01 지수와 로그

유제
본문 5~15쪽

1 ③ 2 ④ 3 ③ 4 6 5 ⑤
6 ④ 7 ④ 8 ① 9 ③ 10 ②
11 ③ 12 ⑤

Level 1 기초 연습
본문 16~17쪽

1 ⑤ 2 ② 3 ② 4 ③ 5 ⑤
6 3 7 ④ 8 ③ 9 ② 10 ①

Level 2 기본 연습
본문 18~19쪽

1 ③ 2 ② 3 ② 4 ④ 5 ④
6 ④ 7 ② 8 500

Level 3 실력 완성
본문 20쪽

1 ③ 2 11 3 6 4 8

02 지수함수와 로그함수

유제
본문 23~31쪽

1 ③ 2 34 3 ③ 4 ① 5 29
6 ② 7 8 8 ② 9 ② 10 5

Level 1 기초 연습
본문 32~33쪽

1 ③ 2 ① 3 ③ 4 ② 5 ①
6 ② 7 48 8 20

Level 2 기본 연습
본문 34쪽

1 16 2 ⑤ 3 ④ 4 ③

Level 3 실력 완성
본문 35쪽

1 ② 2 ⑤ 3 33

03 삼각함수의 뜻과 그래프

유제
본문 39~47쪽

1 ① 2 10 3 ② 4 ② 5 ③
6 8 7 ① 8 ⑤ 9 ② 10 ③

Level 1 기초 연습
본문 48~49쪽

1 ① 2 ⑤ 3 ③ 4 ④ 5 ②
6 ③ 7 ④ 8 ③ 9 ②

Level 2 기본 연습
본문 50~52쪽

1 ③	2 ④	3 ④	4 ②	5 ②
6 ②	7 ③	8 ①	9 ⑤	10 8
11 ⑤	12 ⑤			

Level 3 실력 완성
본문 53쪽

1 8	2 ④	3 ⑤	4 26

04 사인법칙과 코사인법칙

유제
본문 57~63쪽

1 ③	2 12	3 ⑤	4 ③	5 ⑤
6 ③	7 ②	8 8		

Level 1 기초 연습
본문 64~65쪽

1 ⑤	2 ①	3 ⑤	4 3	5 ②
6 ③	7 ④	8 61		

Level 2 기본 연습
본문 66~67쪽

1 32	2 ④	3 ④	4 103	5 ⑤
6 8	7 ⑤	8 ③		

Level 3 실력 완성
본문 68쪽

1 305	2 8	3 ①

05 등차수열과 등비수열

유제
본문 73~79쪽

1 ①	2 54	3 ②	4 4	5 ③
6 8	7 143	8 ⑤		

Level 1 기초 연습
본문 80~81쪽

1 ⑤	2 ③	3 ⑤	4 ②	5 120
6 ③	7 ①	8 ②	9 ④	10 126

Level 2 기본 연습
본문 82~84쪽

1 ④	2 ⑤	3 ①	4 ⑤	5 ④
6 20	7 ②	8 ⑤	9 ③	10 ④
11 ③	12 ④	13 325	14 ④	15 ③

Level 3 실력 완성
본문 85쪽

1 ②	2 ①	3 3

06 수열의 합

유제 본문 89~95쪽

1 130　2 ②　3 825　4 ③　5 ④
6 76　7 ②　8 ③

Level 1 기초 연습 본문 96~97쪽

1 ⑤　2 ③　3 ②　4 ②　5 ①
6 ①　7 ④　8 ④　9 22　10 ②

Level 2 기본 연습 본문 98쪽

1 ②　2 ②　3 ③　4 15

Level 3 실력 완성 본문 99쪽

1 380　2 51　3 ④

07 수학적 귀납법

유제 본문 103~107쪽

1 ①　2 ⑤　3 24　4 ②　5 ④

Level 1 기초 연습 본문 108쪽

1 ③　2 12　3 ④　4 ③

Level 2 기본 연습 본문 109쪽

1 ②　2 21　3 63　4 ④

Level 3 실력 완성 본문 110쪽

1 ④　2 136　3 ④

01 지수와 로그

유제

본문 5~15쪽

1 ③	2 ④	3 ③	4 6	5 ⑤
6 ④	7 ④	8 ①	9 ③	10 ②
11 ③	12 ⑤			

1 $\sqrt[3]{-8}$은 방정식 $x^3=-8$의 근 중에서 실수인 근이므로

$\sqrt[3]{-8}=-2$

또 $\sqrt[4]{(-4)^2}=\sqrt[4]{2^4}$이고, 이는 방정식 $x^4=2^4$의 근 중에서 양의 실수인 근이므로

$\sqrt[4]{(-4)^2}=2$

따라서

$$\sqrt[3]{-8}+\sqrt[4]{(-4)^2}=-2+2=0$$

답 ③

2 $\sqrt[6]{6}\div\sqrt{\sqrt[3]{3}}\times(\sqrt[6]{2})^5$

$$=\frac{\sqrt[6]{2\times3}}{\sqrt[2\times3]{3}}\times\sqrt[6]{2^5}$$

$$=\frac{\sqrt[6]{2\times3}}{\sqrt[6]{3}}\times\sqrt[6]{2^5}$$

$$=\sqrt[6]{\frac{2\times3}{3}}\times\sqrt[6]{2^5}$$

$$=\sqrt[6]{2}\times\sqrt[6]{2^5}$$

$$=\sqrt[6]{2\times2^5}$$

$$=\sqrt[6]{2^6}$$

$$=2$$

답 ④

3 $5^{-4}\times\left(\frac{1}{25}\right)^{-5}\div\frac{1}{125^{-2}}$

$$=5^{-4}\times\left(\frac{1}{5^2}\right)^{-5}\div\frac{1}{(5^3)^{-2}}$$

$$=5^{-4}\times(5^{-2})^{-5}\div(5^{-6})^{-1}$$

$$=5^{-4}\times5^{10}\div5^6$$

$$=5^{-4+10-6}$$

$$=1$$

답 ③

4 $(24\times n^{-3})^{-1}=24^{-1}\times n^3$

$$=\frac{n^3}{24}$$

$$=\frac{n^3}{2^3\times3}$$

그러므로 이 수가 자연수가 되려면 n이 2와 3을 약수로 가져야 한다.

따라서 자연수 n의 최솟값은 6이다.

답 6

5 $\sqrt[4]{8}\div\left\{\sqrt[8]{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\right\}$

$$=2^{\frac{3}{4}}\div\{4^{\frac{1}{8}}\times(2^{-2})^{\frac{1}{4}}\}$$

$$=2^{\frac{3}{4}}\div(2^{\frac{1}{4}}\times2^{-\frac{1}{2}})$$

$$=2^{\frac{3}{4}}\div2^{\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=2^{\frac{3}{4}}\div2^{-\frac{1}{4}}$$

$$=2^{\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)}$$

$$=2^1=2$$

답 ⑤

6 $(3^{\sqrt{3}}\div3)^{\sqrt{3}+1}=(3^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}$

$$=3^{(\sqrt{3}-1)\times(\sqrt{3}+1)}$$

$$=3^2=9$$

답 ④

7 $\log_2 x=\frac{1}{3}$에서

$x=2^{\frac{1}{3}}$

또 $\log_x y=2$에서 $y=x^2$이므로

$y=(2^{\frac{1}{3}})^2=2^{\frac{2}{3}}$

따라서

$$xy=2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{2}{3}}$$

$$=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=2^1=2$$

답 ④

8 $\log_2(\sqrt{2}\times\sqrt[3]{4})+\log_2\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$

$$=\log_2\sqrt{2}+\log_2\sqrt[3]{4}-\log_2\sqrt[4]{8}$$

$$=\log_2 2^{\frac{1}{2}}+\log_2 2^{\frac{2}{3}}-\log_2 2^{\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\log_2 2+\frac{2}{3}\log_2 2-\frac{3}{4}\log_2 2$$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{4}$
$=\dfrac{6+8-9}{12}$
$=\dfrac{5}{12}$

답 ①

9 $\log_2 \sqrt{3}\times\log_9 16$
$=\log_2 3^{\frac{1}{2}}\times\log_{3^2} 2^4$
$=\dfrac{1}{2}\log_2 3\times 2\log_3 2$
$=1$

답 ③

10 $2^{\log_4 3}=9^a$이므로 로그의 정의에 의하여
$a=\log_9 2^{\log_4 3}$
$=\log_4 3\times\log_9 2$
$=\dfrac{\log_3 3}{\log_3 2^2}\times\dfrac{\log_3 2}{\log_3 3^2}$
$=\dfrac{1}{4}$

답 ②

다른 풀이

$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$을 이용하면
$2^{\log_4 3}=3^{\log_4 2}$
$=3^{\frac{\log_2 2}{\log_2 2^2}}$
$=3^{\frac{1}{2}}$
$=(3^2)^{\frac{1}{4}}$
$=9^{\frac{1}{4}}=9^a$
$9^{\frac{1}{4}-a}=1$이므로
$\dfrac{1}{4}-a=0$
따라서 $a=\dfrac{1}{4}$

11 $\log N=-2.5229$
$=-2-0.5229$
$=-2+\{-0.5229+1+(-1)\}$
$=-3+0.4771$
$=\log 10^{-3}+\log 3$
$=\log(3\times10^{-3})$
$\log N-\log(3\times10^{-3})=0$
$\log\dfrac{N}{3\times10^{-3}}=0$
$\dfrac{N}{3\times10^{-3}}=1$
$N=3\times10^{-3}$
따라서 $a=3$, $n=-3$이므로
$a+n=0$

답 ③

12 $\log a+\log b=3+\log 2$에서
$\log ab=3+\log 2$
$=\log 10^3+\log 2$
$=\log(2\times10^3)$
$=\log(2^4\times5^3)$
$\log\dfrac{ab}{2^4\times5^3}=0$
$\dfrac{ab}{2^4\times5^3}=1$
$ab=2^4\times5^3$
이때 a, b가 자연수이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 $2^4\times5^3$의 양의 약수의 개수와 같다.
따라서 $(4+1)\times(3+1)=20$

답 ⑤

Level 1 기초 연습

본문 16~17쪽

1 ⑤	2 ②	3 ②	4 ③	5 ⑤
6 3	7 ④	8 ③	9 ②	10 ①

1 $(\sqrt{3}+1)^5\times\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}\right)^{-5}$
$=(\sqrt{3}+1)^5\times\{(\sqrt{3}-1)^{-1}\}^{-5}$
$=(\sqrt{3}+1)^5\times(\sqrt{3}-1)^5$
$=\{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)\}^5$
$=\{(\sqrt{3})^2-1^2\}^5$
$=2^5$
$=32$

답 ⑤

2 $\sqrt[3]{2}\times16^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{3}}\times(2^4)^{\frac{1}{6}}$
$=2^{\frac{1}{3}}\times2^{4\times\frac{1}{6}}$

$=2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{2}{3}}$

$=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$

$=2^1=2$

답 ②

3 $a^4=4^{\frac{1}{3}}=(2^2)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$이므로

$a=(2^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}$

$=2^{\frac{1}{6}}$

따라서

$a\div\sqrt[6]{2^7}=2^{\frac{1}{6}}\div 2^{\frac{7}{6}}$

$=2^{\frac{1}{6}-\frac{7}{6}}$

$=2^{-1}$

$=\frac{1}{2}$

답 ②

4 $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{54}$

$=2^{\frac{1}{3}}+(2\times 3^3)^{\frac{1}{3}}$

$=2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\times 3$

$=2^{\frac{1}{3}}\times(1+3)$

$=2^{\frac{1}{3}}\times 2^2$

$=2^{\frac{1}{3}+2}$

$=2^{\frac{7}{3}}$

따라서 $p+q=3+7=10$

답 ③

5 $\left(2^{\frac{4}{3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^3$

$=(2^{\frac{4}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})^3$

$=(2^{\frac{4}{3}})^3+(2^{-\frac{1}{3}})^3+3\times 2^{\frac{4}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}}\times(2^{\frac{4}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})$

$=2^{\frac{4}{3}\times 3}+2^{\left(-\frac{1}{3}\right)\times 3}+3\times 2^{\frac{4}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)}\times(2^{\frac{4}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})$

$=2^4+2^{-1}+3\times 2^1\times(2^{\frac{4}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})$

$=16+\frac{1}{2}+6\times(2^{\frac{4}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})$

$=\frac{33}{2}+6\times(2^{\frac{4}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})$

$=6\times\left(2^{\frac{4}{3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)+\frac{33}{2}$

따라서 $a=6$, $b=\frac{33}{2}$이므로

$ab=6\times\frac{33}{2}=99$

답 ⑤

참고

$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$

6 $\log_x(2x+3)=2$에서

$x^2=2x+3$

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$x=3$ 또는 $x=-1$

이때 $x>0$이고 $x\neq 1$이므로

$x=3$

답 3

7 $\log_5\sqrt[3]{100}+\frac{1}{3}\log_5\frac{5}{4}$

$=\frac{2}{3}\log_5(2\times 5)+\frac{1}{3}(1-\log_5 2^2)$

$=\frac{2}{3}(\log_5 2+1)+\frac{1}{3}(1-2\log_5 2)$

$=1$

답 ④

8 $\log_2(\sqrt[3]{9}-1)+\log_2(\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{9}+1)$

$=\log_2\{(\sqrt[3]{9}-1)(\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{9}+1)\}$

$=\log_2[(\sqrt[3]{9}-1)\{(\sqrt[3]{9})^2+\sqrt[3]{9}+1\}]$

$=\log_2\{(\sqrt[3]{9})^3-1^3\}$

$=\log_2 8$

$=\log_2 2^3$

$=3$

답 ③

9 $\log_2 12-\frac{1}{\log_3 2}$

$=\log_2 12-\log_2 3$

$=\log_2\frac{12}{3}$

$=\log_2 2^2$

$=2$

답 ②

10 $\log_{1000}\frac{1}{2}+\log\sqrt[3]{200}$

$=\log_{10^3}\frac{1}{2}+\log 200^{\frac{1}{3}}$

$=\frac{\log\frac{1}{2}}{\log 10^3}+\frac{1}{3}\log 200$

$=\frac{1}{3}\log\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\log 200$

$=\frac{1}{3}\left(\log\frac{1}{2}+\log 200\right)$

$=\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{2}\times 200\right)$

$=\frac{1}{3}\log 10^2$

$=\frac{2}{3}\log 10$

$=\frac{2}{3}$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 18~19쪽

1 ③	2 ②	3 ②	4 ④	5 ④
6 ④	7 ②	8 500		

1 허수 $1+i$가 정수 k의 n제곱근이므로

$(1+i)^n=k$

한편 n은 2 이상의 자연수이므로

$(1+i)^2=1+2i+i^2$

$=2i$

$(1+i)^3=(1+i)^2(1+i)$

$=2i(1+i)$

$=2i+2i^2$

$=-2+2i$

$=-2(1-i)$

$(1+i)^4=(1+i)^2(1+i)^2$

$=2i\times 2i$

$=4i^2$

$=-4$

따라서 최소의 자연수 n의 값은 4이고, 그때의 정수 k의 값은 -4이므로

$p+q=4+(-4)=0$

답 ③

2 $(a+b)^{-1}=\frac{1}{2}$에서

$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{2}$

$a+b=2$ ······ ㉠

또 $a^{-1}+b^{-1}=-\frac{1}{2}$에서

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{1}{2}$

$\frac{a+b}{ab}=-\frac{1}{2}$

이 식에 ㉠을 대입하면

$\frac{2}{ab}=-\frac{1}{2}$

$ab=-4$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=2^3-3\times(-4)\times 2=32$

답 ②

참고

$a+b=2$, $ab=-4$이므로 a, b는 방정식 $x^2-2x-4=0$의 근이다.

이 방정식의 근은 $x=1\pm\sqrt{5}$이므로 a, b가 존재한다.

