Ⅰ_0. 도형의 기본 성질

✡ 다각형의 성질 ❶

(1) (n각형의 대각선의 총수) $= \dfrac{n(n-3)}{2}$

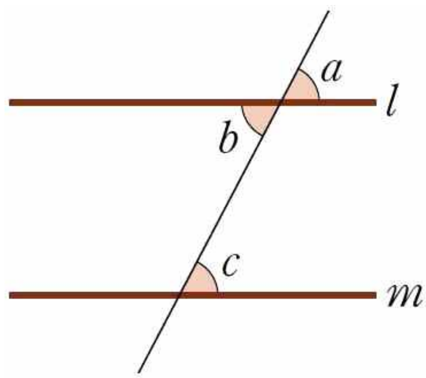
(2) (n각형의 내각의 크기의 합) $= 180° \times (n-2)$

(모든 다각형의 외각의 크기의 합) $=$ 항상 $360°$

(3) (정 n각형의 한 내각의 크기) $= \dfrac{180° \times (n-2)}{n}$

(정 n각형의 한 외각의 크기) $= \dfrac{360°}{n}$

✡ 다각형의 성질 ❷



(4) 기본 도형의 성질

① 맞꼭지각의 크기는 서로 같다.

$\angle a = \angle b$

② 평행선이 한 직선과 만날 때,

동위각과 엇각의 크기는 서로 같다.

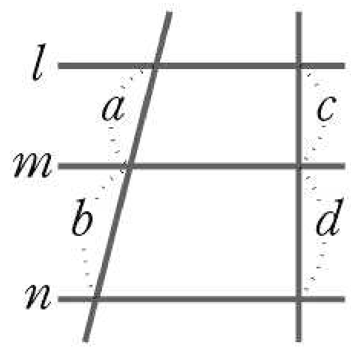
$l \parallel m \;\Leftrightarrow\; \angle a = \angle c$ ($\because$ 동위각)

$\Leftrightarrow\; \angle b = \angle c$ ($\because$ 엇각)

(5) 평행선 사이의 선분의 길이의 비

세 직선 l, m, n이 서로 평행

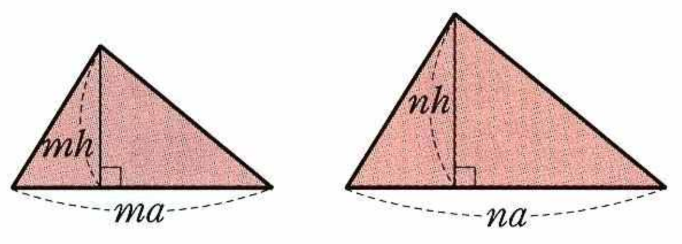
$\Rightarrow a : b = c : d$ 또는 $a : c = b : d$



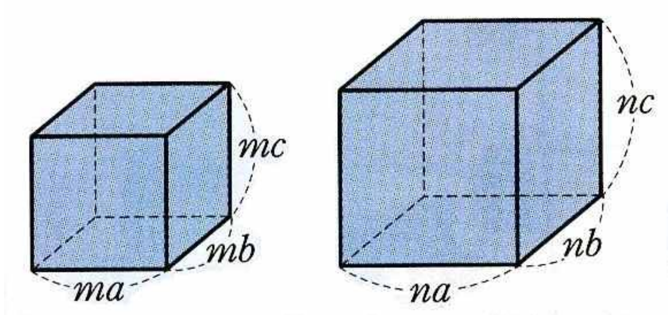
✡ 다각형의 성질 ❸

(6) 닮음비가 $m:n$일 때,

① 넓이의 비는 $m^2:n^2$

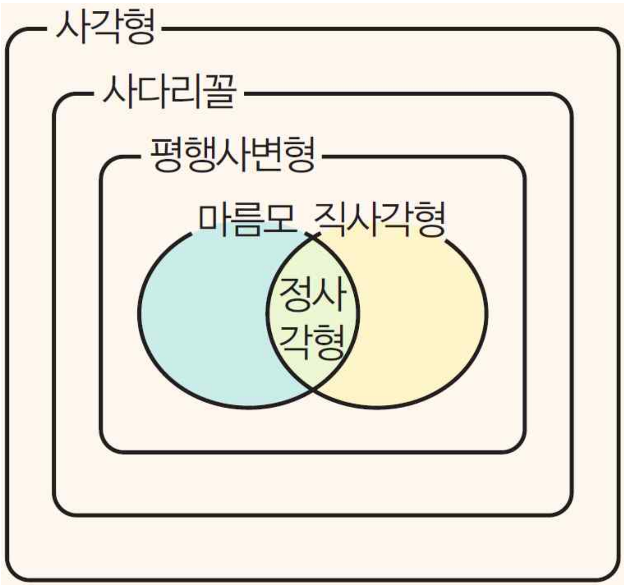


② 부피의 비는 $m^3:n^3$



✡ 사각형의 성질 ❶

(0) 사각형의 분류



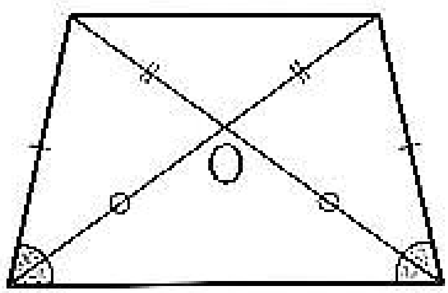
(1) 사다리꼴 : 한 쌍의 대변이 평행한 사각형

(2) 등변사다리꼴

① 두 밑각의 크기가 같은 사다리꼴

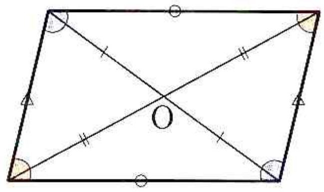
② 두 대각선의 길이가 서로 같다.

③ 평행이 아닌 대변의 길이가 같다.



✡ 사각형의 성질 ❷

(3) 평행사변형 : 두 쌍의 대변이 각각 평행한 사각형

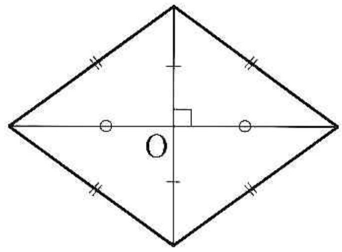


① 두 쌍의 대변의 길이는 서로 같다.

② 두 쌍의 대각의 크기는 서로 같다.

③ 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.

⇔ 두 대각선의 중점이 일치한다.



(4) 마름모 : 네 변의 길이가 같은 사각형

① 두 대각선은 서로 다른 것을 수직 이등분한다.

② 대각선은 내각을 이등분한다.

✡ 사각형의 성질 ❸

(5) 직사각형 : 네 각이 모두 같은 사각형

⇔ 두 대각선의 길이가 서로 같고,
서로 다른 것을 이등분한다.

