수능특강 수학영역 **확률과 통계**

정답과 풀이

한눈에 보는 정답

01 여러 가지 순열

유제 본문 5~9쪽

1 ④ 2 ④ 3 ④ 4 368 5 ②
6 ①

Level 1 기초 연습 본문 10~11쪽

1 ④ 2 ③ 3 ⑤ 4 79 5 ③
6 ① 7 ⑤ 8 ③

Level 2 기본 연습 본문 12쪽

1 32 2 ② 3 ④ 4 60

Level 3 실력 완성 본문 13쪽

1 240 2 ③ 3 904

02 중복조합과 이항정리

유제 본문 17~23쪽

1 ① 2 ② 3 ⑤ 4 ③ 5 ③
6 ⑤ 7 ② 8 ②

Level 1 기초 연습 본문 24~25쪽

1 ④ 2 ③ 3 ① 4 ② 5 ③
6 ③ 7 ① 8 ④

Level 2 기본 연습 본문 26쪽

1 ② 2 ② 3 ⑤ 4 ①

Level 3 실력 완성 본문 27쪽

1 ④ 2 695 3 ⑤

03 확률의 뜻과 활용

유제 본문 31~37쪽

1 ② 2 240 3 ② 4 ④ 5 ②
6 ①

Level 1 기초 연습 본문 38~39쪽

1 ① 2 ④ 3 ① 4 ③ 5 ①
6 ④ 7 ⑤ 8 ④

Level 2 기본 연습 본문 40~41쪽

1 ⑤ 2 ⑤ 3 106 4 ③ 5 ④
6 131 7 ② 8 ④

Level 3 실력 완성 본문 42쪽

1 ⑤ 2 13 3 ⑤

04 조건부확률

유제 본문 45~51쪽

1 10 2 ④ 3 ① 4 ③ 5 ②
6 ⑤

Level 1 기초 연습 본문 52~53쪽

1 ② 2 ③ 3 ③ 4 ④ 5 ②
6 ⑤ 7 ④ 8 ⑤

Level 2 기본 연습 본문 54~55쪽

1 ② 2 ⑤ 3 ③ 4 ④ 5 ③
6 ③ 7 ④ 8 ①

Level 3 실력 완성 본문 56쪽

1 ① 2 124 3 419

05 이산확률변수의 확률분포

유제 본문 59~67쪽

1 ④ 2 ④ 3 ③ 4 ① 5 ④
6 ③ 7 ⑤ 8 ⑤

Level 1 기초 연습 본문 68쪽

1 ⑤ 2 ⑤ 3 ③ 4 ④ 5 2

Level 2 기본 연습 본문 69~70쪽

1 ⑤ 2 ② 3 156 4 ③ 5 ④
6 ④ 7 ⑤ 8 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 71쪽

1 ② 2 ② 3 503

06 연속확률변수의 확률분포

유제 본문 75~81쪽

1 ③ 2 ⑤ 3 ④ 4 ③ 5 ②
6 ① 7 ⑤ 8 ④

Level 1 기초 연습 본문 82쪽

1 ① 2 ③ 3 4 4 ④ 5 ⑤

Level 2 기본 연습 본문 83~84쪽

1 ④ 2 ① 3 ④ 4 ④ 5 ②
6 19 7 ④

Level 3 실력 완성 본문 85쪽

1 ⑤ 2 ③ 3 ②

07 통계적 추정

유제 본문 89~95쪽

1 ④ 2 ③ 3 ② 4 ④ 5 ③
6 ① 7 ③ 8 100

Level 1 기초 연습 본문 96쪽

1 ④ 2 ③ 3 ⑤ 4 64

Level 2 기본 연습 본문 97~98쪽

1 ① 2 ④ 3 ③ 4 ③ 5 4
6 10 7 45 8 ①

Level 3 실력 완성 본문 99쪽

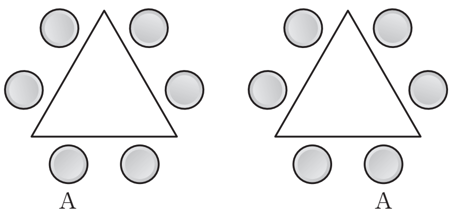
1 ⑤ 2 17 3 ②

01 여러 가지 순열

유제 본문 5~9쪽

1 ④　2 ④　3 ④　4 368　5 ②
6 ①

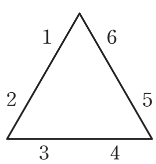
1 6명을 A, B, C, D, E, F라 하고, A를 제일 먼저 앉히기로 하자.
A가 앉을 때 구별되는 자리는 그림과 같이 2가지이다.



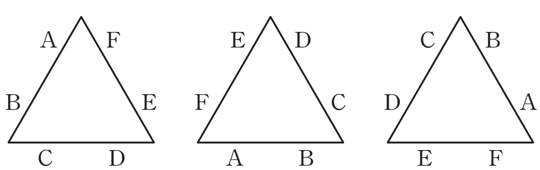
이 각각에 대하여 A를 기준으로 나머지 5개의 자리는 모두 구별되므로 이 각각에 대하여 나머지 5명을 앉히는 경우의 수는
$5!=120$
따라서 구하는 경우의 수는
$2\times 120=240$

답 ④

다른 풀이
그림과 같이 6개의 자리에 1부터 6까지의 번호를 붙이면 6개의 자리는 모두 구별된다.

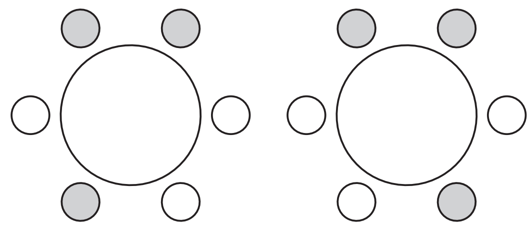


따라서 6명을 위 그림의 6개의 의자에 배열하는 경우의 수는
$6!$
이 각각에 대하여 위 그림을 $360°$ 회전하는 동안 회전하여 일치하는 경우가 아래 그림과 같이 3번 생긴다.



따라서 구하는 경우의 수는
$\frac{6!}{3}=240$

2 남학생이 앉을 자리를 ◯(회색), 여학생이 앉을 자리를 ◯라 하자.
남학생 중 2명만 서로 이웃하게 앉도록 자리를 정하는 경우는 그림과 같이 2가지이다.



이 각각에 대하여 남학생 3명을 3개의 자리에 앉히는 경우의 수는
$3!=6$
이 각각에 대하여 여학생 3명을 나머지 3개의 자리에 앉히는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$2\times 6\times 6=72$

답 ④

3 네 자리의 자연수가 홀수이려면 일의 자리의 수는 홀수이고, 천의 자리의 수는 0이 아니어야 한다.
일의 자리에 들어갈 숫자를 택하는 경우의 수는 두 개의 홀수 1, 3 중에서 한 개를 택하는 경우의 수이므로
2
이 각각에 대하여 천의 자리에 들어갈 숫자를 택하는 경우의 수는 1, 2, 3 중에서 한 개를 택하는 경우의 수이므로
3
이 각각에 대하여 백의 자리와 십의 자리에 들어갈 숫자를 택하는 경우의 수는 0, 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 두 개를 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_4\Pi_2=4^2$
$=16$
따라서 구하는 경우의 수는
$2\times 3\times 16=96$

답 ④

4 주어진 조건을 만족시키는 함수를 f라 하자.
집합 Y의 원소 중에서 3의 배수는 6뿐이므로 함수 $f: X \to Y$의 치역의 모든 원소의 곱이 3의 배수이려면 $f(a)=6$인 a $(a \in X)$가 적어도 하나 존재해야 한다.
집합 X에서 집합 Y로의 모든 함수의 개수는 집합 Y의 5개의 원소 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_5\Pi_4=5^4=625$ …… ㉠
집합 X에서 집합 Y로의 함수 중에서 $f(a)=6$인 a $(a \in X)$가 존재하지 않는 함수 f의 개수는 집합 Y의 원소 중 6을 제외한 2, 4, 8, 10 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_4\Pi_4=4^4=256$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $f(a)=6$인 a $(a \in X)$가 적어도 하나 존재하는 함수 $f: X \to Y$의 개수는
$625-256=369$
이 369개의 함수 중에서 치역의 원소의 개수가 1인 상수함수는
$f(x)=6$
의 1개뿐이다.
따라서 구하는 함수의 개수는
$369-1=368$

답 368

다른 풀이
주어진 조건을 만족시키는 함수를 f라 하자.
집합 Y의 원소 중에서 3의 배수는 6뿐이므로 함수 $f: X \to Y$의 치역의 원소의 개수는 2 이상이고 $f(a)=6$인 a $(a \in X)$가 적어도 하나 존재해야 한다.
집합 X에서 집합 Y로의 함수 중에서 치역의 원소의 개수가 2 이상인 함수의 개수는
$${}_5\Pi_4-{}_5C_1\times{}_1\Pi_4=5^4-5\times1^4$$
$$=625-5$$
$$=620 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$
집합 X에서 집합 Y로의 함수 중에서 치역의 원소의 개수가 2 이상이고 $f(a)=6$인 a $(a \in X)$가 존재하지 않는 함수의 개수는 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에서 집합 $\{2, 4, 8, 10\}$으로의 함수 중에서 치역의 원소의 개수가 2 이상인 함수의 개수와 같으므로
$${}_4\Pi_4-{}_4C_1\times{}_1\Pi_4=4^4-4\times1^4$$
$$=256-4$$
$$=252 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$
㉠, ㉡에서 구하는 함수의 개수는
$620-252=368$

5 2개의 a를 한 문자 A로 생각하고, 5개의 문자 A, b, b, c, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{5!}{2!2!}=30$
이 각각에 대하여 A의 자리에 a, a를 이웃하게 나열하는 경우의 수는
1
따라서 구하는 경우의 수는
$30\times1=30$

답 ②

6 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단 거리로 가는 경로의 수는
$\dfrac{7!}{4!3!}=35$
A지점에서 출발하여 C지점을 지나서 B지점까지 최단 거리로 가는 경로의 수는
$$1\times\frac{5!}{2!3!}=1\times10$$
$$=10$$
따라서 A지점에서 출발하여 C지점을 지나지 않고 B지점까지 최단 거리로 가는 경로의 수는
$35-10=25$
이 각각에 대하여 B지점에서 출발하여 C지점까지 최단 거리로 가는 경로의 수는
$\dfrac{5!}{2!3!}=10$
따라서 구하는 경로의 수는
$25\times10=250$

답 ①

Level 1 기초 연습 본문 10~11쪽

1 ④	2 ③	3 ⑤	4 79	5 ③
6 ①	7 ⑤	8 ③		

1 A, B, C를 한 사람으로 생각하고, 나머지 4명과 합친 5명을 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$(5-1)!=4!$
$=24$
이 각각에 대하여 A의 양 옆에 앉는 B, C가 서로 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는
$2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$24\times2=48$

답 ④

2 서로 다른 5가지 색 중에서 도형의 가운데에 있는 영역에 칠할 1가지 색을 택하는 경우의 수는
${}_5C_1=5$
이 각각에 대하여 나머지 4가지 색으로 4개의 사분원을 칠하는 경우의 수는
$(4-1)!=3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$5\times6=30$

답 ③

3 구하는 자연수의 개수는 서로 다른 6개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_6\Pi_3$
따라서 $n=6$, $r=3$이므로
$n-r=6-3=3$

답 ⑤

4 3개의 숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는
${}_3\Pi_4=3^4=81$ $\cdots\cdots$ ㉠
그런데 주어진 10개의 숫자는 1이 3개, 2가 3개, 3이 4개이므로 1과 2는 각각 최대 3개까지만 나열할 수 있다.
따라서 구하는 자연수는 ㉠의 자연수 중에서 1111과 2222를 제외하면 되므로 그 개수는
$81-2=79$

답 79

5 A상자에 넣을 1개의 사탕을 택하는 경우의 수는
${}_5C_1=5$
이 각각에 대하여 3개의 상자 B, C, D에 나머지 4개의 사탕을 넣는 경우의 수는
${}_3\Pi_4=3^4=81$
따라서 구하는 경우의 수는
$5\times81=405$

답 ③

6 3개의 복숭아를 A, A, A, 2개의 귤을 B, B, 2개의 사과를 C, C라 하자.
이때 7개의 과일을 먹는 순서를 정하는 경우의 수는 7개의 문자 A, A, A, B, B, C, C를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는
$\dfrac{7!}{3!2!2!}=210$

답 ①

7 $\sum_{k=1}^{5}f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=5$
인 경우는 다음과 같다.
(i) $f(k)$ $(k=1, 2, 3, 4, 5)$가 모두 1인 경우
함수 f는 $f(x)=1$인 상수함수이므로 함수 f의 개수는 1이다.
(ii) $f(k)$ $(k=1, 2, 3, 4, 5)$ 중 0이 1개, 1이 3개, 2가 1개인 경우
0, 1, 1, 1, 2를 일렬로 나열한 다음 왼쪽부터 차례로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값으로 정하면 되므로 함수 f의 개수는
$\dfrac{5!}{3!}=20$
(iii) $f(k)$ $(k=1, 2, 3, 4, 5)$ 중 0이 2개, 1이 1개, 2가 2개인 경우
0, 0, 1, 2, 2를 일렬로 나열한 다음 왼쪽부터 차례로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값으로 정하면 되므로 함수 f의 개수는
$\dfrac{5!}{2!2!}=30$
(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f의 개수는
$1+20+30=51$

답 ⑤

8 A, a를 두 조건 (가), (나)를 만족시키도록 나열하려면 A는 맨 왼쪽에, a는 맨 오른쪽에 나열해야 한다.
따라서 A, a를 나열하는 경우의 수는 1이다.
B, b를 B, B로, C, c를 C, C로, D, d를 D, D로 생각하고 6개의 문자 B, B, C, C, D, D를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$ …… ㉠
이제 ㉠에서 나열된 두 개의 B 중에서 오른쪽에 있는 B를 b로 바꾸고, 두 개의 C 중에서 오른쪽에 있는 C를 c로 바꾸고, 두 개의 D 중에서 오른쪽에 있는 D를 d로 바꾸면 조건 (나)를 만족시킨다.
따라서 구하는 경우의 수는
$1\times90=90$

답 ③

Level 2 기본 연습 본문 12쪽

1 32 **2** ② **3** ④ **4** 60

1 서로 다른 4장의 색종이 중 흰 면이 보이도록 할 1장을 택하는 경우의 수는
${}_4C_1=4$
이 각각에 대하여 이 색종이와 나머지 3장의 색종이를 이어 붙일 때, 가운데에 놓일 색종이를 택하는 경우의 수는
${}_4C_1=4$
이 각각에 대하여 나머지 3장의 색종이를 이어 붙이는 경우의 수는 서로 다른 3개를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로
$(3-1)!=2!$
$=2$
따라서 구하는 경우의 수는
$4\times4\times2=32$

답 32

2 a가 3의 배수이면 $f(a)$도 3의 배수이므로 $f(6)$과 $f(9)$의 값은 6 또는 9이다.

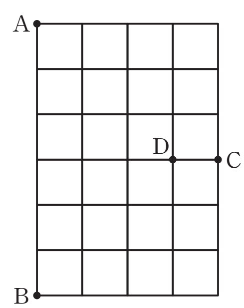
(ⅰ) $f(6)=6$인 경우
$f(9)$의 값을 정하는 경우의 수는
${}_2C_1=2$
이 각각에 대하여 $f(5)$, $f(7)$, $f(8)$의 값은 모두 5이어야 하므로 $f(5)$, $f(7)$, $f(8)$의 값을 정하는 경우의 수는
${}_1\Pi_3=1^3=1$
따라서 이 경우의 함수 f의 개수는
$2\times1=2$

(ⅱ) $f(6)=9$인 경우
$f(9)$의 값을 정하는 경우의 수는
${}_2C_1=2$
이 각각에 대하여 $f(5)$, $f(7)$, $f(8)$의 값은 각각 5, 6, 7, 8 중 하나이어야 하므로 $f(5)$, $f(7)$, $f(8)$의 값을 정하는 경우의 수는
${}_4\Pi_3=4^3=64$
따라서 이 경우의 함수 f의 개수는
$2\times64=128$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수 f의 개수는
$2+128=130$

답 ②

3



갑과 을이 C지점에서 처음으로 만나려면 동시에 D지점을 지나지 않아야 한다.
갑이 A지점에서 출발하여 C지점까지 최단 거리로 가는 경로의 수와 을이 B지점에서 출발하여 C지점까지 최단 거리로 가는 경로의 수는 각각
$\dfrac{7!}{4!3!}=35$
로 같고, 갑이 A지점에서 출발하여 D지점을 지나 C지점까지 가는 경로의 수와 을이 B지점에서 출발하여 D지점을 지나 C지점까지 가는 경로의 수는 각각
$\dfrac{6!}{3!3!}\times1=20$

으로 같다.
따라서 구하는 경우의 수는
$35^2-20^2=(35+20)\times(35-20)$
$=55\times15$
$=825$

답 ④

4 주어진 조건에서
$a_1=4-1=3$,
$a_2=4-2=2$,
$a_3=4-3=1$
이므로 집합 X의 원소 x 중에서
$f(x)=1$인 x의 개수는 3,
$f(x)=2$인 x의 개수는 2,
$f(x)=3$인 x의 개수는 1
이다.
따라서 구하는 함수 f의 개수는
1, 1, 1, 2, 2, 3
을 일렬로 나열한 다음 맨 왼쪽에 있는 수부터 차례로 $f(1)$, $f(2)$, $\cdots$, $f(6)$의 값으로 정하는 경우의 수와 같으므로
$\frac{6!}{3!2!}=60$

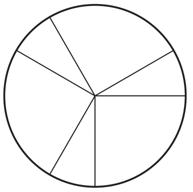
답 60

Level 3 실력 완성

본문 13쪽

1 240 **2** ③ **3** 904

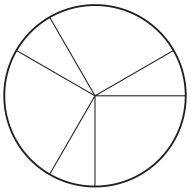
1 $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$이므로 조건 (나)를 만족시키려면 넓이가 $\frac{\pi}{12}$인 부채꼴과 넓이가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴은 서로 이웃해야 한다.
조건 (가)에서 반지름의 길이가 1이고 넓이가 $\frac{\pi}{12}$인 부채꼴의 중심각의 크기를 θ_1이라 하면
$\frac{1}{2}\times1^2\times\theta_1=\frac{\pi}{12}$에서
$\theta_1=\frac{\pi}{6}$
또 반지름의 길이가 1이고 넓이가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴의 중심각의 크기를 θ_2라 하면
$\frac{1}{2}\times1^2\times\theta_2=\frac{\pi}{4}$에서
$\theta_2=\frac{\pi}{2}$
이때 $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{2}{3}\pi$이고, $\frac{2}{3}\pi\times3=2\pi$이므로 조건 (나)에서 원은 그림과 같이 6개의 부채꼴로 나뉜다.
즉, $n=6$



원의 회전을 무시하고 이 6개의 부채꼴에 6가지 색을 각각 1개씩 칠하는 경우의 수는
$6!=720$
이때 원을 한 바퀴 회전시키면 같은 모양이 3가지씩 나타나므로 구하는 경우의 수는
$\frac{720}{3}=240$

답 240

다른 풀이
반지름의 길이가 1인 원의 넓이는 π이고, 조건 (나)에서 이웃한 두 부채꼴의 넓이의 합은 모두 $\frac{\pi}{3}$이므로 원을 나누는 모든 부채꼴의 개수는
$\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}}\times2=6$
두 조건 (가), (나)에서 그림과 같이 이 6개의 부채꼴은 3개씩 서로 합동이며, 이웃하는 두 부채꼴의 넓이는 서로 다르다.



