Ⅱ_2. 벡터의 내적

[12기하02-04] 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고,
이를 구할 수 있다.
[12기하02-05] 좌표평면에서 벡터를 이용하여
직선과 원의 방정식을 구할 수 있다.

1 벡터의 내적 ❶

(1) 두 벡터가 이루는 각의 크기

영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여
$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$일 때,

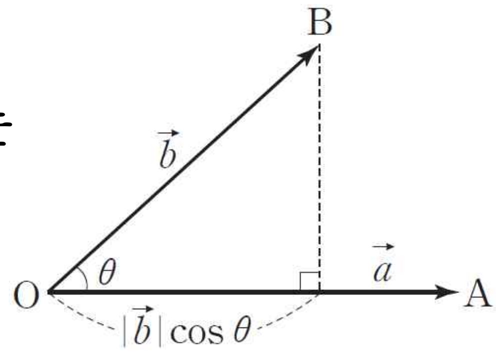
$$\angle\mathrm{AOB}=\theta\ \ (0\le\theta\le\pi)$$

를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 '각의 크기'라 한다.

(2) 벡터의 내적

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는
각의 크기가 θ일 때,

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$



를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 '내적'이라 하고, 이것을 기호로 $\vec{a}\cdot\vec{b}$

1 벡터의 내적 ❷

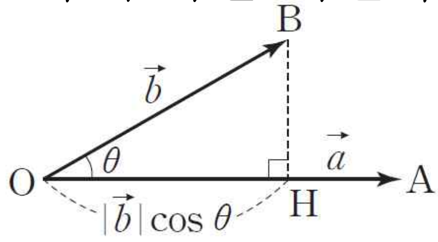
와 같이 나타낸다.

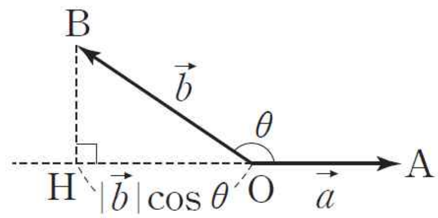
한편, $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{a}=\vec{0}$일 때에는 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$으로 정의한다.

☑ 벡터의 내적의 기하학적 의미

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때, 점 B를 지나고 직선 OA에 수직인 직선과 직선 OA의 교점을 H라 하면

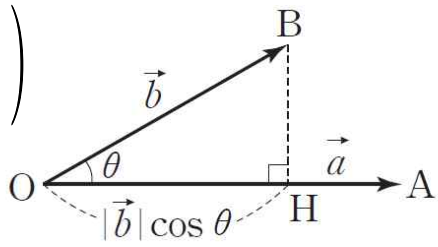
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$
$$=\overline{\mathrm{OA}}\times(\overline{\mathrm{OB}}\cos\theta)$$

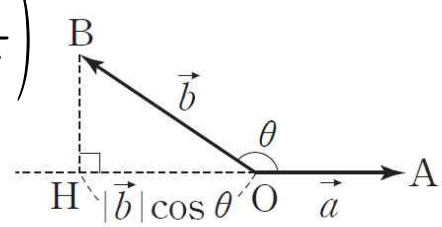




1 벡터의 내적 ❸

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{cases}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OH}}| & \left(0\le\theta<\frac{\pi}{2}\right)\\ 0 & \left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)\\ -|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OH}}| & \left(\frac{\pi}{2}<\theta\le\pi\right)\end{cases}$$





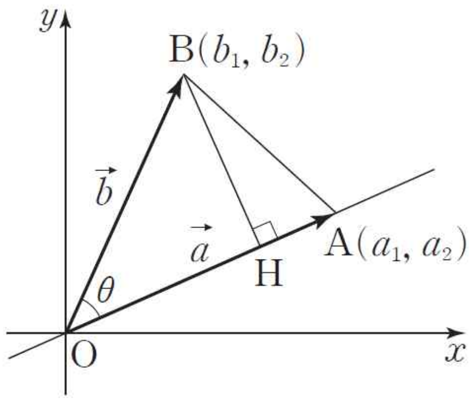
(3) 벡터의 성분과 내적

두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$에 대하여

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

1 벡터의 내적 ❹

☑ 좌표평면에서 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$가 이루는 각의 크기가 θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$일 때,



