II_1. 여러 가지 함수의 미분

[12미적02-01] 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다.
[12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.
[12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.
[12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.
[12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다.

1 지수함수와 로그함수의 극한 (1) ❶

(1) 지수함수의 극한

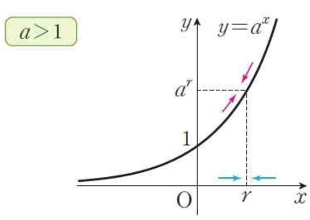
① $a>1$일 때, $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$

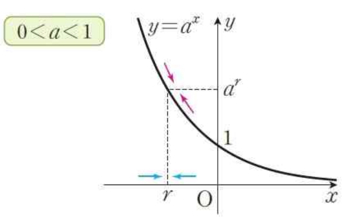
② $0<a<1$일 때, $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$

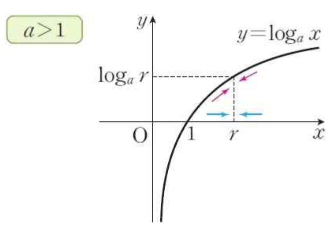
(2) 로그함수의 극한

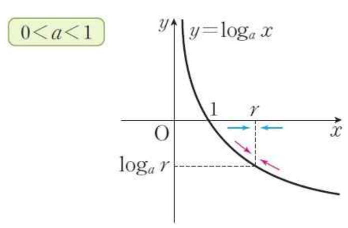
① $a>1$일 때, $\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$, $\lim_{x\to 0+} \log_a x = -\infty$

② $0<a<1$일 때, $\lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x\to 0+} \log_a x = \infty$









1 지수함수와 로그함수의 극한 (1) ❷

☑(1) 지수함수 $y=a^x$ $(a \neq 1,\ a>0)$은

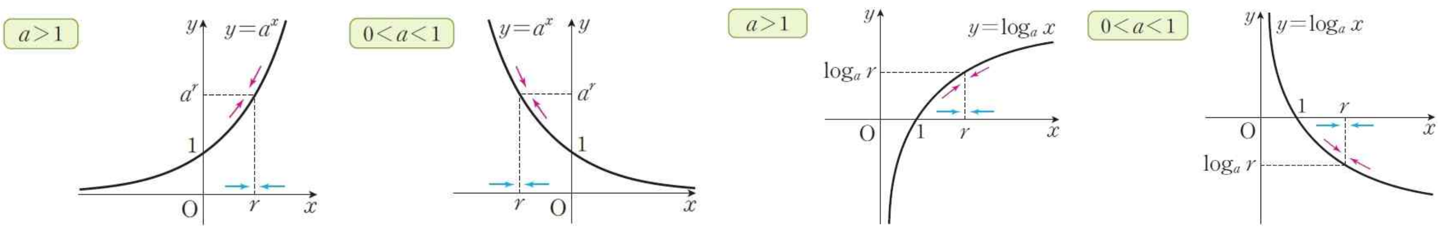
실수 전체의 집합에서 연속이므로 실수 r에 대하여

$$\lim_{x \to r} a^x = a^r$$

(2) 로그함수 $y=\log_a x$ $(a \neq 1,\ a>0)$은

양의 실수 전체의 집합에서 연속이므로 양수 r에 대하여

$$\lim_{x \to r} \log_a x = \log_a r$$



✡ 합성함수의 극한

함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)>0$이고 $a \neq 1,\ a>0$일 때,

(1) $\lim_{x \to c} f(x) = \alpha$ (단, $\alpha > 0$)

$$\Rightarrow \lim_{x \to c}\{\log_a f(x)\} = \log_a\left\{\lim_{x \to c} f(x)\right\} = \log_a \alpha$$

(2) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \beta$ (단, $\beta > 0$)

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty}\{\log_a f(x)\} = \log_a\left\{\lim_{x \to \infty} f(x)\right\} = \log_a \beta$$

2 지수함수와 로그함수의 극한 (2) ❶

(1) 무리수 e의 뜻

x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $(1+x)^{\frac{1}{x}}$의 값은 일정한 값에 수렴한다는 것이 알려져 있는데 그 극한값을 e로 나타낸다. 즉,

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

이다. 이때 수 e는 무리수이며 그 값은 $e = 2.71828\cdots$ 임이 알려져 있다.