이때 넓이가 $\frac{\pi}{4}$인 3개의 부채꼴은 일정한 간격으로 원형으로 배열되어 있다.
6가지 색 중에서 넓이가 $\frac{\pi}{4}$인 3개의 부채꼴에 칠할 3개를

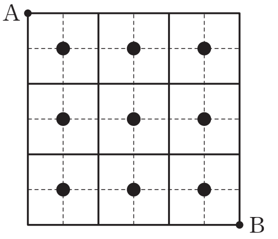
택하는 경우의 수는
$_6C_3=20$
이 3가지 색을 3개의 부채꼴에 칠하는 경우의 수는
$(3-1)!=2!=2$
나머지 3가지 색을 넓이가 $\frac{\pi}{12}$인 3개의 부채꼴에 칠하는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$20\times2\times6=240$

2 N이 $24\,(=2^3\times3)$의 배수이고 $16\,(=2^4)$의 배수가 아니려면
$N=2^3\times3\times m$ (m은 홀수)
이어야 한다.
따라서 다음과 같은 경우로 나누어 생각할 수 있다.
(i) 나열된 6개의 수 중 2가 3개, 나머지 3개는 홀수이고 홀수 중 적어도 한 개는 3인 경우
6개의 자리 중 2가 들어갈 3개의 자리를 정하는 경우의 수는
$_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$
이 각각에 대하여 1, 3, 5 중에서 나머지 3개의 자리에 들어갈 수를 정하는 경우의 수는
$_3\Pi_3=3^3=27$ …… ㉠
㉠의 경우 중에서 3이 한 개도 없는 경우의 수는
$_2\Pi_3=2^3=8$
따라서 이 경우의 여섯 자리의 자연수의 개수는
$20\times(27-8)=380$
(ii) 나열된 6개의 수 중 2가 1개, 4가 1개, 나머지 4개는 홀수이고 홀수 중 적어도 한 개는 3인 경우
6개의 자리 중 2가 들어갈 1개의 자리와 4가 들어갈 1개의 자리를 차례로 정하는 경우의 수는
$_6P_2=6\times5=30$
이 각각에 대하여 1, 3, 5 중에서 나머지 4개의 자리에 들어갈 수를 정하는 경우의 수는
$_3\Pi_4=3^4=81$ …… ㉡
㉡의 경우 중에서 3이 한 개도 없는 경우의 수는
$_2\Pi_4=2^4=16$
따라서 이 경우의 여섯 자리의 자연수의 개수는
$30\times(81-16)=1950$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는
$380+1950=2330$

답 ③

3 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단 거리로 가는 경로의 수는
$\frac{12!}{6!6!}=\frac{12\times11\times10\times9\times8\times7}{6\times5\times4\times3\times2\times1}$
$=924$
이 중에서 ●이 표시된 9개의 지점 중 어느 것도 지나지 않는 경로의 수는 다음 그림의 A지점에서 출발하여 B지점까지 실선을 따라 최단 거리로 가는 경로의 수와 같다.



이 경로의 수는
$\frac{6!}{3!3!}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}$
$=20$
따라서 구하는 경로의 수는
$924-20=904$

답 904

02 중복조합과 이항정리

유제 본문 17~23쪽

1 ① 2 ② 3 ⑤ 4 ③ 5 ③
6 ⑤ 7 ② 8 ②

1 4개의 접시에 떡을 각각 1개씩 담는 경우의 수는 1이다.
남아 있는 3(=7−4)개의 떡을 서로 다른 4개의 접시에 남김없이 담는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{4}H_{3}={}_{4+3-1}C_{3}$$
$$={}_{6}C_{3}$$
$$=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}$$
$$=20$$

따라서 구하는 경우의 수는
$1\times20=20$

답 ①

2 (i) 축구공 2개를 한 학급에게 모두 나누어 주는 경우
축구공을 받을 한 학급을 택하는 경우의 수는
${}_{3}C_{1}=3$
이 학급에게 축구공 2개를 주는 경우의 수는 1이다.
나머지 두 학급에게 농구공을 1개씩 나누어 주는 경우의 수는 1이다.
이 각각에 대하여 세 학급에게 나머지 3(=5−2)개의 농구공을 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{3}H_{3}={}_{3+3-1}C_{3}$$
$$={}_{5}C_{3}$$
$$={}_{5}C_{2}$$
$$=\frac{5\times4}{2\times1}$$
$$=10$$

따라서 이 경우의 수는
$3\times10=30$

(ii) 축구공 2개를 두 학급에게 각각 1개씩 나누어 주는 경우
축구공을 받을 두 학급을 택하는 경우의 수는
${}_{3}C_{2}={}_{3}C_{1}=3$
이 두 학급에게 서로 다른 축구공 2개를 한 개씩 나누어 주는 경우의 수는
$2!=2$
나머지 한 학급에게 농구공 1개를 나누어 주는 경우의 수는 1이다.
이 각각에 대하여 세 학급에게 나머지 4(=5−1)개의 농구공을 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{3}H_{4}={}_{3+4-1}C_{4}$$
$$={}_{6}C_{4}$$
$$={}_{6}C_{2}$$
$$=\frac{6\times5}{2\times1}$$
$$=15$$

따라서 이 경우의 수는
$3\times2\times15=90$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$30+90=120$

답 ②

3 다항식 $(a+b+c+d)^3$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 4개의 문자 a, b, c, d 중에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{4}H_{3}={}_{4+3-1}C_{3}$$
$$={}_{6}C_{3}$$
$$=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}$$
$$=20$$

답 ⑤

4 조건 (가)에서
$a=a'-1,\ b=b'-1,\ c=c'-1$
로 놓으면 a', b', c'은 음이 아닌 정수이다.
따라서 조건 (나)에서
$a+b+c=(a'-1)+(b'-1)+(c'-1)=3$
즉, $a'+b'+c'=6$ …… ㉠
㉠을 만족시키는 모든 순서쌍 (a', b', c')의 개수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{3}H_{6}={}_{3+6-1}C_{6}$$
$$={}_{8}C_{6}$$

$={}_{8}\mathrm{C}_{2}$

$=\dfrac{8\times7}{2\times1}$

$=28$

답 ③

5 $\left(49x^2+\dfrac{1}{7x}\right)^7$의 전개식의 일반항은

${}_{7}\mathrm{C}_{r}(49x^2)^{7-r}\left(\dfrac{1}{7x}\right)^r$

$={}_{7}\mathrm{C}_{r}\times7^{14-3r}\times x^{14-3r}$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$

$\dfrac{1}{x}$, 즉 x^{-1}항은 $14-3r=-1$, 즉 $r=5$일 때이므로 $\dfrac{1}{x}$의 계수는

${}_{7}\mathrm{C}_{5}\times7^{-1}={}_{7}\mathrm{C}_{2}\times\dfrac{1}{7}$

$=\dfrac{7\times6}{2\times1}\times\dfrac{1}{7}$

$=3$

답 ③

6 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)(2x+1)^6$

$=(2x+1)^6+\dfrac{1}{x}(2x+1)^6$

이므로 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)(2x+1)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는

$(2x+1)^6$의 전개식에서 x^4의 계수와 x^5의 계수의 합과 같다.

$(2x+1)^6$의 전개식의 일반항은

${}_{6}\mathrm{C}_{r}(2x)^{6-r}1^r$

$={}_{6}\mathrm{C}_{r}\times2^{6-r}\times x^{6-r}$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$

x^4항은 $6-r=4$, 즉 $r=2$일 때이므로 x^4의 계수는

${}_{6}\mathrm{C}_{2}\times2^4=\dfrac{6\times5}{2\times1}\times16$

$=240$

x^5항은 $6-r=5$, 즉 $r=1$일 때이므로 x^5의 계수는

${}_{6}\mathrm{C}_{1}\times2^5=6\times32$

$=192$

따라서 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)(2x+1)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는

$240+192=432$

답 ⑤

7 $\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1}{}_{2n-1}\mathrm{C}_{r}$

$={}_{2n-1}\mathrm{C}_{0}+{}_{2n-1}\mathrm{C}_{1}+{}_{2n-1}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-2}+{}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}$

이때

${}_{2n-1}\mathrm{C}_{0}={}_{2n-1}\mathrm{C}_{2n-1}$,

${}_{2n-1}\mathrm{C}_{1}={}_{2n-1}\mathrm{C}_{2n-2}$,

${}_{2n-1}\mathrm{C}_{2}={}_{2n-1}\mathrm{C}_{2n-3}$,

$\vdots$

${}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}={}_{2n-1}\mathrm{C}_{n}$

이므로

$\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1}{}_{2n-1}\mathrm{C}_{r}$

$=\dfrac{1}{2}({}_{2n-1}\mathrm{C}_{0}+{}_{2n-1}\mathrm{C}_{1}+{}_{2n-1}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{2n-1}\mathrm{C}_{2n-1})$

$=\dfrac{1}{2}\times2^{2n-1}$

$=2^{2n-2}$

$256=2^8$이므로

$2^{2n-2}=2^8$에서

$2n-2=8$

따라서 $n=5$

답 ②

8 $a+b+c=d$ $\cdots\cdots$ ㉠

에서

$a=a'+1,\ b=b'+1,\ c=c'+1$

($a',\ b',\ c'$은 음이 아닌 정수)

로 놓으면 ㉠에서

$a'+b'+c'=d-3$

따라서 순서쌍 $(a',\ b',\ c')$의 개수는 서로 다른 3개에서 $(d-3)$개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3}\mathrm{H}_{d-3}={}_{3+(d-3)-1}\mathrm{C}_{d-3}$

$={}_{d-1}\mathrm{C}_{2}$

에서 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 ${}_{d-1}\mathrm{C}_{2}$이다.

㉠에서 $3\le d\le10$이고

${}_{n}\mathrm{C}_{r}+{}_{n}\mathrm{C}_{r+1}={}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$ $(0\le r\le n-1)$

이므로 구하는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

${}_{2}\mathrm{C}_{2}+{}_{3}\mathrm{C}_{2}+{}_{4}\mathrm{C}_{2}+{}_{5}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{9}\mathrm{C}_{2}$

$=({}_{2}\mathrm{C}_{2}+{}_{3}\mathrm{C}_{2})+{}_{4}\mathrm{C}_{2}+{}_{5}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{9}\mathrm{C}_{2}$

$=({}_{3}\mathrm{C}_{3}+{}_{3}\mathrm{C}_{2})+{}_{4}\mathrm{C}_{2}+{}_{5}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{9}\mathrm{C}_{2}$

$=({}_{4}\mathrm{C}_{3}+{}_{4}\mathrm{C}_{2})+{}_{5}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{9}\mathrm{C}_{2}$

$=({}_{5}\mathrm{C}_{3}+{}_{5}\mathrm{C}_{2})+\cdots+{}_{9}\mathrm{C}_{2}$

$\vdots$

$={}_{9}C_{3}+{}_{9}C_{2}$

$={}_{10}C_{3}$

$=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}$

$=120$

답 ②

다른 풀이

방정식

$a+b+c=d$ …… ㉠

에서

$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$

(a', b', c'은 음이 아닌 정수)

로 놓으면 ㉠에서

$a'+b'+c'=d-3$

이때 $0\le d-3\le7$이므로

$d'=7-(d-3)$으로 놓으면

$0\le d'\le7$이고

$a'+b'+c'+d'=7$

이 방정식을 만족시키는 모든 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는 서로 다른 4개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{4}H_{7}={}_{4+7-1}C_{7}$

$={}_{10}C_{7}$

$={}_{10}C_{3}$

$=120$

Level 1 기초 연습

본문 24~25쪽

1 ④	2 ③	3 ①	4 ②	5 ③
6 ③	7 ①	8 ④		

1 ${}_{4}H_{3}={}_{4+3-1}C_{3}$

$={}_{6}C_{3}$

$=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}$

$=20$

${}_{3}H_{4}={}_{3+4-1}C_{4}$

$={}_{6}C_{4}$

$={}_{6}C_{2}$

$=\dfrac{6\times5}{2\times1}$

$=15$

따라서

${}_{4}H_{3}-{}_{3}H_{4}=20-15$

$=5$

답 ④

2 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3}H_{4}={}_{3+4-1}C_{4}$

$={}_{6}C_{4}$

$={}_{6}C_{2}$

$=\dfrac{6\times5}{2\times1}$

$=15$

답 ③

3 두 조건 (가), (나)에서

$a+b+c=6$ …… ㉠

이때

$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$

(a', b', c'은 음이 아닌 정수)

로 놓으면 ㉠에서

$a'+b'+c'=3$ …… ㉡

㉡을 만족시키는 모든 순서쌍 (a', b', c')의 개수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3}H_{3}={}_{3+3-1}C_{3}$

$={}_{5}C_{3}$

$={}_{5}C_{2}$

$=\dfrac{5\times4}{2\times1}$

$=10$

이때 a', b', c'이 결정되면 a, b, c, d도 각각 유일하게 결정되므로 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수도 10이다.

답 ①

4 $5\le n\le15$를 만족시키는 홀수 n은 5, 7, 9, 11, 13, 15의 6개이다.

이 6개의 홀수에서 중복을 허락하여 3개를 택하여 크지 않은 순서대로 x, y, z의 값으로 정하면 되므로 구하는 순서쌍

의 개수는

$_{6}H_{3}={}_{6+3-1}C_{3}$

$={}_{8}C_{3}$

$=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}$

$=56$

답 ②

5 집합 X에서 집합 Y로의 모든 함수의 개수는

$_{5}\Pi_{4}=5^{4}$

$=625$

이때 주어진 조건의 부정은

'집합 X의 임의의 두 원소 a, b $(a<b)$에 대하여

$f(a)\geq f(b)$이다.'

이고, 이를 만족시키는 함수의 개수는 서로 다른 5개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_{5}H_{4}={}_{5+4-1}C_{4}$

$={}_{8}C_{4}$

$=\dfrac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}$

$=70$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$625-70=555$

답 ③

6 $\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)^{6}$의 전개식의 일반항은

$_{6}C_{r}(2x)^{6-r}\left(\dfrac{1}{2x}\right)^{r}$

$={}_{6}C_{r}\times2^{6-2r}\times x^{6-2r}\,(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$

이때 x^{2}항은 $6-2r=2$인 경우이므로

$r=2$

따라서 x^{2}의 계수는

$_{6}C_{2}\times2^{6-4}=\dfrac{6\times5}{2\times1}\times2^{2}$

$=15\times4$

$=60$

답 ③

7 $\left(\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{2}}{x}\right)^{8}\left(\sqrt{x}-\dfrac{\sqrt{2}}{x}\right)^{8}=\left(x-\dfrac{2}{x^{2}}\right)^{8}$의 전개식의 일반항은

$_{8}C_{r}x^{8-r}\left(-\dfrac{2}{x^{2}}\right)^{r}$

$={}_{8}C_{r}\times(-2)^{r}\times x^{8-3r}\,(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$

따라서 $\dfrac{1}{x}$항은 $8-3r=-1$, 즉 $r=3$일 때이므로 $\dfrac{1}{x}$의 계수는

$_{8}C_{3}\times(-2)^{3}=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}\times(-8)$

$=-448$

답 ①

8 이항계수의 성질에 의하여

$_{9}C_{0}+{}_{9}C_{2}+{}_{9}C_{4}+{}_{9}C_{6}+{}_{9}C_{8}=2^{9-1}=2^{8}$

이때 $2^{8}=4^{4}=16^{2}=256^{1}$이므로

$2^{8}={}_{2}\Pi_{8}={}_{4}\Pi_{4}={}_{16}\Pi_{2}={}_{256}\Pi_{1}$

따라서 순서쌍 $(m,\ n)$은

$(2,\ 8)$, $(4,\ 4)$, $(16,\ 2)$, $(256,\ 1)$

이고, 그 개수는 4이다.

답 ④

Level 2 기본 연습

본문 26쪽

1 ② 2 ② 3 ⑤ 4 ①

1 조건 (가)에서 흰 공이 들어 있지 않은 상자 1개를 택하는 경우의 수는

$_{4}C_{1}=4$

흰 공이 들어 있지 않은 상자를 A라 하자.

세 상자 B, C, D에 각각 흰 공을 1개씩 넣은 후 남아 있는 1개의 흰 공을 세 상자 B, C, D에 나누어 넣는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 1개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_{3}H_{1}={}_{3+1-1}C_{1}$

$={}_{3}C_{1}$

$=3$

조건 (나)에서 검은 공이 들어 있지 않은 상자의 개수는 1이고, 조건 (다)에서 모든 상자에는 적어도 한 개의 공이 들어 있으므로 상자 A에는 검은 공을 넣어야 한다.

세 상자 B, C, D에서 검은 공이 들어 있지 않은 상자 1개를 택하는 경우의 수는

${}_{3}C_{1}=3$

검은 공이 들어 있지 않은 상자를 B라 하자.

세 상자 A, C, D에 검은 공을 1개씩 넣은 후 남아 있는 3개의 검은 공을 세 상자 A, C, D에 나누어 넣는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{3}H_{3}={}_{3+3-1}C_{3}$$
$$={}_{5}C_{2}$$
$$=10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$(4\times3)\times(3\times10)=360$

답 ②

2 $a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$

(a', b', c', d'은 음이 아닌 정수)

로 놓으면 조건 (가)에서

$a'+b'+c'+d'=12$

위 등식을 만족시키는 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는 서로 다른 4개에서 12개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{4}H_{12}={}_{4+12-1}C_{12}$$
$$={}_{15}C_{12}$$
$$={}_{15}C_{3}$$
$$=\frac{15\times14\times13}{3\times2\times1}$$
$$=455$$

따라서 조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 455이다.

이제 조건 (가)를 만족시키면서 a, b, c, d가 모두 짝수인 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하자.

$a=2x+2$, $b=2y+2$, $c=2z+2$, $d=2w+2$

(x, y, z, w는 음이 아닌 정수)

로 놓으면 조건 (가)에서

$x+y+z+w=4$

위 등식을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 서로 다른 4개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{4}H_{4}={}_{4+4-1}C_{4}$$
$$={}_{7}C_{4}$$
$$={}_{7}C_{3}$$
$$=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}$$
$$=35$$

따라서 조건 (가)를 만족시키면서 a, b, c, d가 모두 짝수인 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 35이다.

그러므로 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$455-35=420$

답 ②

3 두 조건 (가), (나)에서

$f(4)=4$

이때 조건 (가)를 만족시키는 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 순서쌍 $(f(1), f(2), f(3))$의 개수는 1, 2, 3, 4 중에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{4}H_{3}={}_{4+3-1}C_{3}$$
$$={}_{6}C_{3}$$
$$=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}$$
$$=20$$

이 각각에 대하여 조건 (나)를 만족시키는 $f(5)$, $f(6)$의 순서쌍 $(f(5), f(6))$의 개수는 4, 5, 6 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_{3}\Pi_{2}=3^{2}$$
$$=9$$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$20\times9=180$

답 ⑤

4 다항식 $(x+\sqrt[4]{2})^{6}$의 전개식의 일반항은

${}_{6}C_{r}x^{6-r}(\sqrt[4]{2})^{r}$ $(r=0, 1, 2, \cdots, 6)$

$(\sqrt[4]{2})^{r}$의 값이 유리수가 되는 경우는

$r=0$ 또는 $r=4$

일 때이다.