(6) 정사각형 : 네 변의 길이가 모두 같고,
네 각의 크기가 모두 같은 사각형

✡ 사각형의 성질 ❹

(7) 여러 가지 사각형

① 사각형의 각 변의 중점을 이어서 만든 사각형

⇒ 평행사변형

② 평행사변형의 네 각의 이등분선의 교점을 이어서 만든 사각형 ⇒ 직사각형

③ 직사각형의 각 변의 중점을 이어서 만든 사각형

⇒ 마름모

④ 마름모의 각 변의 중점을 이어서 만든 사각형

⇒ 직사각형

⑤ 정사각형의 각 변의 중점을 이어서 만든 사각형

⇒ 정사각형

✡ 삼각형의 성질 ❶

(1) 삼각형의 기본 성질

① (한 변의 길이) < (다른 두 변의 합)

② (한 외각의 크기) = (이웃하지 않는 두 내각의 합)

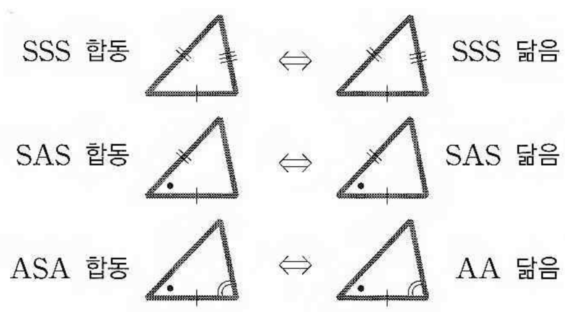
③ 최대의 각 : 길이가 최대인 변의 대각

(2) 삼각형의 닮음조건

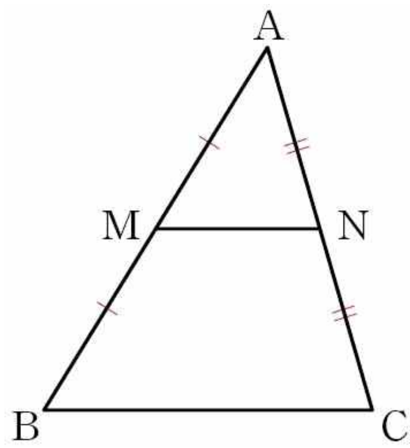
① SSS 닮음 : 세 변의 길이의 비

② SAS 닮음 : 두 변의 길이의 비 & 그 끼인각의 크기

③ AA 닮음 : 두 각의 크기



✡ 삼각형의 성질 ❷



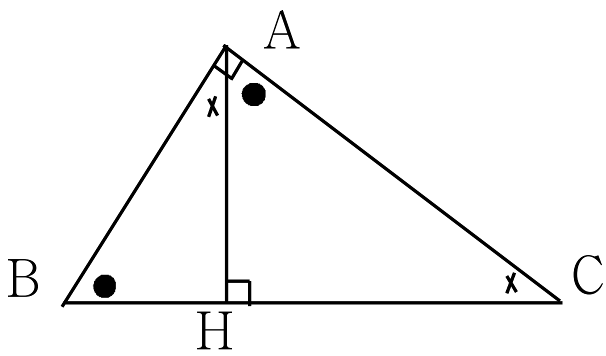
(3) 삼각형의 중점연결 정리 : $\triangle ABC$에서
점 M, N이 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 중점

$\Rightarrow \overline{MN} /\!/ \overline{BC}$, $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$

✡ 삼각형의 성질 ❸

(4) 직각삼각형의 닮음 : $\angle A = 90°$인 직각삼각형 $\triangle ABC$의
꼭짓점 A에서 빗변 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

① $\triangle ABC \backsim \triangle HBA \backsim \triangle HAC$



② $\overline{AB}^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$

$\overline{AC}^2 = \overline{CH} \times \overline{CB}$

$\overline{AH}^2 = \overline{HB} \times \overline{HC}$

$\overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{AH} \times \overline{BC}$

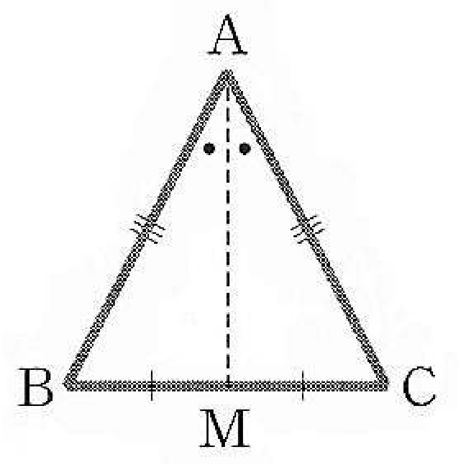
③ $\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BH}^2 - \overline{CH}^2$

✡ 삼각형의 성질 ❹

(5) 이등변삼각형 : $\triangle ABM \equiv \triangle ACM$

① 두 밑각의 크기가 서로 같다.

② 꼭지각의 이등분선이
밑변을 수직 이등분한다.



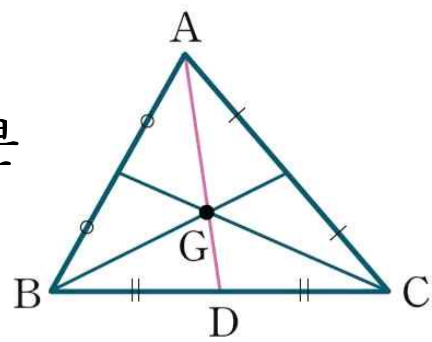
(6) 삼각형의 오심

① 무게중심(G) : 세 중선의 교점

㉠ 중선을 꼭짓점으로부터 2 : 1로 내분

㉡ 중선은 삼각형의 넓이를 2등분

㉢ 세 중선은 삼각형의 넓이를 6등분



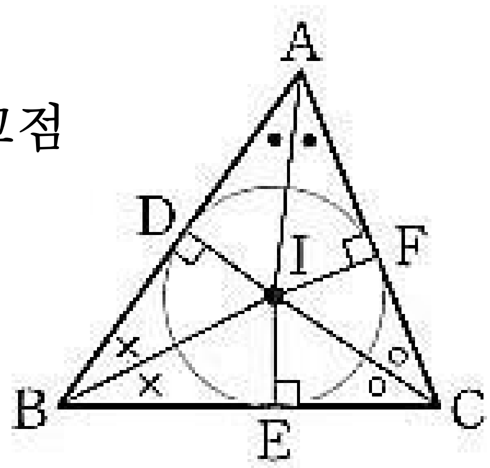
✡ 삼각형의 성질 ❺

② 내심(I) : 세 내각의 이등분선의 교점

㉠ 세 변에 이르는 거리는 같다.