두 점 A, B를 각각 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$ $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$라 하자. 점 B에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 BHA에서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}^2&=\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{BH}}^2\\&=\left(\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OH}}\right)^2+\left(\overline{\mathrm{OB}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2\right)\\&=\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2-2\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OH}}\end{aligned}$$

1 벡터의 내적 ❺

$$\begin{aligned}&=\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2-2\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\cos\theta\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\end{aligned}$$

이므로

$$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2$$
$$=\left({a_1}^2+{a_2}^2\right)+\left({b_1}^2+{b_2}^2\right)-2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

이를 정리하면

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

이 식은 $\theta=0$, $\frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi$일 때에도 성립하고,

$\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$일 때에도 성립한다.

1 벡터의 내적 ❻

☑ 삼각형 OAB에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{OA}}^2 + \overline{\mathrm{OB}}^2 - 2 \times \overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{OB}} \cos\theta$$

가 성립함을 이용하여 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$임을 보일 수도 있다.

2 벡터의 내적의 성질 ❶

(1) 벡터의 내적의 성질

세 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 실수 k에 대하여

① $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (교환법칙)

② $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (분배법칙)

③ $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (단, k는 실수)

(2) 벡터의 크기와 내적

① $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

② $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2$

③ $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2$

2 벡터의 내적의 성질 ❷

☑ ① 벡터 $\vec{a}$와 벡터 $\vec{a}$가 이루는 각의 크기는 0이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2$$

② $$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}+\vec{b})$$
$$= (\vec{a} \cdot \vec{a}) + (\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{b} \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \vec{b})$$
$$= |\vec{a}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2$$

③ $$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = (\vec{a}-\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b})$$
$$= (\vec{a} \cdot \vec{a}) - (\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{b} \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \vec{b})$$
$$= |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2$$

3 두 평면벡터가 이루는 각의 크기

(1) 두 벡터가 이루는 각의 크기

영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ $(0 \le \theta \le \pi)$라 하면

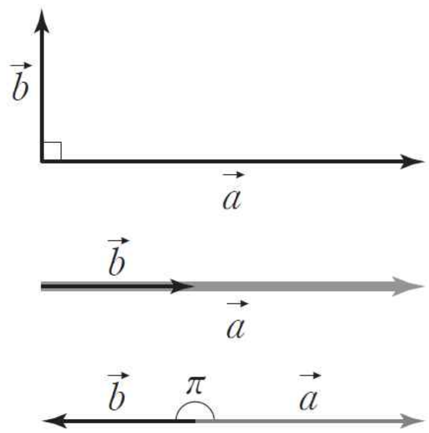
$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{(\text{내적})}{(\text{크기})}$$

(2) 벡터의 성분과 두 벡터가 이루는 각의 크기

좌표평면 위의 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$가 이루는 각의 크기를 θ $(0 \le \theta \le \pi)$라 하면

$$\cos\theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}\sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2}}$$

4 두 평면벡터의 평행과 수직 ❶



영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$일 때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 '수직'이라 하고, 기호로 $\vec{a} \perp \vec{b}$와 같이 나타낸다.

한편, 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하면 두 벡터가 이루는 각의 크기 θ는 0 또는 π이다.

4 두 평면벡터의 평행과 수직 ❷

(1) 두 평면벡터의 평행과 수직

영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

① $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

② $\vec{a} /\!/ \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}||\vec{b}|$

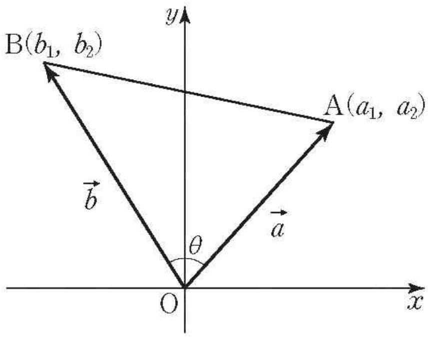
(2) 벡터의 성분과 두 벡터의 평행과 수직

좌표평면 위의 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$에 대하여

① $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$

② $\vec{a} /\!/ \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \pm \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2} \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2}$

✡ 평면벡터의 내적과 삼각형의 넓이 ❶



세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 AOB의 넓이 S를 구해 보자.