3 이차방정식 $\sqrt[3]{3}x^2-\sqrt[4]{k}x+\sqrt[3]{9}=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-\sqrt[4]{k})^2-4\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}$

$=(k^{\frac{1}{4}})^2-4\times 3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}}$

$=k^{\frac{1}{2}}-4\times 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$

$=k^{\frac{1}{2}}-4\times 3$

$=\sqrt{k}-12>0$

이므로

$\sqrt{k}>12$, $k>144$

따라서 자연수 k의 최솟값은 145이다.

답 ②

4 $f(x)=(x\sqrt[3]{x})^{\frac{1}{2}}=(x\times x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}$

$=(x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}$

$=x^{\frac{2}{3}}$

이므로

$(f\circ f)(a)=f(f(a))=f(a^{\frac{2}{3}})$

$=(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{3}}$

$=a^{\frac{4}{9}}$

이 값이 자연수이고 $a\,(a>1)$도 자연수이므로 $(f\circ f)(a)$는 $a=2^9$일 때 최솟값을 갖고, 그 값은

$(2^9)^{\frac{4}{9}}=2^4=16$

답 ④

5 $A-B=\{3\}$이므로
$\log_2 ab=3$
$\log_2 a+\log_2 b=3$ ⋯⋯ ㉠
또 $1\in B$이어야 하므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.
(i) $\log_2 a=1$인 경우
㉠에서
$\log_2 b=2$
이때 집합 B의 원소 중 $\log_2\sqrt{b^3}$의 값은
$$\log_2\sqrt{b^3}=\frac{3}{2}\log_2 b=\frac{3}{2}\times 2=3$$
즉, 집합 $B=\{2, 1, 3\}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $\log_2\sqrt{b^3}=1$인 경우
$\frac{3}{2}\log_2 b=1$
$\log_2 b=\frac{2}{3}$
이때 ㉠에서
$\log_2 a=\frac{7}{3}$
즉, 집합 $B=\left\{2, \frac{7}{3}, 1\right\}$이므로 조건을 만족시킨다.
따라서
$$\log_2\frac{a}{b}=\log_2 a-\log_2 b=\frac{7}{3}-\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$
답 ④

6 $\log_3\sqrt[3]{24}+\log_3\frac{\sqrt[6]{81^k}}{2}$
$=\log_3(2^3\times 3)^{\frac{1}{3}}+\log_3\frac{\sqrt[6]{3^{4k}}}{2}$
$=\log_3(2\times 3^{\frac{1}{3}})+\log_3\frac{3^{\frac{2k}{3}}}{2}$
$=\log_3 2+\log_3 3^{\frac{1}{3}}+\log_3 3^{\frac{2k}{3}}-\log_3 2$
$=\frac{1}{3}+\frac{2k}{3}$
$=\frac{2k+1}{3}$
이 수가 자연수가 되려면 $2k+1$의 값이 3의 배수이어야 한다.
한편 k는 10 이하의 자연수이므로 만족시키는 k의 값은 1, 4, 7, 10이고, 그 개수는 4이다.
답 ④

7 $\log_a b=\frac{\log_b c}{2}=\frac{\log_c a}{3}$에서 밑을 a로 나타내면
$\log_a b=\frac{\log_a c}{2\log_a b}=\frac{1}{3\log_a c}$
이 식으로부터
$2(\log_a b)^2=\log_a c$ ⋯⋯ ㉠
$3(\log_a c)^2=2\log_a b$ ⋯⋯ ㉡
㉠에서 $\log_a c=2(\log_a b)^2$을 ㉡에 대입하면
$3\{2(\log_a b)^2\}^2=2\log_a b$
$6(\log_a b)^4=\log_a b$
이때 $\log_a b\neq 0$이므로
$(\log_a b)^3=\frac{1}{6}$
$\log_a b=6^{-\frac{1}{3}}$
이 값을 ㉠에 대입하면
$$\log_a c=2(\log_a b)^2=2\times(6^{-\frac{1}{3}})^2=2\times 6^{-\frac{2}{3}}$$
따라서
$\log_a b\div\log_a c$
$=6^{-\frac{1}{3}}\div(2\times 6^{-\frac{2}{3}})$
$=\frac{1}{2}\times 6^{-\frac{1}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)}$
$=\frac{\sqrt[3]{6}}{2}$
답 ②

8 두 점 $(0, \log a)$, $(1, \log b)$를 지나는 직선의 방정식은
$y=\frac{\log b-\log a}{1-0}\times(x-0)+\log a$이므로
$y=\log\frac{b}{a}\times x+\log a$
이 직선이 점 $(2, 3)$을 지나므로 $x=2$, $y=3$을 대입하면
$3=2\log\frac{b}{a}+\log a$
$3=\log\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^2\times a\right\}$
$\log\frac{b^2}{a}=3$
$\frac{b^2}{a}=10^3$
따라서 $\frac{b^2}{2a}=\frac{10^3}{2}=500$
답 500

Level 3 실력 완성 본문 20쪽

1 ③	**2** 11	**3** 6	**4** 8

1 $n^2-10n+21=(n-3)(n-7)$

이므로 각 경우로 나누면 다음과 같다.

(i) $(n-3)(n-7)>0$인 경우

$n<3$ 또는 $n>7$

$n^2-10n+21>0$이므로 $n^2-10n+21$의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하도록 하는 n은 짝수이어야 한다.

그러므로 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 2, 8, 10이다.

(ii) $(n-3)(n-7)<0$인 경우

$3<n<7$

$n^2-10n+21<0$이므로 $n^2-10n+21$의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하도록 하는 n은 홀수이어야 한다.

그러므로 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 5이다.

(iii) $(n-3)(n-7)=0$인 경우

$n=3$ 또는 $n=7$

$n^2-10n+21=0$이므로 0의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하도록 하는 자연수 n의 값은 없다.

(i), (ii), (iii)에서 모든 자연수 n의 값은 2, 5, 8, 10이고, 그 합은 25이다.

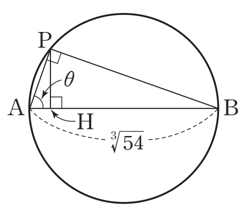
답 ③

2 선분 AB가 원의 지름이므로

$\angle APB=90°$

이때 $\angle PAB=\theta$라 하면

직각삼각형 ABP에서



$$\cos\theta=\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{54}}$$
$$=\frac{2^{\frac{1}{3}}}{(2\times3^3)^{\frac{1}{3}}}$$
$$=\frac{2^{\frac{1}{3}}}{3\times2^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{3}$$

이때

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

그러므로 삼각형 PAH의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{PH}$$
$$=\frac{1}{2}\times\overline{AP}\cos\theta\times\overline{AP}\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\times\overline{AP}^2\times\cos\theta\times\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\times(2^{\frac{1}{3}})^2\times\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$$
$$=\frac{2^{-1}\times2^{\frac{2}{3}}\times2^{\frac{3}{2}}}{9}$$
$$=\frac{2^{-1+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}}{9}$$
$$=\frac{2^{\frac{7}{6}}}{9}$$
$$=2^{\frac{7}{6}}\times3^{-2}$$

따라서 $p=6$, $q=7$, $r=-2$이므로

$$p+q+r=6+7+(-2)$$
$$=11$$

답 11

3 조건 (나)에서

$$\log_a n\times\log_n(n\times a^2)$$
$$=\log_a n\times\frac{\log_a(n\times a^2)}{\log_a n}$$
$$=\log_a(n\times a^2)$$
$$=\log_a n+\log_a a^2$$
$$=\frac{\log_2 n}{\log_2 a}+2$$

이 값이 자연수이므로 $\frac{\log_2 n}{\log_2 a}$은 -1 이상인 정수이어야 한다.

한편 $\log_2 n$은 자연수이므로 조건 (가)에서 $\log_2 a$는 $-\log_2 n$이거나 $\log_2 n$의 양의 약수이어야 한다.

그러므로 $f(n)=7$이면 $\log_2 n$은 양의 약수의 개수가 6인 수이다.

이때 n의 최솟값이 k이고, 양의 약수의 개수가 6인 자연수 중에서 가장 작은 자연수는 $2^2\times3$이므로

$$\log_2 k=2^2\times3$$
$$k=2^{12}$$

따라서

$$\log_4 2^{12}=\log_{2^2}2^{12}$$
$$=\frac{12}{2}\log_2 2$$
$$=6$$

답 6

4 집합 $A=\{x \mid \log_2 x$는 자연수$\}$에서
$A=\{2, 2^2, 2^3, \cdots\}$
이고, 집합 $B=\{x \mid \log_p x$는 자연수$\}$에서
$B=\{p, p^2, p^3, \cdots\}$
이다.
한편 조건 (가)에서 $A \cap B=B$이므로
$B \subset A$
그러므로 어떤 자연수 k에 대하여
$p=2^k$
이고
$B=\{2^k, (2^k)^2, (2^k)^3, \cdots\}$
한편 조건 (나)에서 $a \in A$이고 $2 \le a \le 10$인 수는
$2^1, 2^2, 2^3$
이때 k의 값에 따라 나누면 다음과 같다.

(i) $k=1$일 때
$b \in B$이고 $1 \le b \le 1000$인 수는
$2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9$
이때

$$\log_a b=\frac{\log_2 2^m}{\log_2 2^l}=\frac{m}{l}$$

(l은 3 이하의 자연수, m은 9 이하의 자연수)
이 수가 자연수가 되는 순서쌍 (l, m)의 개수는 7보다 크다.
이때 순서쌍 (a, b)의 개수도 7보다 크므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k=2$일 때
$b \in B$이고 $1 \le b \le 1000$인 수는
$2^2, 2^4, 2^6, 2^8$
이때

$$\log_a b=\frac{\log_2 2^{2m}}{\log_2 2^l}=\frac{2m}{l}$$

(l은 3 이하의 자연수, m은 4 이하의 자연수)
이 수가 자연수가 되는 순서쌍 $(l, 2m)$은
$(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8)$,
$(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8)$,
$(3, 6)$
으로 그 개수는 9이다.
이때 순서쌍 (a, b)의 개수도 9이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $k=3$일 때
$b \in B$이고 $1 \le b \le 1000$인 수는
$2^3, 2^6, 2^9$
이때

$$\log_a b=\frac{\log_2 2^{3m}}{\log_2 2^l}=\frac{3m}{l}$$

(l은 3 이하의 자연수, m은 3 이하의 자연수)
이 수가 자연수가 되는 순서쌍 $(l, 3m)$은
$(1, 3), (1, 6), (1, 9)$,
$(2, 6)$,
$(3, 3), (3, 6), (3, 9)$
로 그 개수는 7이다.
이때 순서쌍 (a, b)의 개수도 7이므로 조건을 만족시킨다.

(iv) $k=4$일 때
$b \in B$이고 $1 \le b \le 1000$인 수는
$2^4, 2^8$
이때

$$\log_a b=\frac{\log_2 2^{4m}}{\log_2 2^l}=\frac{4m}{l}$$

(l은 3 이하의 자연수, m은 2 이하의 자연수)
이 수가 자연수가 되는 순서쌍 $(l, 4m)$은
$(1, 4), (1, 8)$,
$(2, 4), (2, 8)$
로 그 개수는 4이다.
이때 순서쌍 (a, b)의 개수도 4이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(v) $k \ge 5$일 때
$b \in B$이고 $1 \le b \le 1000$인 수는
1개 이하이다.
그러므로 위와 같은 방법으로 하면 순서쌍 (a, b)의 개수가 7이 될 수 없다.

(i)~(v)에서
$p=2^3=8$

답 8

02 지수함수와 로그함수

유제 본문 23~31쪽

1 ③	2 34	3 ③	4 ①	5 29
6 ②	7 8	8 ②	9 ②	10 5

1 세 함수 $f(x)=3^{2x}$, $g(x)=\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{x}{2}}$, $h(x)=(2a-3)^x$의 그래프에서

$g(1)<h(1)<f(1)$

이때 $f(1)=3^2=9$, $g(1)=\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$, $h(1)=2a-3$

이므로

$\frac{3}{2}<2a-3<9$

$\frac{9}{4}<a<6$ …… ㉠

따라서 부등식 ㉠을 만족시키는 자연수 a는 3, 4, 5로 그 개수는 3이다.

답 ③

2 세 점 A, B, C의 좌표는 각각

$\left(0, \frac{1}{a}\right)$, $(1, a)$, $(1, 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AO}}=\frac{1}{a}$, $\overline{\mathrm{OC}}=1$, $\overline{\mathrm{BC}}=a$

사각형 AOCB는 사다리꼴이고, 그 넓이가 3이므로

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{a}+a\right)\times1=3$

$a+\frac{1}{a}=6$

따라서

$$\begin{aligned}a^2+\frac{1}{a^2}&=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2\\&=6^2-2\\&=34\end{aligned}$$

답 34

3 함수 $f(x)=a\times3^{2-x}+b=9a\times\left(\frac{1}{3}\right)^x+b$에서

$0<(\text{밑})=\frac{1}{3}<1$이고, $a>0$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 함수 $f(x)=a\times3^{2-x}+b$는

$x=0$일 때 최댓값을 갖고,

$x=2$일 때 최솟값을 갖는다.

$f(0)=4$에서 $a\times3^2+b=4$, 즉

$9a+b=4$ …… ㉠

$f(2)=0$에서 $a\times3^0+b=0$, 즉

$a+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$

따라서

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2}\times3^{2-x}-\frac{1}{2}\\&=\frac{3^{2-x}-1}{2}\end{aligned}$$

이므로

$f(1)=\frac{3^1-1}{2}=1$

답 ③

4 함수 $f(x)=2^x+1$에서 $(\text{밑})=2>1$이므로

x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$일 때 최댓값을 갖고,

$x=0$일 때 최솟값을 갖는다.

$M=f(2)=2^2+1=5$, $m=f(0)=2^0+1=2$ …… ㉠

(i) $b>1$일 때

함수 $g(x)=a-\left(\frac{1}{b}\right)^x$에서 $0<(\text{밑})=\frac{1}{b}<1$이므로

x의 값이 증가하면 $\left(\frac{1}{b}\right)^x$의 값은 감소하고 $-\left(\frac{1}{b}\right)^x$의 값은 증가한다.

따라서 함수 $g(x)$는 x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값도 증가한다.

그러므로 함수 $g(x)$는 $x=2$일 때 최댓값을 갖고,

$x=0$일 때 최솟값을 갖는다.

$$\begin{aligned}-m&=g(2)\\&=a-\left(\frac{1}{b}\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-M&=g(0)\\&=a-\left(\frac{1}{b}\right)^0\end{aligned}$$

㉠에 의하여

$a-\frac{1}{b^2}=-2$ …… ㉡

$a-1=-5$ …… ㉢

㉢에서 $a=-4$이므로 ㉡에 대입하면

$b^2=-\frac{1}{2}$

이때 실수 b의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $0<b<1$일 때

함수 $g(x)=a-\left(\frac{1}{b}\right)^{x}$에서 (밑)$=\frac{1}{b}>1$이므로 x의 값이 증가하면 $\left(\frac{1}{b}\right)^{x}$의 값은 증가하고, $-\left(\frac{1}{b}\right)^{x}$의 값은 감소한다.

따라서 함수 $g(x)$는 x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값은 감소한다.

그러므로 함수 $g(x)$는 $x=0$일 때 최댓값을 갖고, $x=2$일 때 최솟값을 갖는다.

$-m=g(0)$

$=a-\left(\frac{1}{b}\right)^{0}$

$-M=g(2)$

$=a-\left(\frac{1}{b}\right)^{2}$

㉠에 의하여

$a-1=-2$ …… ㉣

$a-\frac{1}{b^2}=-5$ …… ㉤

㉣에서 $a=-1$이므로 ㉤에 대입하면

$b^2=\frac{1}{4}$

이때 $0<b<1$에서

$b=\frac{1}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$a+b=-1+\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{2}$

답 ①

5 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-1}+b$에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x=\left(\frac{1}{a}\right)^{y-1}+b$

$\left(\frac{1}{a}\right)^{y-1}=x-b$

$y-1=\log_{\frac{1}{a}}(x-b)$

$y=\log_{\frac{1}{a}}(x-b)+1$

따라서 $g(x)=\log_{\frac{1}{a}}(x-b)+1$이고,

곡선 $y=g(x)$가 점 $(3, 0)$을 지나므로

$0=\log_{\frac{1}{a}}(3-b)+1$

$3-b=\left(\frac{1}{a}\right)^{-1}=a$

$a+b=3$ …… ㉠

또 곡선 $y=g(x)$의 점근선이 직선 $x=-2$이므로

$b=-2$

㉠에서

$a=5$

따라서

$a^2+b^2=5^2+(-2)^2$

$=29$

답 29

다른 풀이

곡선 $y=g(x)$가 점 $(3, 0)$을 지나므로

$g(3)=0$

함수 $g(x)$가 함수 $f(x)$의 역함수이므로

역함수의 성질에 의하여

$f(0)=3$

즉, $\left(\frac{1}{a}\right)^{0-1}+b=3$

$a+b=3$ …… ㉠

또 곡선 $y=f(x)$의 점근선은 곡선 $y=g(x)$의 점근선인 직선 $x=-2$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 $y=-2$이다.