즉, $\overline{ID} = \overline{IE} = \overline{IF}$

㉡ $\triangle ABC = \dfrac{1}{2} r(a+b+c)$

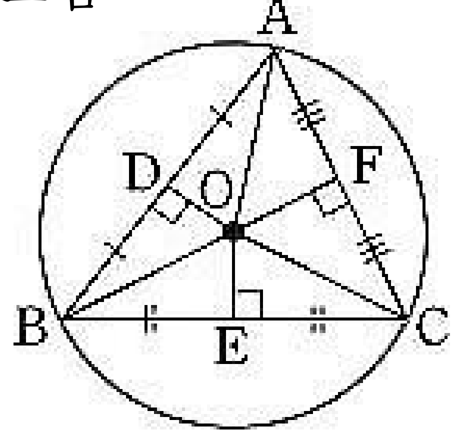


③ 외심(O) : 세 변의 수직이등분선의 교점

㉠ 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

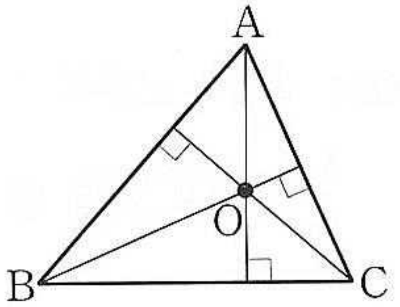
즉, $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$

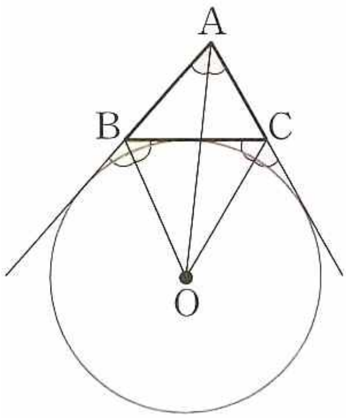
㉡ $\triangle ABC = \dfrac{abc}{4R}$



✡ 삼각형의 성질 ❻

④ 수심 : 각 꼭짓점에서 대변에 내린 수선의 교점





⑤ 방심 : 한 내각과 두 외각의 이등분선의 교점

$\Rightarrow$ 한 삼각형에서 방심은 3개

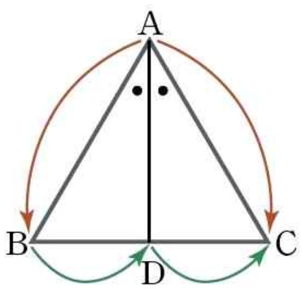
⑥ 임의의 삼각형의 무게중심, 외심, 수심은 한 직선 위에

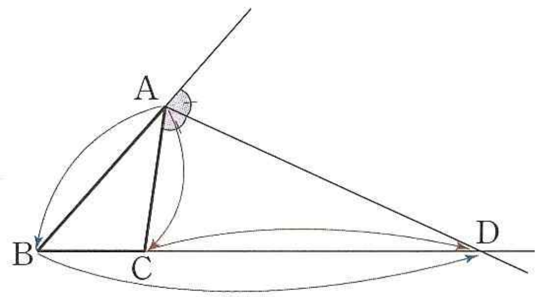
$\Rightarrow$ 이 직선 : 오일러(Euler) 직선

✡ 삼각형의 성질 ❼

(7) 각의 이등분선 : $\triangle ABC$에서

$$\angle BAD = \angle CAD \Rightarrow \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$



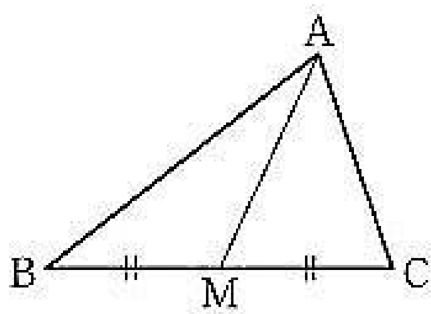


(8) 중선 정리(Pappus의 중선 정리)

$\triangle ABC$에서 $\overline{BM} = \overline{CM}$

$$\Rightarrow \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\left(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2\right)$$

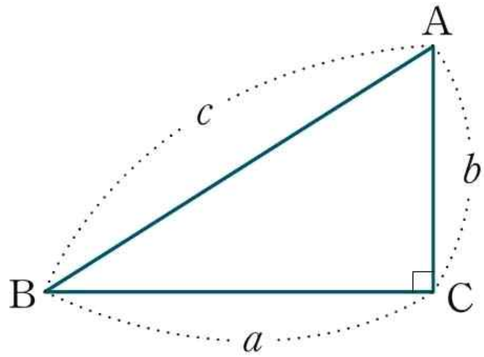
$$= 2\left(\overline{AM}^2 + \overline{CM}^2\right)$$

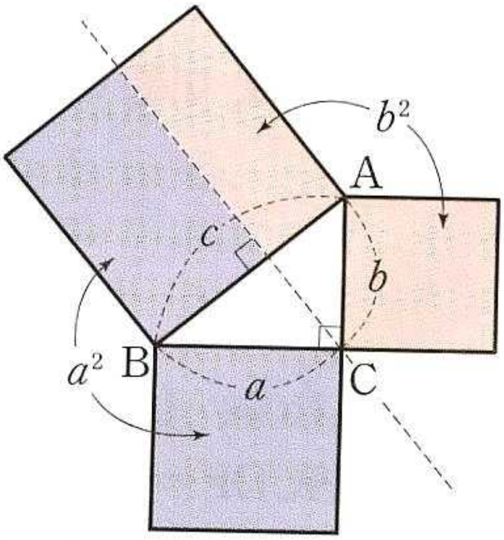


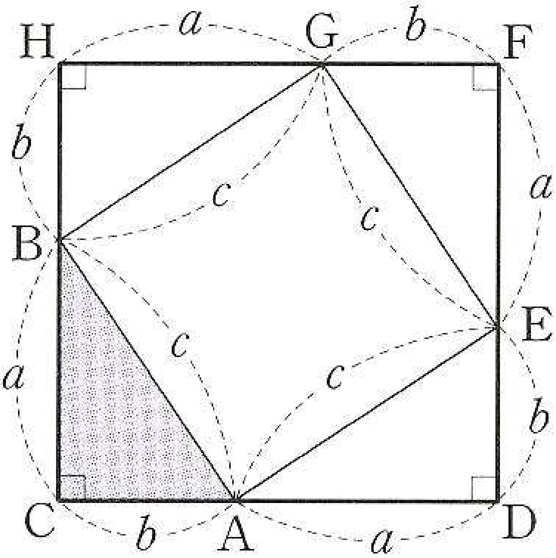
✡ 피타고라스 정리 ❶

(1) 피타고라스 정리 : $\triangle \mathrm{ABC}$에서

$\angle \mathrm{C} = 90°$ $\Leftrightarrow$ $c^2 = a^2 + b^2$







✡ 피타고라스 정리 ❷

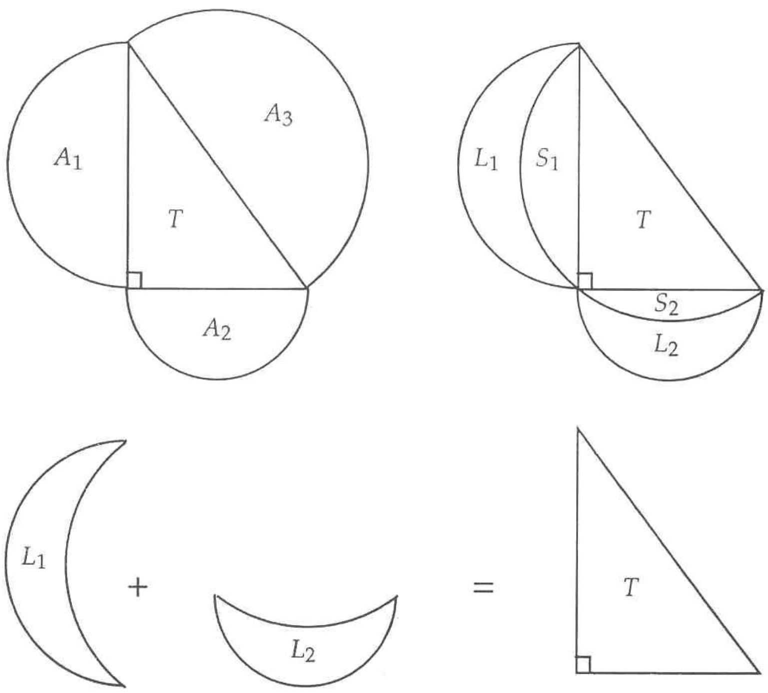
(1) 피타고라스 정리

$A_1 + A_2 = A_3$

$\Rightarrow (L_1 + S_1) + (L_2 + S_2)$

$= T + S_1 + S_2$

$\therefore\ L_1 + L_2 = T$



✡ 피타고라스 정리 ❸

(2) 삼각형의 각의 크기와 변의 길이 사이의 관계 : $\triangle\mathrm{ABC}$에서

① $\angle \mathrm{A} < 90^\circ$ (예각)

