

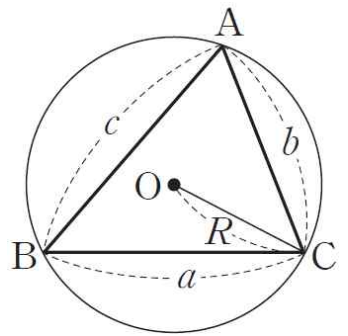
II_2. 사인법칙과 코사인법칙

[12수학 I 02-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고,
이를 활용할 수 있다.

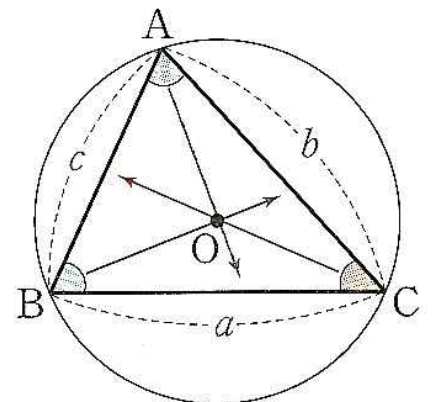
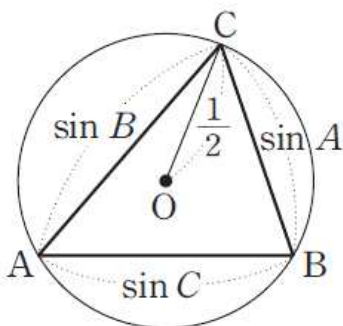
1 사인법칙 ①

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



☑ 삼각형 ABC에서 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 의 크기를 각각 A , B , C 로 나타내고, 이들의 대변의 길이를 각각 a , b , c 로 나타내기로 한다.



① 사인법칙 ②

삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O라 할 때, 등식

$\frac{a}{\sin A} = 2R$ 이 성립함을 $\angle A$ 가 예각, 직각, 둔각인

세 경우로 나누어 다음과 같이 증명할 수 있다.

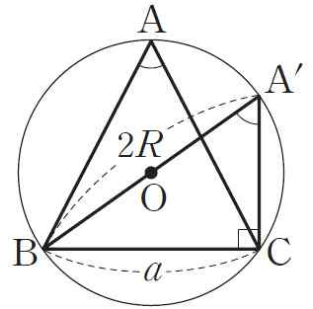
(1) $0^\circ < A < 90^\circ$ 일 때,

점 B에서 중심 O를 지나는 지름 BA'을

그리면 $A = A'$ 이므로 $\sin A = \sin A'$

삼각형 A'BC에서 $\angle BCA' = 90^\circ$ 이므로

$$\sin A' = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}} = \frac{a}{2R} \therefore \sin A = \frac{a}{2R} \quad \text{즉} \quad \frac{a}{\sin A} = 2R$$

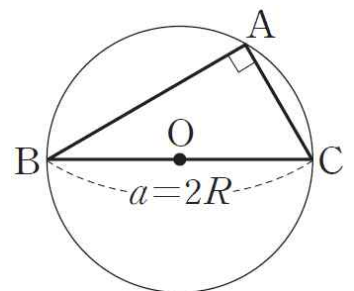


① 사인법칙 ③

(2) $A = 90^\circ$ 일 때,

$\sin A = \sin 90^\circ = 1$ 이므로 $a = 2R$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{2R}{1} = 2R$$



(3) $90^\circ < A < 180^\circ$ 일 때,

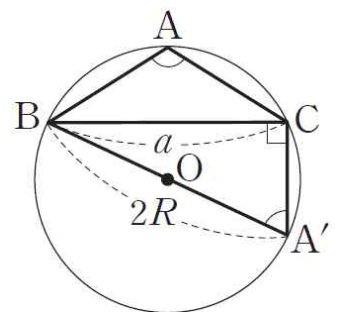
점 B에서 중심 O를 지나는 지름 BA'을

그리면 $A + A' = 180^\circ$ 이므로 $A = 180^\circ - A'$

즉, $\sin A = \sin(180^\circ - A') = \sin A'$

삼각형 A'BC에서 $\angle A'CB = 90^\circ$ 이므로

$$\sin A' = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}} = \frac{a}{2R} \therefore \sin A = \frac{a}{2R} \quad \text{즉} \quad \frac{a}{\sin A} = 2R$$



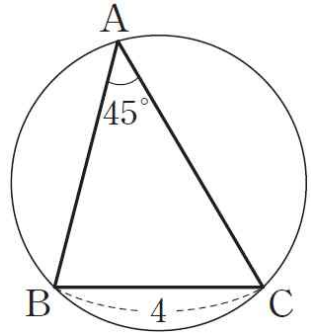
1 사인법칙 ④

(1), (2), (3)에서 $\angle A$ 의 크기에 관계없이 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ 이 성립한다.