✡ 무리수 e (1)

☑ 무리수 e ⇔ $(1+0)^{\infty}$꼴의 극한값

(1) $\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ (2) $\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$

(3) $e = 2.718281828459045235\cdots$: 무리수(비순환 무한소수)

(4) 오일러(Euler) : $e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \cdots}}}}}$

(5) 뉴턴(Newton) : $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$

✡ 무리수 e (2) ❶

(1) $\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \Leftrightarrow \lim_{\square \to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}} = e$

① $\lim_{x \to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}} = \lim_{x \to 0}\left\{(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\right\}^{ab} = e^{ab}$

② $\lim_{x \to 0}\left(1+\frac{bx}{a}\right)^{\frac{a}{bx}} = e$

③ $\lim_{x \to 0}\left(1+\frac{bx}{a}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0}\left\{\left(1+\frac{bx}{a}\right)^{\frac{a}{bx}}\right\}^{\frac{b}{a}} = e^{\frac{b}{a}}$

✡ 무리수 e (2) ❷

④ $\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{d}{cx}} = \lim_{x \to 0}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^{\frac{d}{c}} = e^{\frac{d}{c}}$

⑤ $\lim_{x \to 0}\left(1+\frac{bx}{a}\right)^{\frac{d}{cx}} = \lim_{x \to 0}\left\{\left(1+\frac{bx}{a}\right)^{\frac{a}{bx}}\right\}^{\frac{bd}{ac}} = e^{\frac{bd}{ac}}$

(2) $\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \Leftrightarrow \lim_{\triangle \to \infty}\left(1+\frac{1}{\triangle}\right)^{\triangle} = e$

① $\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{ax} = \lim_{x \to \infty}\left\{\left(1+\frac{b}{x}\right)^{\frac{x}{b}}\right\}^{ab} = e^{ab}$

✡ 무리수 e (2) ❸

② $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{b}{ax}\right)^{\frac{ax}{b}}=e$

③ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{b}{ax}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{b}{ax}\right)^{\frac{ax}{b}}\right\}^{\frac{b}{a}}=e^{\frac{b}{a}}$

④ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{dx}{c}}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right\}^{\frac{d}{c}}=e^{\frac{d}{c}}$

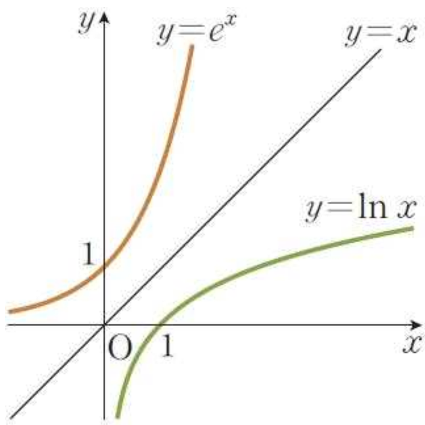
⑤ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{b}{ax}\right)^{\frac{dx}{c}}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{b}{ax}\right)^{\frac{ax}{b}}\right\}^{\frac{bd}{ac}}=e^{\frac{bd}{ac}}$

2 지수함수와 로그함수의 극한 (2) ❷

(2) 자연로그의 뜻

무리수 e를 밑으로 하는 로그 $\log_e x$를 '자연로그'라 하고,

기호로 '$\ln x$'와 같이 나타낸다.



☑ 상용로그 : $\log x=\log_{10}x$

(3) 지수함수와 로그함수의 극한

① $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1,\ \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

② $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ \lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$

(단, $a\neq1,\ a>0$)

2 지수함수와 로그함수의 극한 (2) ❸

☑ ① $\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 이므로

$$\lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)$$

$$= \lim_{x \to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

또 $\lim_{x \to 0}\frac{e^x-1}{x}$ 에서 $e^x-1=t$ 로 놓으면

$x=\ln(1+t)$ 이고, $x \to 0$ 일 때 $t \to 0$ 이므로

$$\lim_{x \to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{t \to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}$$

$$= \lim_{t \to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}} = \frac{1}{\lim_{t \to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}} = \frac{1}{1} = 1$$