곡선 $y=f(x)$의 점근선은 직선 $y=b$이므로

$b=-2$

㉠에서

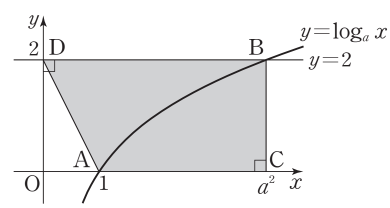
$a=5$

따라서

$a^2+b^2=5^2+(-2)^2$

$=29$

6



$\log_a x=2$에서 $x=a^2$이므로 점 B의 좌표는

$(a^2, 2)$

따라서 세 점 A, C, D의 좌표는 차례로

$(1, 0)$, $(a^2, 0)$, $(0, 2)$

이다.

사각형 ACBD는 $\overline{DB}\,/\!/\,\overline{AC}$인 사다리꼴이고,

그 넓이가 7이므로

$\frac{1}{2}\times\{a^2+(a^2-1)\}\times 2=7$

$2a^2-1=7$

$a^2=4$

$a>1$에서

$a=2$

답 ②

7 함수 $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$에서 $0<(\text{밑})=\frac{1}{2}<1$이므로

x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값은 감소하고,

x의 값이 감소하면 $g(x)$의 값은 증가한다.

이때 $g(x)=t$로 놓으면

$\frac{1}{2}\le x\le 4$일 때

$\log_{\frac{1}{2}} 4\le t\le \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$

즉, $-2\le t\le 1$이고

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$=f(t)$

$=6-t^2$

이므로 $-2\le t\le 1$일 때

$f(-2)\le f(t)\le f(0)$

즉, $2\le f(t)\le 6$

따라서 함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$6+2=8$

답 8

8 $f(x)=2x^2-4x+6$, $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$로 놓으면

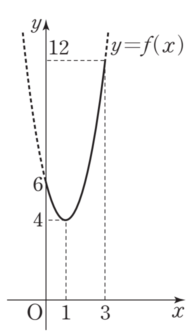
$y=\log_{\frac{1}{2}} (2x^2-4x+6)$

$=(g\circ f)(x)$

$f(x)=2x^2-4x+6$

$=2(x-1)^2+4$

이므로 정의역이 $\{x\,|\,0\le x\le 3\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$는

$x=3$일 때 최댓값 12를 갖고,

$x=1$일 때 최솟값 4를 가지므로

$4\le f(x)\le 12$

한편 함수 $g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$에서

$0<(\text{밑})=\frac{1}{2}<1$이므로

x의 값이 증가하면 $g(x)$의 값은 감소하고,

x의 값이 감소하면 $g(x)$의 값은 증가한다.

이때 $f(x)=t$로 놓으면

$(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=g(t)$

이고, 정의역이 $\{t\,|\,4\le t\le 12\}$이므로 함수 $g(t)$는

$t=4$일 때 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}} 4=-2$를 갖는다.

따라서 정의역 $\{x\,|\,0\le x\le 3\}$에서

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} (2x^2-4x+6)$의 최댓값은 -2이다.

답 ②

9 $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x^2}=3^{-3x^2}$이므로

$3^{-3x^2}>3^{20-19x}$

이때 $(\text{밑})=3>1$이므로

$-3x^2>20-19x$

$3x^2-19x+20<0$

$(3x-4)(x-5)<0$

$\frac{4}{3}<x<5$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x는 2, 3, 4이므로

그 합은

$2+3+4=9$

답 ②

10 로그의 진수 조건에 의하여

$2x+1>0$, $x-4>0$

$x>4$ …… ㉠

$\log_2 (2x+1)+\log_2 (x-4)=\log_2 11$ …… ㉡

에서

$\log_2 \{(2x+1)(x-4)\}=\log_2 11$

$(2x+1)(x-4)=11$이므로

$2x^2-7x-15=0$

$(2x+3)(x-5)=0$

$x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=5$

이때 $x=-\frac{3}{2}$은 부등식 ㉠을 만족시키지 않으므로 방정식 ㉡의 실근은 5이다.

답 5

Level 1 기초 연습

본문 32~33쪽

1 ③	2 ①	3 ③	4 ②	5 ①
6 ②	7 48	8 20		

1 $y=f(x)g(x)$

$=2^x\times\left(\frac{1}{3}\right)^x$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^x$

이때 함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$은 밑이 $\frac{2}{3}$인 지수함수이고, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 함수 $y=f(x)g(x)$의 그래프의 개형은 ③이다.

답 ③

2 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은

$y-2=f(x+2)$

$y=f(x+2)+2$

따라서

$f(x+2)+2=2-\left(\frac{2}{3}\right)^x$,

$f(x+2)=-\left(\frac{2}{3}\right)^x$

이므로

$f(2)=-\left(\frac{2}{3}\right)^0$

$=-1$

답 ①

다른 풀이

함수 $y=2-\left(\frac{2}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치한다.

$y-(-2)=2-\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}$

$y=-\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}$

따라서 $f(x)=-\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}$이므로

$f(2)=-\left(\frac{2}{3}\right)^0$

$=-1$

3 $f(x)=a^x+2$에서 (밑)$=a>1$이므로 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값도 증가한다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최솟값을 갖고, $x=2$일 때 최댓값을 갖는다.

$f(2)=a^2+2$

$f(0)=a^0+2=3$

이때 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차가 8이므로

$(a^2+2)-3=8$

$a^2=9$

$a>1$이므로 $a=3$

따라서 $f(x)=3^x+2$이므로

$f(1)=3+2=5$

답 ③

4 두 함수의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이면 함수 $y=2^{-x+3}+\frac{1}{2}$의 역함수가 $y=\log_a(2x-1)+b$이다.

$y=2^{-x+3}+\frac{1}{2}$에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x=2^{-y+3}+\frac{1}{2}$

$2^{-y+3}=x-\frac{1}{2}$

로그의 정의에 의하여

$-y+3=\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)$이므로

$y=-\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)+3$

$=-\log_2\frac{2x-1}{2}+3$

$=-\log_2(2x-1)+4$

$=\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)+4$

$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)+4=\log_a(2x-1)+b$에서

$a=\frac{1}{2}$, $b=4$

따라서 $a+b=\frac{9}{2}$

답 ②

다른 풀이

함수 $y=2^{-x+3}+\frac{1}{2}$의 그래프는

두 점 $(4, 1)$, $\left(3, \frac{3}{2}\right)$을 지난다.

두 함수 $y=2^{-x+3}+\frac{1}{2}$, $y=\log_a(2x-1)+b$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로

함수 $y=\log_a(2x-1)+b$의 그래프는

두 점 $(1, 4)$, $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$을 지난다.

$4=\log_a(2-1)+b$에서

$b=4$

$3=\log_a\left(2\times\frac{3}{2}-1\right)+4$에서

$\log_a 2=-1$

$a^{-1}=2$

$a=\frac{1}{2}$

따라서

$a+b=\frac{1}{2}+4$

$=\frac{9}{2}$

5 함수 $y=\log_2(2x-a)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은

$y=\log_2\{2(x-1)-a\}$

$=\log_2(2x-2-a)$ …… ㉠

㉠을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식은

$x=\log_2(2y-2-a)$

$2y-2-a=2^x$

$y=\frac{2^x}{2}+\frac{a+2}{2}$

$=2^{x-1}+\frac{a+2}{2}$

$f(x)=2^{x-1}+\frac{a+2}{2}$ …… ㉡

이때 함수 ㉡의 그래프의 점근선이 직선 $y=2$이므로

$\frac{a+2}{2}=2$에서

$a=2$

따라서 $f(x)=2^{x-1}+2$이므로

$f(a-2)=f(0)$

$=2^{-1}+2$

$=\frac{5}{2}$

답 ①

6 함수 $y=2\log_{\frac{1}{2}}(x+3)$에서 $0<(\text{밑})=\frac{1}{2}<1$이므로

x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 함수 $y=2\log_{\frac{1}{2}}(x+3)$은

$x=-1$일 때 최댓값

$2\log_{\frac{1}{2}}2=-2\log_2 2$

$=-2$

를 갖고,

$x=5$일 때 최솟값

$2\log_{\frac{1}{2}}8=2\log_{2^{-1}}2^3$

$=-6\log_2 2$

$=-6$

을 갖는다.

따라서

$M+m=-2+(-6)$

$=-8$

답 ②

7 직선 AB의 기울기가 -1이므로 선분 AB를 대각선으로 하는 정사각형의 한 변은 x축 위에 있다.

정사각형의 넓이가 16이므로 정사각형의 한 변의 길이는 4이다.

따라서 점 A의 y좌표가 4이므로

$2^t+1=4$

$2^t=3$

$t=\log_2 3$

점 A의 좌표는 $(\log_2 3,\ 4)$이고, 정사각형의 한 변의 길이가 4이므로 점 B의 x좌표는

$\log_2 3+4=\log_2 3+\log_2 2^4$

$=\log_2(3\times16)$

$=\log_2 48$

따라서 $a=48$

답 48

8 로그의 진수 조건에 의하여

$x>0$, $10-x>0$이므로

$0<x<10$ …… ㉠

$\log_2 x+\log_2(10-x)\le4$에서

$\log_2 x(10-x)\le\log_2 2^4$

$x(10-x)\le16$

$x^2-10x+16\ge0$

$(x-2)(x-8)\ge0$

$x\le2$ 또는 $x\ge8$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$0<x\le2$ 또는 $8\le x<10$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x는

1, 2, 8, 9

이므로 그 합은

$1+2+8+9=20$

답 20

Level 2 기본 연습

본문 34쪽

1 16　2 ⑤　3 ④　4 ③

1 점 B의 x좌표를 t라 하자.

$\overline{AB}=5$이므로 점 A의 x좌표는 $t-5$이다.

두 점 A, B의 y좌표가 같으므로

$2^{-(t-5)}=a^t$

$a^t=32\times2^{-t}$ ...... ㉠

두 점 B, C의 x좌표가 t로 같고, $\overline{BC}=\frac{31}{2}$이므로

$a^t-2^{-t}=\frac{31}{2}$

$a^t=2^{-t}+\frac{31}{2}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$32\times2^{-t}=2^{-t}+\frac{31}{2}$이므로

$31\times2^{-t}=\frac{31}{2}$

$2^{-t}=2^{-1}$

즉, $-t=-1$에서

$t=1$

㉡에 $t=1$을 대입하면

$$\begin{aligned}a&=2^{-1}+\frac{31}{2}\\&=\frac{1}{2}+\frac{31}{2}\\&=16\end{aligned}$$

답 16

2 두 점 P, Q의 좌표가 각각

$(t,\ 2^{t-2}+2)$, $\left(t,\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^t\right)$

이므로

$$\begin{aligned}\overline{PQ}&=(2^{t-2}+2)-\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^t\right\}\\&=2^{t-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^t+1\\&=\frac{2^t}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^t+1\end{aligned}$$

모든 실수 t에 대하여 $\frac{2^t}{4}>0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^t>0$이므로

$$\begin{aligned}\frac{2^t}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^t&\ge2\sqrt{\frac{2^t}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^t}\\&=2\sqrt{\frac{1}{4}}\\&=2\times\frac{1}{2}=1\end{aligned}$$

$\left(\text{등호는 } \frac{2^t}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^t \text{일 때 성립한다.}\right)$

이때 $\frac{2^t}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^t$에서

$\frac{2^t}{4}=\frac{1}{2^t}$

$(2^t)^2=4$

$2^t=2$, 즉 $t=1$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$일 때 최솟값 $1+1=2$를 갖는다.

$a=1$, $b=2$이므로

$a+b=3$

답 ⑤

참고

$a>0$, $b>0$일 때,

$a+b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab}$

$\ge2\sqrt{ab}$ (등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

3 $\log_2(4x-4)=\log_2 4(x-1)$

$=\log_2(x-1)+2$

따라서 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 한 점을

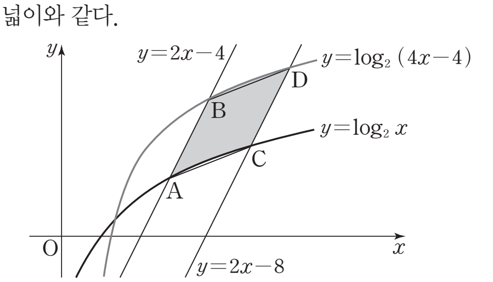
x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점은 곡선 $y=\log_2(x-1)+2$ 위의 점이고, 이 두 점을 잇는 직선의 기울기는 2이다.

이때 두 점 A, B는 직선 $y=2x-4$ 위의 점이므로 직선 AB의 기울기는 2이다.

즉, 두 점 A, C를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이 각각 B, D이다.

따라서 두 점 A, C를 잇는 곡선 $y=\log_2 x$의 일부분을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 두 점 B, D를 잇는 곡선 $y=\log_2(4x-4)$의 일부분과 일치한다.

따라서 곡선 $y=\log_2 x$와 직선 AC로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=\log_2(4x-4)$와 직선 BD로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.



그러므로 두 선분 AB, CD와 두 곡선 $y=\log_2 x$,

$y=\log_2(4x-4)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

평행사변형 ACDB의 넓이와 같다.

점 A의 좌표를 $(a,\ b)$ (a, b는 양의 실수)라 하면 점 B의 좌표는 $(a+1,\ b+2)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{1^2+2^2}$

$=\sqrt{5}$

이때 평행사변형 ACDB의 높이는 직선 $y=2x-4$ 위의 점 $(2,\ 0)$과 직선 $y=2x-8$, 즉 $2x-y-8=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|2\times2-0-8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

따라서 평행사변형 ACDB의 넓이는

$\sqrt{5}\times\dfrac{4}{\sqrt{5}}=4$

답 ④

4 점 P와 점 Q의 x좌표의 비가 $1:3$이므로 점 P의 x좌표를 α라 하면 점 Q의 x좌표는 3α이다.