같은 방법으로 $\frac{b}{\sin B} = 2R$, $\frac{c}{\sin C} = 2R$ 도 성립한다.

예) $\overline{BC} = 4$, $\angle A = 45^\circ$ 인 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 구해 보자.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면 사인법칙에 의하여



$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2R \quad \therefore R = \frac{1}{2} \times \frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{\sin 45^\circ} = 2\sqrt{2}$$

☆ 높이 $h = \overline{CH}$ 구하기 ①

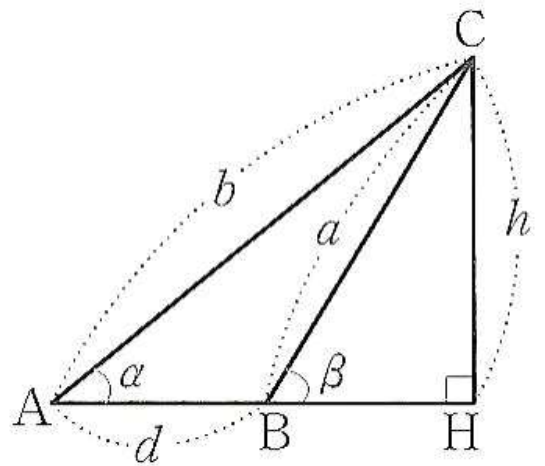
(1) 사인법칙 : $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{d}{\sin(\beta - \alpha)}$

$$\therefore h = a \sin \beta = \frac{d \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$$

(2) $h = \overline{AH} \tan \alpha = \overline{BH} \tan \beta$

$$\overline{AH} = d + \overline{BH}, \quad (d + \overline{BH}) \tan \alpha = \overline{BH} \tan \beta$$

$$\overline{BH} = \frac{d \tan \alpha}{\tan \beta - \tan \alpha} \quad \therefore h = \overline{BH} \tan \beta = \frac{d \tan \alpha \tan \beta}{\tan \beta - \tan \alpha}$$

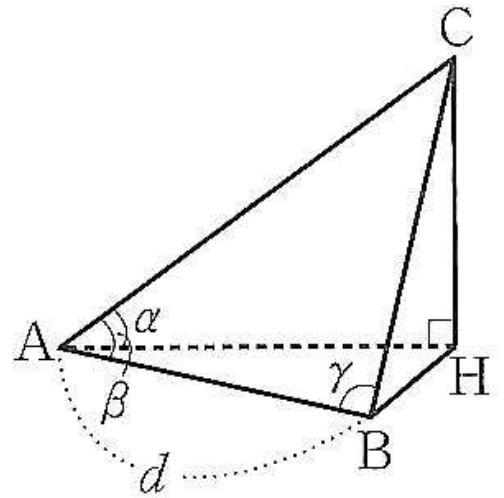


☆ **높이** $h = \overline{CH}$ 구하기 ②

$$(3) \frac{d}{\sin C} = \frac{\overline{CA}}{\sin \gamma}, \quad C = \pi - (\beta + \gamma)$$

$$\overline{CA} = \frac{d \sin \gamma}{\sin C} = \frac{d \sin \gamma}{\sin (\beta + \gamma)}$$

$$\therefore \overline{CH} = \overline{CA} \sin \alpha = \frac{d \sin \alpha \sin \gamma}{\sin (\beta + \gamma)}$$



삼각형의 내각의
크기의 합은 π 이므로
 $A+B+C=\pi$ 이겠군!



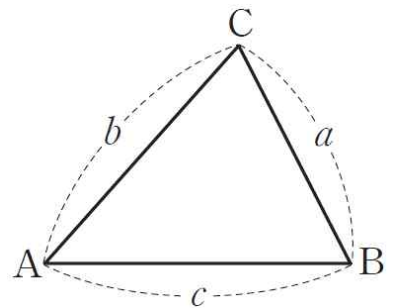
② **코사인법칙** ①

삼각형 ABC에서

$$(1) a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$(2) b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$(3) c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



삼각형 ABC의 꼭짓점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 등식 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 가 성립함을 $\angle A$ 가 예각, 직각, 둔각인 세 경우로 나누어 다음과 같이 증명할 수 있다.