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\angle(\vec{a},\ \vec{b})=\theta$라 하면

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

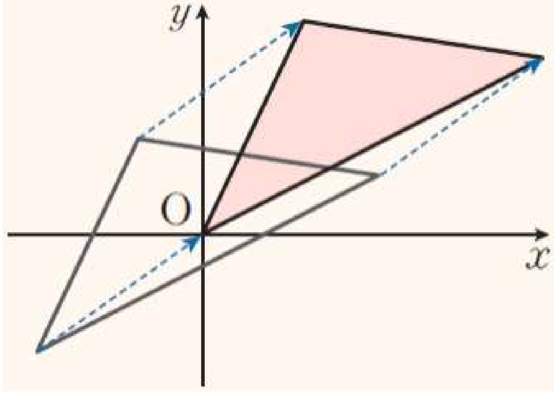
✡ 평면벡터의 내적과 삼각형의 넓이 ❷

$$=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\times\frac{\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

☑ (삼각형의 넓이) $=\dfrac{1}{2}\sqrt{(\text{크기})^2-(\text{내적})^2}$

☑ 세 꼭짓점 중에서 어느 것도 원점이 아닌 삼각형의 넓이는, 오른쪽 그림과 같이 예각을 갖는 한 꼭짓점이 원점 O에 오도록 평행이동하여 구할 수 있다.



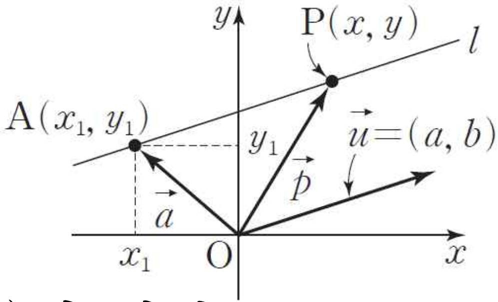
$\boxed{5}$ 벡터를 이용한 직선의 방정식 ❶

(1) 방향벡터가 주어진 직선의 방정식

직선 l이 벡터 $\vec{u}$에 평행할 때, 벡터 $\vec{u}$를 직선 l의 '방향벡터'라 한다. 점 A를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}$인 직선 l 위의 임의의 점을 P라 하면 직선 l의 방정식은 다음과 같다.

① $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$라 하면

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u} \quad (\text{단, } t\text{는 실수})$$



② 두 점 A, P의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x, y)라 하고 $\vec{u}=(a, b)$라 하면

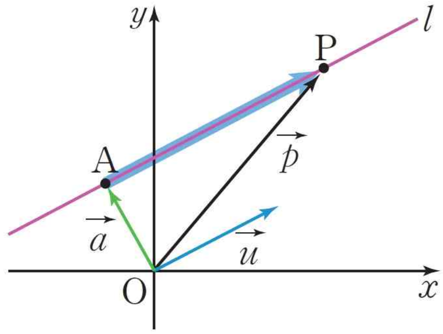
$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b} \quad (\text{단, } ab\neq 0)$$

☑ (분모) $=0$
$\Rightarrow$ (분자) $=0$

$\boxed{5}$ 벡터를 이용한 직선의 방정식 ❷

$\boxed{\text{예}}$ 점 $(1, -2)$를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(2, 3)$인 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}$$

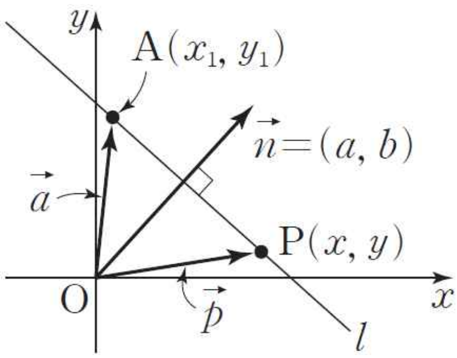


(2) 법선벡터가 주어진 직선의 방정식

직선 l이 벡터 $\vec{n}$에 수직일 때, 벡터 $\vec{n}$을 직선 l의 '법선벡터'라 한다.