점 P는 두 곡선 $y=\log_3 x+k$, $y=\log_{\frac{1}{3}} x$의 교점이므로

$\log_3 \alpha+k=\log_{\frac{1}{3}} \alpha$에서 로그의 진수 조건에 의하여

$\alpha>0$이고

$\log_3 \alpha+k=-\log_3 \alpha$

$k=-2\log_3 \alpha$ $(\alpha>0)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

점 Q는 두 곡선 $y=\log_3 x+k$, $y=\log_3(6-x)$의 교점이므로

$\log_3 3\alpha+k=\log_3(6-3\alpha)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

이때 로그의 진수 조건에 의하여

$3\alpha>0$에서

$\alpha>0$

$6-3\alpha>0$에서

$3\alpha<6$, $\alpha<2$

즉, $0<\alpha<2$이고 ㉠, ㉡에 의하여

$\log_3 3\alpha-2\log_3 \alpha=\log_3(6-3\alpha)$

$\log_3 \dfrac{3\alpha}{\alpha^2}=\log_3(6-3\alpha)$

$\log_3 \dfrac{3}{\alpha}=\log_3(6-3\alpha)$

즉, $\dfrac{3}{\alpha}=6-3\alpha$이므로

양변에 α를 곱하면

$3=6\alpha-3\alpha^2$

$3\alpha^2-6\alpha+3=0$

$\alpha^2-2\alpha+1=0$

$(\alpha-1)^2=0$

$\alpha=1$

이때 $\alpha=1$은 $0<\alpha<2$를 만족시키므로

$k=-2\log_3 1$

$=-2\times0$

$=0$

답 ③

Level 3 실력 완성 본문 35쪽

1 ② 2 ⑤ 3 33

1 ㄱ. 함수 $f(x)=(a^2+a+1)^x$은 밑이 a^2+a+1인 지수함수이므로 점근선은 직선 $y=0$이다. (참)

ㄴ. $a^2+a+1=\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$이므로

$-1<a<0$일 때

$\dfrac{3}{4}<a^2+a+1<1$

따라서 함수 $f(x)=(a^2+a+1)^x$의 그래프는 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소하므로

$f(0)>f(1)$

즉, $f(1)<1$ (참)

ㄷ. (반례) $a=-2$이면

$a^2+a+1=(-2)^2+(-2)+1$

$=3$

따라서 $f(x)=(a^2+a+1)^x=3^x$이 되어 부등식

$f(-1)=3^{-1}=\dfrac{1}{3}<1$

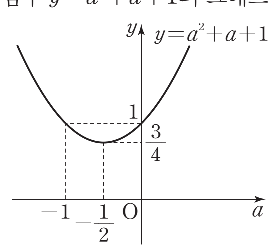
을 만족시키지만 $a<0$이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

참고

실수 a에 대한 함수 $y=a^2+a+1$의 그래프는 그림과 같다.



$-1<a<0$일 때, $0<a^2+a+1<1$

$a<-1$ 또는 $a>0$일 때, $a^2+a+1>1$

2 ㄱ. $|2^{2-x}-2|=0$에서

$2^{2-x}=2$

$2-x=1$이므로

$x=1$

따라서 $x_1<1<x_2$ (참)

ㄴ. 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$은 (밑)$=\frac{1}{2}<1$이므로

x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

$x_2>1$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}<\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$

따라서 $y_2<\frac{1}{2}$ (거짓)

ㄷ. 그림에서

$0<x<x_1$일 때 $|2^{2-x}-2|>\left(\frac{1}{2}\right)^x$이고,

$x_1<x<1$일 때 $|2^{2-x}-2|<\left(\frac{1}{2}\right)^x$이다.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$|2^{2-\frac{1}{2}}-2|=|2\sqrt{2}-2|$

$=2(\sqrt{2}-1)$

이때 $2(\sqrt{2}-1)-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}-4}{2}>0$이므로

$|2^{2-\frac{1}{2}}-2|>\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

따라서 $x_1>\frac{1}{2}$ (참)

다른 풀이

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}=2^{2-x_1}-2$에서

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}-2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}=\frac{2}{3}$

$2^{x_1}=\frac{3}{2}$

$x_1=\log_2\frac{3}{2}$

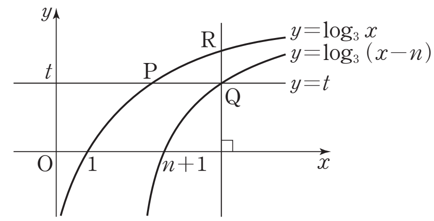
이때 $\frac{1}{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\log_2\sqrt{2}$이고, $\frac{3}{2}>\sqrt{2}$이므로

$x_1>\frac{1}{2}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ⑤

3



두 점 P, Q의 y좌표가 t이므로

$t=\log_3 x$에서 $x=3^t$

즉, 점 P의 좌표는 $(3^t,\ t)$이다.

$t=\log_3(x-n)$에서

$x-n=3^t$

$x=3^t+n$

즉, 점 Q의 좌표는 $(3^t+n,\ t)$이다.

따라서

$\overline{\mathrm{PQ}}=(3^t+n)-3^t$

$=n$

두 점 Q, R의 x좌표가 3^t+n이므로

$y=\log_3(3^t+n)$

즉, 점 R의 좌표는 $(3^t+n,\ \log_3(3^t+n))$이다.

따라서

$\overline{\mathrm{RQ}}=\log_3(3^t+n)-t$

$=\log_3\frac{3^t+n}{3^t}$

$=\log_3\left(1+\frac{n}{3^t}\right)$

이때 정의역이 $\{t\,|\,t\geq 0\}$인 함수 $f(t)=1+\frac{n}{3^t}$은

$t=0$일 때 최댓값 $f(0)=1+n$을 갖는다.

한편 함수 $y=\log_3 x$는 (밑)$=3>1$이므로

x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 t에 대한 함수 $g(t)=\log_3\left(1+\frac{n}{3^t}\right)$은

$t=0$일 때 최댓값

$g(0)=\log_3(1+n)$

을 갖는다.

즉, 음이 아닌 모든 실수 t에 대하여

$0<\log_3\left(1+\frac{n}{3^t}\right)\leq\log_3(1+n)$

(i) $\log_3(1+n)\leq 2$일 때

$1+n\leq 9$

$n\leq 8$

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{RQ}}=n+\log_3\left(1+\frac{n}{3^t}\right)$

$\leq n+\log_3(1+n)$

≤ 10

이때 어떤 음이 아닌 실수 t에 대하여 $\overline{PQ}+\overline{RQ}\geq 20$을 만족시키는 자연수 n의 값은 없다.

(ii) $2<\log_3(1+n)\leq 3$일 때

$9<1+n\leq 27$

$8<n\leq 26$ …… ㉠

$n<\overline{PQ}+\overline{RQ}\leq n+\log_3(1+n)$

이때 어떤 음이 아닌 실수 t에 대하여 $\overline{PQ}+\overline{RQ}\geq 20$이 성립하려면

$n+\log_3(1+n)\geq 20$

$\log_3(1+n)\geq 20-n$ …… ㉡

$n=17$일 때, $\log_3 18<3$이므로 ㉡을 만족시키지 않는다.

$n\geq 18$일 때, $\log_3(1+n)\geq \log_3 19\geq 2$이므로 ㉡을 만족시킨다.

따라서 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 자연수 n의 값의 범위는

$18\leq n\leq 26$

(iii) $3<\log_3(1+n)\leq 4$일 때

$27<1+n\leq 81$

$26<n\leq 80$

이때 조건 (가)에서 $n\leq 50$이므로

$26<n\leq 50$

$\overline{PQ}+\overline{RQ}>26$

즉, 음이 아닌 실수 t에 대하여 $\overline{PQ}+\overline{RQ}\geq 20$이 성립하므로 조건을 모두 만족시키는 자연수 n의 값의 범위는

$26<n\leq 50$

(i), (ii), (iii)에서 모든 자연수 n의 값의 범위는

$18\leq n\leq 50$

이므로 그 개수는

$50-18+1=33$

답 33

03 삼각함수의 뜻과 그래프

유제 본문 39~47쪽

1 ①	2 10	3 ②	4 ②	5 ③
6 8	7 ①	8 ⑤	9 ②	10 ③

1 직각삼각형 ABC에서 $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$이므로

$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\overline{AB}}$, $\overline{AB}=4\sqrt{3}$

이때 $\overline{AD}=\overline{AB}=4\sqrt{3}$이므로

$\overline{DE}=\overline{AD}\times\sin\frac{\pi}{6}$

$=4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}$

$\overline{AE}=\overline{AD}\times\cos\frac{\pi}{6}$

$=4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6$

이때 삼각형 AED의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{DE}=\frac{1}{2}\times 6\times 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

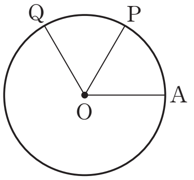
따라서 구하는 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(4\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{6}-6\sqrt{3}=4\pi-6\sqrt{3}$

이므로 $a+b=4+(-6)=-2$

답 ①

2 오른쪽 그림에서 동경 OP가 나타내는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로



$\angle AOP=\frac{\pi}{4}$

또 동경 OQ가 나타내는 각의 크기가 $-\frac{10}{3}\pi$이므로

이 각을 0 이상 2π 미만의 각으로 나타내면

$-\frac{10}{3}\pi+2\times 2\pi=\frac{2}{3}\pi$

그러므로

$\angle POQ=\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{4}$

$=\frac{5}{12}\pi$

따라서 부채꼴 OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4^2\times\frac{5}{12}\pi=\frac{10}{3}\pi$

이므로 $a=\frac{10}{3}$

따라서 $3a=10$

답 10

3 $\cos\theta+\sin\theta\times\tan\theta<0$에서

$\cos\theta+\sin\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}<0$

$\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos\theta}<0$

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$이므로

$\cos\theta<0$ ...... ㉠

한편 $\sin\theta=\frac{3}{5}$이므로

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2$

$=\frac{16}{25}$

㉠에서 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$

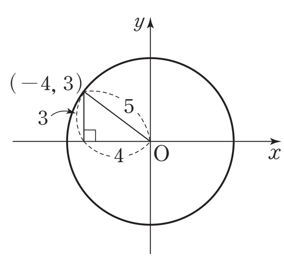
따라서 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$

답 ②

참고

$\sin\theta=\frac{3}{5}>0$, $\cos\theta<0$이므로 θ는 제2사분면의 각이다.

그러므로 오른쪽 그림을 이용하여 $\tan\theta$의 값을 구할 수도 있다.



4 $\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\left(\theta-\frac{3}{2}\pi\right)<0$에서

$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$ ...... ㉠

또 $\tan\theta=2\sqrt{2}$이므로

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=2\sqrt{2}$

$\sin\theta=2\sqrt{2}\cos\theta$ ...... ㉡

이때 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$이므로

㉡을 위의 식에 대입하면

$\cos^2\theta+(2\sqrt{2}\cos\theta)^2=1$

$\cos^2\theta+8\cos^2\theta=1$

$9\cos^2\theta=1$

$\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

㉠에서 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\frac{1}{3}$

답 ②

5 함수 $y=2\cos(ax)+a$의 주기가 4π이므로

$\frac{2\pi}{|a|}=4\pi$

$a>0$이므로

$a=\frac{1}{2}$

이때 주어진 함수는 $y=2\cos\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$이므로

최댓값 M은

$M=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

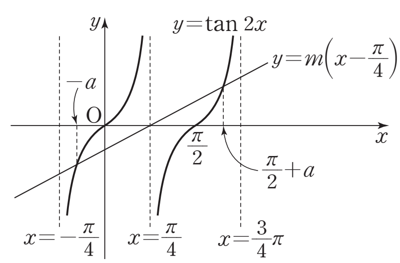
따라서 $a+M=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3$

답 ③

6 함수 $y=\tan 2x$의 그래프의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이고,

직선 $y=m\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$는 점 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$을 지나는 직선이므로

$-\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$에서 그래프를 나타내면 그림과 같다.



이때 양수 α에 대하여 $\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha$라 하면

함수 $y=\tan 2x$의 그래프는 주기가 $\frac{\pi}{2}$이고,

점 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$에 대하여 대칭이므로

$\alpha=-a$

그러므로 $\beta-\alpha=\frac{3}{4}\pi$에서

$\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-(-\alpha)=\frac{3}{4}\pi$

$\frac{\pi}{2}+2a=\frac{3}{4}\pi$

$a=\frac{\pi}{8}$

그러므로 x좌표가 a인 점의 좌표는

$\left(-\frac{\pi}{8}, \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

즉, $\left(-\frac{\pi}{8}, -1\right)$이므로

$m=\frac{0-(-1)}{\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{8}{3\pi}$

따라서 $3\pi m=8$

답 8

7 $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=\frac{1}{3}$에서

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=\cos\left\{\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}$

$=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=-\sin\theta$

이므로 $\sin\theta=-\frac{1}{3}$

이때 $\tan\theta>0$이므로 θ는 제3사분면의 각이다.

따라서

$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$

$=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

답 ①

8 $\sin\theta\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)>0$에서

$\sin\theta\times\cos\theta>0$

그러므로 θ는 제1사분면의 각 또는 제3사분면의 각이다.

한편 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{7}}{4}$이므로 θ는 제3사분면의 각이다.

따라서 $\cos\theta<0$이므로

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\times(-\sin\theta)$

$=-\cos\theta$

$=-(-\sqrt{1-\sin^2\theta})$

$=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}$

$=\sqrt{1-\frac{7}{16}}$

$=\frac{3}{4}$

답 ⑤

9 $2\sin^2 x+5\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+2<0$에서

$2\sin^2 x-5\sin x+2<0$

$(2\sin x-1)(\sin x-2)<0$

$\frac{1}{2}<\sin x<2$

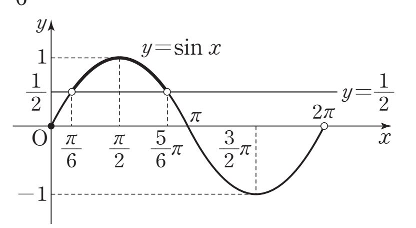
이때 $-1\le\sin x\le1$이므로

$\frac{1}{2}<\sin x\le1$

이 부등식의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가

직선 $y=\frac{1}{2}$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$



따라서

$\beta-\alpha=\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}$

$=\frac{2}{3}\pi$

답 ②

10 $\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\times\cos x-1=0$에서

$(1-\sin^2 x)+\sqrt{3}\sin x\times\cos x-1=0$

$\sin x(\sin x-\sqrt{3}\cos x)=0$

$\sin x=0$ 또는 $\sqrt{3}\cos x=\sin x$

(i) $\sin x=0$일 때

이 방정식의 해는

$x=0$ 또는 $x=\pi$

(ii) $\sqrt{3}\cos x=\sin x$일 때

$\cos x=0$이면 위의 방정식에서 $\sin x=0$이므로

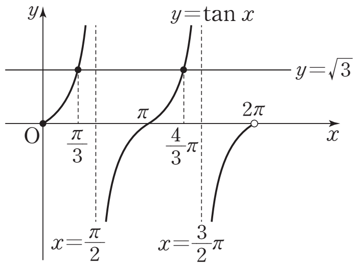
이 두 식을 만족시키는 해는 없다.

그러므로 $\cos x\ne0$

방정식 $\sqrt{3}\cos x=\sin x$의 양변을 $\cos x$로 나누면

$\tan x=\sqrt{3}$

이때 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$이 만나는 점의 x좌표는 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4}{3}\pi$이다.



그러므로 이 방정식의 해는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$이다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

0, $\frac{\pi}{3}$, π, $\frac{4}{3}\pi$이다.

한편 부등식 $\cos x<0$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=0$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이므로

$\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$

따라서 주어진 방정식과 부등식을 모두 만족시키는 x의 값은 π, $\frac{4}{3}\pi$이므로 그 합은

$\pi+\frac{4}{3}\pi=\frac{7}{3}\pi$

답 ③

Level 1 기초 연습

본문 48~49쪽

1 ①	2 ⑤	3 ③	4 ④	5 ②
6 ③	7 ④	8 ③	9 ②	

1 $\sin\frac{3}{2}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$

$\cos\frac{2}{3}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

따라서

$\sin\frac{3}{2}\pi+\cos\frac{2}{3}\pi=-1+\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=-\frac{3}{2}$

답 ①

2 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 부채꼴의 호의 길이는 8π이고, 중심각의 크기는 $\frac{4}{5}\pi$이므로

$8\pi=r\times\frac{4}{5}\pi$

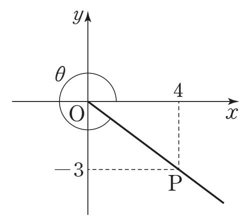
$r=8\pi\times\frac{5}{4\pi}=10$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times10\times8\pi=40\pi$

답 ⑤

3



점 $\mathrm{P}(4,\ -3)$에 대하여

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$이므로

$\sin\theta=-\frac{3}{5}$, $\cos\theta=\frac{4}{5}$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

답 ③

4 $\sin\theta=\frac{\sqrt{11}}{6}$이므로

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$=1-\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2$

$=\frac{25}{36}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\frac{5}{6}$

따라서

$\cos\theta\times\tan^2\theta=\cos\theta\times\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$

$=\frac{\frac{11}{36}}{-\frac{5}{6}}=-\frac{11}{30}$

답 ④

5 이차방정식 $3x^2-\sqrt{3}x+a=0$의 두 실근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ...... ㉠

$\sin\theta\times\cos\theta=\frac{a}{3}$ ...... ㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\times\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{3}$

$1+2\sin\theta\times\cos\theta=\frac{1}{3}$

$\sin\theta\times\cos\theta=-\frac{1}{3}$ ...... ㉢

㉡, ㉢에서

$\frac{a}{3}=-\frac{1}{3}$

따라서 $a=-1$

답 ②

6 함수 $y=a\sin bx+1$의 그래프는 함수 $y=a\sin bx$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$a>0$이므로 함수 $y=a\sin bx+1$은

$\sin bx=1$일 때 최댓값 $a+1$을 갖고,

$\sin bx=-1$일 때 최솟값 $-a+1$을 갖는다.