② $\lim_{x \to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{\ln a}}{x}$

$$= \frac{1}{\ln a}\lim_{x \to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}\times 1 = \frac{1}{\ln a}$$

또 $\lim_{x \to 0}\frac{a^x-1}{x}$ 에서 $a^x-1=t$ 로 놓으면

$x = \log_a(1+t) = \dfrac{\ln(1+t)}{\ln a}$ 이고,

$x \to 0$ 일 때 $t \to 0$ 이므로

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\dfrac{\ln(1+t)}{\ln a}}$$

$$= \ln a \times \lim_{t \to 0} \frac{1}{\dfrac{\ln(1+t)}{t}}$$

$$= \ln a \times \frac{1}{\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t}} = \ln a \times \frac{1}{1} = \ln a$$

✡ 지수함수의 극한값

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{\square \to 0} \frac{e^{\square} - 1}{\square} = 1$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{qx} - 1}{px} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{qx} - 1}{qx} \times \frac{q}{p} = \frac{q}{p}$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ (단, $a \neq 1$, $a > 0$)

(4) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{a^{qx} - 1}{px} = \lim_{x \to 0} \frac{a^{qx} - 1}{qx} \times \frac{q}{p} = \frac{q}{p} \ln a$

✡ 로그함수의 극한값

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{\triangle \to 0} \frac{\ln(1+\triangle)}{\triangle} = 1$

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+qx)}{px} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+qx)}{qx} \times \frac{q}{p} = \frac{q}{p}$

(3) $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$ (단, $a \neq 1$, $a > 0$)

(4) $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+qx)}{px} = \lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+qx)}{qx} \times \frac{q}{p} = \frac{q}{p\ln a}$

3 지수함수와 로그함수의 미분 ❶

(1) $y = e^x$이면 $y' = e^x$

$y = \ln x$이면 $y' = \frac{1}{x}$

(2) $y = a^x$ $(a \neq 1,\ a > 0)$이면 $y' = a^x \ln a$

$y = \log_a x$ $(a \neq 1,\ a > 0)$이면 $y' = \frac{1}{x\ln a}$

☑ (1) $y = e^x$에 대하여 지수함수의 극한을 이용하면

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h}$$

$$= e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \times 1 = e^x$$

③ 지수함수와 로그함수의 미분 ❷

$y=\ln x$에 대하여

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}$$

$\frac{h}{x}=t$로 놓으면 $h\to 0$일 때 $t\to 0$이므로

로그함수의 극한을 이용하면

③ 지수함수와 로그함수의 미분 ❸

$$y'=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}$$

$$=\frac{1}{x}\times 1=\frac{1}{x}$$

(2) $y=a^x$에 대하여 지수함수의 극한을 이용하면

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}$$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\times\ln a=a^x\ln a$$

3 지수함수와 로그함수의 미분 ❹

$y=\log_a x$에 대하여 (1)의 로그함수의 미분을 이용하면

$$y'=(\log_a x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{\ln a}\times(\ln x)'$$

$$=\frac{1}{\ln a}\times\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln a}$$

예 ① $y=e^x+x$에 대하여

$$y'=(e^x)'+(x)'=e^x+1$$

② $y=xe^x$에 대하여

$$y'=(x)'e^x+x(e^x)'=1\times e^x+x\times e^x$$

$$=e^x+xe^x=(x+1)e^x$$

3 지수함수와 로그함수의 미분 ❺

③ $y=\ln x+x$에 대하여

$$y'=(\ln x)'+(x)'=\frac{1}{x}+1$$

④ $y=x\ln x$에 대하여

$$y'=(x)'\ln x+x(\ln x)'=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}$$

$$=\ln x+1$$

⑤ $y=2^x$에 대하여 $y'=2^x\ln 2$

⑥ $y=\log_2 x$에 대하여 $y'=\dfrac{1}{x\ln 2}$

✡ 지수함수와 로그함수의 도함수

(1) $y = e^{f(x)} \Rightarrow y' = e^{f(x)} \times f'(x)$

(2) $y = a^{f(x)} \Rightarrow y' = a^{f(x)} \ln a \times f'(x)$

(3) $y = \ln|f(x)| \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

(4) $y = \log_a|f(x)| \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)\ln a}$