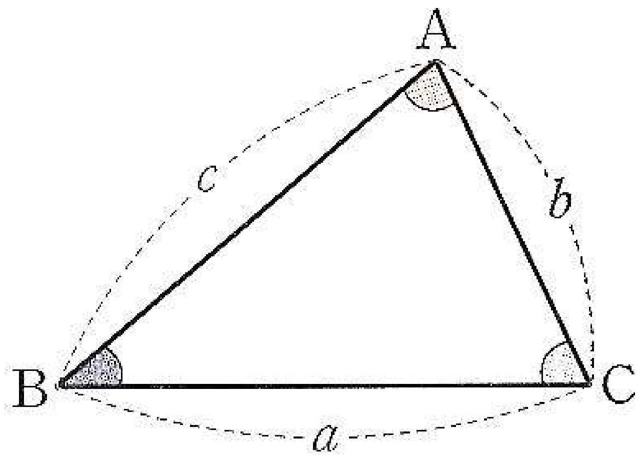
$\Leftrightarrow \quad a^2 < b^2 + c^2$

② $\angle \mathrm{A} = 90^\circ$ (직각)

$\Leftrightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2$

③ $\angle \mathrm{A} > 90^\circ$ (둔각)

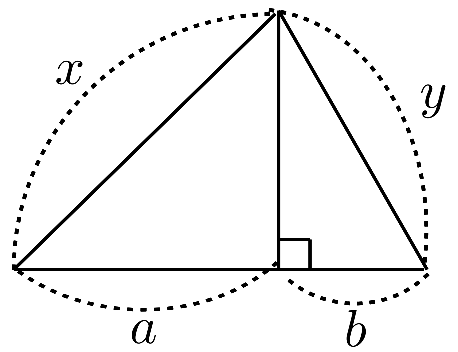
$\Leftrightarrow \quad a^2 > b^2 + c^2$



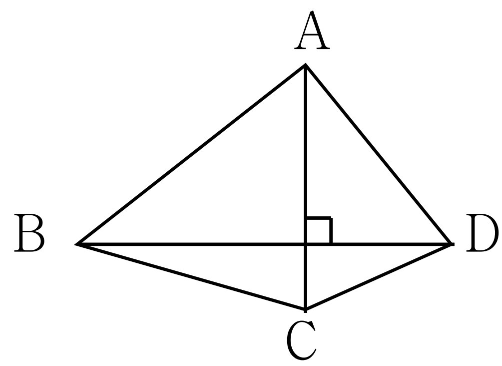
✡ 피타고라스 정리 ❹

(3) 증명문제

① $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$



② $\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{CD}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2 + \overline{\mathrm{DA}}^2$



✡ 피타고라스 정리 ❺

(3) 증명문제

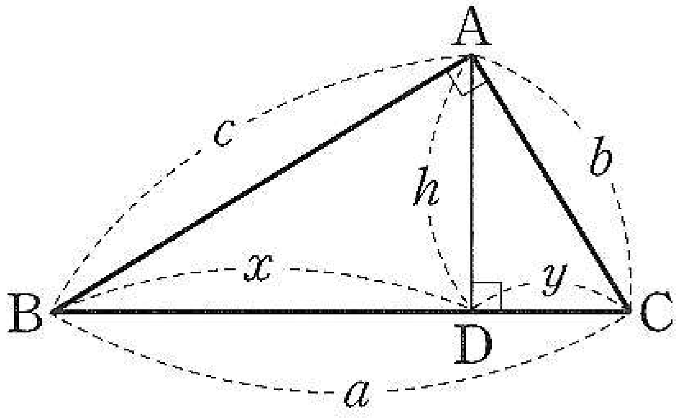
③ ㉠ $a^2 = b^2 + c^2$, $ah = bc$

㉡ $b^2 = y^2 + h^2$, $b^2 = ay$

㉢ $c^2 = x^2 + h^2$, $c^2 = ax$

㉣ $h^2 = xy$

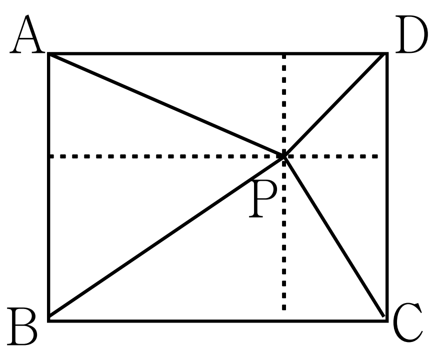
㉤ $c^2 - b^2 = x^2 - y^2$

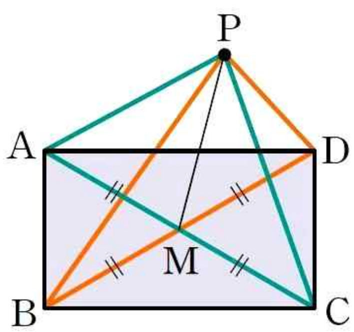


✡ 피타고라스 정리 ❻

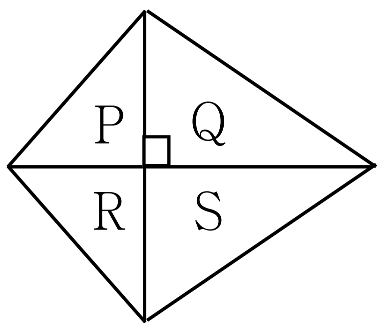
(3) 증명문제

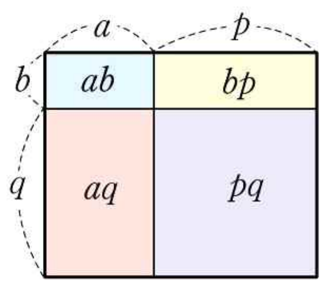
④ $\overline{\mathrm{PA}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PD}}^2$