즉, $a+1=3$, $-a+1=-1$이므로

$a=2$

한편 함수 $y=a\sin bx+1$의 주기가 $\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{3}$

$|b|=3$

$b>0$이므로

$b=3$

따라서 $a+b=2+3=5$

답 ③

7 $\sin\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)=-\sin\frac{\pi}{5}$

$\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=-\cos\frac{\pi}{5}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{\pi}{5}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)=-\sin\frac{\pi}{5}$

따라서

$\left\{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)\right\}^2$

$+\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}\right)\right\}^2$

$=\left(-\sin\frac{\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{5}\right)^2$

$=\left(\sin^2\frac{\pi}{5}+2\sin\frac{\pi}{5}\times\cos\frac{\pi}{5}+\cos^2\frac{\pi}{5}\right)$

$+\left(\cos^2\frac{\pi}{5}-2\sin\frac{\pi}{5}\times\cos\frac{\pi}{5}+\sin^2\frac{\pi}{5}\right)$

$=\left(1+2\sin\frac{\pi}{5}\times\cos\frac{\pi}{5}\right)+\left(1-2\sin\frac{\pi}{5}\times\cos\frac{\pi}{5}\right)$

$=2$

답 ④

8 $2\sin^2 x+\sin x-1=0$에서

$(2\sin x-1)(\sin x+1)=0$

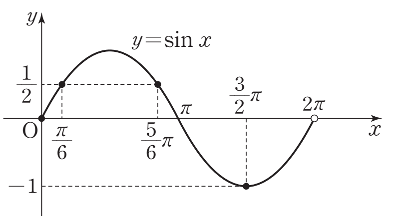
$\sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=-1$

(i) $\sin x=\frac{1}{2}$일 때

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

(ii) $\sin x=-1$일 때

$x=\frac{3}{2}\pi$



(i), (ii)에서 구하는 모든 실근의 합은

$\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi+\frac{3}{2}\pi=\frac{5}{2}\pi$

답 ③

9 부등식 $\cos^2 x-\sin^2 x-3\cos x-1>0$에서

$\sin^2 x=1-\cos^2 x$이므로

$\cos^2 x-(1-\cos^2 x)-3\cos x-1>0$

$2\cos^2 x-3\cos x-2>0$

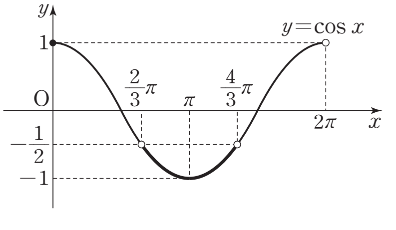
$(2\cos x+1)(\cos x-2)>0$

이때 $\cos x-2<0$이므로

$2\cos x+1<0$

$\cos x<-\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}\pi<x<\frac{4}{3}\pi$



따라서 $\alpha=\frac{2}{3}\pi$, $\beta=\frac{4}{3}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\frac{2}{3}\pi$

답 ②

Level 2 기본 연습

본문 50~52쪽

1 ③	2 ④	3 ④	4 ②	5 ②
6 ②	7 ③	8 ①	9 ⑤	10 8
11 ⑤	12 ⑤			

1 조건 (가)에서 $\sin\theta\times\cos\theta<0$이므로

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$

조건 (나)에서 각 θ가 나타내는 동경과 각 6θ가 나타내는 동경이 서로 일치하므로

$6\theta-\theta=2n\pi$ (단, n은 정수)

즉, $\theta=\frac{2n}{5}\pi$

$n\leq 0$일 때, $\theta\leq 0$

$n=1$일 때, $\theta=\frac{2}{5}\pi$

$n=2$일 때, $\theta=\frac{4}{5}\pi$

$n=3$일 때, $\theta=\frac{6}{5}\pi$

$n=4$일 때, $\theta=\frac{8}{5}\pi$

$n\geq 5$일 때, $\theta\geq 2\pi$

따라서 $\theta=\frac{4}{5}\pi$ 또는 $\theta=\frac{8}{5}\pi$이므로

구하는 모든 θ의 값의 합은

$\frac{4}{5}\pi+\frac{8}{5}\pi=\frac{12}{5}\pi$

답 ③

2 부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r, $\angle\text{BOA}=\theta$라 하자.

부채꼴 OAB의 호의 길이가 2π, 넓이는 8π이므로

$8\pi=\frac{1}{2}\times r\times 2\pi$에서

$r=8$

또 $2\pi=8\times\theta$에서

$\theta=\frac{\pi}{4}$

직각삼각형 OAC에서

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\overline{\text{OC}}}{\overline{\text{OA}}}$

즉, $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\overline{\text{OC}}}{8}$이므로

$\overline{\text{OC}}=4\sqrt{2}$

따라서 호 CD의 길이는

$4\sqrt{2}\times\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\pi$

답 ④

3 $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{5}{2}$에서

$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$

$=\frac{2(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$

$=\frac{2}{\sin\theta}$

이므로 $\frac{2}{\sin\theta}=\frac{5}{2}$

즉, $\sin\theta=\frac{4}{5}$

이때

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2$

$=\frac{9}{25}$

이고, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\frac{3}{5}$

따라서 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$

답 ④

4 직선 $y=2x+6$에서

$x=0$일 때 $y=6$,

$y=0$일 때 $x=-3$

이므로 두 점 A, B의 좌표는 각각

$(-3, 0)$, $(0, 6)$이다.

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\frac{2\times0+1\times(-3)}{2+1}, \frac{2\times6+1\times0}{2+1}\right)$
즉, $(-1, 4)$
이때 $\overline{OP}=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}$이므로
$\sin\theta=\frac{4}{\sqrt{17}}$, $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$
따라서
$\sin\theta\times\cos\theta=\frac{4}{\sqrt{17}}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$
$=-\frac{4}{17}$

답 ②

5 $2\sin\theta+a\cos\theta=\frac{4\sqrt{5}}{3}$의 양변을 제곱하면
$4\sin^2\theta+4a\sin\theta\times\cos\theta+a^2\cos^2\theta=\frac{80}{9}$ …… ㉠
$a\sin\theta-2\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면
$a^2\sin^2\theta-4a\sin\theta\times\cos\theta+4\cos^2\theta=\frac{1}{9}$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면
$(a^2+4)\sin^2\theta+(a^2+4)\cos^2\theta=9$
$(a^2+4)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=9$
이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로
$a^2+4=9$
따라서 $a^2=5$

답 ②

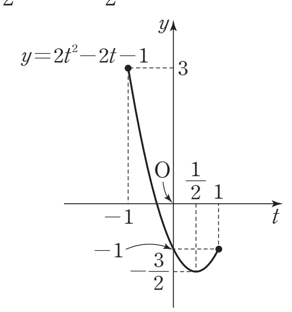
6 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=4$에서
$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\times\cos\theta}$
$=\frac{1}{\sin\theta\times\cos\theta}$
이므로
$\frac{1}{\sin\theta\times\cos\theta}=4$
즉, $\sin\theta\times\cos\theta=\frac{1}{4}$
한편 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이
$2\sin^2\theta$, $2\cos^2\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$a=2\sin^2\theta+2\cos^2\theta$
$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$
$=2$
$b=2\sin^2\theta\times2\cos^2\theta$
$=4\times(\sin\theta\times\cos\theta)^2$
$=4\times\left(\frac{1}{4}\right)^2$
$=\frac{1}{4}$
따라서 $ab=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

답 ②

7 함수 $f(x)=a\sin 2x+1$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{12}, 3\right)$을 지나므로
$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=a\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)+1=3$에서
$a\sin\frac{\pi}{6}+1=3$
$\frac{1}{2}a+1=3$
$a=4$
이때 $f(x)=4\sin 2x+1$이므로
함수 $y=f(x)$는 $\sin 2x=1$일 때 최댓값을 갖는다.
따라서 구하는 최댓값은
$4+1=5$

답 ③

8 $f(x)=\cos^2x-\sin^2x+2\cos(\pi+x)$
$=\cos^2x-(1-\cos^2x)-2\cos x$
$=2\cos^2x-2\cos x-1$
이때 $\cos x=t$ $(-1\le t\le1)$이라 하면
$f(x)=2t^2-2t-1$
$=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$
이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 $t=-1$일 때 3이고,
최솟값은 $t=\frac{1}{2}$일 때 $-\frac{3}{2}$이다.



따라서 $M=3$, $m=-\frac{3}{2}$이므로

$M-m=3-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{2}$

답 ①

9 직선 $y=2x$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(1, 2)$에 대하여 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 하면

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이므로

$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$

한편

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

따라서

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\times\cos(\pi+\theta)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\times\sin(\pi-\theta)$

$=\cos\theta\times(-\cos\theta)-(-\sin\theta)\times\sin\theta$

$=-\cos^2\theta+\sin^2\theta$

$=-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2$

$=\frac{3}{5}$

답 ⑤

10 방정식 $\log_3(\tan x)=\log_2\sqrt{2}$에서

(i) $\tan x>0$

이때 $0\le x<2\pi$이므로

$0<x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\pi<x<\frac{3}{2}\pi$

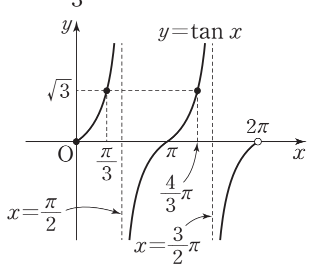
(ii) $\log_2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$이므로

$\log_3(\tan x)=\frac{1}{2}$

$\tan x=3^{\frac{1}{2}}$

$\tan x=\sqrt{3}$

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$



(i), (ii)에서

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

주어진 방정식의 모든 해의 합은

$\frac{\pi}{3}+\frac{4}{3}\pi=\frac{5}{3}\pi$

따라서 $p=3$, $q=5$이므로

$p+q=8$

답 8

11 방정식 $\tan^2 x-2\sin^2 x=0$에서

$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-2\sin^2 x=0$

$\sin^2 x\times(1-2\cos^2 x)=0$

$\sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(i) $\sin x=0$일 때

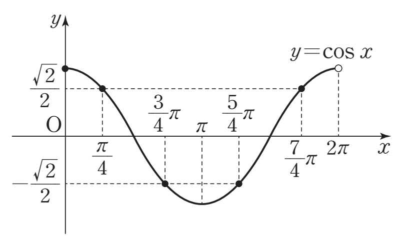
$x=0$ 또는 $x=\pi$

(ii) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

(iii) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때

$x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{4}\pi$



(i), (ii), (iii)에서 구하는 모든 해의 합은

$0+\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{7}{4}\pi+\frac{3}{4}\pi+\frac{5}{4}\pi=5\pi$

답 ⑤

12 모든 실수 x에 대하여 부등식

$x^2-(2\cos\theta)x-\sin^2\theta-2\cos\theta+2\ge0$

이 항상 성립하려면

이차방정식 $x^2-(2\cos\theta)x-\sin^2\theta-2\cos\theta+2=0$의 판별식을 D라 할 때, $D\le0$이어야 한다.

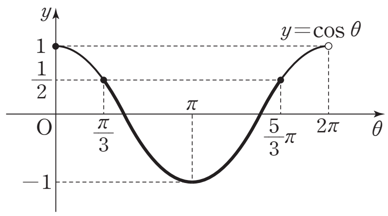
$\frac{D}{4}=(-\cos\theta)^2+\sin^2\theta+2\cos\theta-2\le0$에서

$\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\cos\theta-2\le0$

$1+2\cos\theta-2\le 0$

$\cos\theta\le\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{5}{3}\pi$



따라서 $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{5}{3}\pi$이므로

$4\alpha+\beta=4\times\frac{\pi}{3}+\frac{5}{3}\pi$

$=3\pi$

답 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 53쪽

1 8 **2** ④ **3** ⑤ **4** 26

1 함수 $y=2^{x-2}+4$에서 x와 y를 서로 바꾸면

$x=2^{y-2}+4$

$x-4=2^{y-2}$

$y=\log_2(x-4)+2$

즉, $f(x)=\log_2(x-4)+2$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=4$

함수 $y=\tan\frac{\pi}{a}x$의 주기는 $\frac{\pi}{\left|\frac{\pi}{a}\right|}$에서 $a>0$이므로

$\frac{\pi}{\frac{\pi}{a}}=a$

이때 함수 $y=\tan\frac{\pi}{a}x$의 그래프의 점근선 중 제1사분면을 지나는 점근선은

$x=\frac{a}{2}$, $x=\frac{3a}{2}$, $x=\frac{5a}{2}$, $\cdots$

이므로 $\frac{a}{2}=4$일 때 a의 값은 최대이다.

따라서 a의 최댓값은 8이다.

답 8

2 함수 $y=2\sin\frac{\pi}{2}x$의 그래프의 주기는

$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$

두 점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{4}{3}$이므로

$x_2=x_1+\frac{4}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉠

함수 $y=2\sin\frac{\pi}{2}x$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$\frac{x_1+x_2}{2}=1$

$x_1+x_2=2$

이 식에 ㉠을 대입하면

$x_1+\left(x_1+\frac{4}{3}\right)=2$

$2x_1=\frac{2}{3}$

$x_1=\frac{1}{3}$

$x_1=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$x_2=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$

$x_1=\frac{1}{3}$일 때 $y=2\sin\frac{\pi}{6}=1$,

$x_2=\frac{5}{3}$일 때 $y=2\sin\frac{5}{6}\pi=1$

이므로 두 점 A, B의 좌표는 각각

$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$, $\left(\frac{5}{3}, 1\right)$

이다.