$r=0$일 때, x^{6}의 계수는

$${}_{6}C_{0}\times(\sqrt[4]{2})^{0}=1\times1$$
$$=1$$

$r=4$일 때, x^{2}의 계수는

$${}_{6}C_{4}\times(\sqrt[4]{2})^{4}={}_{6}C_{2}\times(\sqrt[4]{2})^{4}$$
$$=15\times2$$
$$=30$$

따라서 다항식 $(x+\sqrt[4]{2})^6$의 전개식에서 유리수인 계수의 총합은
$1+30=31$

답 ①

Level 3 실력 완성

본문 27쪽

1 ④ 2 695 3 ⑤

1 $(x^2+1)^5$의 전개식의 일반항은
${}_5C_r(x^2)^{5-r}1^r={}_5C_r\times x^{10-2r}$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$
이고, $(x^3+2)^n$의 전개식의 일반항은
${}_nC_s(x^3)^{n-s}2^s={}_nC_s\times 2^s\times x^{3n-3s}$ $(s=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$
이므로
$(x^2+1)^5$
$=1+{}_5C_4\times x^2+{}_5C_3\times x^4+{}_5C_2\times x^6+\cdots+x^{10}$
$(x^3+2)^n$
$=2^n+{}_nC_{n-1}\times 2^{n-1}\times x^3+{}_nC_{n-2}\times 2^{n-2}\times x^6+\cdots+x^{3n}$
따라서 $(x^2+1)^5(x^3+2)^n$의 전개식에서 x^4항은
$({}_5C_3\times x^4)\times 2^n=10\times 2^n\times x^4$
이고, x^4의 계수는 160이므로
$10\times 2^n=160$
에서
$n=4$
따라서 주어진 다항식 $(x^2+1)^5(x^3+2)^4$의 전개식에서 x^6항은
$1\times({}_4C_2\times 2^2\times x^6)+({}_5C_2\times x^6)\times 2^4$
$=6\times 4\times x^6+10\times 16\times x^6$
$=24x^6+160x^6$
$=184x^6$
이므로 x^6의 계수는 184이다.

답 ④

2 서로 다른 4개의 주머니를 A, B, C, D로 놓자.
각 주머니에 넣는 구슬의 개수를 각각 $a,\ b,\ c,\ d$라 하고, 어느 주머니에도 넣지 않은 구슬의 개수를 e라 하면
$a,\ b,\ c,\ d$는 0 이상 7 이하의 정수이고, e는 자연수이다.
이때 $a+b+c+d+e=10$이어야 하므로
$e=e'+1$ (e'은 음이 아닌 정수)
로 놓으면
$a+b+c+d+e'=9$ …… ㉠
㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d,\ e'$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e')$의 개수는 서로 다른 5개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_5H_9={}_{5+9-1}C_9$
$={}_{13}C_9$
$={}_{13}C_4$
$=\dfrac{13\times 12\times 11\times 10}{4\times 3\times 2\times 1}$
$=715$
이 중에서 $a,\ b,\ c,\ d$ 중 하나가 9인 순서쌍의 개수는
${}_4C_1=4$
이고, $a,\ b,\ c,\ d$ 중 하나는 8이고 $a,\ b,\ c,\ d,\ e'$ 중 8인 것을 제외한 나머지 4개 중 하나는 1인 순서쌍의 개수는
${}_4C_1\times{}_4C_1=4\times 4$
$=16$
따라서 구하는 경우의 수는
$715-4-16=695$

답 695

3 $g(x)=|f(x)|$라 하면 g는 집합 X에서 집합 $\{1,\ 2,\ 3\}$으로의 함수이다.
조건 (가)에서 집합 X의 임의의 두 원소 $x_1,\ x_2$에 대하여
$x_1<x_2$이면 $g(x_1)\le g(x_2)$ …… ㉠
이어야 하고,
조건 (나)에서
$g(x)=3$인 x $(x\in X)$가 존재해야 한다. …… ㉡
㉠을 만족시키는 함수 g의 개수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6$
$={}_8C_6$
$={}_8C_2$
$=\dfrac{8\times 7}{2\times 1}$
$=28$
이 28개의 함수 중에서 ㉡을 만족시키지 않는 함수 g의 개수는 서로 다른 2개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_2H_6 = {}_{2+6-1}C_6$
$= {}_7C_6$
$= {}_7C_1$
$= 7$

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 함수 g의 개수는
$28-7=21$
한편, 집합 X의 임의의 원소 x에 대하여 $g(x)=k$라 하면 $f(x)=-k$ 또는 $f(x)=k$이므로 21개의 각 함수 g에 대하여 함수 f의 개수는
$_2\Pi_6 = 2^6$
$= 64$
따라서 구하는 함수 f의 개수는
$21 \times 64 = 1344$

답 ⑤

03 확률의 뜻과 활용

유제				본문 31~37쪽
1 ②	2 240	3 ②	4 ④	5 ②
6 ①				

1 두 사건 A, B에 대하여
$A=\{2, 3, 5, 7\}$, $B=\{5, 6, 7, 8\}$
이므로
$A\cup B=\{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$
이때 두 사건 $A\cup B$와 C^C이 서로 배반사건이려면
$(A\cup B)\cap C^C=\varnothing$
이어야 한다.
즉, $(A\cup B)\subset C\subset S$이어야 하므로 집합 C는 집합 $A\cup B$를 포함하는 집합 S의 부분집합이다.
따라서 구하는 사건 C의 개수는
$2^{8-6}=2^2$
$=4$

답 ②

2 이 시행의 표본공간을 S라 하면
$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
이고,
$A=\{4, 8\}$, $B=\{1, 2, 5, 10\}$
두 사건 A와 C가 서로 배반사건이므로
$A\cap C=\varnothing$
즉, $C\subset A^C=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$
또 두 사건 B^C과 C가 서로 배반사건이 아니므로
$B^C\cap C\neq\varnothing$
즉, 사건 C는 $B^C=\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$의 원소 중 적어도 하나의 원소를 가져야 한다.
이때 집합 A^C의 부분집합의 개수는 2^8이고, 이 중에서 집합 $A^C\cap B^C=\{3, 6, 7, 9\}$의 원소를 하나도 원소로 갖지 않는 집합의 개수는 집합 $B=\{1, 2, 5, 10\}$의 부분집합의 개수인 2^4과 같다.
따라서 구하는 사건 C의 개수는
$2^8-2^4=256-16$
$=240$

답 240

3 9개의 공이 들어 있는 주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

$_9\mathrm{C}_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}$

$=84$

이때 빨간 공 1개, 파란 공 1개, 노란 공 1개를 꺼내는 경우의 수는

$_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1=2\times3\times4$

$=24$

따라서 구하는 확률은

$\frac{24}{84}=\frac{2}{7}$

답 ②

4 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6^2=36$

두 함수 $y=ax^2$, $y=6x-b$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $ax^2-6x+b=0$의 판별식을 D라 할 때 $D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=9-ab>0$

$ab<9$

이때 $ab<9$를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$,

$(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$,

$(4, 1)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$, $(6, 1)$

이므로 조건을 만족시키는 경우의 수는

16

따라서 구하는 확률은

$\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$

답 ④

5 7장의 카드에서 서로 다른 3장의 카드를 택하는 경우의 수는

$_7\mathrm{C}_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}$

$=35$

(i) 홀수가 적혀 있는 카드를 3장, 짝수가 적혀 있는 카드를 0장 택하는 사건을 A라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{_4\mathrm{C}_3}{35}$

$=\frac{4}{35}$

(ii) 홀수가 적혀 있는 카드를 2장, 짝수가 적혀 있는 카드를 1장 택하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(B)=\frac{_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{35}$

$=\frac{6\times3}{35}$

$=\frac{18}{35}$

(i), (ii)에서 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{4}{35}+\frac{18}{35}$

$=\frac{22}{35}$

답 ②

6 12명의 학생 중에서 4명의 학생을 택하는 경우의 수는

$_{12}\mathrm{C}_4=\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}$

$=495$

이때 택한 학생 중 적어도 한 명은 당구 동아리 학생인 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 농구 동아리와 탁구 동아리 학생 중에서만 4명을 택하는 사건이고, 이 경우의 수는

$_9\mathrm{C}_4=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}$

$=126$

그러므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{126}{495}$

$=\frac{14}{55}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$=1-\frac{14}{55}$

$=\frac{41}{55}$

답 ①

Level 1 기초 연습

본문 38~39쪽

1 ①	2 ④	3 ①	4 ③	5 ①
6 ④	7 ⑤	8 ④		

1 $A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$이므로

$$\mathrm{P}(A^C \cap B^C) = \mathrm{P}((A \cup B)^C) = 1 - \mathrm{P}(A \cup B)$$

이때 $\mathrm{P}(A^C \cap B^C) = \frac{1}{6}$이므로

$1 - \mathrm{P}(A \cup B) = \frac{1}{6}$

에서

$\mathrm{P}(A \cup B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

한편, 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈 정리에 의하여

$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cup B) = \frac{5}{6}$

이때 $\mathrm{P}(A^C) = \frac{5}{8}$이므로

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^C) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

따라서

$$\mathrm{P}(B) = \frac{5}{6} - \mathrm{P}(A) = \frac{5}{6} - \frac{3}{8} = \frac{11}{24}$$

답 ①

2 표본공간 S의 모든 사건의 개수는

$2^5 = 32$

S의 사건 중에서 임의로 택한 하나의 사건을 B라 하자.

두 사건 A와 B가 서로 배반사건이려면

$A \cap B = \varnothing$

이어야 하는데, $A = \{1, 5\}$이므로

$B \subset \{2, 3, 4\}$이어야 한다.

즉, 조건을 만족시키는 사건 B의 개수는

$2^3 = 8$

따라서 구하는 확률은

$\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

답 ④

3 1부터 7까지의 자연수를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$7!$

짝수를 모두 짝수 번째에 나열하는 경우의 수는

$3! \times 4!$

따라서 구하는 확률은

$\frac{3! \times 4!}{7!} = \frac{1}{35}$

답 ①

4 6명의 학생 중에서 3명의 학생을 택하는 경우의 수는

$${}_6\mathrm{C}_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

이때 A는 포함되고 B는 포함되지 않도록 택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$

따라서 구하는 확률은

$\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

답 ③

5 한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6^3 = 216$

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루면

$2b = a + c$

이므로 b가

1, 2, 3, 4, 5, 6

일 때, $a + c$는 각각

2, 4, 6, 8, 10, 12

이어야 하고, 이 경우의 수는

$1 + 3 + 5 + 5 + 3 + 1 = 18$

따라서 구하는 확률은

$\frac{18}{216} = \frac{1}{12}$

답 ①

6 한 개의 동전을 5번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$2^5 = 32$

이때 앞면이 연속하여 3번 나오는 사건을 A, 연속하여 4번 나오는 사건을 B라 하자.

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타내면

(ⅰ) $A=\{\text{HHHTT, HHHTH, THHHT, TTHHH, HTHHH}\}$
이므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{32}$
(ⅱ) $B=\{\text{HHHHT, THHHH}\}$
이므로
$\mathrm{P}(B)=\frac{2}{32}=\frac{1}{16}$
(ⅰ), (ⅱ)에서 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{5}{32}+\frac{1}{16}$$
$$=\frac{7}{32}$$

답 ④

7 세 자리의 자연수의 개수는
$999-99=900$
택한 수의 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 수 중에 적어도 하나가 홀수인 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 택한 수의 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 수가 모두 홀수가 아닌 사건이다.
이 경우의 수는
$4\times5\times5=100$
이므로
$\mathrm{P}(A^C)=\frac{100}{900}=\frac{1}{9}$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$$
$$=1-\frac{1}{9}$$
$$=\frac{8}{9}$$

답 ⑤

8 5명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는
$5!$
두 학생 A와 B가 이웃하지 않는 사건을 E라 하면 사건 E의 여사건 E^C은 A와 B가 이웃하는 사건이다.
이때 두 학생 A와 B가 이웃하도록 5명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는
$4!\times2!$
이므로
$$\mathrm{P}(E^C)=\frac{4!\times2!}{5!}$$
$$=\frac{2}{5}$$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(E)=1-\mathrm{P}(E^C)$$
$$=1-\frac{2}{5}$$
$$=\frac{3}{5}$$

답 ④

Level 2 기본 연습

본문 40~41쪽

1 ⑤	**2** ⑤	**3** 106	**4** ③	**5** ④
6 131	**7** ②	**8** ④		

1 집합 X에서 X로의 함수 f 중에서 임의로 하나의 함수를 택하는 모든 경우의 수는
${}_4\Pi_4=4^4=256$
$f(2)\le f(3)$을 만족시키도록 $f(2)$와 $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는
$${}_4\mathrm{H}_2={}_{4+2-1}\mathrm{C}_2={}_5\mathrm{C}_2$$
$$=\frac{5\times4}{2\times1}$$
$$=10$$
이 각각에 대하여 $f(1)$과 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는
$4^2=16$
그러므로 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$10\times16=160$
따라서 구하는 확률은
$\frac{160}{256}=\frac{5}{8}$

답 ⑤

2 한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는
$6^3=216$
$a+b$가 c의 배수인 경우의 수는
(ⅰ) $c=1$인 경우
$a+b$의 값은 자연수이기만 하면 되므로 이 경우의 수는

$6\times6=36$

(ii) $c=2$인 경우

$a+b$의 값이 짝수이어야 하므로 이 경우의 수는

$\frac{36}{2}=18$

(iii) $c=3$인 경우

$a+b$의 값이 3 또는 6 또는 9 또는 12이어야 하므로 이 경우의 수는

$2+5+4+1=12$

(iv) $c=4$인 경우

$a+b$의 값이 4 또는 8 또는 12이어야 하므로 이 경우의 수는

$3+5+1=9$

(v) $c=5$인 경우

$a+b$의 값이 5 또는 10이어야 하므로 이 경우의 수는

$4+3=7$

(vi) $c=6$인 경우

$a+b$의 값이 6 또는 12이어야 하므로 이 경우의 수는

$5+1=6$

(i)~(vi)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$36+18+12+9+7+6=88$

따라서 구하는 확률은

$\frac{88}{216}=\frac{11}{27}$

답 ⑤

3 크기가 같은 9개의 원을 3개는 빨간 색으로, 4개는 파란 색으로, 2개는 노란 색으로 칠하는 모든 경우의 수는

$\frac{9!}{3!\times4!\times2!}=1260$

색칠한 그림이 좌우 대칭이 되려면 왼쪽에서 다섯 번째 원은 빨간 색으로 칠하고 그 왼쪽의 4개의 원을 1개는 빨간 색으로, 2개는 파란 색으로, 1개는 노란 색으로 칠한 후 나머지 오른쪽의 4개의 원은 이와 대칭으로 칠하면 되므로 이 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

따라서 구하는 확률은

$\frac{12}{1260}=\frac{1}{105}$

이므로

$p+q=105+1$

$=106$

답 106

4 주어진 조건을 만족시키는 두 집합 A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수를 구해 보자.

(i) $n(A\cap B)=0$인 경우

네 수 1, 2, 3, 4 중에서 집합 A의 원소가 될 수를 택하고 나머지 원소를 집합 B의 원소로 하면 된다.

이때 조건 (나)를 만족시키려면 $n(A)=3$이어야 하므로 이 경우의 수는

${}_4C_3=4$

(ii) $n(A\cap B)=1$인 경우

네 수 1, 2, 3, 4 중에서 집합 $A\cap B$의 원소가 될 수를 1개 택하고, 나머지 세 수 중에서 집합 $A-B$의 원소가 될 수를 택한 후 나머지 원소를 집합 $B-A$의 원소로 하면 된다.

이때 조건 (나)를 만족시키려면 $n(A-B)=2$ 또는 $n(A-B)=3$이어야 하므로 이 경우의 수는

${}_4C_1\times({}_3C_2+{}_3C_3)=4\times(3+1)$

$=16$

(iii) $n(A\cap B)=2$인 경우

네 수 1, 2, 3, 4 중에서 집합 $A\cap B$의 원소가 될 수를 2개 택하고, 나머지 두 수 중에서 집합 $A-B$의 원소가 될 수를 택한 후 나머지 원소를 집합 $B-A$의 원소로 하면 된다.

이때 조건 (나)를 만족시키려면 $n(A-B)=2$이어야 하므로 이 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_2C_2=6\times1$

$=6$

(iv) $n(A\cap B)=3$인 경우

네 수 1, 2, 3, 4 중에서 집합 $A\cap B$의 원소가 될 수를 3개 택하고, 조건 (나)를 만족시키려면 나머지 한 수는 집합 $A-B$의 원소로 해야 하므로 이 경우의 수는

${}_4C_3=4$

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 두 집합 A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수는

$4+16+6+4=30$

이때 두 집합 A, B가 서로소인 경우의 수는 (i)에 의하여 4이므로 구하는 확률은

$\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$

답 ③

5 다섯 개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

이때 A가 B보다 왼쪽에 있도록 나열하는 사건을 L, C가 B보다 오른쪽에 있도록 나열하는 사건을 R라 하자.

(i) A가 B보다 왼쪽에 있도록 나열하는 경우의 수는 두 문자 A, B를 같은 것으로 보고 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{2!}=60$

그러므로

$\mathrm{P}(L)=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$

(ii) C가 B보다 오른쪽에 있도록 나열하는 경우의 수는 두 문자 B, C를 같은 것으로 보고 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{2!}=60$

그러므로

$\mathrm{P}(R)=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$

(iii) A가 B보다 왼쪽에 있고, C가 B보다 오른쪽에 있도록 나열하는 경우의 수는 세 문자 A, B, C를 모두 같은 것으로 보고 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{3!}=20$

그러므로

$\mathrm{P}(L\cap R)=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$

(i), (ii), (iii)에서 확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(L\cup R)&=\mathrm{P}(L)+\mathrm{P}(R)-\mathrm{P}(L\cap R)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\\&=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

답 ④

다른 풀이

다섯 개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5!=120$

이때 A가 B보다 왼쪽에 있거나 C가 B보다 오른쪽에 있도록 나열하는 사건을 E라 하면, 사건 E의 여사건 E^C은 A가 B보다 오른쪽에 있고 C가 B보다 왼쪽에 있도록 나열하는 사건이다.

이 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

이므로

$\mathrm{P}(E^C)=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=1-\mathrm{P}(E^C)\\&=1-\frac{1}{6}\\&=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

6 10장의 카드가 들어 있는 주머니에서 4장의 카드를 동시에 꺼내는 경우의 수는

$$\begin{aligned}{}_{10}\mathrm{C}_4&=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}\\&=210\end{aligned}$$

이 시행에서 꺼낸 카드에 적혀 있는 수의 최댓값이 8인 사건을 A, 최솟값이 4인 사건을 B라 하자.

(i) 꺼낸 카드에 적혀 있는 수의 최댓값이 8인 경우

8이 적혀 있는 카드와 8보다 작은 수가 적혀 있는 7장의 카드 중에서 서로 다른 3장을 꺼내는 경우이므로 이 경우의 수는

$$\begin{aligned}{}_7\mathrm{C}_3&=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\\&=35\end{aligned}$$

그러므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{35}{210}=\frac{1}{6}$

(ii) 꺼낸 카드에 적혀 있는 수의 최솟값이 4인 경우

4가 적혀 있는 카드와 4보다 큰 수가 적혀 있는 6장의 카드 중에서 서로 다른 3장을 꺼내는 경우이므로 이 경우의 수는

$$\begin{aligned}{}_6\mathrm{C}_3&=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\\&=20\end{aligned}$$

그러므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{20}{210}=\frac{2}{21}$

(iii) 꺼낸 카드에 적혀 있는 수의 최댓값이 8이고 최솟값이 4인 경우

4가 적혀 있는 카드, 8이 적혀 있는 카드와 4보다 크고 8보다 작은 수가 적혀 있는 3장의 카드 중에서 서로 다른 2장을 꺼내는 경우이므로 이 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_2=3$

그러므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{210}=\frac{1}{70}$

(i), (ii), (iii)에서 확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{6}+\frac{2}{21}-\frac{1}{70}$

$=\frac{26}{105}$

따라서

$p+q=105+26$

$=131$

답 131

7 흰 공 4개와 검은 공 n개가 들어 있는 주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_{n+4}C_2=\frac{(n+4)(n+3)}{2}$

이 시행에서 꺼낸 두 공의 색이 서로 같은 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내는 사건이다.