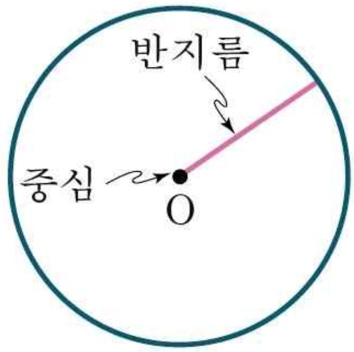


⑤ $\mathrm{PS} = \mathrm{QR}$





✡ 원의 성질 ❶



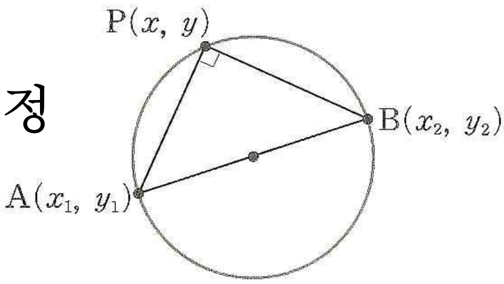
(o) 원의 결정조건

① 한 정점으로부터 거리가 일정한
  평면 위의 점들의 자취

㉠ 중심과 반지름을 중심으로 원을 해석

㉡ 공간에서 위 조건을 만족시키는 점들 ⇒ 구(毬, sphere)

② 평면 위의 두 정점과 이루는 각의 크기가 90°인
  평면 위의 점들의 자취



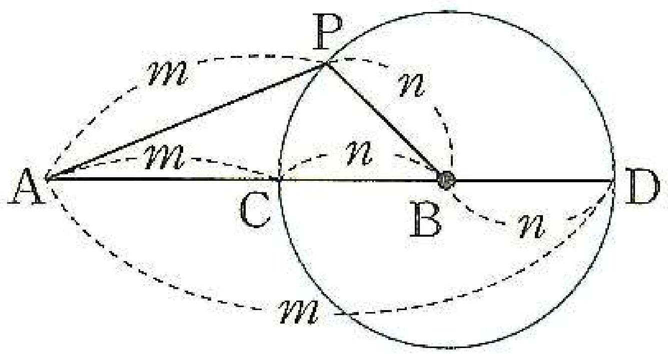
㉠ 지름에 대한 원주각이 90°로 일정

㉡ 두 점 A, B는 지름의 양 끝점

✡ 원의 성질 ❷

(o) 원의 결정조건

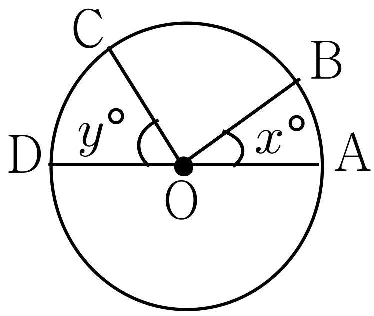
③ 평면 위의 두 정점까지의
  거리의 비가 일정한
  평면 위의 점들의 자취



㉠ 아폴로니우스의 원

㉡ 두 정점을 이은 선분의 내분점과 외분점을
  지름의 양 끝점으로 한다.

✡ 원의 성질 ❸



(1) 중심각과 호 : 부채꼴 OAB, OCD의 중심각의 크기를 각각 $x°$, $y°$라 하고 넓이를 각각 S, T라 하면

$$\Rightarrow \frac{T}{S} = \frac{\overset{\frown}{\mathrm{CD}}}{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}} = \frac{y°}{x°}$$

☑ (부채꼴의 넓이 또는 호의 길이)

∽ (중심각의 크기 또는 원주각의 크기)

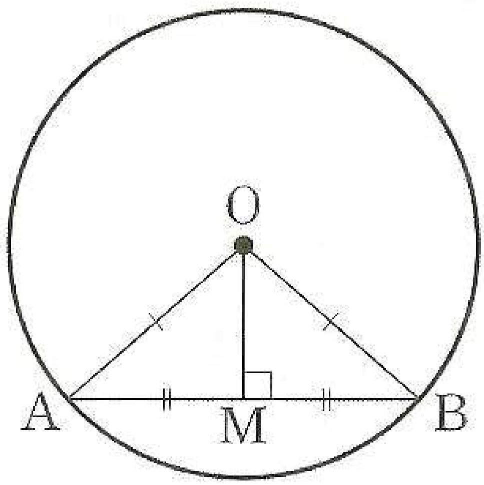
✡ 원의 성질 ❹

(2) 원의 중심과 현

(원의 중심) ≈ (현의 수선) ≈ (현의 이등분)

☑ 이 세 조건 중 두 개가 성립

⇒ 나머지 하나도 성립

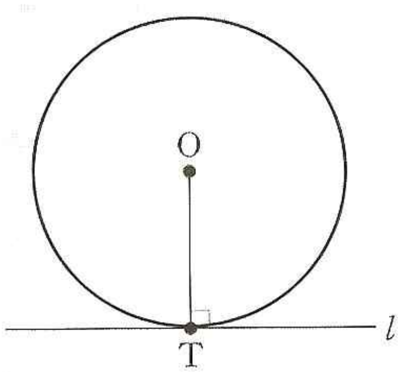


✡ 원의 성질 ❺

(3) 접선의 성질

① (원의 접선) ⊥ (접점을 지나는 반지름)

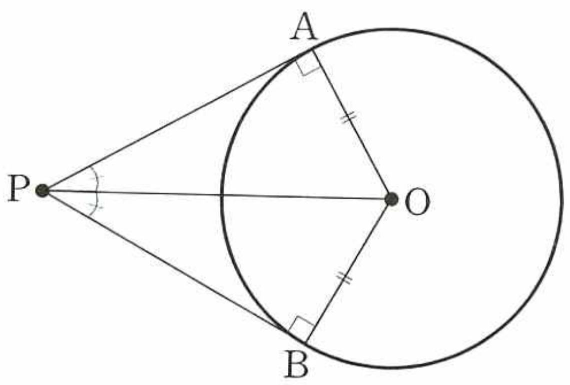
$\Rightarrow \angle \mathrm{PAO} = \angle \mathrm{PBO} = 90°$



② $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$ ($\because$ 접선의 길이)

③ $\triangle \mathrm{POA} \equiv \triangle \mathrm{POB}$

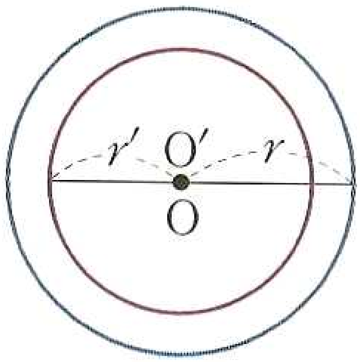
④ $\angle \mathrm{APB} + \angle \mathrm{AOB} = 180°$

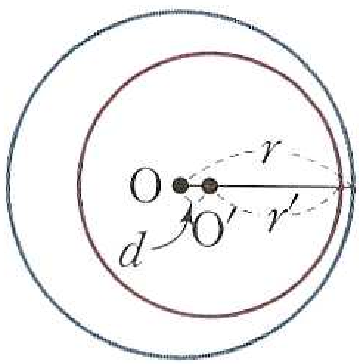


✡ 원의 성질 ❻

(4) 두 원의 위치 관계 : 두 원의 반지름의 길이를 각각 r, r' ($r > r'$), 중심거리를 d라고 하면

⓪ 두 원이 동심원 $\Leftrightarrow d = 0$



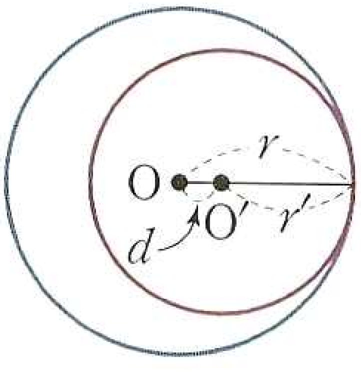


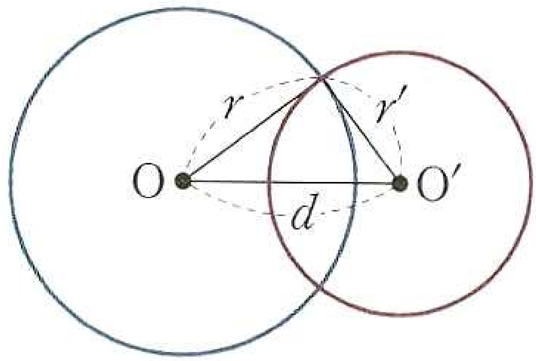
① 한 원이 다른 원의 내부 $\Leftrightarrow d < r - r'$