② 코사인법칙 ②

(1) $0^\circ < A < 90^\circ$ 일 때,

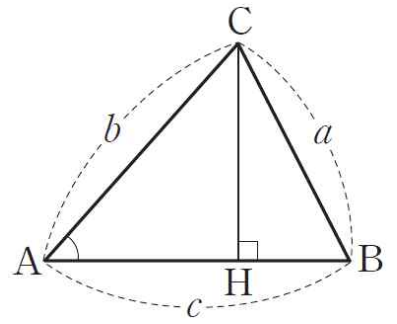
직각삼각형 CAH에서

$$\overline{CH} = b \sin A, \overline{AH} = b \cos A$$

$$\text{또 } \overline{BH} = \overline{AB} - \overline{AH} = c - b \cos A$$

직각삼각형 BCH에서 $\overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} \therefore a^2 &= (b \sin A)^2 + (c - b \cos A)^2 \\ &= b^2 \sin^2 A + c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A \\ &= b^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc \cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$

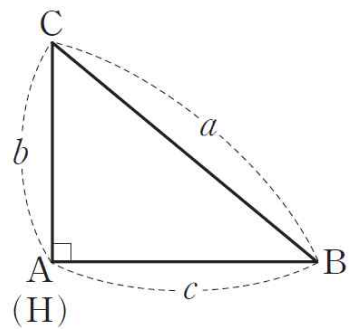


② 코사인법칙 ③

(2) $A = 90^\circ$ 일 때, 직각삼각형 ABC에서

$$\cos A = \cos 90^\circ = 0 \text{ 이므로}$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



(3) $90^\circ < A < 180^\circ$ 일 때, 직각삼각형 ACH에서

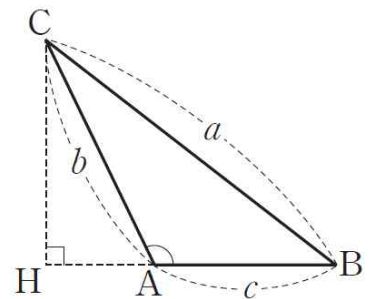
$$\overline{CH} = b \sin(180^\circ - A) = b \sin A$$

$$\overline{AH} = b \cos(180^\circ - A) = -b \cos A$$

$$\text{또 } \overline{BH} = \overline{AB} + \overline{AH} = c - b \cos A$$

직각삼각형 BCH에서 $\overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} \therefore a^2 &= (b \sin A)^2 + (c - b \cos A)^2 \\ &= b^2 \sin^2 A + c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A \end{aligned}$$



☐ 코사인법칙 ④

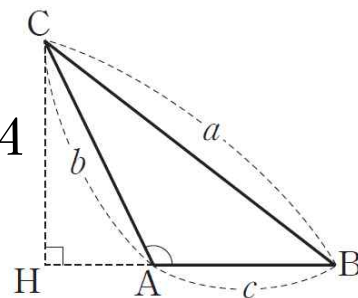
$$\begin{aligned}\therefore a^2 &= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bcc \cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bcc \cos A\end{aligned}$$

(1), (2), (3)에서 $\angle A$ 의 크기에 관계없이

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcc \cos A$ 가 성립한다.

같은 방법으로 $b^2 = c^2 + a^2 - 2caa \cos B$,

$c^2 = a^2 + b^2 - 2abb \cos C$ 도 성립한다.