점 A를 지나고 법선벡터가 $\vec{n}$인 직선 l 위의 임의의 점을 P라 하면 직선 l의 방정식은 다음과 같다.

5 벡터를 이용한 직선의 방정식 ❸



① $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$라 하면

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$$

② 두 점 A, P의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x, y)라 하고 $\vec{n} = (a, b)$ 라 하면

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

A(x_1, y_1)

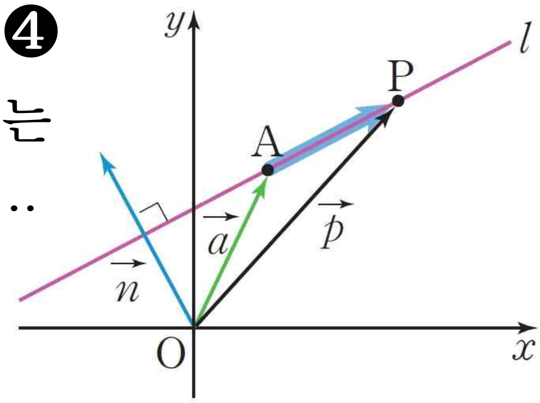
$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$

$\vec{n}=(a, b)$

예 점 $(1, -2)$를 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = (2, 3)$인 직선의 방정식은

$$2(x - 1)3(y + 2) = 0, \text{ 즉 } 2x + 3y + 4 = 0$$

5 벡터를 이용한 직선의 방정식 ❹



☑ 직선 $2x + 3y + 4 = 0$의 법선벡터는

$(2, 3)$, $(-2, -3)$, $(4, 6)$, $\cdots$

과 같이 무수히 많이 존재한다.

(3) 두 직선이 이루는 각의 크기

두 직선 l_1, l_2의 방향벡터를 각각 $\overrightarrow{u_1} = (a_1, b_1)$, $\overrightarrow{u_2} = (a_2, b_2)$라 할 때, 두 직선 l_1, l_2가 이루는 각의 크기를 θ $\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2}\sqrt{{a_2}^2 + {b_2}^2}}$$

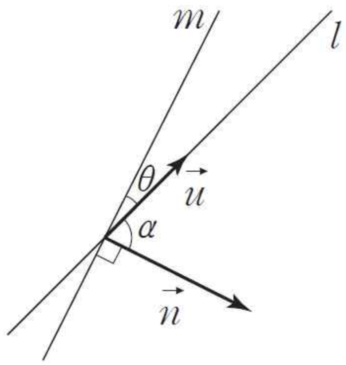
5 벡터를 이용한 직선의 방정식 ❺

☑ ① 두 직선의 방향벡터가 서로 평행하면 두 직선도 서로 평행하고, 두 직선의 방향벡터가 서로 수직이면 두 직선도 서로 수직이다.

② 두 직선의 법선벡터가 서로 평행하면 두 직선도 서로 평행하고, 두 직선의 법선벡터가 서로 수직이면 두 직선도 서로 수직이다.

③ 직선 l의 방향벡터와 직선 m의 법선벡터가 서로 평행하면 두 직선 l, m은 서로 수직이고, 직선 l의 방향벡터와 직선 m의 법선벡터가 서로 수직이면 서로 다른 두 직선 l, m은 서로 평행하다.

5 벡터를 이용한 직선의 방정식 ❻



☑ 좌표평면에서 직선 l의 방향벡터는 $\vec{u}=(a_1,\ b_1)$이고, 직선 m의 법선벡터는 $\vec{n}=(a_2,\ b_2)$라 할 때, 두 직선 l, m이 이루는 각의 크기를 θ $\left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\theta \Rightarrow \cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

이므로

$$\sin\theta=\frac{\left|\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|\left|\overrightarrow{u_2}\right|}=\frac{\left|a_1a_2+b_1b_2\right|}{\sqrt{{a_1}^2+{b_1}^2}\sqrt{{a_2}^2+{b_2}^2}}$$

✡ **직선 $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}$ 위에 내린 수선의 발**

(1) $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}\overset{\text{def}}{=}t$

(2) $(x,\ y)=(x_1+at,\ y_1+bt)$

(3) Let 점 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0)$에서 직선에 내린 수선의 발 H