따라서

$\overline{\mathrm{OA}}^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2+1^2=\frac{10}{9}$,

$\overline{\mathrm{OB}}^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2+1^2=\frac{34}{9}$

이므로

$\left(\frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OA}}}\right)^2=\frac{\overline{\mathrm{OB}}^2}{\overline{\mathrm{OA}}^2}=\frac{\frac{34}{9}}{\frac{10}{9}}$

$=\frac{17}{5}$

답 ④

3 $|\sin 2x|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$에서

$2x=t\ (0\le t<4\pi)$로 놓으면

$|\sin t|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $\sin t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(i) $\sin t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$일 때

함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$은 서로 다른 네 점에서 만나므로 방정식 $\sin t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

이때 네 실근을 각각 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4\ (\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\alpha_4)$라 하면

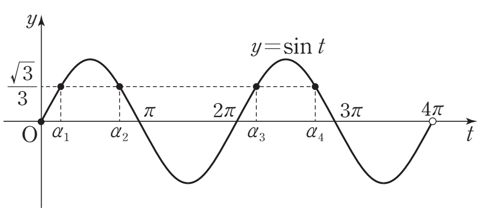
$\alpha_1+\alpha_2=\pi,\ \alpha_3+\alpha_4=5\pi$

$x=\dfrac{t}{2}$이므로 방정식 $\sin 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$의 해는

$\dfrac{\alpha_1}{2},\ \dfrac{\alpha_2}{2},\ \dfrac{\alpha_3}{2},\ \dfrac{\alpha_4}{2}$

이고, 그 합은

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2}+\frac{\alpha_3}{2}+\frac{\alpha_4}{2}&=\frac{\pi}{2}+\frac{5}{2}\pi\\&=3\pi\end{aligned}$$



(ii) $\sin t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$일 때

함수 $y=\sin t$의 그래프와 직선 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$은 서로 다른 네 점에서 만나므로 방정식 $\sin t=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

이때 네 실근을 각각 $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4\ (\beta_1<\beta_2<\beta_3<\beta_4)$라 하면

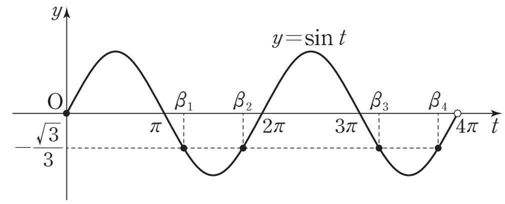
$\beta_1+\beta_2=3\pi,\ \beta_3+\beta_4=7\pi$

$x=\dfrac{t}{2}$이므로 방정식 $\sin 2x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$의 해는

$\dfrac{\beta_1}{2},\ \dfrac{\beta_2}{2},\ \dfrac{\beta_3}{2},\ \dfrac{\beta_4}{2}$

이고, 그 합은

$$\begin{aligned}\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{2}+\frac{\beta_3}{2}+\frac{\beta_4}{2}&=\frac{3}{2}\pi+\frac{7}{2}\pi\\&=5\pi\end{aligned}$$



(i), (ii)에서 주어진 방정식의 서로 다른 해의 개수는 8이고, 모든 해의 합은

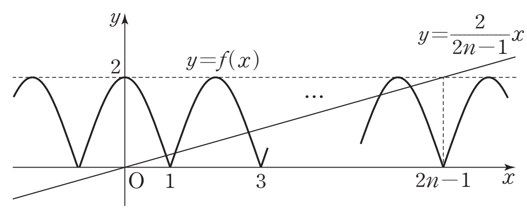
$3\pi+5\pi=8\pi$

따라서 $a=8,\ b=8$이므로

$a+b=16$

답 ⑤

4 두 조건 (가), (나)에서 함수 $f(x)$는 주기가 2이고, 그 그래프는 다음 그림과 같다.



$0\le x\le 2n-1$에서

방정식 $(2n-1)f(x)=2x$, 즉 $f(x)=\dfrac{2}{2n-1}x$의 서로 다른 실근의 개수는 $0\le x\le 2n-1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{2}{2n-1}x$가 만나는 점의 개수와 같다.

이때 직선 $y=\dfrac{2}{2n-1}x$는 원점과 점 $(2n-1,\ 2)$를 지난다.

$0\le x<1$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{2}{2n-1}x$는 한 점에서 만난다.

2 이상의 자연수 $m\ (2\le m\le n)$에 대하여 $2m-3\le x<2m-1$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{2}{2n-1}x$는 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{2}{2n-1}x$의 교점의 개수는 $2n-1$이므로

$2n-1=51$

$n=26$

답 26

04 사인법칙과 코사인법칙

유제 본문 57~63쪽

1 ③	**2** 12	**3** ⑤	**4** ③	**5** ⑤
6 ③	**7** ②	**8** 8		

1 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 1이므로
사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{CA}}{\sin B}=\frac{\overline{AB}}{\sin C}$$
$$=2\times1$$
$$=2$$

따라서 $\sin A=\frac{\overline{BC}}{2}$, $\sin B=\frac{\overline{CA}}{2}$, $\sin C=\frac{\overline{AB}}{2}$이므로

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{\overline{BC}}{2}+\frac{\overline{CA}}{2}+\frac{\overline{AB}}{2}$$
$$=\frac{\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB}}{2}$$
$$=\frac{3}{2}$$

답 ③

2 $A+B+C=180^\circ$이므로 조건 (가)에서

$$\sin A\times\sin(180^\circ-A)=\frac{9}{25}$$

$\sin A\times\sin A=\frac{9}{25}$이고, $0^\circ<A<180^\circ$이므로

$$\sin A=\frac{3}{5}$$

따라서 조건 (나)에서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 10이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=2\times10$$
$$\overline{BC}=20\sin A$$
$$=20\times\frac{3}{5}$$
$$=12$$

답 12

3 $3\overline{AB}^2+3\overline{CA}^2=3\overline{BC}^2+2\times\overline{AB}\times\overline{CA}$에서

$$\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-\overline{BC}^2=\frac{2}{3}\times\overline{AB}\times\overline{CA} \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 $\angle CAB=\theta$라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{CA}\times\cos\theta$$
$$2\times\overline{AB}\times\overline{CA}\times\cos\theta=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-\overline{BC}^2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$2\times\overline{AB}\times\overline{CA}\times\cos\theta=\frac{2}{3}\times\overline{AB}\times\overline{CA}$$

이므로 $\cos\theta=\frac{1}{3}$

따라서

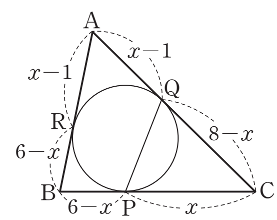
$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이므로

$$\tan(\angle CAB)=\tan\theta$$
$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$=\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}}$$
$$=2\sqrt{2}$$

답 ⑤

4 $\overline{CP}=\overline{CQ}$이므로 삼각형 PCQ는 이등변삼각형이다.



$\overline{CP}=x$로 놓으면

$\overline{BP}=6-x$

이때 삼각형 ABC에 내접하는 원이 선분 AB와 만나는 점을 R라 하면

$\overline{BR}=6-x$이므로

$$\overline{AR}=5-(6-x)$$
$$=x-1$$

$\overline{AQ}=x-1$이므로

$$\overline{CQ}=7-(x-1)$$
$$=8-x$$

$\overline{CP}=\overline{CQ}$에서

$$x=8-x$$
$$2x=8$$

$x=4$
한편 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\cos C$
$5^2=6^2+7^2-2\times6\times7\times\cos C$
$\cos C=\frac{6^2+7^2-5^2}{2\times6\times7}$
$=\frac{5}{7}$
따라서 삼각형 PCQ에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{PQ}^2=\overline{CP}^2+\overline{CQ}^2-2\times\overline{CP}\times\overline{CQ}\times\cos C$
$=4^2+4^2-2\times4\times4\times\frac{5}{7}$
$=16+16-\frac{160}{7}$
$=\frac{64}{7}$
이므로
$\overline{PQ}=\sqrt{\frac{64}{7}}=\frac{8\sqrt{7}}{7}$

답 ③

5 $\cos^2(A+B)+(\sin A+\cos B)(\sin A-\cos B)$
$=\cos^2(180°-C)+(\sin^2 A-\cos^2 B)$
$=\cos^2 C+\sin^2 A-\cos^2 B$
$=(1-\sin^2 C)+\sin^2 A-(1-\sin^2 B)$
$=-\sin^2 C+\sin^2 A+\sin^2 B$
한편 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여
$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$이므로
$-\left(\frac{c}{2R}\right)^2+\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2=0$
따라서 $a^2+b^2=c^2$이므로 삼각형 ABC는
$\angle C=90°$인 직각삼각형이다.

답 ⑤

6 코사인법칙에 의하여
$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,
$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$
이므로
$a\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=b\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+c$
$\frac{c^2+a^2-b^2}{2c}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}+c$
이 식의 양변에 $2c$를 곱하면
$c^2+a^2-b^2=b^2+c^2-a^2+2c^2$
이 식을 정리하면
$a^2=b^2+c^2$
따라서 삼각형 ABC는 $\angle A=90°$인 직각삼각형이다.

답 ③

7 삼각형 ABC에서 $A+B+C=180°$이므로
$\sin(B+C)=\sin(180°-A)$
$=\sin A$
즉, $\sin A=\frac{1}{3}$
따라서 삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A=\frac{1}{2}\times6\times9\times\frac{1}{3}$
$=9$

답 ②

8 등변사다리꼴 ABCD에서 $\overline{AC}=\overline{BD}$이므로
조건 (나)에서 사각형 ABCD의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin60°=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AC}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$
$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\overline{AC}^2$
조건 (가)에서
$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\overline{AC}^2=16\sqrt{3}$
따라서 $\overline{AC}^2=64$이므로
$\overline{AC}=8$

답 8

Level 1 기초 연습

본문 64~65쪽

1 ⑤	2 ①	3 ⑤	4 3	5 ②
6 ③	7 ④	8 61		

1 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면
$\pi R^2=3\pi$에서
$R=\sqrt{3}$
$\angle BCA=\theta$라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin\theta}=2\times\sqrt{3}$

즉, $\sin\theta=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

답 ⑤

2 삼각형 ABC에서

$\cos B=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$이므로

$\sin B=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}$

$=\dfrac{1}{4}$

$\cos C=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$이므로

$\sin C=\sqrt{1-\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}$

$=\dfrac{1}{3}$

따라서 사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}$이므로

$\dfrac{\overline{AC}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{8}{\frac{1}{3}}$에서

$4\times\overline{AC}=24$

즉, $\overline{AC}=6$

답 ①

3 삼각형 ABC에서 $A=120^\circ$, $B=15^\circ$이므로

$C=180^\circ-(120^\circ+15^\circ)$

$=45^\circ$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=2R$

$\dfrac{6}{\sin 45^\circ}=2R$

$6\sqrt{2}=2R$

$R=3\sqrt{2}$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$\pi\times(3\sqrt{2})^2=18\pi$

답 ⑤

4 점 P가 삼각형 OAB의 외접원의 중심이므로

이 원의 반지름의 길이는 $\overline{OP}$이다.

또 직선 $y=\sqrt{3}x$가 x축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기가 60°이므로

$\angle BOA=30^\circ$

이때 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin(\angle BOA)}=2\times\overline{OP}$

따라서 $\dfrac{3}{\frac{1}{2}}=2\times\overline{OP}$에서

$\overline{OP}=3$

답 3

5 선분 CA의 길이가 최대이므로

$\angle B=\theta$

양수 k에 대하여 $\overline{AB}=3k$, $\overline{BC}=4k$, $\overline{CA}=6k$라 하면

코사인법칙에 의하여

$\overline{CA}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos\theta$

$(6k)^2=(3k)^2+(4k)^2-2\times3k\times4k\times\cos\theta$

따라서

$\cos\theta=\dfrac{(3k)^2+(4k)^2-(6k)^2}{2\times3k\times4k}$

$=\dfrac{-11k^2}{24k^2}$

$=-\dfrac{11}{24}$

답 ②

6 삼각형 PQR에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{PR}^2=\overline{PQ}^2+\overline{QR}^2-2\times\overline{PQ}\times\overline{QR}\times\cos(\angle PQR)$

$=3^2+4^2-2\times3\times4\times\dfrac{1}{2}$

$=13$

이므로

$\overline{PR}=\sqrt{13}$

이때 원 C의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{PR}}{\sin(\angle PQR)}=2R$

$\dfrac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$에서

$R=\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$

따라서 원 C의 넓이는

$\pi\times\left(\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{13}{3}\pi$

답 ③

7 $\frac{\sin A}{5}=\frac{\sin B}{6}=\frac{\sin C}{7}$에서

$\sin A : \sin B : \sin C=5 : 6 : 7$

또 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$ 이므로

$a : b : c=\sin A : \sin B : \sin C$
$=5 : 6 : 7$

이때 양수 k에 대하여 $a=5k$, $b=6k$, $c=7k$로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$이므로

$(5k)^2=(6k)^2+(7k)^2-2\times 6k\times 7k\times\cos A$

$$\cos A=\frac{(6k)^2+(7k)^2-(5k)^2}{2\times 6k\times 7k}=\frac{60k^2}{84k^2}=\frac{5}{7}$$

따라서

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$$

이므로

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\frac{2\sqrt{6}}{7}}{\frac{5}{7}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

답 ④

8 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin(\angle ABC)$

$=\frac{1}{2}\times 4\times\overline{BC}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sqrt{3}\times\overline{BC}$

이므로

$\sqrt{3}\times\overline{BC}=5\sqrt{3}$에서

$\overline{BC}=5$

따라서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos(\angle ABC)$

$=4^2+5^2-2\times4\times5\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=16+25+20$

$=61$

답 61

Level 2 기본 연습

본문 66~67쪽

1 32	2 ④	3 ④	4 103	5 ⑤
6 8	7 ⑤	8 ③		

1 삼각형 POQ에서 $\angle POQ=45°$이므로

삼각형 POQ의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{PQ}}{\sin(\angle POQ)}=2R$

$\frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2R$에서

$R=2\sqrt{2}$

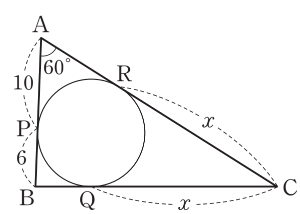
즉, 두 점 P, Q의 위치에 상관없이 삼각형 POQ의 외접원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$로 일정하다.

따라서 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원에 내접하는 삼각형의 한 변의 길이의 최댓값은 지름의 길이와 같으므로 선분 OP의 길이의 최댓값은 $4\sqrt{2}$이다.

즉, $M^2=(4\sqrt{2})^2=32$

답 32

2 삼각형 ABC에 내접하는 원이 선분 BC와 만나는 점을 Q, 선분 CA와 만나는 점을 R라 하자.



$\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{CR}}=x$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}=16\times\frac{5}{8}=10$,

$\overline{\mathrm{BP}}=16\times\frac{3}{8}=6$

이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=6+x$, $\overline{\mathrm{AC}}=10+x$

이때 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos 60^\circ$

$(6+x)^2=16^2+(10+x)^2-2\times16\times(10+x)\times\frac{1}{2}$

$36+12x+x^2=256+100+20x+x^2-160-16x$

$8x=160$

따라서 $x=20$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=6+20$

$=26$

답 ④

3 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin A}=\frac{\overline{\mathrm{CA}}}{\sin B}=2R$

이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=2R\sin A$

$\overline{\mathrm{CA}}=2R\sin B$

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{CA}}\times\sin C$

$=\frac{1}{2}\times2R\sin A\times2R\sin B\times\sin C$

$=2R^2\sin A\times\sin B\times\sin C$

따라서 삼각형 ABC의 넓이가 $8\sqrt{3}$이고, 외접원의 반지름의 길이가 4이므로

$8\sqrt{3}=2\times4^2\times\sin A\times\sin B\times\sin C$에서

$\sin A\times\sin B\times\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}$

답 ④

4 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CA}}\times\cos A$

$7^2=6^2+3^2-2\times6\times3\times\cos A$에서

$\cos A=-\frac{1}{9}$

이때

$\sin^2 A=1-\cos^2 A$

$=1-\left(-\frac{1}{9}\right)^2$

$=\frac{80}{81}$

이고, $0^\circ<A<180^\circ$이므로

$\sin A=\frac{4\sqrt{5}}{9}$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin A}=2R$이므로

$2R=\frac{7}{\frac{4\sqrt{5}}{9}}$

$=\frac{63}{4\sqrt{5}}=\frac{63\sqrt{5}}{20}$

$R=\frac{63\sqrt{5}}{40}$

즉,

$p+q=40+63$

$=103$

답 103

5 호의 길이의 비가 2 : 7 : 3이므로

중심각의 크기의 비가 2 : 7 : 3이고,

원주각의 크기의 비도 2 : 7 : 3이다.

즉,

$\angle\mathrm{BCA}=180^\circ\times\frac{2}{12}$

$=30^\circ$

$\angle\mathrm{CAB}=180^\circ\times\frac{7}{12}$

$=105^\circ$

$\angle\mathrm{ABC}=180^\circ\times\frac{3}{12}$

$=45^\circ$

따라서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin(\angle\mathrm{BCA})}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\angle\mathrm{ABC})}$

이므로

$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin 30^\circ}=\frac{5\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$

즉, $\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\frac{1}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$에서

$\overline{\mathrm{AB}}=5$

답 ⑤

6 (ⅰ) 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AB}}{2R}=\sin C$이므로

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\sin C$

$=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\frac{\overline{AB}}{2R}$

$=\frac{\overline{AB}\times\overline{BC}\times\overline{CA}}{4R}$

조건 (가)에서

$\frac{35}{4R}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

$4R=\frac{70}{5\sqrt{3}}$

$=\frac{14\sqrt{3}}{3}$

즉, $R=\frac{7\sqrt{3}}{6}$

(ⅱ) 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하고, 내접원의 중심을 O라 하면 삼각형 ABC의 넓이는 세 삼각형 OAB, OBC, OCA의 넓이의 합과 같다. 즉, 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times r+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times r+\frac{1}{2}\times\overline{CA}\times r$

$=r\times\frac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}}{2}$

조건 (나)에서

$r\times\frac{10}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

즉, $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$R+r=\frac{7\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$이므로

$p+q=3+5$

$=8$

답 8

7 길이가 각각 5, 9인 두 변 사이의 끼인 각의 크기를 θ라 하면

$S=\frac{1}{2}\times5\times9\times\sin\theta$

$=\frac{45}{2}\sin\theta$

이때 $0<\sin\theta\le1$이므로

$0<S\le\frac{45}{2}$

따라서 자연수 S의 값은

1, 2, 3, $\cdots$, 22

이고, 그 개수는 22이다.