4 삼각함수의 덧셈정리 ❶

(1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

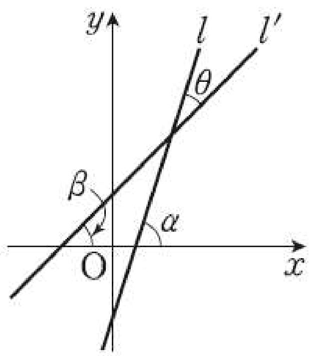
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

(2) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

(3) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

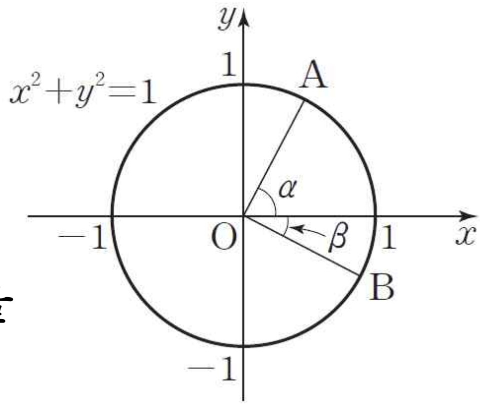
$\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$



☑ 기울기가 각각 m, m'인 두 직선의 사잇각을 θ라 하면

$$\tan\theta = \left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right| \quad (\text{단, } mm' = -1 \Rightarrow \theta = 90^\circ)$$

[4] 삼각함수의 덧셈정리 ❷



☑ 그림과 같이 좌표평면에서 두 각 α, $-\beta$ ($\alpha > 0$, $\beta > 0$)이 나타내는 동경과 원 $x^2 + y^2 = 1$이 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 원점 O에 대하여 삼각형 AOB에서 $\angle \mathrm{AOB} = \alpha + \beta$이므로 By 코사인법칙

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{OA}}^2 + \overline{\mathrm{OB}}^2 - 2 \times \overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{OB}} \times \cos(\alpha + \beta)$$
$$= 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos(\alpha + \beta)$$
$$= 2 - 2\cos(\alpha + \beta) \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

한편, 점 A의 좌표는 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$이고,
점 B의 좌표는 $(\cos(-\beta), \sin(-\beta))$, 즉

[4] 삼각함수의 덧셈정리 ❸

$(\cos\beta, -\sin\beta)$이므로

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2$$
$$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + (\sin^2\beta + \cos^2\beta)$$
$$- 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta$$
$$= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$2 - 2\cos(\alpha + \beta) = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$이므로

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

또 $\sin\theta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$이므로 ㉢을 이용하면

[4] 삼각함수의 덧셈정리 ❹

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left\{\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right\}$$

$$= \cos\left\{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + (-\beta)\right\}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos(-\beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(-\beta)$$

$$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad \cdots\cdots \text{ ㉣}$$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 이므로 ㉢, ㉣을 이용하면

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

[4] 삼각함수의 덧셈정리 ❺

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \times \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

한편, $\alpha-\beta$에 대한 덧셈정리는 $\alpha+\beta$에 대한 덧셈정리에 β 대신 $-\beta$를 대입하면 얻을 수 있다.

예 ① $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

4 삼각함수의 덧셈정리 ❻

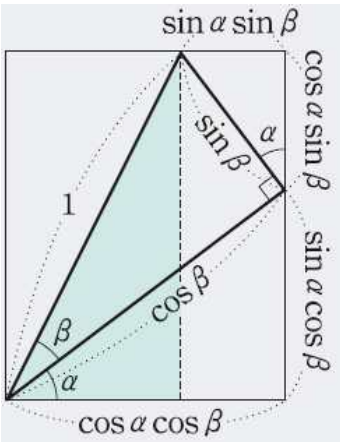
② $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

☑ $\sin 2\theta=\sin(\theta+\theta)=\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta$

