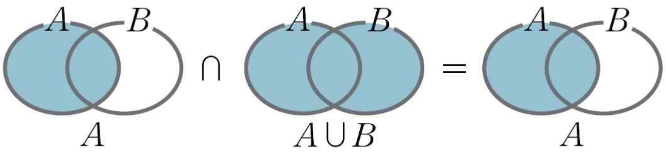
(4) $C - (C - A) = C \cap A$

✡ **흡수법칙**

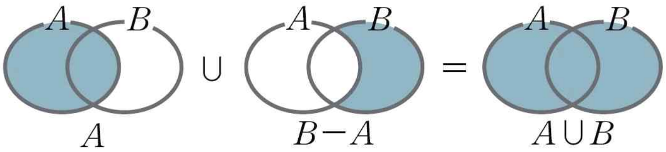
(1) $A \cup (A \cap B) = A$ ($\because$ $(A \cap B) \subset A$)



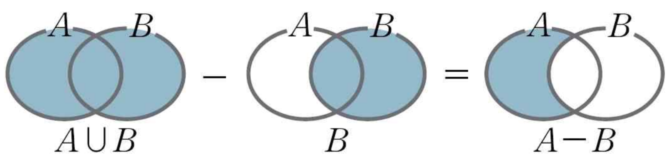
(2) $A \cap (A \cup B) = A$ ($\because$ $A \subset (A \cup B)$)



(3) $A \cup (B - A) = A \cup B$ ($\because$ $(B - A) \subset B$)



(4) $(A \cup B) - B = A - B$



✡ 집합의 연산 법칙과 수의 연산 법칙

	집합의 연산(A, B, C는 집합)	실수의 연산(A, B, C는 실수)
교환법칙	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	$A + B = B + A$ $A \times B = B \times A$
결합법칙	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A+B)+C = A+(B+C)$ $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
분배법칙	$A \cap (B \cup C)$ $= (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \times (B + C)$ $= (A \times B) + (A \times C)$

✡ 집합의 포함 관계

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

$$\Leftrightarrow A - B = \varnothing \Leftrightarrow A \cap B^C = \varnothing$$

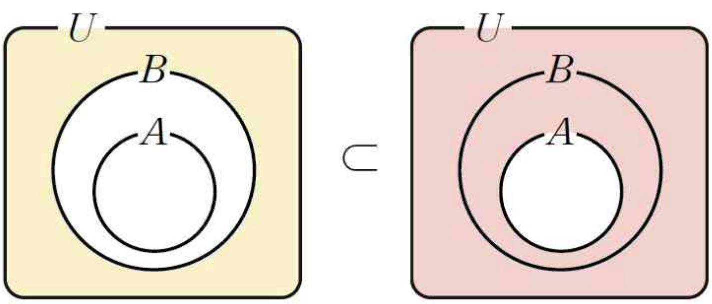
$$\Leftrightarrow A^C \cup B = U$$

$$\Leftrightarrow A^C \supset B^C$$

$$\Leftrightarrow B^C - A^C = \varnothing$$

$$\Leftrightarrow A^C \cup B^C = A^C$$

$$\Leftrightarrow A^C \cap B^C = B^C$$



B^C A^C

$$\Leftrightarrow n(A-B) = 0 \Leftrightarrow n(B-A) = n(B) - n(A)$$

$\boxed{6}$ 유한집합의 원소의 개수 ❶

전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C가 유한집합일 때,

(1) $n\left(A^C\right)=n(U)-n(A)$

(2) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

(3) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=n(A\cup B)-n(B)$

(4) $n\left(A^C\cap B^C\right)=n\left\{(A\cup B)^C\right\}=n(U)-n(A\cup B)$

(5) $n\left(A^C\cup B^C\right)=n\left\{(A\cap B)^C\right\}=n(U)-n(A\cap B)$

(6) $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$

$-n(A\cup B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$\boxed{6}$ 유한집합의 원소의 개수 ❷

(7) 두 집합 A, B의 교집합 $A\cap B$의 원소의 개수

① 최솟값 : $n(A)+n(B)-n(U)\le n(A\cap B)$

② 최댓값 : $n(A\cap B)\le \min\{n(A),\ n(B)\}$

(8) 집합 A의 모든 원소의 합을 $S(A)$라 할 때,

$S(A\cup B)=S(A)+S(B)-S(A\cap B)$

✡ 멱집합(Power Set)