이때 흰 공 4개와 검은 공 n개로 구성된 $(n+4)$개의 공 중에서 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내는 경우의 수는

${}_4C_1\times{}_nC_1=4n$

이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{4n}{\frac{(n+4)(n+3)}{2}}$

$=\frac{8n}{n^2+7n+12}$

한편, $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{7}$에서

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$

$=1-\frac{3}{7}$

$=\frac{4}{7}$

이므로

$\frac{8n}{n^2+7n+12}=\frac{4}{7}$

$n^2-7n+12=0$

$(n-3)(n-4)=0$

$n=3$ 또는 $n=4$

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$3+4=7$

답 ②

8 7개의 공 중에서 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_7C_2=\frac{7\times6}{2}$

$=21$

이 시행에서 꺼낸 두 공에 적혀 있는 두 수의 차가 1이 아닌 사건을 A라 하면 A의 여사건 A^C은 꺼낸 두 공에 적혀 있는 두 수의 차가 1인 사건이다.

이때 꺼낸 두 공에 적혀 있는 두 수의 차가 1인 경우는 꺼낸 두 공에 적혀 있는 두 수가 1과 2 또는 2와 3 또는 5와 6 또는 6과 7 또는 7과 8인 5가지 경우뿐이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{5}{21}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$=1-\frac{5}{21}$

$=\frac{16}{21}$

답 ④

Level 3 실력 완성

본문 42쪽

1 ⑤ **2** 13 **3** ⑤

1 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6^2=36$

(i) $a=1$ 또는 $a=2$인 경우

$a=1$일 때

함수 $y=a\sin x+5$의 최솟값은 4, 최댓값은 6이고,

$a=2$일 때

함수 $y=a\sin x+5$의 최솟값은 3, 최댓값은 7이므로

함수 $y=a\sin x+5$의 그래프와 직선 $y=2b$가 만나려면

$2b=4$ 또는 $2b=6$, 즉

$b=2$ 또는 $b=3$이어야 한다.

그러므로 이 경우의 수는

$2\times2=4$

(ii) $a=3$ 또는 $a=4$인 경우

$a=3$일 때

함수 $y=a\sin x+5$의 최솟값은 2, 최댓값은 8이고,

$a=4$일 때

함수 $y=a\sin x+5$의 최솟값은 1, 최댓값은 9이므로

함수 $y=a\sin x+5$의 그래프와 직선 $y=2b$가 만나려면

$2b=2$ 또는 $2b=4$ 또는 $2b=6$ 또는 $2b=8$, 즉
$b=1$ 또는 $b=2$ 또는 $b=3$ 또는 $b=4$이어야 한다.
그러므로 이 경우의 수는
$2\times4=8$

(iii) $a=5$ 또는 $a=6$인 경우
$a=5$일 때
함수 $y=a\sin x+5$의 최솟값은 0, 최댓값은 10이고,
$a=6$일 때
함수 $y=a\sin x+5$의 최솟값은 -1, 최댓값은 11이므로
$2b=2$ 또는 $2b=4$ 또는 $2b=6$ 또는 $2b=8$ 또는 $2b=10$, 즉
$b=1$ 또는 $b=2$ 또는 $b=3$ 또는 $b=4$ 또는 $b=5$이어야 한다.
그러므로 이 경우의 수는
$2\times5=10$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는
$4+8+10=22$
이므로 구하는 확률은
$\frac{22}{36}=\frac{11}{18}$

답 ⑤

다른 풀이

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는
$6^2=36$
함수 $y=a\sin x+5$의 그래프와 직선 $y=2b$가 만나는 경우는 x에 대한 방정식 $a\sin x+5=2b$, 즉
$a\sin x=2b-5$가 실근을 갖는 경우이고,
이것은 $|2b-5|\le a$인 경우이다.

(i) $b=1$ 또는 $b=4$인 경우
$a\ge3$이므로
$a=3$ 또는 $a=4$ 또는 $a=5$ 또는 $a=6$
그러므로 이 경우의 수는
$2\times4=8$

(ii) $b=2$ 또는 $b=3$인 경우
$a\ge1$이므로
$a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=3$ 또는 $a=4$ 또는 $a=5$ 또는 $a=6$
그러므로 이 경우의 수는
$2\times6=12$

(iii) $b=5$인 경우
$a\ge5$이므로
$a=5$ 또는 $a=6$
그러므로 이 경우의 수는
$1\times2=2$

(iv) $b=6$인 경우
$a\ge7$이므로 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는
$8+12+2=22$
이므로 구하는 확률은
$\frac{22}{36}=\frac{11}{18}$

2 1부터 n까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 세 수를 택할 때, 택한 세 수의 합이 홀수인 경우는 홀수 3개를 택하거나 홀수 1개, 짝수 2개를 택하는 경우이다.
홀수 3개를 택하는 사건을 A라 하고, 홀수 1개, 짝수 2개를 택하는 사건을 B라 하자.

(i) $n=2m$ (m은 2 이상의 자연수)일 때
1부터 $2m$까지의 자연수 중에서 서로 다른 세 수를 택하는 경우의 수는
${}_{2m}\mathrm{C}_3$
이때 홀수 3개를 택하는 경우의 수는
${}_{m}\mathrm{C}_3$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_{m}\mathrm{C}_3}{{}_{2m}\mathrm{C}_3}=\frac{\frac{m(m-1)(m-2)}{6}}{\frac{2m(2m-1)(2m-2)}{6}}=\frac{m-2}{4(2m-1)}$$

또 홀수 1개, 짝수 2개를 택하는 경우의 수는
${}_{m}\mathrm{C}_1\times{}_{m}\mathrm{C}_2$
이므로

$$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_{m}\mathrm{C}_1\times{}_{m}\mathrm{C}_2}{{}_{2m}\mathrm{C}_3}=\frac{m\times\frac{m(m-1)}{2}}{\frac{2m(2m-1)(2m-2)}{6}}=\frac{3m}{4(2m-1)}$$

두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{m-2}{4(2m-1)}+\frac{3m}{4(2m-1)}=\frac{1}{2}$$

그러므로 n이 3 이상의 짝수일 때,

$f(n)=\frac{1}{2}$

(ii) $n=2m+1$ (m은 자연수)일 때

1부터 $2m+1$까지의 자연수 중에서 서로 다른 세 수를 택하는 경우의 수는

${}_{2m+1}\mathrm{C}_3$

이때 홀수 3개를 택하는 경우의 수는

${}_{m+1}\mathrm{C}_3$

이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_3}{{}_{2m+1}\mathrm{C}_3}=\frac{\frac{m(m+1)(m-1)}{6}}{\frac{2m(2m+1)(2m-1)}{6}}=\frac{(m+1)(m-1)}{2(2m+1)(2m-1)}$$

또 홀수 1개, 짝수 2개를 택하는 경우의 수는

${}_{m+1}\mathrm{C}_1\times{}_m\mathrm{C}_2$

이므로

$$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_1\times{}_m\mathrm{C}_2}{{}_{2m+1}\mathrm{C}_3}=\frac{(m+1)\times\frac{m(m-1)}{2}}{\frac{2m(2m+1)(2m-1)}{6}}=\frac{3(m+1)(m-1)}{2(2m+1)(2m-1)}$$

두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{(m+1)(m-1)}{2(2m+1)(2m-1)}+\frac{3(m+1)(m-1)}{2(2m+1)(2m-1)}=\frac{2m^2-2}{4m^2-1}$$

그러므로 n이 3 이상의 홀수일 때,

$$f(n)=\frac{2m^2-2}{4m^2-1}=\frac{2\times\left(\frac{n-1}{2}\right)^2-2}{4\times\left(\frac{n-1}{2}\right)^2-1}=\frac{(n-1)^2-4}{2(n-1)^2-2}$$

(i), (ii)에 의하여

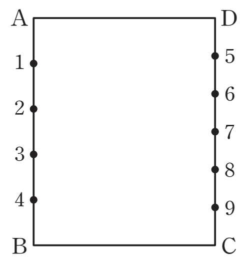
$$\sum_{n=3}^{10} f(n)=0+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{1}{2}+\frac{16}{35}+\frac{1}{2}+\frac{10}{21}+\frac{1}{2}=\frac{10}{3}$$

따라서

$p+q=3+10=13$

답 13

3 그림과 같이 변 AB 위의 4개의 점에 각각 1, 2, 3, 4의 번호를 매기고, 변 CD 위의 5개의 점에 각각 5, 6, 7, 8, 9의 번호를 매기자.



두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{5, 6, 7, 8, 9\}$라 하면 변 CD 위의 5개의 점 중에서 서로 다른 4개의 점을 임의로 택하여 변 AB 위의 네 점과 일대일로 이어서 임의로 4개의 선분을 그리는 경우의 수는 집합 X에서 집합 Y로의 일대일함수의 개수와 같다.

이때 집합 X에서 집합 Y로의 일대일함수를 f라 하면 함수 f의 개수는

${}_5\mathrm{P}_4=5\times4\times3\times2=120$

주어진 시행에서 네 선분에 의하여 생기는 교점의 개수가 0인 사건을 E, 1인 사건을 F라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}((E\cup F)^C)$이다.

(i) 네 선분에 의하여 생기는 교점의 개수가 0인 경우는 함수 f가

$f(1)<f(2)<f(3)<f(4)$

를 만족시키는 경우이므로 이 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_1=5$

그러므로

$\mathrm{P}(E)=\frac{5}{120}=\frac{1}{24}$

(ii) 네 선분에 의하여 생기는 교점의 개수가 1인 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

㉠ $f(2)<f(1)<f(3)<f(4)$인 경우
$f(1)=6$, $f(2)=5$인 경우 $f(3)$, $f(4)$의 값을 택하는 경우의 수는
${}_3C_2=3$
$f(1)=7$, $f(2)=5$ 또는 $f(1)=7$, $f(2)=6$인 경우 $f(3)=8$, $f(4)=9$이어야 하므로 경우의 수는
$2\times1=2$
그러므로 이 경우의 수는
$3+2=5$

㉡ $f(1)<f(3)<f(2)<f(4)$인 경우
$f(2)=7$, $f(3)=6$인 경우 $f(1)=5$이고 $f(4)$의 값을 택하는 경우의 수는
${}_2C_1=2$
$f(2)=8$, $f(3)=6$인 경우 $f(1)=5$, $f(4)=9$이어야 하므로 경우의 수는
1
$f(2)=8$, $f(3)=7$인 경우 $f(4)=9$이고 $f(1)$의 값을 택하는 경우의 수는
${}_2C_1=2$
그러므로 이 경우의 수는
$2+1+2=5$

㉢ $f(1)<f(2)<f(4)<f(3)$인 경우
$f(3)=9$, $f(4)=8$인 경우 $f(1)$, $f(2)$의 값을 택하는 경우의 수는
${}_3C_2=3$
$f(3)=9$, $f(4)=7$ 또는 $f(3)=8$, $f(4)=7$인 경우 $f(1)=5$, $f(2)=6$이어야 하므로 경우의 수는
$2\times1=2$
그러므로 이 경우의 수는
$3+2=5$

㉣ $f(3)<f(2)<f(1)<f(4)$인 경우
이 경우 $f(1)=7$, $f(2)=6$, $f(3)=5$ 또는
$f(1)=8$, $f(2)=7$, $f(3)=6$이면 세 선분이 한 점에서 만난다.
이때 $f(4)$의 값을 택하는 경우의 수는 각각 2, 1이므로 이 경우의 수는
$2+1=3$

㉤ $f(1)<f(4)<f(3)<f(2)$인 경우
이 경우 $f(2)=9$, $f(3)=8$, $f(4)=7$ 또는
$f(2)=8$, $f(3)=7$, $f(4)=6$이면 세 선분이 한 점에서 만난다.
이때 $f(1)$의 값을 택하는 경우의 수는 각각 2, 1이므로 이 경우의 수는
$2+1=3$

㉥ $f(4)<f(3)<f(2)<f(1)$인 경우
이 경우 $f(1)=8$, $f(2)=7$, $f(3)=6$, $f(4)=5$ 또는 $f(1)=9$, $f(2)=8$, $f(3)=7$, $f(4)=6$이면 네 선분이 한 점에서 만난다.
그러므로 이 경우의 수는
2

㉠~㉥에 의하여 네 선분에 의하여 생기는 교점의 개수가 1인 경우의 수는
$5+5+5+3+3+2=23$
그러므로
$$\mathrm{P}(F)=\frac{23}{120}$$
(i), (ii)에 의하여 두 사건 E, F는 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E\cup F)&=\mathrm{P}(E)+\mathrm{P}(F)\\&=\frac{1}{24}+\frac{23}{120}\\&=\frac{7}{30}\end{aligned}$$
따라서 구하는 확률은
$$\begin{aligned}\mathrm{P}((E\cup F)^C)&=1-\mathrm{P}(E\cup F)\\&=1-\frac{7}{30}\\&=\frac{23}{30}\end{aligned}$$

답 ⑤

04 조건부확률

유제 본문 45~51쪽

1 10 **2** ④ **3** ① **4** ③ **5** ② **6** ⑤

1 이 고등학교의 3학년 3반 학생 중에서 한 명을 택하는 경우의 수는 26

이 고등학교의 3학년 3반 학생 중에서 임의로 택한 한 명이 물리학Ⅱ를 선택한 학생인 사건을 A, 경제를 선택한 학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

이때

$\mathrm{P}(A)=\frac{14}{26}=\frac{7}{13}$

이고, 사건 $A\cap B$는 물리학Ⅱ와 경제를 동시에 선택한 학생을 택하는 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{6}{26}=\frac{3}{13}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{3}{13}}{\frac{7}{13}}=\frac{3}{7}$$

이므로

$p+q=7+3=10$

답 10

2 꺼낸 두 공에 적혀 있는 두 수의 합이 4인 사건을 A, 꺼낸 두 공의 색이 같은 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

꺼낸 두 공에 적혀 있는 두 수의 합이 4인 경우는 1이 적혀 있는 공과 3이 적혀 있는 공을 1개씩 꺼내는 경우 또는 2가 적혀 있는 공을 2개 꺼내는 경우이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}+\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{5}{21}$$

이때 꺼낸 두 공에 적혀 있는 두 수의 합이 4이면서 두 공의 색이 같은 경우는 1이 적혀 있는 빨간 공과 3이 적혀 있는 빨간 공을 꺼내는 경우 또는 1이 적혀 있는 파란 공과 3이 적혀 있는 파란 공을 꺼내는 경우이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1+1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{2}{21}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{21}}{\frac{5}{21}}=\frac{2}{5}$$

답 ④

3 주머니에서 첫 번째 꺼낸 1개의 공에 적혀 있는 숫자가 1인 사건을 A, 두 번째 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 합이 짝수인 사건을 B라 하자.

(i) 주머니에서 첫 번째 꺼낸 1개의 공에 적혀 있는 숫자가 1일 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$

두 번째 공을 꺼낼 때는 주머니에 1이 적혀 있는 공이 4개, 2가 적혀 있는 공이 2개 들어 있고, 꺼낸 공에 적혀 있는 두 수의 합이 짝수인 경우는 1이 적혀 있는 공을 2개 꺼내는 경우 또는 2가 적혀 있는 공을 2개 꺼내는 경우이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{7}{15}$$

그러므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{5}\times\frac{7}{15}=\frac{7}{25}$$

(ii) 주머니에서 첫 번째 꺼낸 1개의 공에 적혀 있는 숫자가 2일 확률은

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{5}$

두 번째 공을 꺼낼 때는 주머니에 1이 적혀 있는 공이 3개, 2가 적혀 있는 공이 3개 들어 있고, 꺼낸 공에 적혀 있는 두 수의 합이 짝수인 경우는 1이 적혀 있는 공을 2개 꺼내는 경우 또는 2가 적혀 있는 공을 2개 꺼내는 경우이므로

$\mathrm{P}(B|A^C)=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}$

$=\dfrac{2}{5}$

그러므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$

$=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{5}$

$=\dfrac{4}{25}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\dfrac{7}{25}+\dfrac{4}{25}$

$=\dfrac{11}{25}$

답 ①

4 두 사건 A와 B가 서로 독립이면 두 사건 A와 B^C도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\dfrac{1}{8}$

에서

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{1}{8}$

즉, $\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}=\dfrac{1}{8}$ …… ㉠

한편,

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(B)$

이므로

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A\cap B^C)$

$=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{8}$

$=\dfrac{13}{24}$

㉠에서

$\mathrm{P}(A)\times\left(1-\dfrac{13}{24}\right)=\dfrac{1}{8}$

따라서

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{8}\times\dfrac{24}{11}$

$=\dfrac{3}{11}$

답 ③

5 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\dfrac{1}{3}$이다.

한 개의 주사위를 6번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나온 횟수가 홀수인 경우는 1번 또는 3번 또는 5번 나오는 경우이므로 구하는 확률은

$p={}_6\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\left(\dfrac{2}{3}\right)^5+{}_6\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^3+{}_6\mathrm{C}_5\left(\dfrac{1}{3}\right)^5\left(\dfrac{2}{3}\right)^1$

$=\dfrac{364}{3^6}$

따라서

$p\times 3^6=364$

답 ②

6 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자가 1일 확률은 $\dfrac{4}{5}$이다.

4번의 시행에서 숫자 1이 적혀 있는 공을 꺼내는 횟수를 n이라 하면 숫자 2가 적혀 있는 공을 꺼내는 횟수는 $4-n$이다.

이때 받는 사탕의 개수는 n이고 초콜릿의 개수는 $2(4-n)$이므로 사탕의 개수가 초콜릿의 개수보다 크려면

$n>2(4-n)$

이어야 한다.

즉, $n>\dfrac{8}{3}$이어야 하므로

$n=3$ 또는 $n=4$

따라서 구하는 확률은

${}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{4}{5}\right)^3\left(\dfrac{1}{5}\right)^1+{}_4\mathrm{C}_4\left(\dfrac{4}{5}\right)^4=\dfrac{512}{625}$

답 ⑤

Level 1 기초 연습 본문 52~53쪽

1 ②	2 ③	3 ③	4 ④	5 ②
6 ⑤	7 ④	8 ⑤		

1 $\mathrm{P}(A^C|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$

이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A^C|B)$

$=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}$

$=\dfrac{1}{2}$

이때

$B=(A\cap B)\cup(A^C\cap B)$

이고

$(A\cap B)\cap(A^C\cap B)=\varnothing$

이므로

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 ②

다른 풀이

$B=(A\cap B)\cup(A^C\cap B)$,

$(A\cap B)\cap(A^C\cap B)=\varnothing$에서

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(A^C|B)&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}+\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}\\&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}\\&=\frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)}\\&=1\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A|B)&=1-\mathrm{P}(A^C|B)\\&=1-\frac{2}{3}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)\\&=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

2 집합 S의 모든 부분집합의 개수는

$2^6=64$

집합 S의 모든 부분집합 중에서 임의로 택한 한 부분집합의 원소의 개수가 홀수인 사건을 A, 택한 한 부분집합에 6이 속하는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

집합 S의 부분집합 중 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수는

$$\begin{aligned}{}_6\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_5&=6+20+6\\&=32\end{aligned}$$

이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{32}{64}=\frac{1}{2}$

집합 S의 부분집합 중 원소의 개수가 홀수이고 6을 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$$\begin{aligned}{}_5\mathrm{C}_0+{}_5\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_4&=1+10+5\\&=16\end{aligned}$$

이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B|A)&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\\&=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ③

3 이 동아리의 회원 중에서 임의로 한 명을 택할 때, 이 회원이 남자인 사건을 A, 현재 레슨을 받고 있는 회원인 사건을 B라 하자. 이때 A의 여사건 A^C은 이 동아리의 회원 중에서 임의로 택한 한 명의 회원이 여자인 사건이다.