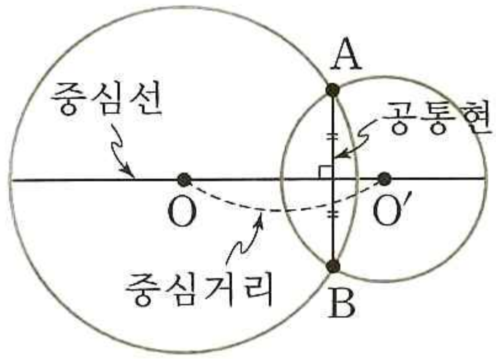
✡ 원의 성질 ❼

(4) 두 원의 위치 관계 : 두 원의 반지름의 길이를 각각 r, r' ($r > r'$), 중심거리를 d 라고 하면

② 두 원이 내접 ⇔ $d = r - r'$





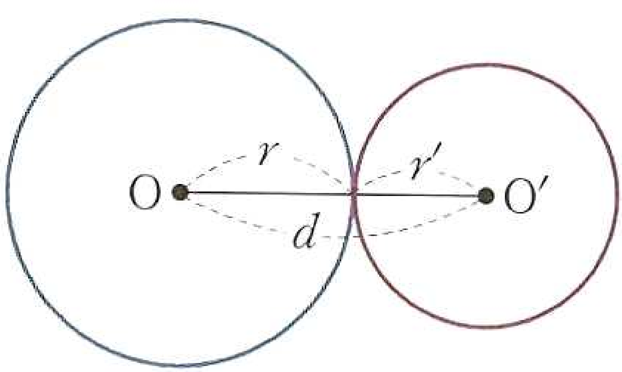


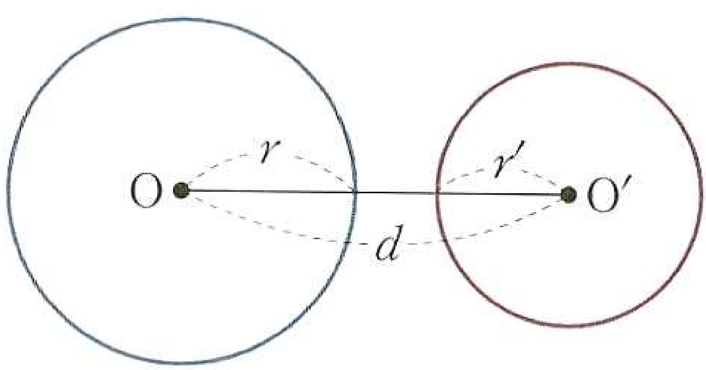
③ 두 원이 두 점에서 만난다. ⇔ $r - r' < d < r + r'$

✡ 원의 성질 ❽

(4) 두 원의 위치 관계 : 두 원의 반지름의 길이를 각각 r, r' ($r > r'$), 중심거리를 d 라고 하면

④ 두 원이 외접 ⇔ $d = r + r'$





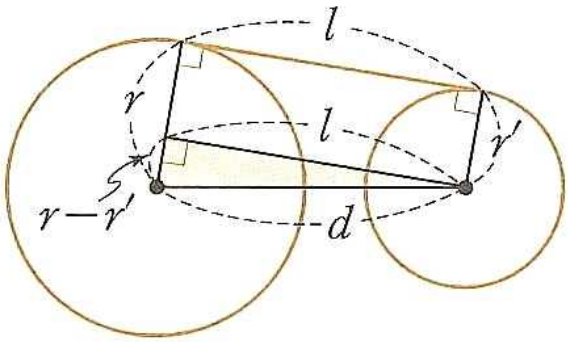
⑤ 한 원이 다른 원의 외부 ⇔ $d > r + r'$

✡ 원의 성질 ❾

(5) 공통접선의 길이 : 한 공통접선에 접하는 두 원의 접점 사이의 길이

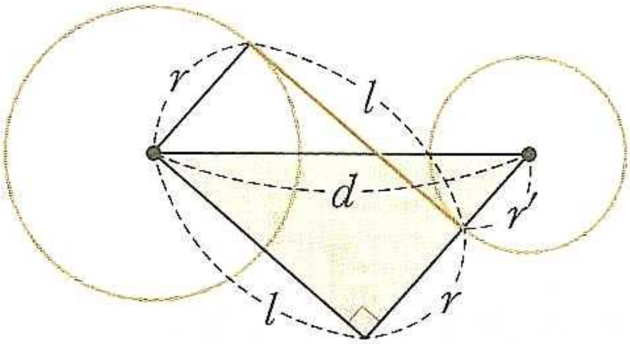
① 공통외접선의 길이

$$l_1 = \sqrt{d^2 - (r - r')^2}$$

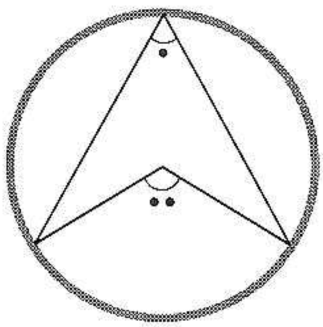


② 공통내접선의 길이

$$l_2 = \sqrt{d^2 - (r + r')^2}$$



✡ 원의 성질 ❿



(6) 원주각에 대한 정리 : 한 원에서

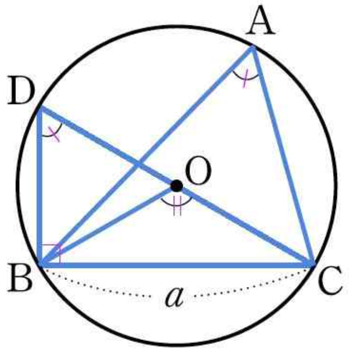
① (호에 대한 원주각의 크기)

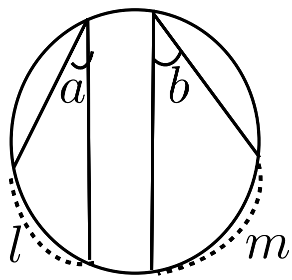
$$= \frac{1}{2} \times (\text{그 호에 대한 중심각의 크기})$$

② 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다

③ (반원에 대한 원주각의 크기) $= 90°$

④ (원주각의 크기) $\propto$ (그에 대한 호의 길이)