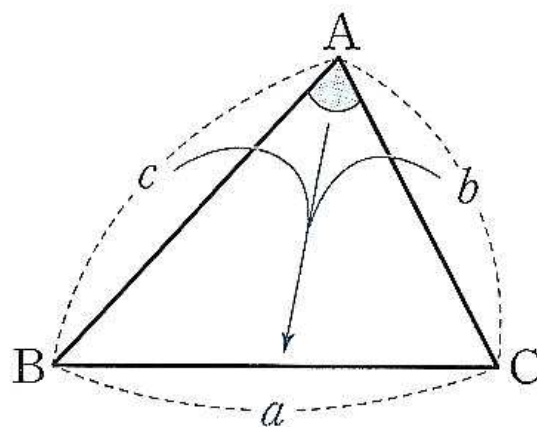
☆ 코사인법칙 : $\triangle ABC$ 에서

(1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

(2) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$

(3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

☑ 두 변과 끼인각 \Rightarrow 대변의 길이



☆ 코사인법칙의 변형

(1) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

(2) $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

(3) $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

☑ 세 변의 길이 \Rightarrow 세 내각의 크기

③ 삼각형의 모양 ①

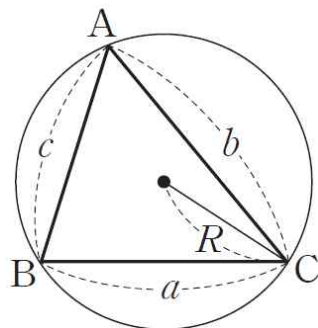
삼각형 ABC의 모양은 각의 크기 A, B, C 에 대한 식을 변의 길이 a, b, c 에 대한 식으로 고쳐서 알아본다.

(1) 사인법칙을 이용하는 경우

① 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라 하면

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

② $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$



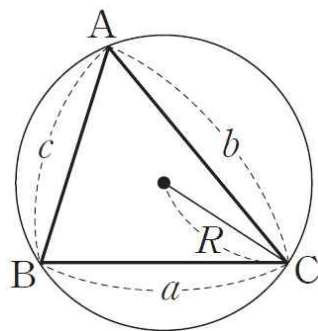
③ 삼각형의 모양 ②

☑ ① 사인법칙에서 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 이므로

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \text{에서 } \sin A = \frac{a}{2R}$$

$$\frac{b}{\sin B} = 2R \text{에서 } \sin B = \frac{b}{2R}$$

$$\frac{c}{\sin C} = 2R \text{에서 } \sin C = \frac{c}{2R}$$



② ①에서 $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\frac{c}{\sin C} = 2R$ 이므로

$$\sin A : \sin B : \sin C = \frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R} = a : b : c$$

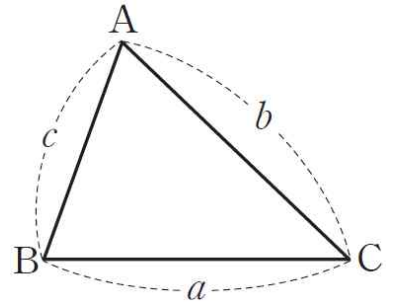
③ 삼각형의 모양 ③

(2) 코사인법칙을 이용하는 경우
삼각형 ABC에서

$$\textcircled{1} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\textcircled{2} \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\textcircled{3} \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



☑ 코사인법칙에서 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 이므로

$$2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2 \quad \therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

③ 삼각형의 모양 ④

예 삼각형 ABC가 $b \cos A = a \cos B$ 를 만족시킬 때,
삼각형 ABC의 모양을 조사해 보자. \Rightarrow 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

이므로 $b \cos A = a \cos B$ 에서

$$b \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = a \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$b^2 + c^2 - a^2 = c^2 + a^2 - b^2, \quad a^2 - b^2 = 0$$

$$(a + b)(a - b) = 0$$

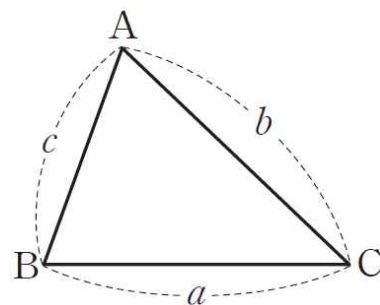
이때 $a + b \neq 0$ 이므로 $a = b$

\therefore 삼각형 ABC는 $a = b$ 인 이등변삼각형이다.

④ 삼각형의 넓이 ①

삼각형 ABC에서 두 변의 길이와
그 끼인각의 크기가 주어질 때,
삼각형 ABC의 넓이를 S 라 하면

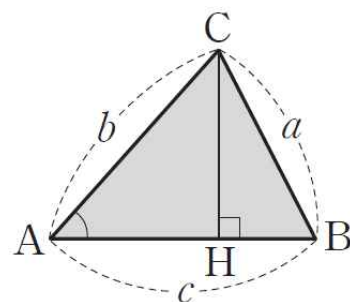
$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$



☆ 삼각형 ABC의 꼭짓점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을
H라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이를 $\angle A$ 가 예각, 직각, 둔각인
세 경우로 나누어 생각한다.