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{7}{10}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)\\&=\frac{2}{5}\times\frac{7}{10}\\&=\frac{7}{25}\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{3}{5}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)\\&=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\\&=\frac{9}{25}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\frac{7}{25}+\frac{9}{25}=\frac{16}{25}\end{aligned}$$

답 ③

4 학생 A가 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 E, 학생 B가 꺼낸 공이 검은 공인 사건을 F라 하자. 이때 E의 여사건 E^C은 학생 A가 꺼낸 공이 검은 공인 사건이다.

(i) 학생 A가 흰 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(E)=\frac{4}{9}$

이 경우 학생 B가 공을 꺼낼 때는 주머니에 흰 공 3개, 검은 공 5개가 들어 있으므로 학생 B가 검은 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(F|E)=\frac{5}{8}$

그러므로

$\mathrm{P}(E\cap F)=\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}$

$=\frac{5}{18}$

(ii) 학생 A가 검은 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(E^C)=\frac{5}{9}$

이 경우 학생 B가 공을 꺼낼 때는 주머니에 흰 공 4개, 검은 공 4개가 들어 있으므로 학생 B가 검은 공을 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(F|E^C)=\frac{1}{2}$

그러므로

$\mathrm{P}(E^C\cap F)=\frac{5}{9}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{5}{18}$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$\mathrm{P}(F)=\mathrm{P}(E\cap F)+\mathrm{P}(E^C\cap F)$

$\mathrm{P}(F)=\frac{5}{18}+\frac{5}{18}$

$=\frac{5}{9}$

답 ④

5 주머니 A에서 꺼낸 두 개의 공이 서로 다른 색인 사건을 E, 주머니 B에서 꺼낸 두 개의 공이 서로 같은 색인 사건을 F라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(E\cap F)$이다.

이때

$\mathrm{P}(E)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}$

$=\frac{4}{7}$

$\mathrm{P}(F)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}$

$=\frac{13}{28}$

이고, 두 사건 E와 F가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(E\cap F)=\mathrm{P}(E)\mathrm{P}(F)$

$=\frac{4}{7}\times\frac{13}{28}$

$=\frac{13}{49}$

답 ②

6 한 개의 동전을 3번 던져서 앞면만 3번 나오면 점 A에 도착하고, 뒷면만 3번 나오면 점 D에 도착한다.

그러므로 점 A 또는 점 D에 도착할 확률은

${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0+{}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$

$=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

답 ⑤

7 흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 흰 공을 꺼낼 확률은 $\frac{2}{5}$이다.

주어진 시행을 5번 반복할 때

(i) 흰 공을 한 번도 꺼내지 않을 확률은

${}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^5=\frac{243}{5^5}$

(ii) 흰 공을 한 번만 꺼낼 확률은

${}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{810}{5^5}$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$1-\frac{243}{5^5}-\frac{810}{5^5}=\frac{2072}{5^5}$

이므로

$p=2072$

답 ④

8 한 개의 주사위를 한 번 던져서 5의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$, 5의 약수의 눈이 나오지 않을 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

한 개의 주사위를 4번 던져서 5의 약수의 눈이 n번 나왔다고 하면 $(4-n)$번은 5의 약수의 눈이 나오지 않았으므로 점 P의 좌표는

$2n-(4-n)=3n-4$

$3n-4>0$인 경우는
$n=2$ 또는 $n=3$ 또는 $n=4$
인 경우이므로 구하는 확률은

$${}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2+{}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1+{}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0$$
$$=\frac{24+8+1}{81}$$
$$=\frac{11}{27}$$

답 ⑤

Level 2 기본 연습

본문 54~55쪽

1 ②	2 ⑤	3 ③	4 ④	5 ③
6 ③	7 ④	8 ①		

1 집합 X에서 X로의 함수 중에서 $f(1)+f(3)=4$를 만족시키는 함수의 개수는
$f(1)=1$, $f(3)=3$ 또는 $f(1)=3$, $f(3)=1$ 또는
$f(1)=f(3)=2$인 경우이므로
$3\times{}_5\Pi_3=3\times5^3=375$
이때 함수 f 중에서 임의로 택한 하나의 함수가 $f(2)=4$를 만족시키는 함수인 사건을 A라 하고, 일대일대응인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

(i) 함수 f 중에서 $f(2)=4$를 만족시키는 함수의 개수는
$f(1)=1$, $f(3)=3$ 또는 $f(1)=3$, $f(3)=1$인 경우
$$2\times{}_5\Pi_2=2\times5^2$$
$$=50$$
이고, $f(1)=f(3)=2$인 경우
${}_5\Pi_2=5^2=25$
이므로 75이다.
그러므로
$$\mathrm{P}(A)=\frac{75}{375}=\frac{1}{5}$$

(ii) 함수 f 중에서 $f(2)=4$를 만족시키는 일대일대응의 개수는 $f(1)=1$, $f(3)=3$ 또는 $f(1)=3$, $f(3)=1$이어야 하므로
$2\times{}_2P_2=2\times2!=4$
그러므로
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{375}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$
$$=\frac{\frac{4}{375}}{\frac{1}{5}}=\frac{4}{75}$$

답 ②

2 조사 대상이 된 전체 학생 수는 $n+110$이고, 이 중 40 %가 봄을 택했으므로 봄을 택한 학생 수는
$$(n+110)\times\frac{40}{100}=\frac{2}{5}n+44 \quad \cdots\cdots ㉠$$
조사 대상이 된 전체 학생 중 임의로 택한 한 명이 2학년 학생일 때, 이 학생이 봄을 택한 학생일 확률이 $\frac{1}{4}$이므로 2학년 학생 중 봄을 택한 학생 수는
$$\frac{1}{4}n \quad \cdots\cdots ㉡$$
㉠, ㉡에 의하여 1학년 학생 중 봄을 택한 학생 수는
$$\left(\frac{2}{5}n+44\right)-\frac{1}{4}n=\frac{3}{20}n+44$$
이때 조사 대상이 된 전체 학생 중 임의로 택한 한 명이 봄을 택한 학생일 때, 이 학생이 1학년 학생일 확률이 $\frac{13}{20}$이므로
$$\frac{\frac{3}{20}n+44}{\frac{2}{5}n+44}=\frac{13}{20}$$
따라서 $n=140$

답 ⑤

3 이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 6 이하인 사건을 A, 동전의 뒷면이 적어도 한 번 나오는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.
이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 6 이하인 경우는 동전의 앞면이 적어도 한 번 나오고 주사위에서 5 이하의 눈이 나오는 경우 또는 동전의 앞면이 한 번도 나오지 않고 주사위에서 3 이하의 눈이 나오는 경우이므로
$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{4}$$
이때 동전의 뒷면이 적어도 한 번 나오고 얻은 점수가 6 이하인 경우는 동전을 던져서 한 번은 앞면, 한 번은 뒷면이

나오고 주사위에서 5 이하의 눈이 나오는 경우 또는 동전의 앞면이 한 번도 나오지 않고 주사위에서 3 이하의 눈이 나오는 경우이므로

$$P(A\cap B)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{13}{24}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$
$$=\frac{\frac{13}{24}}{\frac{3}{4}}=\frac{13}{18}$$

답 ③

4 곡선 $y=x^2+ax+b$가 x축과 만나려면

$a^2-4b\geq 0$

이어야 한다.

한 개의 주사위를 한 번 던질 때 3의 배수의 눈이 나오는 사건을 E, 곡선 $y=x^2+ax+b$가 x축과 만나는 사건을 F라 하자.

(i) 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 3의 배수의 눈이 나올 확률은

$$P(E)=\frac{1}{3}$$

집합 $A=\{1, 2, 3\}$의 두 원소 a, b에 대하여 $a^2-4b\geq 0$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$

이므로

$$P(F|E)=\frac{3}{{}_3P_2}$$
$$=\frac{1}{2}$$

그러므로

$$P(E\cap F)=P(E)P(F|E)$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{6}$$

(ii) 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 3의 배수의 눈이 나오지 않을 확률은

$$P(E^C)=\frac{2}{3}$$

집합 $B=\{-1, 0, 1, 2\}$의 두 원소 a, b에 대하여 $a^2-4b\geq 0$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 0)$, $(2, -1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$

이므로

$$P(F|E^C)=\frac{7}{{}_4P_2}$$
$$=\frac{7}{12}$$

그러므로

$$P(E^C\cap F)=P(E^C)P(F|E^C)$$
$$=\frac{2}{3}\times\frac{7}{12}$$
$$=\frac{7}{18}$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$$P(F)=P(E\cap F)+P(E^C\cap F)$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{7}{18}$$
$$=\frac{5}{9}$$

답 ④

5 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 모든 부분집합의 개수는

$2^6=64$

이 중에서 원소의 개수가 3인 부분집합의 개수는

${}_6C_3=20$

이므로

$$P(A)=\frac{20}{64}=\frac{5}{16}$$

ㄱ. 원소의 최댓값이 4인 부분집합의 개수는

$2^3=8$

이므로

$$P(B_4)=\frac{8}{64}=\frac{1}{8}$$

이때 원소의 개수가 3이고 원소의 최댓값이 4인 부분집합의 개수는 ${}_3C_2=3$이므로

$$P(A\cap B_4)=\frac{3}{64}$$

즉, $P(A\cap B_4)\neq P(A)P(B_4)$이므로 두 사건 A와 B_4는 서로 종속이다.

ㄴ. 원소의 최댓값이 5인 부분집합의 개수는

$2^4=16$

이므로

$$P(B_5)=\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$$

이때 원소의 개수가 3이고 원소의 최댓값이 5인 부분집합의 개수는 ${}_4C_2=6$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B_5)=\dfrac{6}{64}=\dfrac{3}{32}$

즉, $\mathrm{P}(A\cap B_5)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B_5)$이므로 두 사건 A와 B_5는 서로 종속이다.

ㄷ. 원소의 최댓값이 6인 부분집합의 개수는

$2^5=32$

이므로

$\mathrm{P}(B_6)=\dfrac{32}{64}=\dfrac{1}{2}$

이때 원소의 개수가 3이고 원소의 최댓값이 6인 부분집합의 개수는 ${}_5\mathrm{C}_2=10$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B_6)=\dfrac{10}{64}=\dfrac{5}{32}$

즉, $\mathrm{P}(A\cap B_6)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B_6)$이므로 두 사건 A와 B_6은 서로 독립이다.

이상에서 사건 A와 서로 종속인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

6 (ⅰ) 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 3의 배수의 눈이 나올 확률은

$\dfrac{1}{3}$

이 경우 한 개의 동전을 3번 던져서 앞면이 나온 횟수가 3일 확률은

${}_3\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$

그러므로 이 경우 동전의 앞면이 나온 횟수가 3 이상일 확률은

$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{24}$

(ⅱ) 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 3의 배수의 눈이 나오지 않을 확률은

$\dfrac{2}{3}$

이 경우 한 개의 동전을 4번 던져서 앞면이 나온 횟수가 3 또는 4일 확률은

${}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{5}{16}$

그러므로 이 경우 동전의 앞면이 나온 횟수가 3 이상일 확률은

$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{5}{16}=\dfrac{5}{24}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 확률은

$\dfrac{1}{24}+\dfrac{5}{24}=\dfrac{1}{4}$

답 ③

7 주머니에서 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 2일 확률은 $\dfrac{3}{5}$이고, 3일 확률은 $\dfrac{2}{5}$이다.

2가 적혀 있는 카드를 꺼내는 횟수를 n이라 하면

$2n+3(4-n)\geq 10$에서 $n\leq 2$이므로 받은 공의 개수가 10 이상일 확률은 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) 3이 적혀 있는 카드만 4번 꺼낼 확률은

${}_4\mathrm{C}_0\left(\dfrac{3}{5}\right)^0\left(\dfrac{2}{5}\right)^4=\dfrac{16}{625}$

(ⅱ) 2가 적혀 있는 카드를 1번, 3이 적혀 있는 카드를 3번 꺼낼 확률은

${}_4\mathrm{C}_1\left(\dfrac{3}{5}\right)^1\left(\dfrac{2}{5}\right)^3=\dfrac{96}{625}$

(ⅲ) 2가 적혀 있는 카드를 2번, 3이 적혀 있는 카드를 2번 꺼낼 확률은

${}_4\mathrm{C}_2\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\left(\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{216}{625}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 확률은

$\dfrac{16}{625}+\dfrac{96}{625}+\dfrac{216}{625}=\dfrac{328}{625}$

답 ④

8 주머니에서 꺼낸 공에 적혀 있는 5개의 수의 합이 10인 경우는 순서를 생각하지 않으면

1, 1, 1, 2, 5 또는 1, 1, 1, 3, 4

또는 1, 1, 2, 2, 4 또는 1, 1, 2, 3, 3

또는 1, 2, 2, 2, 3 또는 2, 2, 2, 2, 2

이고, 각 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!}, \dfrac{5!}{3!}, \dfrac{5!}{2!2!}, \dfrac{5!}{2!2!}, \dfrac{5!}{3!}, \dfrac{5!}{5!}$

이다.

따라서 구하는 확률은

$\left(\dfrac{5!}{3!}+\dfrac{5!}{3!}+\dfrac{5!}{2!2!}+\dfrac{5!}{2!2!}+\dfrac{5!}{3!}+\dfrac{5!}{5!}\right)\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^5$

$=\dfrac{121}{5^5}$

답 ①

다른 풀이

i $(i=1, 2, 3, 4, 5)$번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 x_i라 하면 조건을 만족시키는 경우의 수는 방정식

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=10$을 만족시키는 5 이하의 자연수 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5의 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$의 개수와 같다.

이때 $y_i=x_i-1$이라 하면 조건을 만족시키는 경우의 수는 방정식 $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=5$를 만족시키는 4 이하의 음

이 아닌 정수 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5의 순서쌍 $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$의 개수와 같으므로

$${}_5\mathrm{H}_5-5={}_9\mathrm{C}_5-5$$
$$=126-5=121$$

따라서 구하는 확률은

$$121\times\left(\frac{1}{5}\right)^5=\frac{121}{5^5}$$

Level 3 실력 완성

본문 56쪽

1 ① **2** 124 **3** 419

1 [시행 1], [시행 2], [시행 3]을 모두 마친 후 세 번째 칸에 적은 수가 7 이상인 사건을 A, 두 번째 칸에 적은 수가 홀수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

먼저 $\mathrm{P}(A)$의 값을 구해 보자.

(i) 첫 번째 칸에 적은 수가 1인 경우

첫 번째 시행에서 한 개의 동전을 세 번 던져서 모두 같은 면이 나오고, 두 번째 시행에서 주사위의 5 또는 6의 눈이 나오고, 세 번째 시행에서 동전의 앞면이 나와야 세 번째 칸에 적은 수가 7 이상이 되므로 이 경우의 확률은

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$$

(ii) 첫 번째 칸에 적은 수가 2인 경우

먼저 첫 번째 시행에서 한 개의 동전을 세 번 던져서 모두 같은 면이 나오지 않아야 한다. 이때 두 번째 시행에서 주사위의 3 또는 4 또는 5의 눈이 나오면 세 번째 시행에서 동전의 앞면이 나와야 세 번째 칸에 적은 수가 7 이상이 되고, 두 번째 시행에서 주사위의 6의 눈이 나오면 세 번째 시행과 관계없이 세 번째 칸에 적은 수가 7 이상이 되므로 이 경우의 확률은

$$\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times1\right)=\frac{5}{16}$$

(i), (ii)에 의하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{24}+\frac{5}{16}$$
$$=\frac{17}{48}$$

한편, 첫 번째 칸에 적은 수가 1이면 두 번째 칸에 적은 수가 항상 짝수이므로 두 번째 칸에 적은 수가 홀수이려면 첫 번째 칸에 적은 수가 2이어야 한다.

이때 세 번째 칸에 적은 수가 7 이상인 경우는 두 번째 시행에서 주사위의 3 또는 5의 눈이 나오고 세 번째 시행에서 동전의 앞면이 나오는 경우이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{8}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$
$$=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{17}{48}}=\frac{6}{17}$$

답 ①

2 상자에서 처음 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 짝수인 사건을 A, 주머니에 있는 공에 적혀 있는 수의 최솟값이 3인 사건을 B라 하자.

이때 A의 여사건 A^C은 상자에서 처음 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 홀수인 사건이다.

(i) 상자에서 처음 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 짝수인 경우

㉠ 상자에서 처음 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 2일 확률은

$$\frac{1}{7}$$

이때 주머니에 있는 두 공에 적혀 있는 수의 최솟값이 3일 확률은

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{4}{15}$$

㉡ 상자에서 처음 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 4 이상의 짝수일 확률은

$$\frac{2}{7}$$

이때 주머니에 있는 두 공에 적혀 있는 수의 최솟값이 3일 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{5}$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{7}\times\frac{4}{15}+\frac{2}{7}\times\frac{1}{5}$$
$$=\frac{2}{21}$$

(ii) 상자에서 처음 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 홀수인 경우

㉠ 상자에서 처음 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 1일 확률은

$$\frac{1}{7}$$

이때 주머니에 있는 세 공에 적혀 있는 수의 최솟값이 3일 확률은

$\frac{{}_4C_2}{{}_6C_3}=\frac{3}{10}$

㉡ 상자에서 처음 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 5 이상의 홀수일 확률은

$\frac{2}{7}$

이때 주머니에 있는 세 공에 적혀 있는 수의 최솟값이 3일 확률은

$\frac{{}_3C_2}{{}_6C_3}=\frac{3}{20}$

㉠, ㉡에 의하여

$$\begin{aligned}P(A^C\cap B)&=\frac{1}{7}\times\frac{3}{10}+\frac{2}{7}\times\frac{3}{20}\\&=\frac{3}{35}\end{aligned}$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)\\&=\frac{2}{21}+\frac{3}{35}\\&=\frac{19}{105}\end{aligned}$$

따라서 $p=105$, $q=19$이므로

$$\begin{aligned}p+q&=105+19\\&=124\end{aligned}$$

답 124

3 (i) $n=2$일 때

$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=1$, $P(A\cap B)=\frac{1}{2}$에서

$P(A)P(B)=P(A\cap B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

(ii) $n=3$일 때

$P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=1$, $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$에서

$P(A)P(B)=P(A\cap B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

(iii) $n=4$일 때

$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{3}{4}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$에서

$P(A)P(B)\neq P(A\cap B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이 아니다.

(iv) $n=5$일 때

$P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{3}{5}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$에서

$P(A)P(B)\neq P(A\cap B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이 아니다.

(v) n이 6 이상의 짝수일 때

$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{4}{n}$, $P(A\cap B)=\frac{2}{n}$에서

$P(A)P(B)=P(A\cap B)$이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

(vi) n이 6 이상의 홀수일 때

$P(A)=\frac{n-1}{2n}$, $P(B)=\frac{4}{n}$, $P(A\cap B)=\frac{2}{n}$에서

$P(A)P(B)=P(A\cap B)$를 만족시키는 n의 값은 없으므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이 아니다.