답 ⑤

8 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos120^\circ$

$=7^2+8^2-2\times7\times8\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=49+64+56$

$=169$

이므로

$\overline{AC}=13$

이때 삼각형 ACD에서 $\angle CDA=\theta$라 하면

코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{CD}^2+\overline{DA}^2-2\times\overline{CD}\times\overline{DA}\times\cos\theta$

$13^2=9^2+11^2-2\times9\times11\times\cos\theta$에서

$\cos\theta=\frac{9^2+11^2-13^2}{2\times9\times11}$

$=\frac{1}{6}$

이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{6}\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{35}}{6}$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는 두 삼각형 ABC, ACD의 넓이의 합과 같으므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin120^\circ+\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{DA}\times\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\times7\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times9\times11\times\frac{\sqrt{35}}{6}$

$=14\sqrt{3}+\frac{33}{4}\sqrt{35}$

즉,

$p-q=14-\frac{33}{4}$

$=\frac{23}{4}$

답 ③

Level 3 실력 완성 본문 68쪽

1 305	**2** 8	**3** ①

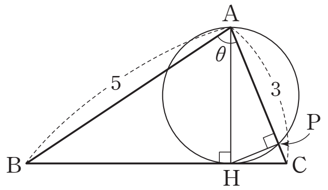
1 두 원 C_2, C_3의 반지름의 길이를 각각 a, b라 하면
$\overline{O_1O_2}=10+a$
$\overline{O_2O_3}=a+b$
$\overline{O_3O_1}=b+10$
삼각형 $O_1O_2O_3$이 직각삼각형이므로
$\overline{O_1O_2}^2+\overline{O_2O_3}^2=\overline{O_3O_1}^2$
$(10+a)^2+(a+b)^2=(b+10)^2$
$100+20a+a^2+a^2+2ab+b^2=b^2+20b+100$
$2a^2+20a+2ab=20b$
$a^2+10a+ab=10b$ …… ㉠
또 삼각형 $O_1O_2O_3$의 넓이가
$\frac{1}{2}\times\overline{O_1O_2}\times\overline{O_2O_3}=\frac{1}{2}\times(10+a)\times(a+b)$
이고, 삼각형 $O_1O_2O_3$의 넓이가 30이므로
$\frac{1}{2}\times(10+a)\times(a+b)=30$
정리하면
$a^2+10a+ab=60-10b$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$10b=60-10b$이므로
$20b=60$
$b=3$
㉠에 $b=3$을 대입하면
$a^2+10a+3a=30$
$a^2+13a-30=0$
$(a+15)(a-2)=0$
$a=-15$ 또는 $a=2$
$a>0$이므로
$a=2$
한편 삼각형 $O_1O_2O_3$에서 $\angle O_3O_1O_2=\theta$라 하면
$\cos\theta=\frac{\overline{O_1O_2}}{\overline{O_3O_1}}$
$=\frac{10+a}{b+10}$
$=\frac{12}{13}$
이므로 삼각형 AO_1O_2에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{O_2A}^2=\overline{O_1A}^2+\overline{O_1O_2}^2-2\times\overline{O_1A}\times\overline{O_1O_2}\times\cos\theta$
$=10^2+12^2-2\times10\times12\times\frac{12}{13}$
$=\frac{292}{13}$
따라서
$p+q=13+292$
$=305$

답 305

2 $\overline{OA}=\overline{OB}=r$라 하고, $0<t<1$인 실수 t에 대하여
$\overline{OP}=tr$라 하면
$\overline{AP}=(1-t)r$
조건 (가)에서
$\frac{\overline{BQ}}{\overline{OQ}}=\frac{\overline{OP}}{\overline{AP}}$이므로
$\overline{BQ}:\overline{OQ}=\overline{OP}:\overline{AP}$
$=t:(1-t)$
즉, $\overline{BQ}=tr$, $\overline{OQ}=(1-t)r$
한편 부채꼴 AOB의 넓이는
$\frac{1}{2}\times r^2\times\frac{5\pi}{6}=\frac{5\pi}{12}\times r^2$
또 삼각형 POQ의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{OQ}\times\sin 150^\circ=\frac{1}{2}\times tr\times(1-t)r\times\frac{1}{2}$
$=\frac{t(1-t)}{4}\times r^2$
이때 조건 (나)에서
$\frac{\frac{5\pi}{12}\times r^2}{\frac{t(1-t)}{4}\times r^2}=\frac{125\pi}{18}$이므로
$\frac{5\pi}{3t(1-t)}=\frac{125\pi}{18}$
이 식을 정리하면
$25t^2-25t+6=0$
$(5t-2)(5t-3)=0$
$t=\frac{2}{5}$ 또는 $t=\frac{3}{5}$
$\overline{OP}>\overline{OQ}$이므로
$\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}=t=\frac{3}{5}$
따라서 $p=5$, $q=3$이므로
$p+q=5+3$
$=8$

답 8

3



삼각형 ABC에서 $\angle CAB=\theta$라 하면

코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\theta$

$=5^2+3^2-2\times5\times3\times\frac{1}{5}$

$=25+9-6$

$=28$

이므로

$\overline{BC}=2\sqrt{7}$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}$

$=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times5\times3\times\frac{2\sqrt{6}}{5}$

$=3\sqrt{6}$

이때 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}$이므로

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{7}\times\overline{AH}=3\sqrt{6}$

$\overline{AH}=\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$

따라서 삼각형 AHP에서 $\angle HPA=90°$이므로

삼각형 AHP와 삼각형 ACH는 서로 닮음이다.

$\overline{AP}:\overline{AH}=\overline{AH}:\overline{AC}$이므로

$\overline{AP}\times\overline{AC}=\overline{AH}^2$

$\overline{AP}\times3=\left(\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{7}}\right)^2$

따라서

$\overline{AP}=\frac{1}{3}\times\frac{54}{7}$

$=\frac{18}{7}$

답 ①

05 등차수열과 등비수열

유제 본문 73~79쪽

1 ①	**2** 54	**3** ②	**4** 4	**5** ③
6 8	**7** 143	**8** ⑤		

1 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_1+a_2=a_1+(a_1+d)=5$에서

$2a_1+d=5$ ...... ㉠

$a_3+a_4+a_5=30$에서

a_4는 a_3과 a_5의 등차중항이므로

$a_3+a_5=2a_4$

이때

$a_3+a_4+a_5=2a_4+a_4$

$=3a_4=30$

이므로 $a_4=10$에서

$a_1+3d=10$ ...... ㉡

$3\times$㉠$-$㉡을 하면

$5a_1=5$

$a_1=1$

$a_1=1$을 ㉠에 대입하면

$2+d=5$

$d=3$

따라서 $a_1=1$, $d=3$이므로

$a_6=1+5\times3$

$=16$

답 ①

2 세 수 1, $\log_4 a$, $3\log_2 3$은 이 순서대로 등차수열을 이루므로 등차중항의 성질에 의하여

$2\log_4 a=1+3\log_2 3$

이때

(좌변)$=2\log_4 a$

$=\log_2 a$

(우변)$=1+3\log_2 3$

$=\log_2 2+\log_2 3^3$

$=\log_2(2\times3^3)$

$=\log_2 54$

이므로

$\log_2 a = \log_2 54$

따라서 $a=54$

답 54

3 $S_9 = \frac{9(a_1+a_9)}{2} = \frac{9(a_1+23)}{2} = 351$에서

$a_1 = 55$

한편 세 수 a_1, a_5, a_9는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a_5 = \frac{a_1+a_9}{2}$

$= \frac{55+23}{2} = 39$

따라서

$S_5 = \frac{5(a_1+a_5)}{2}$

$= \frac{5(55+39)}{2}$

$= 235$

답 ②

4 첫째항이 2, 항의 개수가 $k+2$, 제$(k+2)$항이 12인 등차수열의 합이 112이므로

$\frac{(k+2)(2+12)}{2} = 112$

$7(k+2) = 112$

$k+2=16$, $k=14$

주어진 등차수열의 공차를 d라 하면

12는 제16항이므로

$12 = 2+15d$

$d = \frac{2}{3}$

따라서

$a_3 = 2+3d$

$= 2+3\times\frac{2}{3}$

$= 4$

답 4

5 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.

$a_1=3$이므로 $a_3+12=4a_2$에서

$3r^2+12=4\times 3r$

$r^2-4r+4=0$

$(r-2)^2=0$

$r=2$

따라서

$a_5-a_4 = 3\times 2^4 - 3\times 2^3$

$= 48-24$

$= 24$

답 ③

6 $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$2\sin\frac{3}{2}\pi = 2\times(-1)$

$= -2$

세 수 $\frac{1}{2}$, -2, k가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\frac{1}{2}\times k = (-2)^2$

따라서 $k=8$

답 8

7 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r>0)$이라 하자.

$a_2a_4 = a_3^{\,2}$이므로

$a_2a_3a_4 = 1$에서

$a_3^{\,3} = 1$

즉, $a_3=1$

이때 $a_1=4$이므로

$4r^2=1$

$r^2 = \frac{1}{4}$

$r>0$이므로

$r = \frac{1}{2}$

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7 = \frac{4\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right\}}{1-\frac{1}{2}}$

$= \frac{127}{16}$

따라서 $p=16$, $q=127$이므로

$p+q=143$

답 143

8 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.

$r=1$이면 $S_5 = 5a_1 = 8$에서

$a_1 = \frac{8}{5}$

이때 $S_{10} = 10a_1 = 16$이므로

$S_{10} \neq 80$

따라서 $r\neq1$

$S_5=\dfrac{a_1(r^5-1)}{r-1}$

$=8$ …… ㉠

$S_{10}=\dfrac{a_1(r^{10}-1)}{r-1}$

$=\dfrac{a_1(r^5-1)(r^5+1)}{r-1}$

$=80$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$8(r^5+1)=80$

$r^5=9$

따라서

$S_{15}=\dfrac{a_1(r^{15}-1)}{r-1}$

$=\dfrac{a_1(r^5-1)\{(r^5)^2+r^5+1\}}{r-1}$

$=8\times(9^2+9+1)$

$=728$

답 ⑤

Level 1 기초 연습

본문 80~81쪽

1 ⑤	2 ③	3 ⑤	4 ②	5 120
6 ③	7 ①	8 ②	9 ④	10 126

1 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_3=2+2d=14$에서

$d=6$

따라서 $a_6=2+5\times6=32$

답 ⑤

2 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_3-a_5=-2d=6$

$d=-3$

또 $a_{10}=a_1+9\times(-3)=17$에서

$a_1=44$

이때 $a_k=44+(k-1)\times(-3)<0$에서

$3k>47$

$k>\dfrac{47}{3}=15.66\cdots$

따라서 자연수 k의 최솟값은 16이다.

답 ③

3 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_2=a_1+d=8$ …… ㉠

$a_{10}-a_6=4d=12$에서

$d=3$

$d=3$을 ㉠에 대입하면

$a_1+3=8,\ a_1=5$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\dfrac{10\{2\times5+(10-1)\times3\}}{2}=185$

답 ⑤

4 $\dfrac{k\{2\times1+(k-1)\times4\}}{2}=91$에서

$2k^2-k-91=0$

$(k-7)(2k+13)=0$

이때 k는 자연수이므로

$k=7$

따라서 $a_7=1+6\times4=25$

답 ②

5 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_2=\dfrac{2(2a+d)}{2}$

$=2a+d=6$ …… ㉠

$S_4=\dfrac{4(2a+3d)}{2}$

$=4a+6d=28$

이므로

$2a+3d=14$ …… ㉡

㉡－㉠을 하면

$2d=8,\ d=4$

$d=4$를 ㉠에 대입하면

$2a+4=6,\ a=1$

따라서

$S_8=\dfrac{8\{2\times1+(8-1)\times4\}}{2}=120$

답 120

다른 풀이

$S_2=6,\ S_4=28$이므로

등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 0이 아니다.

$S_n=An^2+Bn$ (A, B는 상수)라 하면

$S_2=4A+2B=6$

즉, $2A+B=3$ …… ㉠

$S_4=16A+4B=28$
즉, $4A+B=7$ …… ㉡
㉡－㉠을 하면
$2A=4$, $A=2$
$A=2$를 ㉠에 대입하면
$4+B=3$, $B=-1$
따라서 $S_n=2n^2-n$이므로
$S_8=2\times8^2-8=120$

6 $a_1=S_1=4\times1^2-2\times1$
$=2$
$a_5=S_5-S_4$
$=(4\times5^2-2\times5)-(4\times4^2-2\times4)$
$=34$
따라서 $a_1+a_5=2+34=36$

답 ③

7 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면
$a_1=3$이므로
$a_2a_3=3r\times3r^2=72$
$9r^3=72$, $r^3=8$
$r=2$
따라서 $a_6=3\times2^5=96$

답 ①

8 세 수 x, y, 14는 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2y=x+14$ …… ㉠
세 수 1, $2x$, $y+8$은 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$(2x)^2=y+8$
$y=4x^2-8$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$2(4x^2-8)=x+14$
$8x^2-16=x+14$
$8x^2-x-30=0$
$(x-2)(8x+15)=0$
$x=2$ 또는 $x=-\frac{15}{8}$
이때 $x>0$이므로
$x=2$
$x=2$를 ㉡에 대입하면
$y=4\times2^2-8=8$
따라서 $x+y=2+8=10$

답 ②

9 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r>0)$이라 하면
$a_3=16\times r^2=4$에서
$r^2=\frac{1}{4}$
이때 $r>0$이므로
$r=\frac{1}{2}$
따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제6항까지의 합은
$$\frac{16\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{63}{2}$$

답 ④

10 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r>0)$이라 하자.
$r=1$이면
$S_2=2a_1$, $S_4=4a_1$
이때 $a_1>0$이므로 $S_4=2S_2$가 되어 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 $r\neq1$
$S_2=\frac{a_1(r^2-1)}{r-1}$
$=a_1(r+1)$
$S_4=\frac{a_1(r^4-1)}{r-1}$
$=\frac{a_1(r-1)(r+1)(r^2+1)}{r-1}$
$=a_1(r+1)(r^2+1)$
$S_4=6S_2$에서
$a_1(r+1)(r^2+1)=6a_1(r+1)$
이때 $a_1>0$, $r>0$이므로
$r^2+1=6$, $r^2=5$
따라서
$$\frac{S_{12}}{S_6}=\frac{\frac{a_1(r^{12}-1)}{r-1}}{\frac{a_1(r^6-1)}{r-1}}$$
$=\frac{r^{12}-1}{r^6-1}$
$=\frac{(r^6-1)(r^6+1)}{r^6-1}$
$=r^6+1$
$=(r^2)^3+1$
$=5^3+1$
$=126$

답 126

Level 2 기본 연습

본문 82~84쪽

1 ④	2 ⑤	3 ①	4 ⑤	5 ④
6 20	7 ②	8 ⑤	9 ③	10 ④
11 ③	12 ④	13 325	14 ④	15 ③

1 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_3=a_1-6$에서

$a_3-a_1=2d=-6$

$d=-3$

또 $|a_{10}|=|a_8|$에서

$|a_1+9\times(-3)|=|a_1+7\times(-3)|$

$|a_1-27|=|a_1-21|$

$a_1-27=a_1-21$ 또는 $a_1-27=-(a_1-21)$

이때 $a_1-27\neq a_1-21$이므로

$a_1-27=-(a_1-21)$에서

$2a_1=48$

$a_1=24$

따라서

$a_2=a_1+d$

$=24+(-3)$

$=21$

답 ④

2 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d_1, d_2라 하면

$a_n=a_1+(n-1)d_1$

$b_n=a_1+(n-1)d_2$

이때 $a_5=b_5+16$에서

$a_1+4d_1=(a_1+4d_2)+16$

$d_1-d_2=4$

따라서

$a_{10}-b_{10}$

$=(a_1+9d_1)-(a_1+9d_2)$

$=9(d_1-d_2)$

$=9\times4$

$=36$

답 ⑤

3 이차방정식 $x^2-4x-2=0$의 서로 다른 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-2$

세 수 α^3, k, β^3은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\alpha^3+\beta^3=2k$

따라서

$k=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{2}$

$=\dfrac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{2}$

$=\dfrac{4^3-3\times(-2)\times4}{2}$

$=44$

답 ①

4 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

a_2는 a_1과 a_3의 등차중항이므로

$a_1+a_2+a_3=3a_2$

$=3(a+d)$

$=-3$

$a+d=-1$ $\cdots\cdots$ ㉠

a_5는 a_4와 a_6의 등차중항이므로

$a_4+a_5+a_6=3a_5$

$=3(a+4d)$

$=24$

$a+4d=8$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡−㉠을 하면

$3d=9$

$d=3$

$d=3$을 ㉠에 대입하면

$a+3=-1$

$a=-4$

따라서

$a_n=-4+(n-1)\times3$

$=3n-7$

이므로

$a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}$

$=\dfrac{10(a_{11}+a_{20})}{2}$

$=5(26+53)$

$=395$

답 ⑤

5 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_5=a_1+4d=46$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a_{10}=a_1+9d=21$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면

$5d=-25$

$d=-5$

$d=-5$를 ㉠에 대입하면

$a_1-20=46$

$a_1=66$

$a_n=66+(n-1)\times(-5)$

$=-5n+71$

$a_n=-5n+71<0$에서

$n>\frac{71}{5}=14.2$

즉, $a_{15}<0<a_{14}$이므로

$n=14$일 때, S_n의 값이 최대이다.