(o) 멱집합 : 자기 자신의 모든 부분집합을 원소로 갖는 집합

(1) $P(A) = 2^A = \{X \mid X \subset A\}$

(2) $\varnothing \neq P(A)$, $\varnothing \in P(A)$, $\varnothing \subset P(A)$

(3) $\{\varnothing\} \subset P(A)$, $A \in P(A)$, $\{A\} \subset P(A)$

(4) $A \subset B \Rightarrow P(A) \subset P(B)$ (5) $n\{P(A)\} = 2^{n(A)}$

(6) $P(A) \cap P(B) \subset P(A \cap B)$

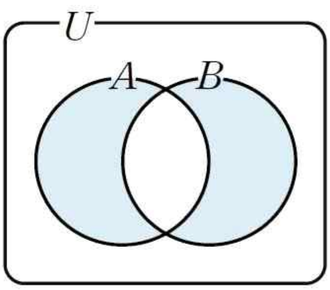
$P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$

(7) $X,\ Y \in P(A) \Rightarrow X \cup Y \in P(A)$, $X \cap Y \in P(A)$

(8) $n(A) = m \Rightarrow$ ① 멱집합의 원소의 개수 : 2^m

② 멱집합의 부분집합의 개수 : 2^{2^m}

✡ 대칭차집합 $A \triangle B$ ❶



(1) $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$= (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C)$

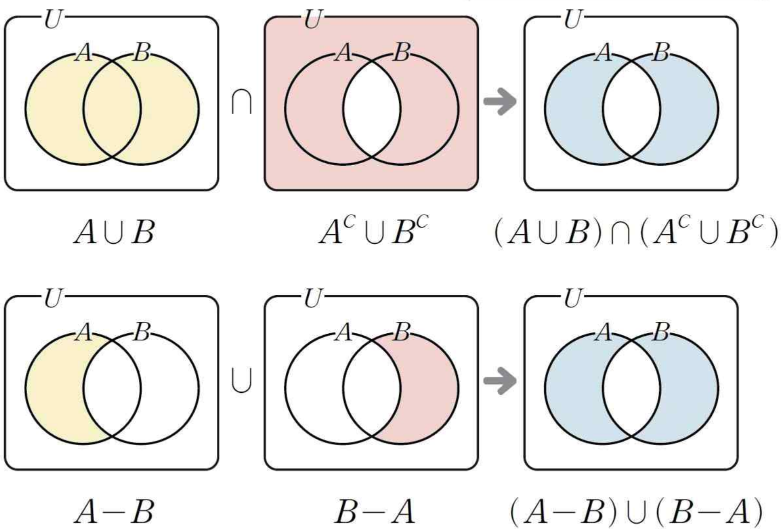
$= (A \cup B) \cap (A \cap B)^C$

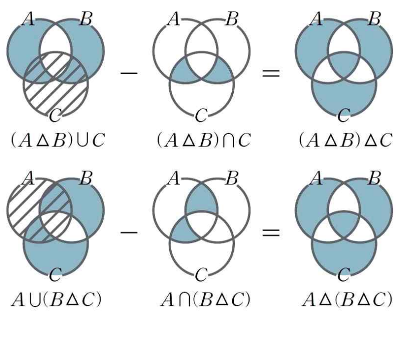
$= (A - B) \cup (B - A)$

(2) $A \triangle B = B \triangle A$ (교환)

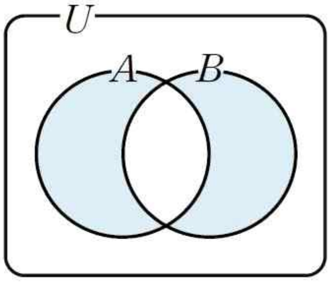
(3) $A \triangle (B \triangle C)$

$= (A \triangle B) \triangle C$ (결합)





✡ 대칭 차집합 $A \triangle B$ ❷



(1) $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$$= \left(A \cap B^C\right) \cup \left(B \cap A^C\right)$$

$$= (A \cup B) \cap (A \cap B)^C$$

$$= (A - B) \cup (B - A)$$

(4) $A \triangle \varnothing = A,\ A \triangle A = \varnothing,\ A \triangle A \triangle A = A,\ \cdots$

(5) $A \triangle U = A^C,\ A \triangle A^C = U$

(6) $A \triangle B = \varnothing \ \Leftrightarrow \ A = B$

(7) $A \triangle B = C \Leftrightarrow A \triangle C = B$

$\because \ A \triangle C = A \triangle (A \triangle B) = (A \triangle A) \triangle B = \varnothing \triangle B = B$

✡ 자연수 k의 배수의 집합 : N_k

(1) $N_a \subset N_b \Rightarrow a$는 b의 배수, b는 a의 약수

(2) $N_a \cap N_b = N_c \Rightarrow c$는 a와 b의 최소공배수

(3) $\left(N_a \cup N_b\right) \subset N_c$

$\Rightarrow c$의 최댓값은 a와 b의 최대공약수

(4) $N_c \subset \left(N_a \cap N_b\right)$

$\Rightarrow c$의 최솟값은 a와 b의 최소공배수