$\Leftrightarrow a : b = l : m$

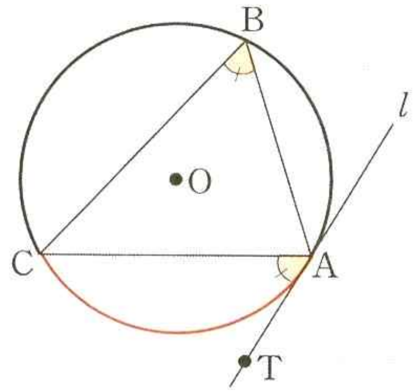
✡ 원의 성질 ⓫

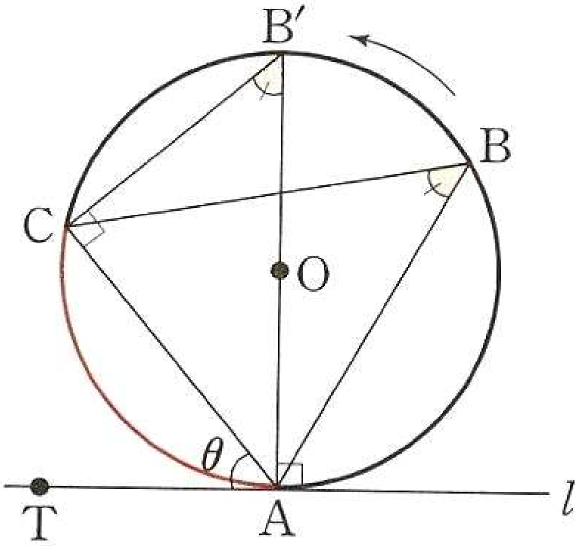
(7) 접선과 현이 이루는 각

(접선과 현이 이루는 각의 크기)

= (그 현에 대한 원주각의 크기)

즉, $\angle CAT = \angle B$





✡ 원의 성질 ⓬

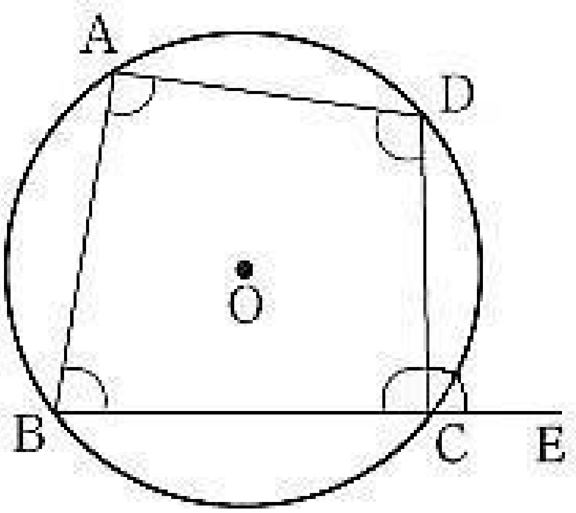
(8) 사각형 □ABCD가 원에 내접하는 조건

① $\angle A + \angle C = 180°$

또는 $\angle B + \angle D = 180°$

② $\angle DCE = \angle A$

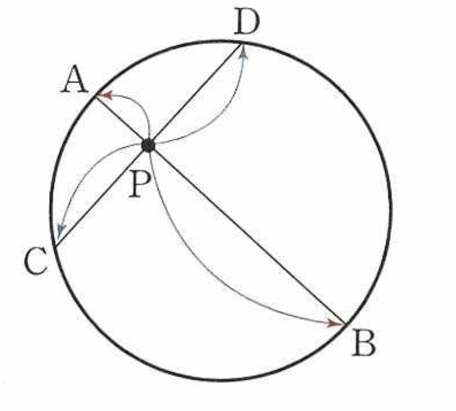
③ $\angle BAC = \angle BDC$ (원주각)

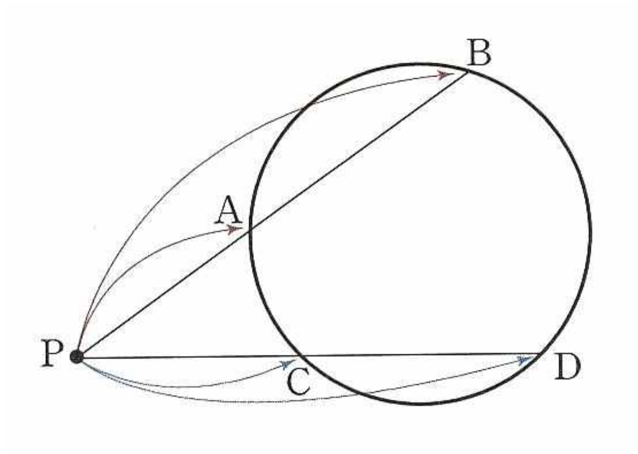


✡ 원의 성질 ⑬

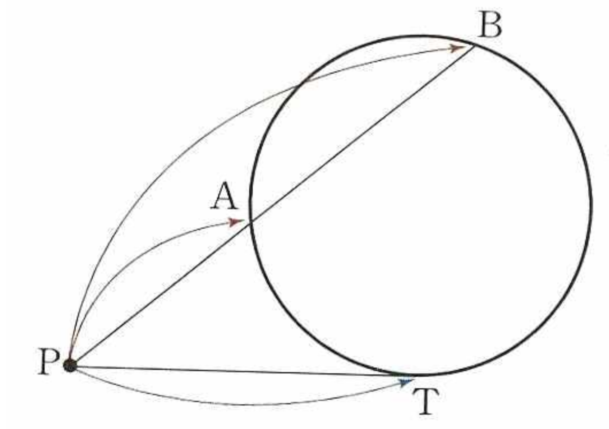
(9) 원에서의 비례 관계

① $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$





② $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB}$



✡ 원의 성질 ⑭

(10) □ABCD가 원에 내접하기 위한 조건

① $\angle ACB = \angle ADB$ (원주각)

② (한 쌍의 대각의 크기의 합) $= 180°$

③ (한 외각의 크기) $=$ (그 내대각의 크기)

④ $\overline{AC}$, $\overline{BD}$가 점 P에서 만나고, $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$

⑤ $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 연장선이 점 P에서 만나고,

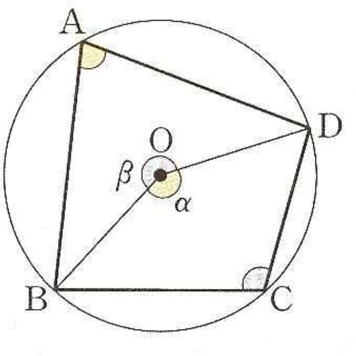
$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$