(i)~(vi)에서 조건을 만족시키는 n의 값은

2, 3, 6, 8, 10, ⋯

이므로 $a_1=2$, $a_2=3$이고

$a_k=2k$ $(k\geq 3)$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20} a_k&=\sum_{k=1}^{20} 2k-1\\&=20\times 21-1\\&=419\end{aligned}$$

답 419

05 이산확률변수의 확률분포

유제 본문 59~67쪽

1 ④ 2 ④ 3 ③ 4 ① 5 ④
6 ③ 7 ⑤ 8 ⑤

1 $\mathrm{P}(1\le X\le 2)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{5-1}{10}+\frac{5-2}{10}$

$=\frac{4}{10}+\frac{3}{10}$

$=\frac{7}{10}$

답 ④

2 1, 2, 3, 4, 5, 6의 양의 약수의 개수는 차례로
1, 2, 2, 3, 2, 4
이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서
$\mathrm{P}(X<3)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$

답 ④

3 이산확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$a\times 2^{-1}+a\times 2^{-2}+a\times 2^{-3}=\frac{a}{2}+\frac{a}{4}+\frac{a}{8}$

$=\frac{7}{8}a=1$

에서 $a=\frac{8}{7}$

따라서
$\mathrm{E}(X)=1\times\mathrm{P}(X=1)+2\times\mathrm{P}(X=2)+3\times\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{a}{2}+2\times\frac{a}{4}+3\times\frac{a}{8}$

$=\frac{11}{8}a$

$=\frac{11}{8}\times\frac{8}{7}$

$=\frac{11}{7}$

답 ③

4 이산확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+a=1$에서

$a=\frac{1}{6}$

따라서 확률변수 X^2의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X^2	0	1	4	9	합계
$\mathrm{P}(X^2=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서

$\mathrm{E}(X^2)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}+9\times\frac{1}{6}$

$=\frac{0+3+12+18}{12}$

$=\frac{11}{4}$

답 ①

5 $\mathrm{E}(X)=a\times\frac{1}{6}+0\times\frac{1}{3}+b\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{6}a+\frac{1}{2}b=\frac{5}{6}$

에서

$a+3b=5$ …… ㉠

$\mathrm{E}(X^2)=a^2\times\frac{1}{6}+0^2\times\frac{1}{3}+b^2\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{6}a^2+\frac{1}{2}b^2$

이고

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{53}{36}+\left(\frac{5}{6}\right)^2$

$=\frac{13}{6}$

이므로

$\frac{1}{6}a^2+\frac{1}{2}b^2=\frac{13}{6}$

$a^2+3b^2=13$ …… ㉡

㉠에서 $a=5-3b$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$(5-3b)^2+3b^2=13$

$2b^2-5b+2=0$

$(2b-1)(b-2)=0$

b는 정수이므로

$b=2$

$a=5-3\times2=-1$

따라서 $a+b=(-1)+2=1$

답 ④

다른 풀이

두 정수 a, b 중에서 $a^2+3b^2=13$을 만족시키는 것은

$a=1$, $b=2$ 또는 $a=1$, $b=-2$ 또는

$a=-1$, $b=2$ 또는 $a=-1$, $b=-2$

의 4가지 경우이다.

이 중에서 $a+3b=5$를 만족시키는 것은

$a=-1$, $b=2$인 경우뿐이므로

$a+b=(-1)+2=1$

6 $\mathrm{E}(2X+3)=15$에서

$2\mathrm{E}(X)+3=15$이므로

$\mathrm{E}(X)=6$

이때 $\mathrm{E}(X^2)=55$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=55-6^2\\&=19\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(2X+3)&=4\mathrm{V}(X)\\&=4\times19\\&=76\end{aligned}$$

답 ③

7 한 개의 주사위를 1번 던질 때, 3의 배수인 눈이 나올 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(30, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=30\times\frac{1}{3}\\&=10\end{aligned}$$

답 ⑤

8 $$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=x)&={}_{40}\mathrm{C}_x\frac{3^{40-x}}{4^{40}}\\&={}_{40}\mathrm{C}_x\frac{3^{40-x}}{4^{40-x+x}}\\&={}_{40}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{40-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 40)\end{aligned}$$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(40, \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

따라서

$\sigma(X)=\sqrt{40\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{30}}{2}$

이므로

$$\begin{aligned}\sigma(2X)&=2\sigma(X)\\&=2\times\frac{\sqrt{30}}{2}=\sqrt{30}\end{aligned}$$

답 ⑤

Level 1 기초 연습

본문 68쪽

1 ⑤ 2 ⑤ 3 ③ 4 ④ 5 2

1 이산확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{3}{10}+a=1$

에서 $a=\frac{2}{5}$

따라서 $\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{5}=2$

답 ⑤

2 $\mathrm{P}(X=x)=\frac{a}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$의 분모를 유리화하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=x)&=\frac{a}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\\&=\frac{a(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}\\&=a(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\end{aligned}$$

이산확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$$\begin{aligned}&\sum_{x=4}^{8}\mathrm{P}(X=x)\\&=a\sum_{x=4}^{8}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\\&=a\{(\sqrt{5}-\sqrt{4})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})+(\sqrt{7}-\sqrt{6})\\&\qquad+(\sqrt{8}-\sqrt{7})+(\sqrt{9}-\sqrt{8})\}\end{aligned}$$

$=a(\sqrt{9}-\sqrt{4})$
$=a(3-2)=1$
에서 $a=1$
따라서
$a+\mathrm{P}(X=a+3)=1+\mathrm{P}(X=4)$
$=1+(\sqrt{5}-\sqrt{4})$
$=\sqrt{5}-1$

답 ⑤

3 이산확률변수 X에 대하여
$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로
$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$
이때
$\mathrm{V}(X)=\{\sigma(X)\}^2$
$=3^2=9$
따라서
$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$
$=9+2^2=13$

답 ③

4 확률변수 X가 갖는 값은 0, 1, 2이다.
(i) $X=0$일 때, 파란 공만 3개 꺼내는 경우이므로
$\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}$
$=\dfrac{4}{20}=\dfrac{1}{5}$
(ii) $X=1$일 때, 빨간 공 1개, 파란 공 2개를 꺼내는 경우이므로
$\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}$
$=\dfrac{2\times6}{20}=\dfrac{3}{5}$
(iii) $X=2$일 때, 빨간 공 2개, 파란 공 1개를 꺼내는 경우이므로
$\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}$
$=\dfrac{1\times4}{20}=\dfrac{1}{5}$
(i), (ii), (iii)에 의하여 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\dfrac{1}{5}+1\times\dfrac{3}{5}+2\times\dfrac{1}{5}=1$
$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\dfrac{1}{5}+1^2\times\dfrac{3}{5}+2^2\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{7}{5}$
$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$
$=\dfrac{7}{5}-1^2=\dfrac{2}{5}$
따라서
$\mathrm{E}(10X+5)=10\mathrm{E}(X)+5$
$=10\times1+5$
$=15$
$\mathrm{V}(10X+5)=100\mathrm{V}(X)$
$=100\times\dfrac{2}{5}=40$
이므로
$\mathrm{E}(10X+5)+\mathrm{V}(10X+5)=15+40=55$

답 ④

5 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로
$5p(1-p)=\dfrac{9}{5}-(5p)^2$
$20p^2+5p-\dfrac{9}{5}=0$
$100p^2+25p-9=0$
$(5p-1)(20p+9)=0$
$p>0$이므로 $p=\dfrac{1}{5}$
따라서 $10p=10\times\dfrac{1}{5}=2$

답 2

Level 2 기본 연습 본문 69~70쪽

1 ⑤	2 ②	3 156	4 ③	5 ④
6 ④	7 ⑤	8 ⑤		

1 $\mathrm{P}(Y=2x)$
$=a\times\mathrm{P}(X=x)+\dfrac{a}{(x+1)(x+2)}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$
에서
$\displaystyle\sum_{x=0}^{3}\mathrm{P}(Y=2x)$
$=a\displaystyle\sum_{x=0}^{3}\mathrm{P}(X=x)+\sum_{x=0}^{3}\dfrac{a}{(x+1)(x+2)}$ …… ㉠

이때 확률질량함수의 성질에 의하여

$\sum_{x=0}^{3} P(Y=2x)=\sum_{x=0}^{3} P(X=x)=1$

이고

$\sum_{x=0}^{3} \frac{a}{(x+1)(x+2)}$

$=a\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}\right)$

$=a\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\right\}$

$=a\left(1-\frac{1}{5}\right)$

$=\frac{4}{5}a$

이므로 ㉠에서

$1=a\times1+\frac{4}{5}a$

$\frac{9}{5}a=1$

따라서 $a=\frac{5}{9}$

답 ⑤

2 확률변수 X가 갖는 값은 0, 1, 2이다.

한 개의 주사위를 한 번 던질 때 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로 3의 배수의 눈이 연속하여 세 번 나올 확률은

$P(X=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{27}$

3의 배수의 눈이 첫 번째와 두 번째만 나오거나 두 번째와 세 번째만 나올 확률은

$P(X=1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{4}{27}$

따라서

$P(X=0)=1-P(X=2)-P(X=1)$

$=1-\frac{1}{27}-\frac{4}{27}$

$=\frac{22}{27}$

이므로

$E(X)=0\times\frac{22}{27}+1\times\frac{4}{27}+2\times\frac{1}{27}$

$=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$

답 ②

3 주머니 A에 들어 있는 5개의 공 중에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에 들어 있는 5개의 공 중에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 주머니 A에 넣는 경우의 수는

${}_5C_4\times{}_5C_2=5\times10=50$

(i) $X=0$인 경우

주머니 A에서 흰 공 3개와 검은 공 1개를 꺼낸 후 주머니 B에서 검은 공 2개를 꺼내야 한다.

이 경우의 수는

$({}_3C_3\times{}_2C_1)\times{}_2C_2=(1\times2)\times1=2$

이므로

$P(X=0)=\frac{2}{50}$

(ii) $X=1$인 경우

주머니 A에서 흰 공 3개와 검은 공 1개를 꺼낸 후 주머니 B에서 흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼내거나 주머니 A에서 흰 공 2개와 검은 공 2개를 꺼낸 후 주머니 B에서 검은 공 2개를 꺼내야 한다.

이 경우의 수는

$({}_3C_3\times{}_2C_1)\times({}_3C_1\times{}_2C_1)+({}_3C_2\times{}_2C_2)\times{}_3C_2$

$=(1\times2)\times(3\times2)+(3\times1)\times3$

$=12+9=21$

이므로

$P(X=1)=\frac{21}{50}$

(iii) $X=3$인 경우

주머니 A에서 흰 공 2개와 검은 공 2개를 꺼낸 후 주머니 B에서 흰 공 2개를 꺼내야 한다.

이 경우의 수는

$({}_3C_2\times{}_2C_2)\times{}_2C_2=(3\times1)\times1=3$

이므로

$P(X=3)=\frac{3}{50}$

(iv) $X=2$인 경우

모든 확률의 합은 1이므로

$P(X=2)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=3)$

$=1-\frac{2}{50}-\frac{21}{50}-\frac{3}{50}$

$=\frac{24}{50}$

(i)~(iv)에서

$E(X)=0\times\frac{2}{50}+1\times\frac{21}{50}+2\times\frac{24}{50}+3\times\frac{3}{50}$

$=\frac{78}{50}=\frac{39}{25}$

이므로

$\mathrm{E}(100X)=100\mathrm{E}(X)$

$=100\times\frac{39}{25}$

$=156$

답 156

참고

$X=2$일 확률을 다음과 같이 직접 구할 수도 있다.

주머니 A에서 흰 공 3개와 검은 공 1개를 꺼낸 후 주머니 B에서 흰 공 2개를 꺼내는 경우의 수는

$({}_3\mathrm{C}_3\times{}_2\mathrm{C}_1)\times{}_3\mathrm{C}_2=(1\times2)\times3$

$=6$

주머니 A에서 흰 공 2개와 검은 공 2개를 꺼낸 후 주머니 B에서 흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼내는 경우의 수는

$({}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2)\times({}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1)=(3\times1)\times(2\times3)$

$=18$

따라서

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{6+18}{50}=\frac{12}{25}$

4 확률변수 X가 갖는 값이 0, 1, 2, 3일 때의 확률을 각각 구하면 다음과 같다.

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{k}{14}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1+k}{14}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{2+k}{14}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{3+k}{14}$

이때

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=1$

이므로

$\frac{k}{14}+\frac{1+k}{14}+\frac{2+k}{14}+\frac{3+k}{14}=1$

에서 $k=2$

그러므로 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{14}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{7}+1\times\frac{3}{14}+2\times\frac{2}{7}+3\times\frac{5}{14}$

$=\frac{13}{7}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{7}+1^2\times\frac{3}{14}+2^2\times\frac{2}{7}+3^2\times\frac{5}{14}$

$=\frac{32}{7}$

따라서

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{32}{7}-\left(\frac{13}{7}\right)^2$

$=\frac{55}{49}$

답 ③

5 확률변수 X가 갖는 값은 1, 2, 3, 4이다.

(i) $X=1$일 때, 첫 번째에 검은 공을 꺼내는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{2}{5}$

(ii) $X=2$일 때, 첫 번째에 흰 공을 꺼내고 두 번째에 검은 공을 꺼내는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$

$=\frac{3}{10}$

(iii) $X=3$일 때, 첫 번째와 두 번째에 흰 공을 꺼내고 세 번째에 검은 공을 꺼내는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}$

$=\frac{1}{5}$

(iv) $X=4$일 때, 첫 번째, 두 번째, 세 번째에 흰 공을 꺼내고 네 번째에 검은 공을 꺼내는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}$

$=\frac{1}{10}$

(i)~(iv)에 의하여 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{10}$

$=2$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{2}{5}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{1}{10}$

$=5$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=5-2^2=1$

이때

$\mathrm{E}(3X+1)=3\mathrm{E}(X)+1$

$=3\times2+1=7$

$\mathrm{V}(3X+1)=9\mathrm{V}(X)$

$=9\times1=9$

따라서

$\mathrm{E}(3X+1)+\mathrm{V}(3X+1)=7+9$

$=16$

답 ④

6 확률변수 X의 확률분포에서 확률의 성질에 의하여

$p_1+p_2+p_3+p_4=1$

이고, 확률변수 Y의 확률분포에서 확률의 성질에 의하여

$a(p_1+p_2+p_3+p_4)+4b=1$이므로

$a+4b=1$ …… ㉠

한편, $\mathrm{E}(Y)=5$이므로

$2(ap_1+b)+5(ap_2+b)+8(ap_3+b)+11(ap_4+b)=5$

$a(2p_1+5p_2+8p_3+11p_4)+26b=5$ …… ㉡

이때 $\mathrm{E}(X)=\frac{5}{3}$이므로

$2p_1+5p_2+8p_3+11p_4=(3\times1-1)p_1+(3\times2-1)p_2$

$+(3\times3-1)p_3+(3\times4-1)p_4$

$=\mathrm{E}(3X-1)$

$=3\mathrm{E}(X)-1$

$=3\times\frac{5}{3}-1$

$=4$

이고, ㉡에서

$4a+26b=5$ …… ㉢

㉠, ㉢에서

$a=\frac{3}{5}$, $b=\frac{1}{10}$

따라서

$a+b=\frac{3}{5}+\frac{1}{10}=\frac{7}{10}$

답 ④

7 서로 다른 두 주사위의 눈의 수의 곱이 소수가 되려면 한 개의 주사위의 눈의 수는 1이고, 다른 주사위의 눈의 수는 소수이어야 하므로 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 두 주사위의 눈의 수의 곱이 소수일 확률은

$\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(240, \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=240\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$

$=\frac{100}{3}$

즉,

$\mathrm{V}(3X)=9\mathrm{V}(X)$

$=9\times\frac{100}{3}$

$=300$

답 ⑤

8 확률변수 X가 갖는 값이

$-1, 1, 3, 5, \cdots, 39$

이므로

$Y=\frac{X+1}{2}$

로 놓으면 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(20, \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

따라서

$\mathrm{E}(Y)=20\times\frac{1}{4}=5$

이므로

$\mathrm{E}(X+1)=\mathrm{E}(2Y)$

$=2\mathrm{E}(Y)$

$=2\times5$

$=10$

답 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 71쪽

1 ② **2** ② **3** 503

1 확률변수 X가 갖는 값은 2, 3, 4, 5이다.

(i) $X=2$인 경우

$S_1+a_2\geq5$, 즉 $a_1+a_2\geq5$이어야 하므로 a_1, a_2의 순서쌍 (a_1, a_2)는

$(2, 3)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$

의 3개이고, 각 순서쌍이 나오는 경우의 수는

$2\times2=2^2$이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{3\times 2^2}{6^2}$

$=\dfrac{1}{3}$

(ii) $X=3$인 경우

$S_1+a_2<5$, 즉 $a_1+a_2<5$이고 $a_1+a_2+a_3\ge 5$이어야 하므로 a_1, a_2, a_3의 순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$은

$(1,\ 1,\ 3)$,

$(1,\ 2,\ 2)$, $(1,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 1,\ 2)$, $(2,\ 1,\ 3)$,

$(1,\ 3,\ 1)$, $(1,\ 3,\ 2)$, $(1,\ 3,\ 3)$,

$(2,\ 2,\ 1)$, $(2,\ 2,\ 2)$, $(2,\ 2,\ 3)$,

$(3,\ 1,\ 1)$, $(3,\ 1,\ 2)$, $(3,\ 1,\ 3)$

의 14개이고, 각 순서쌍이 나오는 경우의 수는

$2\times 2\times 2=2^3$이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\dfrac{14\times 2^3}{6^3}$

$=\dfrac{14}{27}$

(iii) $X=5$인 경우

$a_1=a_2=a_3=a_4=1$이고, $a_5=1,\ 2,\ 3$인 경우이므로 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5의 순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)$의 개수는 3이고, 각 순서쌍이 나오는 경우의 수는

$2\times 2\times 2\times 2\times 2=2^5$이므로

$\mathrm{P}(X=5)=\dfrac{3\times 2^5}{6^5}$

$=\dfrac{1}{81}$

(iv) $X=4$인 경우

$\mathrm{P}(X=4)=1-\{\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=5)\}$

$=1-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{14}{27}+\dfrac{1}{81}\right)$

$=1-\dfrac{70}{81}$

$=\dfrac{11}{81}$

(i)~(iv)에 의하여

$\mathrm{E}(X)=2\times\dfrac{1}{3}+3\times\dfrac{14}{27}+4\times\dfrac{11}{81}+5\times\dfrac{1}{81}$

$=\dfrac{229}{81}$

답 ②

참고

상자를 한 번 던질 때 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 수가 1, 2, 3일 확률은 모두 $\dfrac{1}{3}$로 같다.

따라서 $X=4$인 경우의 확률은 다음과 같이 독립시행의 확률을 이용하여 구할 수도 있다.

(i) 첫 번째 시행부터 세 번째 시행까지는 모두 1이 나오고, 네 번째 시행에서는 2 또는 3이 나올 확률은

${}_3\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{81}$

(ii) 첫 번째 시행부터 세 번째 시행까지는 1이 두 번, 2가 한 번 나오고, 네 번째 시행에서는 1, 2, 3 중 어느 한 수가 나올 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\times 1=\dfrac{1}{9}$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(X=4)=\dfrac{2}{81}+\dfrac{1}{9}$

$=\dfrac{11}{81}$

2 집합 A에서 집합 B로의 일대일함수 f의 개수는 ${}_5\mathrm{P}_4$이고, 확률변수 X가 갖는 값은 1, 2, 3, 4, 5이다.