① $\mathrm{H}(x_1+at,\ y_1+bt)$

② $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\vec{u}$: $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{u}=0$

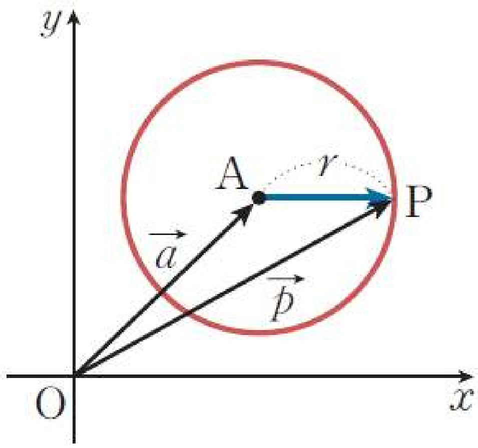
$\boxed{6}$ 벡터를 이용한 원의 방정식 ❶

평면에서 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 C 위의 임의의 점을 P라 하면 원 C의 방정식은 다음과 같다.

(1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$라 하면

$$|\vec{p}-\vec{a}|=r$$

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=r^2$$



(2) 두 점 A, P의 좌표를 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x,\ y)$라 하면

$$(x-x_1,\ y-y_1)\cdot(x-x_1,\ y-y_1)=r^2$$

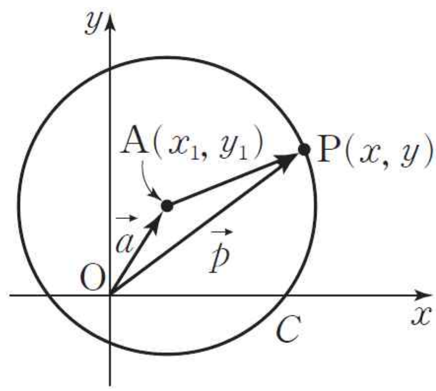
☑ (1) A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 위의 한 점을 P라 하면 선분 AP의 길이는 r로 일정하므로

6 벡터를 이용한 원의 방정식 ❷

$$\left|\overrightarrow{AP}\right| = r \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$이므로

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \vec{p} - \vec{a}$$



따라서 ㉠에서

$$\left|\vec{p} - \vec{a}\right| = r$$

이므로 양변을 제곱하면

$$\left|\vec{p} - \vec{a}\right|^2 = (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = r^2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

(2) 두 점 A, P의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x, y)이므로

$$\vec{p} - \vec{a} = (x - x_1, y - y_1)$$

이때 ㉡에서

6 벡터를 이용한 원의 방정식 ❸

$$(x - x_1, y - y_1) \cdot (x - x_1, y - y_1) = r^2 \cdots\cdots ㉢$$

이므로

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$$

따라서 ㉢은 중심이 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식을 나타낸다.

예 점 A$(1, -2)$와 점 P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라 하자.

① $\left|\vec{p} - \vec{a}\right| = 2$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 A$(1, -2)$이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

② $(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 9$, 즉 $\left|\vec{p} - \vec{a}\right|^2 = 9$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 A$(1, -2)$이고

6 벡터를 이용한 원의 방정식 ❹

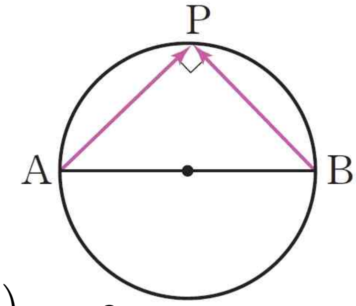
반지름의 길이가 3인 원이다.

☑ ① 임의의 벡터 $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$에 대하여

$\vec{p}\cdot\vec{p}=|\vec{p}||\vec{p}|\cos 0=|\vec{p}|^2$이므로

$$\vec{p}\cdot\vec{p}=r^2 \Leftrightarrow |\vec{p}|=\overline{\mathrm{OP}}=r \ (\text{단, } r>0)$$

따라서 $\vec{p}\cdot\vec{p}=r^2$은 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식이다.



② 세 점 A, B, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$라 할 때,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0,\ \text{즉 } (\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$$

이면 점 P는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이다.