(1) $0^\circ < A < 90^\circ$ 일 때,

$$\overline{CH} = b \sin A$$



④ 삼각형의 넓이 ②

(2) $A = 90^\circ$ 일 때,

$\sin A = \sin 90^\circ = 1$ 이므로

$$\overline{CH} = b = b \sin A$$

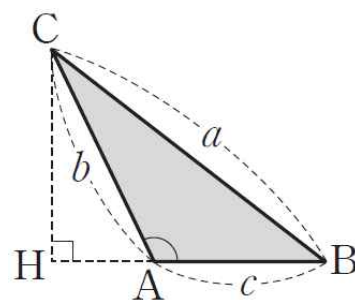
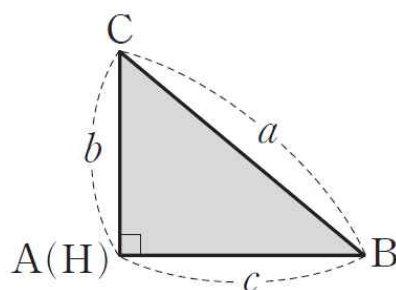
(3) $90^\circ < A < 180^\circ$ 일 때,

$$\overline{CH} = b \sin(180^\circ - A) = b \sin A$$

(1), (2), (3)에서 $\angle A$ 의 크기와 관계없이

$\overline{CH} = b \sin A$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이를 S 라 하면

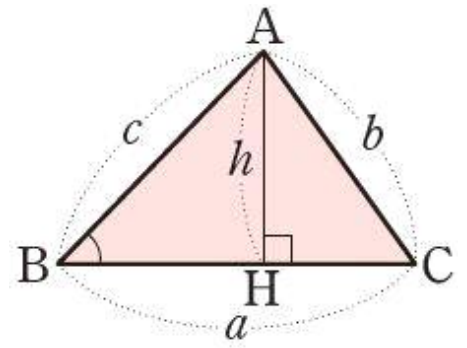
$$S = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CH} = \frac{1}{2}bc \sin A$$



④ 삼각형의 넓이 ③

삼각형 ABC의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab \sin C \\ &= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B \end{aligned}$$



[보기] $a = 4, b = 6, C = 60^\circ$ 인 $\triangle ABC$ 의 넓이를 S 라 하면

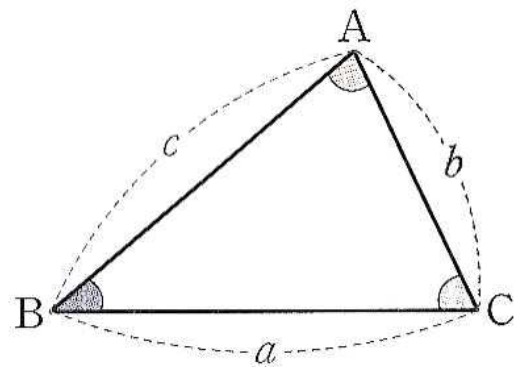
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

④ 삼각형의 넓이 ④

삼각형 ABC의 넓이를 S 라 하면,

(1) 두 변과 그 끼인각

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab \sin C$$



(2) 세 변의 길이 [헤론의 공식] $\left(\text{단, } p = \frac{a+b+c}{2} \right)$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(3) 내접원의 반지름 $r \Rightarrow S = \frac{1}{2}(a+b+c)r = pr$

☆ 헤론의 공식

삼각형 ABC의 세 변의 길이가 a, b, c 일 때,

$$p = \frac{a + b + c}{2}, \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)^2}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{4} \sqrt{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{\{(a + b)^2 - c^2\} \{c^2 - (a - b)^2\}} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} \sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b)} \\ &= \sqrt{\frac{a + b + c}{2} \times \frac{a + b - c}{2} \times \frac{c + a - b}{2} \times \frac{c - a + b}{2}} \\ &= \sqrt{p(p - c)(p - b)(p - a)} \\ &= \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \end{aligned}$$

☞ 삼각형 ABC에서 $a = 5, b = 6, c = 7$ 일 때,
삼각형 ABC의 넓이 S 를 구하시오.

$$p = \frac{5 + 6 + 7}{2} = 9 \quad \therefore S = \sqrt{9 \times 4 \times 3 \times 2} = 6\sqrt{6}$$

⑤ 사각형의 넓이

사각형 ABCD에서 두 대각선의 길이가 각각 p , q 이고, 두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ 일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 S 라 하면,

$$S = \frac{1}{2} pq \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad & \overline{AC} \parallel \overline{PS}, \quad \overline{AC} \parallel \overline{QR} \\ & \overline{DB} \parallel \overline{PQ}, \quad \overline{DB} \parallel \overline{SR} \end{aligned}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{QR} \times \sin \theta = \frac{1}{2} pq \sin \theta$$