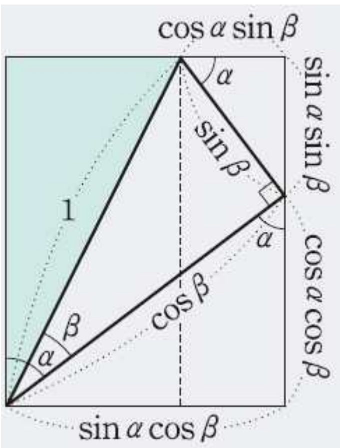
$$=2\sin\theta\cos\theta$$

✡ 그림으로 삼각함수의 덧셈정리 확인하기 ❶



(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

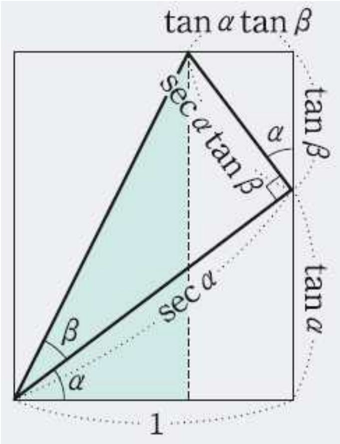
(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$



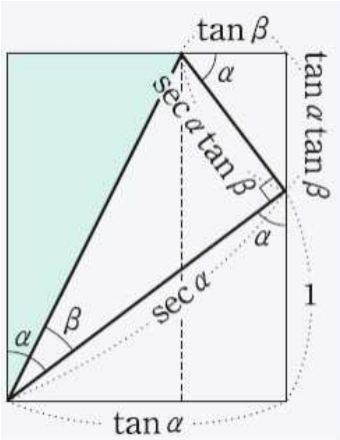
(3) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(4) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

✡ 그림으로 삼각함수의 덧셈정리 확인하기 ❷



(5) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$



(6) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

✡ 배각의 공식

(1) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

(2) $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$

(3) $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

✡ 반각의 공식

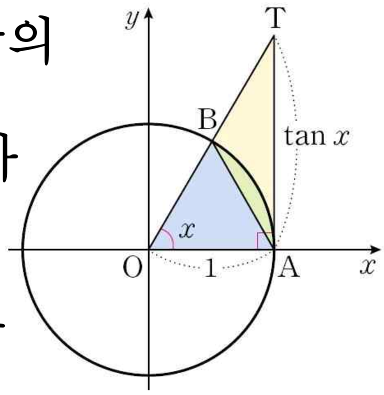
(1) $\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$ (2) $\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}$

(3) $\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ (4) $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

5 삼각함수의 극한 ❶

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

☑ ① $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 일 때, 그림과 같이 중심각의 크기가 x (라디안)이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴 OAB에 대하여 점 A를 지나고 선분 OA에 수직인 직선과 선분 OB의 연장선이 만나는 점을 T라 하자.



(삼각형 OAB의 넓이) < (부채꼴 OAB의 넓이)

< (삼각형 OAT의 넓이)이므로

5 삼각함수의 극한 ❷

$$\frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin x < \frac{1}{2} \times 1^2 \times x < \frac{1}{2} \times 1 \times \tan x$$

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x, \ \sin x < x < \tan x$$

$\sin x > 0$ 이므로 각 변을 $\sin x$ 로 나누면

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

각 변의 역수를 취하면

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$\lim\limits_{x \to 0+} \cos x = 1, \ \lim\limits_{x \to 0+} 1 = 1$ 이므로 함수의 극한의

5 삼각함수의 극한 ❸

대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

② $-\frac{\pi}{2} < x < 0$일 때, $\lim_{x \to 0-} \frac{\sin x}{x}$에서 $-x = t$로 놓으면

$0 < t < \frac{\pi}{2}$이고, $x \to 0-$ 일 때 $t \to 0+$이므로

$$\lim_{x \to 0-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \to 0+} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \to 0+} \frac{\sin t}{t} = 1$$

①, ②에 의하여 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

5 삼각함수의 극한 ❹

예 ① $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x} \right)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