(i) $2f(3)<f(4)$인 경우

$f(3)$, $f(4)$의 값을 순서쌍 $(f(3),\ f(4))$로 나타내면

$(1,\ 3)$, $(1,\ 4)$, $(1,\ 5)$, $(2,\ 5)$

의 4가지이다.

이때 $f(4)$의 값이 될 수 있는 것은 3, 4, 5이다.

$f(4)=3$일 확률은

$\dfrac{1\times{}_3\mathrm{P}_2}{{}_5\mathrm{P}_4}=\dfrac{1}{20}$

$f(4)=4$일 확률은

$\dfrac{1\times{}_3\mathrm{P}_2}{{}_5\mathrm{P}_4}=\dfrac{1}{20}$

$f(4)=5$일 확률은

$\dfrac{2\times{}_3\mathrm{P}_2}{{}_5\mathrm{P}_4}=\dfrac{1}{10}$

(ii) $2f(3)\ge f(4)$인 경우

$f(3)$, $f(4)$의 값을 순서쌍 $(f(3),\ f(4))$로 나타내면

$(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 3)$, $(2,\ 4)$,

$(3,\ 1)$, $(3,\ 2)$, $(3,\ 4)$, $(3,\ 5)$,

$(4,\ 1)$, $(4,\ 2)$, $(4,\ 3)$, $(4,\ 5)$,

$(5,\ 1)$, $(5,\ 2)$, $(5,\ 3)$, $(5,\ 4)$

이때 $f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4, 5이다.

$f(3)=1$일 확률은

$\dfrac{1\times{}_3\mathrm{P}_2}{{}_5\mathrm{P}_4}=\dfrac{1}{20}$

$f(3)=2$일 확률은

$\dfrac{3\times{}_3\mathrm{P}_2}{{}_5\mathrm{P}_4}=\dfrac{3}{20}$

$f(3)=3$일 확률은

$\dfrac{4\times{}_3\mathrm{P}_2}{{}_5\mathrm{P}_4}=\dfrac{1}{5}$

$f(3)=4$일 확률은

$\dfrac{4\times{}_3\mathrm{P}_2}{{}_5\mathrm{P}_4}=\dfrac{1}{5}$

$f(3)=5$일 확률은

$\dfrac{4\times{}_3\mathrm{P}_2}{{}_5\mathrm{P}_4}=\dfrac{1}{5}$

(i), (ii)에 의하여

$\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{1}{20}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{3}{20}$,

$\mathrm{P}(X=3)=\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{4}$,

$\mathrm{P}(X=4)=\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{4}$,

$\mathrm{P}(X=5)=\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{10}$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\dfrac{1}{20}$	$\dfrac{3}{20}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{3}{10}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\dfrac{1}{20}+2\times\dfrac{3}{20}+3\times\dfrac{1}{4}+4\times\dfrac{1}{4}+5\times\dfrac{3}{10}$

$=\dfrac{18}{5}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\dfrac{1}{20}+2^2\times\dfrac{3}{20}+3^2\times\dfrac{1}{4}+4^2\times\dfrac{1}{4}+5^2\times\dfrac{3}{10}$

$=\dfrac{72}{5}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\dfrac{72}{5}-\left(\dfrac{18}{5}\right)^2$

$=\dfrac{36}{25}$

따라서

$\sigma(X)=\dfrac{6}{5}$

이므로

$\sigma(20X-3)=20\sigma(X)$

$=20\times\dfrac{6}{5}$

$=24$

답 ②

3 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수 a, b, c에 대하여 $a\times b\times c$의 값이 4로 나누어떨어지는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 $a\times b\times c$의 값이 4로 나누어떨어지지 않아야 한다.

(i) a, b, c가 모두 홀수일 확률

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$

(ii) a, b, c 중에서 1개는 2 또는 6이고, 나머지 2개는 홀수일 확률

${}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=3\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{1}{4}$

(i), (ii)에 의하여

$\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{3}{8}$

이므로

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)$

$=1-\dfrac{3}{8}$

$=\dfrac{5}{8}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400, \dfrac{5}{8}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=400\times\dfrac{5}{8}=250$

즉,

$\mathrm{E}(2X+3)=2\mathrm{E}(X)+3$

$=2\times250+3$

$=503$

답 503

06 연속확률변수의 확률분포

유제 본문 75~81쪽

1 ③ 2 ⑤ 3 ④ 4 ③ 5 ②
6 ① 7 ⑤ 8 ④

1 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로

$\frac{1}{2}\times 4\times a=1$

에서

$a=\frac{1}{2}$

따라서

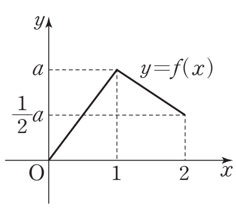
$$\begin{aligned}P(|X|\le 1)&=P(-1\le X\le 1)\\&=2\times P(0\le X\le 1)\\&=2\times\frac{1}{2}\times 1\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

이므로

$a\times P(|X|\le 1)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$

답 ③

2



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로

$\frac{1}{2}\times 1\times a+\frac{1}{2}\times 1\times\left(a+\frac{1}{2}a\right)$

$=\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}a$

$=\frac{5}{4}a=1$

에서 $a=\frac{4}{5}$

따라서

$$\begin{aligned}P\left(\frac{1}{2}\le X\le 2\right)&=1-P\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)\\&=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\\&=1-\frac{1}{10}\\&=\frac{9}{10}\end{aligned}$$

답 ⑤

3 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고, $P(X\le 15)=P(X\ge 21)$이므로

$$\begin{aligned}m&=\frac{15+21}{2}\\&=18\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}m\times P(X\le m)&=18\times P(X\le 18)\\&=18\times\frac{1}{2}\\&=9\end{aligned}$$

답 ④

4 $P(m-2\sigma\le X\le m+1.5\sigma)$

$=P(m-2\sigma\le X\le m)+P(m\le X\le m+1.5\sigma)$

$=P(m\le X\le m+2\sigma)+P(m\le X\le m+1.5\sigma)$

$=0.4772+0.4332$

$=0.9104$

답 ③

5 $Z=\frac{X-20}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(|X-20|\le 2)$

$=P(18\le X\le 22)$

$=P\left(\frac{18-20}{2}\le Z\le\frac{22-20}{2}\right)$

$=P(-1\le Z\le 1)$

$=2P(0\le Z\le 1)$

$=2\times 0.3413$

$=0.6826$

답 ②

6 이 과수원에서 수확한 귤 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(76,\ 3^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-76}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(73\le X\le 74.5)$
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{73-76}{3}\le Z\le \dfrac{74.5-76}{3}\right)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le -0.5)$
$=\mathrm{P}(0.5\le Z\le 1)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$
$=0.3413-0.1915$
$=0.1498$

답 ①

7 한 개의 동전을 100번 던졌을 때, 앞면이 나온 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \dfrac{1}{2}\right)$을 따르므로
$\mathrm{E}(X)=100\times\dfrac{1}{2}$
$=50$
$\mathrm{V}(X)=100\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}$
$=25$
이때 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 5^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-50}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(40\le X\le 60)$
$=\mathrm{P}\left(\dfrac{40-50}{5}\le Z\le \dfrac{60-50}{5}\right)$
$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)$
$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$
$=2\times 0.4772$
$=0.9544$

답 ⑤

8 450번의 조사 결과 자가용을 이용하여 출근한다고 응답한 사원 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450,\ \dfrac{1}{3}\right)$을 따르므로
$\mathrm{E}(X)=450\times\dfrac{1}{3}$
$=150$
$\mathrm{V}(X)=450\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}$
$=100$
이때 450은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 10^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-150}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(X\le 165)$
$=\mathrm{P}\left(Z\le \dfrac{165-150}{10}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\le 1.5)$
$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$
$=0.5+0.4332$
$=0.9332$

답 ④

Level 1 기초 연습

본문 82쪽

1 ① **2** ③ **3** 4 **4** ④ **5** ⑤

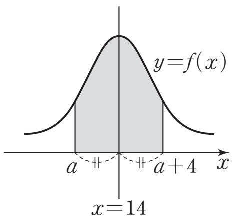
1 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로
$\dfrac{1}{2}\times 2\times 2a=2a=1$
$a=\dfrac{1}{2}$
즉, $f(x)=\dfrac{1}{2}x$이므로
$\mathrm{P}(0\le X\le a)=\mathrm{P}\left(0\le X\le \dfrac{1}{2}\right)$
$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}$
$=\dfrac{1}{16}$

답 ①

2 평균이 m인 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 모양이고,
$\mathrm{P}(X\le 8)=\mathrm{P}(X\ge 20)$이므로

$m=\frac{8+20}{2}=14$

따라서 $\mathrm{P}(a\le X\le a+4)$의 값이 최대일 때



$\frac{a+(a+4)}{2}=14$

$2a=24$

즉, $a=12$이므로

$a+m=26$

답 ③

3 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수를 Z라 하면

$\mathrm{P}(10\le X\le 13)=\mathrm{P}(7\le Y\le 9)$에서

$\mathrm{P}\left(\frac{10-10}{3}\le Z\le \frac{13-10}{3}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{7-9}{\sqrt{a}}\le Z\le \frac{9-9}{\sqrt{a}}\right)$

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=\mathrm{P}\left(\frac{-2}{\sqrt{a}}\le Z\le 0\right)$

$\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)=\mathrm{P}\left(\frac{-2}{\sqrt{a}}\le Z\le 0\right)$

따라서 $-1=\frac{-2}{\sqrt{a}}$이므로

$\sqrt{a}=2$

즉, $a=4$

답 4

4 이 회사의 입사시험 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(200,\ 20^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-200}{20}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

이때 $\frac{128}{400}=0.32$이고, 응시생의 점수의 최솟값을 a라 하면

$\mathrm{P}(X\ge a)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{a-200}{20}\right)$

$=0.32$

즉,

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-200}{20}\right)=0.5-0.32$

$=0.18$

이므로

$\frac{a-200}{20}=0.47$

$a-200=9.4$

따라서 $a=209.4$

답 ④

5 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(144,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=144\times\frac{1}{2}$

$=72$

$\mathrm{V}(X)=144\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$

$=36$

이때 144는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(72,\ 6^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-72}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$\mathrm{P}(63\le X\le a)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{63-72}{6}\le Z\le \frac{a-72}{6}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-1.5\le Z\le \frac{a-72}{6}\right)$

$=0.8664$

이때

$\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 0)=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$

이므로

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-72}{6}\right)=0.4332$

즉, $\frac{a-72}{6}=1.5$이므로

$a=81$

답 ⑤

Level 2 기본 연습

본문 83~84쪽

1 ④ **2** ① **3** ④ **4** ④ **5** ②
6 19 **7** ④

1 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이고, 함수 $f(x)=a|x|+b$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(-1\le X\le 2)$

$=\mathrm{P}(-1\le X\le 0)+\mathrm{P}(0\le X\le 2)$

$=\frac{1}{2}\times 1\times\{(a+b)+b\}+\frac{1}{2}\times 2\times\{b+(2a+b)\}$

$=\frac{1}{2}(a+2b)+(2a+2b)$

$=\frac{5}{2}a+3b=1$

$\frac{5}{2}a+3b=1$에서

$5a+6b=2$ …… ㉠

또한 $P(-1 \le X \le 0)=\frac{2}{5}$에서

$\frac{1}{2}(a+2b)=\frac{2}{5}$

이므로

$a+2b=\frac{4}{5}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a=-\frac{1}{5}$, $b=\frac{1}{2}$

따라서

$P(5a \le X \le 2b)$

$=P(-1 \le X \le 1)$

$=P(-1 \le X \le 0)+P(0 \le X \le 1)$

$=2P(-1 \le X \le 0)$

$=2\times\frac{2}{5}$

$=\frac{4}{5}$

답 ④

2 조건 (가)의 $f(6+x)=f(6-x)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=6$에 대하여 대칭이므로

$E(X_1)=6$

조건 (가)의 $g(x)=f(x+2)$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로

$E(X_2)=E(X_1)-2$

$=4$

$\sigma(X_1)=\sigma(X_2)$

조건 (나)에서

$E(X_1)=E(2X_3-6)$

$=2E(X_3)-6$

이므로

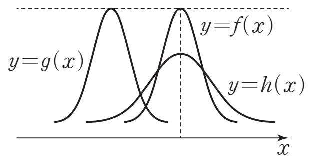
$E(X_3)=\frac{1}{2}\{E(X_1)+6\}$

$=\frac{1}{2}(6+6)$

$=6$

$\sigma(X_1)<\sigma(X_3)$이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 직선 $x=6$에 대하여 대칭이고 함수 $y=f(x)$의 그래프보다 중앙 부분이 낮아지면서 양쪽으로 펴져 있다.

따라서 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



답 ①

3 이 공장에서 만든 흰색 솜사탕 한 개의 무게를 확률변수 X, 빨간색 솜사탕 한 개의 무게를 확률변수 Y라 하면 X, Y는 각각 정규분포 $N(200, 10^2)$, $N(220, a^2)$을 따른다.

표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르는 확률변수를 Z라 하면

$p_1=P(X \ge 220)$

$=P\left(Z \ge \frac{220-200}{10}\right)$

$=P(Z \ge 2)$

$p_2=P(Y \ge 230)$

$=P\left(Z \ge \frac{230-220}{a}\right)$

$=P\left(Z \ge \frac{10}{a}\right)$

이고, $p_1 \le p_2$이므로

$2 \ge \frac{10}{a}$에서

$a \ge 5$

따라서 양수 a의 최솟값은 5이다.

답 ④

4 $V(2X-1)=4V(X)=4\sigma^2$

이므로

$V(2X-1)=V(Y)$

에서 $4\sigma^2=4^2$

$\sigma^2=4$이므로

$\sigma=2$

또한 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르는 확률변수를 Z라 하면

$P(X \ge a)=P\left(Z \ge \frac{a-25}{2}\right)$

$P(Y \le 32)=P\left(Z \le \frac{32-30}{4}\right)$

$=P\left(Z \le \frac{1}{2}\right)$

이므로

$\frac{a-25}{2}+\frac{1}{2}=0$

$a-25=-1$

따라서 $a=24$

답 ④

5 이 골프장을 이용한 팀의 18홀 이용 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(260,\ 20^2)$을 따르고,

$Z=\frac{X-260}{20}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 이 골프장을 이용한 팀 중 임의로 선택한 한 팀이 패널티를 받지 않을 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 270)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{270-260}{20}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{1}{2}\right)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)\\&=0.5+0.1915\\&=0.6915\end{aligned}$$

답 ②

6 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(3600,\ \frac{1}{10}\right)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=3600\times\frac{1}{10}\\&=360\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=3600\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}\\&=324\end{aligned}$$

이때 3600은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(360,\ 18^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-360}{18}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(324\le X\le 360)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{324-360}{18}\le Z\le\frac{360-360}{18}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$\mathrm{P}(378-a\le X\le 378+a)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{378-a-360}{18}\le Z\le\frac{378+a-360}{18}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{18-a}{18}\le Z\le\frac{18+a}{18}\right)$

$=\mathrm{P}\left(1-\frac{a}{18}\le Z\le 1+\frac{a}{18}\right)$

이고, a는 자연수이므로

$\mathrm{P}(0\le Z\le 2)<\mathrm{P}\left(1-\frac{a}{18}\le Z\le 1+\frac{a}{18}\right)$

를 만족시키기 위해서는

$1-\frac{a}{18}<0,\ 1+\frac{a}{18}>2$

이어야 한다.

$\frac{a}{18}>1$에서

$a>18$

따라서 자연수 a의 최솟값은 19이다.

답 19

7 n개의 주사위의 눈의 수가 모두 홀수일 확률은

$\left(\frac{1}{2}\right)^n$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(240,\ \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$을 따르고

$\mathrm{E}(X)=240\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\mathrm{V}(X)=240\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

또한 $\sigma(X)=\frac{15}{4}$에서

$\mathrm{V}(X)=\frac{225}{16}$이므로

$240\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\frac{225}{16}$

$16\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\frac{15}{16}$

이때 $\left(\frac{1}{2}\right)^n=x$로 놓으면

$16x(1-x)=\frac{15}{16}$

$256x^2-256x+15=0$

$(16x-1)(16x-15)=0$

$x=\frac{1}{16}$ 또는 $x=\frac{15}{16}$

이때 n은 자연수이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$에서

$n=4$

또한 240은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(15,\ \frac{225}{16}\right)$를 따르고, $Z=\frac{X-15}{\frac{15}{4}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$$\mathrm{P}\left(X\le\frac{84}{n}\right)=\mathrm{P}\left(X\le 21\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{21-15}{\frac{15}{4}}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\le 1.6)$$
$$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.6)$$
$$=0.5+0.4452$$
$$=0.9452$$

답 ④

Level 3 실력 완성 본문 85쪽

1 ⑤ 2 ③ 3 ②

1 조건 (가)에서

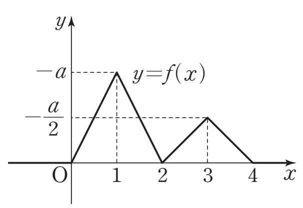
$f(0)=f(2)=0$

이고, 조건 (나)에서

$f(x)=\frac{1}{2}f(4-x)$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 $2\le x\le 4$인 부분은 $0\le x\le 2$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 다음 함숫값을 $\frac{1}{2}$배 한 것이다.

따라서 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이므로

$\frac{1}{2}\times 2\times(-a)+\frac{1}{2}\times 2\times\left(-\frac{a}{2}\right)=-\frac{3}{2}a=1$

에서

$a=-\frac{2}{3}$

따라서 $0\le x\le 2$일 때,

$f(x)=-\frac{2}{3}|x-1|+\frac{2}{3}$이므로

$$\mathrm{P}\left(\frac{3}{2}\le X\le\frac{5}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{3}{2}\le X\le 2\right)+\mathrm{P}\left(2\le X\le\frac{5}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{24}$$
$$=\frac{1}{8}$$

답 ⑤

2 A영화다운로드 사이트에서 다운로드 할 수 있는 영화 파일 1개의 크기를 확률변수 X, B영화다운로드 사이트에서 다운로드 할 수 있는 영화 파일 1개의 크기를 확률변수 Y라 하면 두 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(1.2,\ 0.2^2)$, $\mathrm{N}(1,\ 0.6^2)$을 따른다.

표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수를 Z라 하면

A영화다운로드 사이트에서 추가 요금이 부과될 확률은

$$\mathrm{P}(X\ge 1.4)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{1.4-1.2}{0.2}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge 1)$$
$$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=0.5-0.34$$
$$=0.16$$

B영화다운로드 사이트에서 추가 요금이 부과될 확률을 k라 하면

$$k=\mathrm{P}(Y\ge a)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-1}{0.6}\right)$$

또한 재민이가 임의로 A, B 두 영화다운로드 사이트 중 한 군데에서 다운로드 한 1개의 영화 파일이 기본요금에 추가 요금이 부과된 영화 파일일 때, 이 영화 파일이 B영화다운로드 사이트에서 다운로드 한 파일일 확률이 $\frac{31}{47}$이므로

$$\frac{\frac{1}{2}\mathrm{P}(Y\ge a)}{\frac{1}{2}\mathrm{P}(X\ge 1.4)+\frac{1}{2}\mathrm{P}(Y\ge a)}=\frac{k}{0.16+k}=\frac{31}{47}$$

$47k=4.96+31k$

$16k=4.96$

$k=0.31$

따라서 $\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{a-1}{0.6}\right)=0.31$이므로

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{a-1}{0.6}\right)=0.31$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{a-1}{0.6}\right)=0.19$

즉, $\frac{a-1}{0.6}=0.5$이므로

$a=1.3$

답 ③

3 8장의 카드가 들어 있는 상자에서 임의로 4장의 카드를 동시에 꺼내는 경우의 수는

$${}_8\mathrm{C}_4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$$

(i) $b=2$일 때

$(a,\ b)=(1,\ 2)$이므로 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

$$1\times{}_6\mathrm{C}_2=1\times\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

(ii) $b=3$일 때

$(a,\ b)=(1,\ 3),\ (2,\ 3)$이므로 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

$$2\times{}_5\mathrm{C}_2=2\times\frac{5\times4}{2\times1}=20$$

(iii) $b=4$일 때

$(a,\ b)=(1,\ 4),\ (2,\ 4)$이므로 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

$$2\times{}_4\mathrm{C}_2=2\times\frac{4\times3}{2}=12$$

(iv) $b=5$일 때

$(a,\ b)=(1,\ 5)$이므로 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

$$1\times{}_3\mathrm{C}_2=1\times3=3$$

따라서 한 번의 시행에서 주어진 조건을 만족시킬 확률은

$$\frac{15+20+12+3}{70}=\frac{50}{70}=\frac{5}{7}$$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(490,\ \frac{5}{7}\right)$를 따른다.