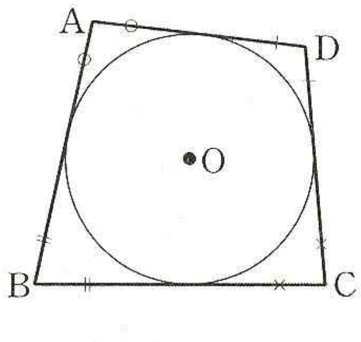
✡ 원의 성질 ⓯

⑾ 원에 내접 또는 외접하는 사각형

① 원에 내접하는 사각형 ⇔ 대각의 크기의 합이 $180°$

즉, $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$





② 원에 외접하는 사각형 ⇨ 대변의 길이의 합이 일정

✡ 원의 성질 ⓰

⑿ 직선 l이 접선이 되는 조건

① 직선 l이 원주 위의 한 점을 지나고

그 점을 지나는 반지름에 수직일 때

② 현과 직선 l이 이루는 각의 크기가

원주각의 크기와 같을 때

③ 직선 위에 세 점 P, A, B가 있고

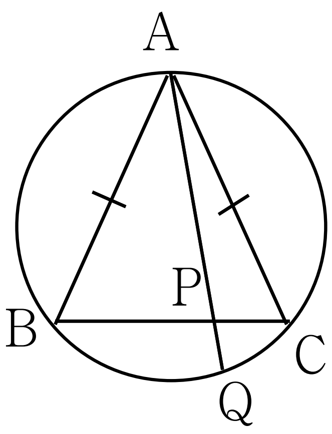
이 직선밖에 점 T가 있을 때,

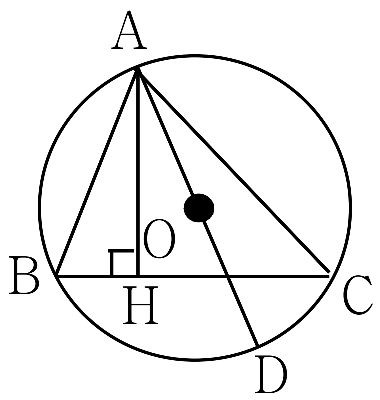
$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB}$ ⇔ 직선 PT는 원의 '접선'

✡ 원의 성질 ⓱

⒀ 여러 가지 비례 관계

① $\overline{AP} \times \overline{AQ} = \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2$



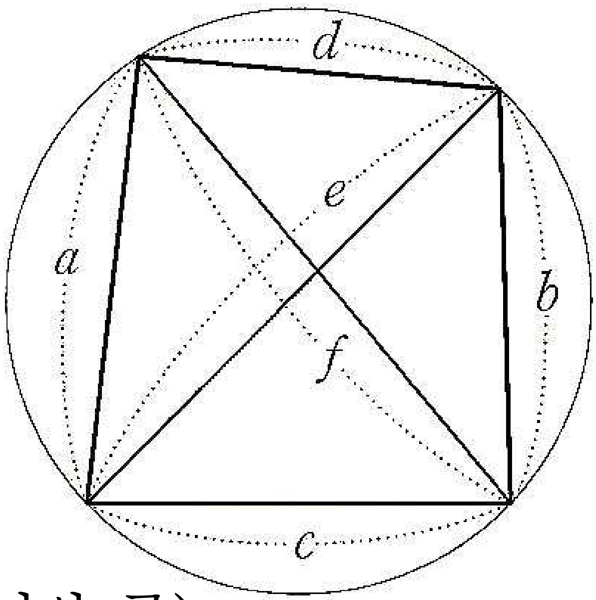


② $\overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{AD} \times \overline{AH}$

✡ 원의 성질 ⓲

⒁ 톨레미의 정리 : 원에 내접하는 사각형에서 두 쌍의 대변의 길이를 곱하여 더한 값은 두 대각선의 길이의 곱과 같다.

$$ab + cd = ef$$



☑ 내접사각형의 (두 대각선 길이의 곱)

= (두 쌍의 대변 길이의 곱의 합)

✡ 최적화 문제 ❶

(1) 도형의 정의를 이용

① 삼각형의 각 꼭짓점까지 거리의 제곱의 합이
최소가 되는 점 ⇔ 삼각형의 무게중심

② 사각형의 각 꼭짓점까지 거리의 합이
최소가 되는 점 ⇔ 사각형의 대각선의 교점

✡ 최적화 문제 ❷

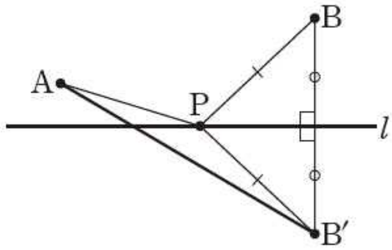
(2) 대칭점을 이용하여 점의 좌표 구하기

직선 l 위의 동점 P와 같은 쪽에 있는 두 정점 A, B에 대하여

① $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$가 최소인 점 P

⇒ ㉠ B를 l에 대칭이동시킨 점 B′

㉡ 선분 $\overline{\mathrm{AB'}}$와 l의 교점이 P



② $|\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{PB}}|$가 최대인 점 P

⇒ $\overline{\mathrm{AB}}$의 연장선과 l의 교점이 P

③ $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$이 최소인 점 P

⇒ ㉠ $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점 M, ㉡ $\overline{\mathrm{MP}}\perp l$인 점 P

✡ 최적화 문제 ❸

(3) 함수의 성질을 이용하여 최솟값 구하기

① $f(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3|$

$\Rightarrow x = a_2$에서 최소 (단, $a_1 \le a_2 \le a_3$)

② $f(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| + |x - a_4|$

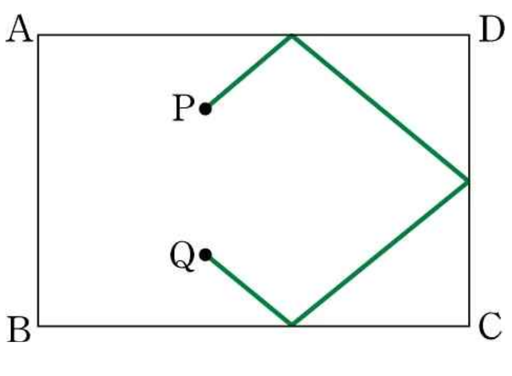
$\Rightarrow a_2 \le x \le a_3$에서 최소

(단, $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4$)

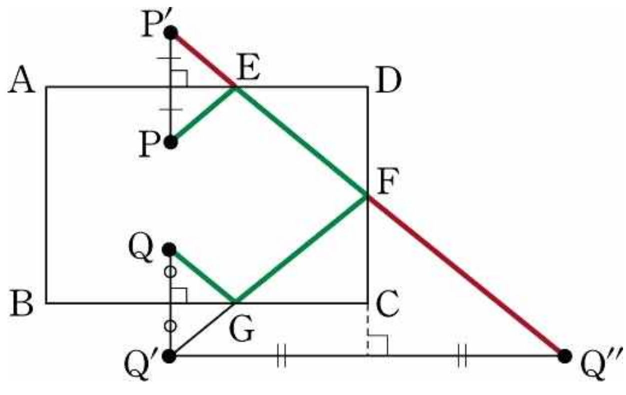
✡ 최적화 문제 ❹

(4) 전개도의 활용 : 입체도형은 전개도를 그려서 생각

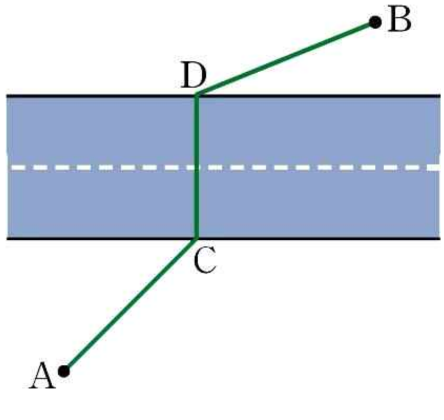
①



$\Rightarrow$



②



$\Rightarrow$