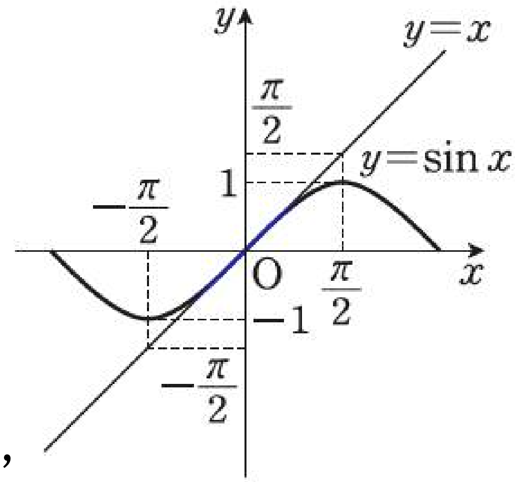
② $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$에서 $2x = t$로 놓으면

$x \to 0$일 때 $t \to 0$이므로

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \times 2 \right) = 2 \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t}$$

$$= 2 \times 1 = 2$$

5 삼각함수의 극한 ❺



☑ 극한값 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ 는

함수 $f(x) = \sin x$에 대하여

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$

서의 접선의 기울기를 나타낸다. 즉,

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

✡ 삼각함수의 극한값 ❶

(1) 삼각함수의 극한값을 구할 때 이용되는 삼각함수의 성질

① $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

② $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

③ $\sin(\pi + x) = -\sin x$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$

(2) 미정계수를 결정할 때 이용되는 성질

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \text{ (단, } \alpha\text{는 실수)}$$

① (분모) $\to 0$ $\Rightarrow$ (분자) $\to 0$

② (분자) $\to 0$ & $\alpha \neq 0$ $\Rightarrow$ (분자) $\to 0$

✡ 삼각함수의 극한값 ❷

(3) 삼각함수의 극한값에 대한 성질

① $\lim_{x \to 0} \frac{\sin bx}{ax} = \frac{b}{a}$, $\lim_{x \to 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$

② $\lim_{x \to 0} \frac{\tan bx}{ax} = \frac{b}{a}$, $\lim_{x \to 0} \frac{bx}{\tan ax} = \frac{b}{a}$

③ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$, $\lim_{x \to 0} \frac{\tan bx}{\tan ax} = \frac{b}{a}$

④ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin bx}{\tan ax} = \frac{b}{a}$, $\lim_{x \to 0} \frac{\tan bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$

6 삼각함수의 미분 ❶

(1) $y = \sin x$ 이면 $y' = \cos x$

(2) $y = \cos x$ 이면 $y' = -\sin x$

☑ (1) $y = \sin x$ 에 대하여 삼각함수의 덧셈정리와 삼각함수의 극한을 이용하면

$$
\begin{aligned}
y' &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(\sin x \cos h + \cos x \sin h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \sin h - \sin x (1 - \cos h)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\cos x \times \frac{\sin h}{h} - \sin x \times \frac{1 - \cos h}{h} \right)
\end{aligned}
$$

6 삼각함수의 미분 ❷

이때

$$\lim_{h \to 0} \frac{1-\cos h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1-\cos h)(1+\cos h)}{h(1+\cos h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin^2 h}{h(1+\cos h)} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin h}{h} \times \frac{\sin h}{1+\cos h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \times \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{1+\cos h} = 1 \times \frac{0}{1+1} = 0$$

이므로

$$y' = \cos x \times \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} - \sin x \times \lim_{h \to 0} \frac{1-\cos h}{h}$$

$$= \cos x \times 1 - \sin x \times 0 = \cos x$$

6 삼각함수의 미분 ❸

(2) $y = \cos x$에 대하여 삼각함수의 덧셈정리와 삼각함수의 극한을 이용하면

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\cos x \cos h - \sin x \sin h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\sin x \sin h - \cos x(1-\cos h)}{h}$$

$$= -\sin x \times \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} - \cos x \times \lim_{h \to 0} \frac{1-\cos h}{h}$$

$$= -\sin x \times 1 - \cos x \times 0 = -\sin x$$

6 삼각함수의 미분 ❹

예 ① $y=\sin x\cos x$에 대하여

$$
\begin{aligned}
y' &= (\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)' \\
&= \cos x\times\cos x+\sin x\times(-\sin x) \\
&= \cos^2 x-\sin^2 x
\end{aligned}
$$

② $f(x)=\cos x$에 대하여 $f'(x)=-\sin x$이므로

$x=\frac{\pi}{6}$에서의 미분계수는

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$