이때

$$\mathrm{E}(X)=490\times\frac{5}{7}=350$$

$$\mathrm{V}(X)=490\times\frac{5}{7}\times\frac{2}{7}=100$$

이고, 490은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(350,\ 10^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-350}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$\mathrm{P}(348\le X\le 362)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{348-350}{10}\le Z\le\frac{362-350}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(-0.2\le Z\le 1.2)$

$=\mathrm{P}(-0.2\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.2)$

$=0.0793+0.3849$

$=0.4642$

답 ②

07 통계적 추정

유제 본문 89~95쪽

1 ④ 2 ③ 3 ② 4 ④ 5 ③
6 ① 7 ③ 8 100

1 이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 $(X_1,\ X_2)$라 하면 $\overline{X}=\frac{3}{2}$인 경우는 $(0,\ 3)$, $(3,\ 0)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$일 때이므로

$\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{3}{2}\right)$

$=\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{64}+\frac{1}{64}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$

$=\frac{9}{32}$

답 ④

2 모집단에서 임의추출한 크기가 3인 표본을 $(X_1,\ X_2,\ X_3)$이라 하면 $\overline{X}=3$인 경우는 $(1,\ 3,\ 5)$, $(1,\ 5,\ 3)$, $(3,\ 1,\ 5)$, $(3,\ 5,\ 1)$, $(5,\ 1,\ 3)$, $(5,\ 3,\ 1)$, $(3,\ 3,\ 3)$일 때이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=3)$

$=6\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}$

$=\frac{9}{64}+\frac{1}{512}$

$=\frac{73}{512}$

답 ③

3 $\mathrm{E}(X)=-1\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}=0$,

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

이므로

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2}$

$=\sqrt{\frac{1}{2}-0^2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 표본의 크기가 4이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

답 ②

4 확률변수 X의 확률분포를 나타낸 표에서 모든 확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{8}+a+b=1$

$a+b=\frac{7}{8}$ …… ㉠

모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 $(X_1,\ X_2)$라 하면 $\overline{X}=2$인 경우는 $(1,\ 3)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$일 때이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\frac{1}{8}b+a^2+\frac{1}{8}b$

$=a^2+\frac{1}{4}b$

$=\frac{7}{32}$

$32a^2+8b-7=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$32a^2+8\left(-a+\frac{7}{8}\right)-7=0$

$32a^2-8a=0$

$a(4a-1)=0$

이때 $a\neq0$이므로

$a=\frac{1}{4}$

$a=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면

$b=\frac{5}{8}$

따라서

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)$

$=1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{5}{8}$

$=\frac{5}{2}$

답 ④

5 이 업체에서 제작한 배드민턴전용 운동화 1켤레의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(320,\ 10^2)$을 따른다.
이때 크기가 9인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=320$,

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{10^2}{9}=\left(\frac{10}{3}\right)^2$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(320, \left(\frac{10}{3}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z=\dfrac{\overline{X}-320}{\frac{10}{3}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(315\le\overline{X}\le330)\\
&=\mathrm{P}\left(\frac{315-320}{\frac{10}{3}}\le Z\le\frac{330-320}{\frac{10}{3}}\right)\\
&=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le3)\\
&=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le3)\\
&=\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le3)\\
&=0.4332+0.4987\\
&=0.9319
\end{aligned}$$

답 ③

6 $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=m$,

$\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{2^2}{25}=\left(\dfrac{2}{5}\right)^2$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{2}{5}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\frac{2}{5}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(|\overline{X}-m|\le\frac{1}{5}\right)\\
&=\mathrm{P}\left(-\frac{1}{5}\le\overline{X}-m\le\frac{1}{5}\right)\\
&=\mathrm{P}\left(\frac{-\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}\le\frac{\overline{X}-m}{\frac{2}{5}}\le\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}\right)\\
&=\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}\le Z\le\frac{1}{2}\right)\\
&=2\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)\\
&=2\times0.1915\\
&=0.3830
\end{aligned}$$

답 ①

7 이 회사에서 생산한 형광등 중 임의추출한 100개의 수명의 표본평균이 4800시간, 표본표준편차가 100시간이므로

$\overline{x}=4800$, $s=100$, $n=100$

이라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$4800-2.58\times\frac{100}{\sqrt{100}}\le m\le4800+2.58\times\frac{100}{\sqrt{100}}$$

$$4800-2.58\times10\le m\le4800+2.58\times10$$

따라서 $4774.2\le m\le4825.8$

답 ③

8 이 축구리그에서 한 경기에서 축구 선수 1명의 이동거리는 표준편차가 2 km인 정규분포를 따르고, 이 축구리그의 선수 중 n명을 임의추출하여 구한 한 경기에서 이동거리의 표본평균이 8.1 km이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$8.1-1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}\le m\le8.1+1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}$$

즉,

$$a=8.1-1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}},\ b=8.1+1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}$$

이므로

$$\begin{aligned}
b-a&=2\times1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}\\
&=\frac{7.84}{\sqrt{n}}\\
&=0.784
\end{aligned}$$

$\sqrt{n}=10$

따라서 $n=100$

답 100

Level 1 기초 연습 본문 96쪽

1 ④ **2** ③ **3** ⑤ **4** 64

1 정규분포를 따르는 모집단의 모표준편차가 10이고 이 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\overline{X}$이므로

$$\sigma(\overline{X})=\frac{10}{\sqrt{25}}=2$$

따라서

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(2\overline{X})&=4\times\mathrm{V}(\overline{X})\\
&=4\times\{\sigma(\overline{X})\}^2\\
&=4\times2^2\\
&=16
\end{aligned}$$

답 ④

2 확률변수 X의 확률분포를 나타낸 표에서 확률의 총합은 1이므로

$a+b+\frac{1}{4}=1$

$a+b=\frac{3}{4}$ ...... ㉠

또한

$E(\overline{X}+1)=E(\overline{X})+1$

$=\frac{3}{2}$

에서 $E(\overline{X})=\frac{1}{2}$이므로

$E(X)=\frac{1}{2}$

따라서

$E(X)=-2a+b+\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}$

$2a-b=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$a=\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{2}$

모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 $(X_1,\ X_2)$라 하면 $\overline{X}=-\frac{1}{2}$인 경우는 $(-2,\ 1)$, $(1,\ -2)$이므로

$P\left(\overline{X}=-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{4}$

답 ③

3 이 카드회사 고객센터의 ARS응답 대기 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N\left(3,\ \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

이때 크기가 100인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$E(\overline{X})=E(X)=3$,

$V(\overline{X})=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{100}=\frac{9}{400}$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(3,\ \left(\frac{3}{20}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z=\frac{\overline{X}-3}{\frac{3}{20}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$P(\overline{X}\le 3.3)=P\left(Z\le\frac{3.3-3}{\frac{3}{20}}\right)$

$=P(Z\le 2)$

$=0.5+P(0\le Z\le 2)$

$=0.5+0.4772$

$=0.9772$

답 ⑤

4 $\sigma=4$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{4}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{4}{\sqrt{n}}$

이므로

$1.96\times\frac{4}{\sqrt{n}}=0.98$

$\sqrt{n}=8$

따라서 $n=64$

답 64

Level 2 기본 연습 본문 97~98쪽

1 ①	2 ④	3 ③	4 ③	5 4
6 10	7 45	8 ①		

1 표본평균 $\overline{X}$에 대한 확률분포를 나타낸 표에서 확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{16}+\frac{3}{8}+a=1$

$a=\frac{9}{16}$

$E(X)=E(\overline{X})$

$=1\times\frac{1}{16}+\frac{3}{2}\times\frac{3}{8}+2\times\frac{9}{16}$

$=\frac{1}{16}+\frac{9}{16}+\frac{9}{8}$

$=\frac{7}{4}$

또한 $V(X)=2V(\overline{X})$이고

$E(\overline{X}^2)=1^2\times\frac{1}{16}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{9}{16}$

$=\frac{1}{16}+\frac{27}{32}+\frac{36}{16}$

$=\frac{101}{32}$

이므로

$$\begin{aligned} V(X) &= 2V(\overline{X}) \\ &= 2\left\{\frac{101}{32} - \left(\frac{7}{4}\right)^2\right\} \\ &= \frac{101}{16} - \frac{49}{8} \\ &= \frac{3}{16} \end{aligned}$$

따라서

$$E(X) + V(X) = \frac{7}{4} + \frac{3}{16} = \frac{31}{16}$$

답 ①

2 ㄱ. $m = E(\overline{X_1}) = E(\overline{X_2})$ (참)

ㄴ. $$\begin{aligned} V(n_1\overline{X_1}) &= n_1^{\ 2}V(\overline{X_1}) \\ &= n_1^{\ 2} \times \frac{\sigma^2}{n_1} = n_1\sigma^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(n_2\overline{X_2}) &= n_2^{\ 2}V(\overline{X_2}) \\ &= n_2^{\ 2} \times \frac{\sigma^2}{n_2} = n_2\sigma^2 \end{aligned}$$

이므로 $n_1 \neq n_2$이면 $V(n_1\overline{X_1}) \neq V(n_2\overline{X_2})$ (거짓)

ㄷ. $n_1 = 4n_2$이므로

$$\begin{aligned} \sigma(\overline{X_1}) &= \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}} = \frac{\sigma}{\sqrt{4n_2}} \\ &= \frac{\sigma}{2\sqrt{n_2}} = \frac{1}{2}\sigma(\overline{X_2}) \end{aligned}$$

따라서 $2\sigma(\overline{X_1}) = \sigma(\overline{X_2})$이므로

$\sigma(2\overline{X_1}) = \sigma(\overline{X_2})$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

3 정육면체 모양의 상자를 한 번 던져서 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 수를 확률변수 X라 하면

$P(X=1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,

$P(X=2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$,

$P(X=3) = \frac{1}{6}$

이고, 3번의 시행에서 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 수를 각각 X_1, X_2, X_3이라 하면

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

이므로 $\overline{X} < \frac{3}{2}$에서

$$X_1 + X_2 + X_3 < \frac{9}{2}$$

즉, (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)이므로

$$\begin{aligned} P\left(\overline{X} < \frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

답 ③

4 $P(X=1) = a\,(a \geq 0)$이라 하면 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\overline{X} = 1$인 경우는 (1, 1)이므로

$$P(\overline{X} = 1) = a^2 = \frac{1}{4}$$

즉, $a = \frac{1}{2}$

또한 $P(X=-1) = b$, $P(X=0) = c$로 놓으면

$$\begin{aligned} E(\overline{X}) &= E(X) \\ &= -1 \times b + 0 \times c + 1 \times \frac{1}{2} \\ &= -b + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

이므로

$$b = \frac{1}{4}$$

또한 $a + b + c = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + c = 1$이므로

$$c = \frac{1}{4}$$

이때 $\overline{X} = \frac{1}{2}$인 경우는 (0, 1), (1, 0)이므로

$$\begin{aligned} P\left(\overline{X} = \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 2 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 ③

5 모집단이 정규분포 $N(100, 32^2)$을 따르므로 이 모집단에서 크기가 n^2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$$E(\overline{X}) = 100,\ V(\overline{X}) = \frac{32^2}{n^2}$$

따라서 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(100, \left(\frac{32}{n}\right)^2\right)$을 따르

고, $Z=\dfrac{\overline{X}-100}{\dfrac{32}{n}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포

N(0, 1)을 따른다.

이때

$\mathrm{P}(-n^2\le\overline{X}-100\le n^2)$

$=\mathrm{P}\left(-\dfrac{n^2}{\dfrac{32}{n}}\le\dfrac{\overline{X}-100}{\dfrac{32}{n}}\le\dfrac{n^2}{\dfrac{32}{n}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\dfrac{n^3}{32}\le Z\le\dfrac{n^3}{32}\right)$

$=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{n^3}{32}\right)$

$=0.9544$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{n^3}{32}\right)=0.4772$에서

$\dfrac{n^3}{32}=2$

$n^3=64$

따라서 자연수 n의 값은 4이다.

답 4

6 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ \sigma^2)$을 따르므로 이 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$\mathrm{E}(\overline{X})=30,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{25}$

따라서 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(30,\ \left(\dfrac{\sigma}{5}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z=\dfrac{\overline{X}-30}{\dfrac{\sigma}{5}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포

N(0, 1)을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 28)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{28-30}{\dfrac{\sigma}{5}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\le-\dfrac{10}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{10}{\sigma}\right)$

$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{10}{\sigma}\right)$

이므로

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{10}{\sigma}\right)=0.1587$

에서

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{10}{\sigma}\right)=0.3413$

따라서 $\dfrac{10}{\sigma}=1$이므로

$\sigma=10$

답 10

7 이 모집단에서 임의추출한 크기가 100인 표본평균의 값을 $\overline{x_1}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{100}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{100}}$

$\overline{x_1}-1.96\le m\le\overline{x_1}+1.96$

이므로

$a=\overline{x_1}-1.96,\ b=\overline{x_1}+1.96$

즉,

$b-a=(\overline{x_1}+1.96)-(\overline{x_1}-1.96)$

$=2\times1.96$

또한 이 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본평균의 값을 $\overline{x_2}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x_2}+1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}$

이므로

$c=\overline{x_2}-1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{n}},\ d=\overline{x_2}+1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}$

즉,

$d-c=\left(\overline{x_2}+1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}\right)-\left(\overline{x_2}-1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}\right)$

$=2\times1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}$

이므로 $b-a\ge\dfrac{2}{3}(d-c)$에서

$2\times1.96\ge\dfrac{2}{3}\times2\times1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}$

$\sqrt{n}\ge\dfrac{20}{3}$

따라서 $n\ge\dfrac{400}{9}=44.4\cdots$이므로 자연수 n의 최솟값은 45이다.

답 45

8 $\mathrm{V}(2X+3)=4\mathrm{V}(X)=16$에서

$\mathrm{V}(X)=4$

이므로 $\sigma=2$

이 모집단에서 크기가 36인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값은 10이고, 이를 이용하여 구한 모평균 m에 대한

신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$10-2.58\times\frac{2}{\sqrt{36}}\le m\le 10+2.58\times\frac{2}{\sqrt{36}}$

$10-0.86\le m\le 10+0.86$

따라서 구하는 신뢰구간은

$9.14\le m\le 10.86$

답 ①

Level 3 실력 완성 본문 99쪽

1 ⑤ **2** 17 **3** ②

1 주어진 시행을 2번 반복하여 주머니 B에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 차례대로 X_1, X_2라 하면

$\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$

$=2$

이므로

$X_1+X_2=4$

즉, $X_1=1$, $X_2=3$ 또는 $X_1=2$, $X_2=2$

또는 $X_1=3$, $X_2=1$이다.

또한 주머니 A에서 임의로 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}$

$=20$

이므로

$P(X_1=1)$

$=P(X_2=1)$

$=\frac{{}_1C_1\times{}_2C_2+{}_1C_1\times{}_2C_1\times{}_3C_1+{}_1C_1\times{}_3C_2}{20}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{1+6+3}{60}$

$=\frac{1}{6}$

$P(X_1=2)$

$=P(X_2=2)$

$=\frac{{}_1C_1\times{}_2C_1\times{}_3C_1+{}_2C_1\times{}_3C_2}{20}\times\frac{1}{3}$

$+\frac{{}_1C_1\times{}_2C_2+{}_2C_2\times{}_3C_1}{20}\times\frac{2}{3}$

$=\frac{6+6}{60}+\frac{(1+3)\times2}{60}$

$=\frac{1}{3}$

따라서

$P(X_1=3)=P(X_2=3)$

$=1-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)$

$=\frac{1}{2}$

이므로 구하는 확률은

$P(\overline{X}=2)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}$

$=\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}$

$=\frac{5}{18}$

답 ⑤

다른 풀이

주머니 A에서 임의로 3개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣은 후 주머니 B에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인하는 시행은 주머니 A에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인하는 시행과 확률분포가 같다. 이때 주머니 A에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 1, 2, 3일 확률은 각각 $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$이고, $\overline{X}=2$인 경우는 (1, 3), (2, 2), (3, 1)이므로

$P(\overline{X}=2)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}$

$=\frac{5}{18}$

2 확률변수 X가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르므로 조건 (가)의 $P(X\ge12)\le P(X\le18)$에서

$m\le\frac{12+18}{2}=15$ …… ㉠

조건 (가)의 $P(X\le18)\le P(X\ge8)$에서

$m\ge\frac{18+8}{2}=13$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$13\le m\le15$ …… ㉢

또한 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2\right)$을 따르므로

표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르는 확률변수를 Z라 하면

조건 (나)의 $P(X\ge20)<P(\overline{X}\le10)$에서

$P\left(Z\ge\frac{20-m}{\sigma}\right)<P\left(Z\le\frac{10-m}{\frac{\sigma}{2}}\right)$

$P\left(Z\ge\frac{20-m}{\sigma}\right)<P\left(Z\le\frac{20-2m}{\sigma}\right)$

$\dfrac{20-m}{\sigma}+\dfrac{20-2m}{\sigma}>0$

$40>3m$

$m<\dfrac{40}{3}=13.3\cdots$ ⋯⋯ ㉣

㉢, ㉣에서

$13\le m<13.3\cdots$

이고, m은 정수이므로

$m=13$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\ge 15)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{15-13}{\frac{\sigma}{2}}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{4}{\sigma}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{4}{\sigma}\right)\\&=0.1587\end{aligned}$$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{4}{\sigma}\right)=0.3413$

즉, $\dfrac{4}{\sigma}=1$이므로

$\sigma=4$

따라서

$m+\sigma=13+4=17$

답 17

3 이 지역의 고등학교 학생 중에서 임의추출한 n명의 등교 시간의 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 이를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이므로

$a=\overline{x}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ b=\overline{x}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

따라서

$$\begin{aligned}\frac{(b-a)\sqrt{n}}{16}&=\frac{2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\times\sqrt{n}}{16}\\&=0.245\sigma\end{aligned}$$

이고, 이 고등학교 학생 중에서 임의추출한 100명의 등교 시간의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\dfrac{\sigma}{10}\right)^2\right)$을 따르므로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수를 Z라 하면

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}\left(\overline{X}\le m-\frac{(b-a)\sqrt{n}}{16}\right)\\&=\mathrm{P}(\overline{X}\le m-0.245\sigma)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{(m-0.245\sigma)-m}{\frac{\sigma}{10}}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le-2.45)\\&=\mathrm{P}(Z\ge2.45)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le2.45)\\&=0.5-0.4929\\&=0.0071\end{aligned}$$

답 ②