따라서 구하는 최댓값은

$S_{14}=\frac{14\{2\times66+(14-1)\times(-5)\}}{2}$

$=469$

답 ④

6 $\log_2 2=1$

$\log_2 256=\log_2 2^8$

$=8$

등차수열 1, $\log_2 a_1$, $\log_2 a_2$, $\log_2 a_3$, $\cdots$, $\log_2 a_n$, 8의 합이 63이므로

$\frac{(n+2)(1+8)}{2}=63$

$9(n+2)=126$

$n+2=14$

$n=12$

이때 8은 제14항이므로 주어진 등차수열의 공차를 d라 하면

$8=1+(14-1)d$에서

$8=1+13d$

$d=\frac{7}{13}$

$\log_2 a_3-\log_2 a_1=2\times\frac{7}{13}$

$\log_2 \frac{a_3}{a_1}=\frac{14}{13}$

$\frac{a_3}{a_1}=2^{\frac{14}{13}}=4^{\frac{7}{13}}$

따라서 $p=13$, $q=7$이므로

$p+q=20$

답 20

7 두 집합 A, B가

$A=\{4n-3\,|\,n$은 자연수$\}$

$=\{1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, \cdots\}$

$B=\{3n+2\,|\,n$은 자연수$\}$

$=\{5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, \cdots\}$

이므로 집합 $A\cap B=\{5, 17, 29, \cdots\}$

한편 첫째항이 5이고 공차가 $17-5=12$인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=5+(n-1)\times12$

$=12n-7$

$a_n\le100$에서

$12n-7\le100$

$n\le\frac{107}{12}=8.91\cdots$

따라서 집합 $C=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$이므로

집합 C의 모든 원소의 합은

$\frac{8(2\times5+7\times12)}{2}=376$

답 ②

8 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_n=a_1+(n-1)d$

$S_{n+2}-S_n=8n$에서

$S_{n+2}-S_n=a_{n+2}+a_{n+1}$이므로

$a_{n+2}+a_{n+1}=8n$에서

$\{a_1+(n+1)d\}+(a_1+nd)=8n$

$(2d-8)n+(2a_1+d)=0$

이 등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립해야 하므로

$2d-8=0$

$2a_1+d=0$

따라서 $d=4$, $a_1=-2$이므로

$a_{10}=-2+9\times4$

$=34$

답 ⑤

9 $\log_2 a_1=1$에서

$a_1=2$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\log_2 a_5-\log_2 a_3=-2$에서

$\log_2 \frac{a_5}{a_3}=\log_2 r^2=-2$

$r^2=\frac{1}{4}$

이때 $r>0$이므로

$r=\frac{1}{2}$

따라서 $a_1a_3=2\times\left\{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}=1$

답 ③

10 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 r_1, r_2라 하면

$a_2b_2=r_1r_2\neq0$이므로

$r_1\neq0$, $r_2\neq0$

한편 $a_1=b_1=1$이므로

$a_3=4a_2$에서

$(r_1)^2=4r_1$

$r_1=4$

또 $b_2=2b_3$에서

$r_2=2\times(r_2)^2$

$2r_2=1$

$r_2=\frac{1}{2}$

$a_n=4^{n-1}$, $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

따라서

$$\begin{aligned}a_{10}b_{10}&=4^9\times\left(\frac{1}{2}\right)^9\\&=2^{18}\times2^{-9}\\&=2^9\end{aligned}$$

이므로

$k=9$

답 ④

11 세 수 1, 2^{a-1}, 26은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\times2^{a-1}=1+26$

$2^a=27$

$$\begin{aligned}a&=\log_2 27\\&=3\log_2 3\end{aligned}$$

세 수 2, 3^b, 8은 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(3^b)^2=2\times8$

즉, $(3^b)^2=16=4^2$이므로

$3^b=4$

$b=\log_3 4=2\log_3 2$

따라서

$$\begin{aligned}ab&=3\log_2 3\times2\log_3 2\\&=6\times\frac{\log 3}{\log 2}\times\frac{\log 2}{\log 3}\\&=6\end{aligned}$$

답 ③

12 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r>0)$이라 하자.

$S_4-S_2=6$에서

$$\begin{aligned}S_4-S_2&=a_3+a_4\\&=a_1r^2+a_1r^3\\&=a_1r^2(1+r)\end{aligned}$$

이므로

$a_1r^2(1+r)=6$ …… ㉠

$S_6-S_4=24$에서

$$\begin{aligned}S_6-S_4&=a_5+a_6\\&=a_1r^4+a_1r^5\\&=a_1r^4(1+r)\end{aligned}$$

이므로

$a_1r^4(1+r)=24$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$\frac{a_1r^4(1+r)}{a_1r^2(1+r)}=\frac{24}{6}$

$r^2=4$

$r>0$이므로

$r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$4a_1\times3=6$

$12a_1=6$

$a_1=\frac{1}{2}$

따라서

$$\begin{aligned}S_7-S_1&=\frac{\frac{1}{2}(2^7-1)}{2-1}-\frac{1}{2}\\&=\frac{128-1}{2}-\frac{1}{2}\\&=\frac{127}{2}-\frac{1}{2}\\&=63\end{aligned}$$

답 ④

13 $a_1=S_1=1$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r>0)$이라 하자.

$r=1$이면 $S_8=8$, $S_4=4$이므로

$S_8\neq4S_4$

따라서 $r\neq1$

$$\begin{aligned}S_8&=\frac{r^8-1}{r-1}\\&=\frac{(r^4-1)(r^4+1)}{r-1}\end{aligned}$$

$S_4=\frac{r^4-1}{r-1}$이므로

$S_8=4S_4$에서

$\frac{(r^4-1)(r^4+1)}{r-1}=4\times\frac{r^4-1}{r-1}$

$r^4+1=4$

$r^4=3$

$r>0$이므로

$r=3^{\frac{1}{4}}$

등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=(3^{\frac{1}{4}})^{n-1}$

$=3^{\frac{n-1}{4}}$

이므로 $a_k=3^{\frac{k-1}{4}}$의 값이 정수이려면 $k-1$의 값이 0이거나 4의 배수이어야 한다.

따라서 50 이하의 자연수 k의 값은 1, 5, 9, ⋯, 49로 13개이므로 그 합은

$1+5+9+\cdots+49=\frac{13(1+49)}{2}$

$=325$

답 325

14 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_6=4a_2$에서

$1+5d=4(1+d)$

$1+5d=4+4d$

$d=3$

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=1+(n-1)\times3$

$=3n-2$

한편 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\log_2 x+1$

함수 $y=\log_2 x+1$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$x=\log_2 y+1$

즉, $y=2^{x-1}$이므로

$f(x)=2^{x-1}$

따라서

$f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+\cdots+f(a_{10})$

$=f(1)+f(4)+f(7)+\cdots+f(28)$

$=2^0+2^3+2^6+\cdots+2^{27}$

$=1+2^3+(2^3)^2+\cdots+(2^3)^9$

$=\frac{(2^3)^{10}-1}{2^3-1}$

$=\frac{2^{30}-1}{7}$

답 ④

15 $a_3=a_2+a_2\times\frac{20}{100}$

$=\frac{6}{5}a_2$

이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 공비는 $\frac{6}{5}$이다.

이때 $a_n=a_1\times\left(\frac{6}{5}\right)^{n-1}$

$a_k\geq4a_1$에서

$a_1\times\left(\frac{6}{5}\right)^{k-1}\geq4a_1$

$(1.2)^{k-1}\geq4$

양변에 상용로그를 취하면

$\log(1.2)^{k-1}\geq\log 4$

$(k-1)\log 1.2\geq2\log 2$

$k\geq\frac{2\log 2}{\log 1.2}+1$

$=\frac{0.6}{0.08}+1$

$=8.5$

따라서 자연수 k의 최솟값은 9이다.

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 85쪽

1 ②	2 ①	3 3

1 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d_1, d_2라 하자.

조건 (가)에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_1+a_2=8$이므로

$2+(2+d_1)=8$

$d_1=4$

$k=a_1a_2$

$=2\times(2+4)$

$=12$

조건 (나)에서

$b_4=a_2+b_2$이므로

$2+3d_2=6+(2+d_2)$

$d_2=3$

따라서

$S_n=\frac{n\{2\times2+(n-1)\times4\}}{2}$

$=2n^2$

$T_n=\frac{n\{2\times2+(n-1)\times3\}}{2}$

$=\frac{3n^2+n}{2}$

이므로 $S_m-T_m\le\frac{km}{4}$에서

$2m^2-\frac{3m^2+m}{2}\le3m$

$m^2-7m\le0$

$m(m-7)\le0$

$0\le m\le7$

따라서 자연수 m의 값은 1, 2, 3, ⋯, 7이고, 그 개수는 7이다.

답 ②

2 기울기가 1이고 원 $x^2+y^2=2^n$과 제2사분면에서 접하는 직선 l_n의 방정식을

$y=x+k\,(k>0)$, 즉 $x-y+k=0$

이라 하자.

원의 중심 (0, 0)과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2^n}$

$k>0$이므로

$k=\sqrt{2^{n+1}}$

직선 l_n의 방정식은 $y=x+\sqrt{2^{n+1}}$이므로 직선 l_n의 x절편과 y절편은 각각

$-\sqrt{2^{n+1}}$, $\sqrt{2^{n+1}}$

이다. 이때 $\overline{\mathrm{OP}_n}=\sqrt{2^{n+1}}$, $\overline{\mathrm{OQ}_n}=\sqrt{2^{n+1}}$이므로

삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n$의 넓이 S_n은

$S_n=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}_n}\times\overline{\mathrm{OQ}_n}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2^{n+1}}\times\sqrt{2^{n+1}}$

$=2^n$

따라서

$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_8=\frac{2(2^8-1)}{2-1}$

$=2^9-2$

$=510$

답 ①

3 함수 $y=\frac{4}{x}$의 그래프와 직선 $y=k^2x$의 교점의 x좌표를 구하면

$\frac{4}{x}=k^2x$에서

$x^2=\frac{4}{k^2}$

$x=-\frac{2}{k}$ 또는 $x=\frac{2}{k}$

이때 $a>0$이므로

$a=\frac{2}{k}$, $b=-\frac{2}{k}$

또 함수 $y=\frac{4}{x}$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{k^2}$의 교점의 x좌표를 구하면

$\frac{4}{x}=\frac{x}{k^2}$에서

$x^2=4k^2$

$x=-2k$ 또는 $x=2k$

이때 $c>0$이므로

$c=2k$, $d=-2k$

한편 네 수 d, b, a, c, 즉 $-2k$, $-\frac{2}{k}$, $\frac{2}{k}$, $2k$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\frac{2}{k}-\left(-\frac{2}{k}\right)=2k-\frac{2}{k}$

$\frac{4}{k}=2k-\frac{2}{k}$

$\frac{6}{k}=2k$

$k=\frac{3}{k}$

따라서 $k^2=3$

답 3

06 수열의 합

유제 본문 89~95쪽

1 130	2 ②	3 825	4 ③	5 ④
6 76	7 ②	8 ③		

1 $\sum_{k=1}^{5}(2a_k-3b_k)=2\sum_{k=1}^{5}a_k-3\sum_{k=1}^{5}b_k$

$=2\times20-3\times(-30)$

$=130$

답 130

2 $\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}a_{k+1}=\sum_{k=1}^{10}(a_k-a_{k+1})$

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1-a_2=a_2-a_3=a_3-a_4=\cdots=a_{10}-a_{11}=-d$

이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}a_{k+1}=-10d$

따라서 $-10d=-20$에서

$d=2$

답 ②

3 $1\times3+2\times5+3\times7+\cdots+10\times21$

$=\sum_{k=1}^{10}k(2k+1)$

$=\sum_{k=1}^{10}(2k^2+k)$

$=2\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k$

$=2\times\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}$

$=770+55$

$=825$

답 825

4 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_n=\frac{n^2-3n-4}{n+1}$

$=\frac{(n+1)(n-4)}{n+1}$

$=n-4$

따라서

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(k-4)$

$=\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}4$

$=\frac{10\times11}{2}-4\times10$

$=55-40$

$=15$

답 ③

5 $\sqrt{k^2+k}-\sqrt{k^2-k}=\sqrt{k(k+1)}-\sqrt{(k-1)k}$

이므로

$\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k^2+k}-\sqrt{k^2-k})$

$=\sum_{k=1}^{n}\{\sqrt{k(k+1)}-\sqrt{(k-1)k}\}$

$=(\sqrt{1\times2}-\sqrt{0\times1})+(\sqrt{2\times3}-\sqrt{1\times2})$

$+(\sqrt{3\times4}-\sqrt{2\times3})+\cdots$

$+\{\sqrt{(n-1)n}-\sqrt{(n-2)(n-1)}\}$

$+\{\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{(n-1)n}\}$

$=(\sqrt{1\times2}-\sqrt{1\times2})+(\sqrt{2\times3}-\sqrt{2\times3})$

$+(\sqrt{3\times4}-\sqrt{3\times4})+\cdots$

$+\{\sqrt{(n-1)n}-\sqrt{(n-1)n}\}+\sqrt{n(n+1)}$

$=\sqrt{n(n+1)}$

$\sqrt{n(n+1)}=6\sqrt{2}$에서 양변을 제곱하면

$n(n+1)=72$

$n^2+n-72=0$

$(n+9)(n-8)=0$

n은 자연수이므로

$n=8$

답 ④

6 $\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})$

$=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_n-a_{n+1})$

$=a_1+(-a_2+a_2)+(-a_3+a_3)+(-a_4+a_4)+\cdots$

$+(-a_n+a_n)-a_{n+1}$

$=a_1-a_{n+1}$

$a_1=5$, $\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=10-n^2$이므로

$5-a_{n+1}=10-n^2$

$a_{n+1}=n^2-5$

따라서 $a_{10}=9^2-5=76$

답 76

7 $S_n=n^3-n$이므로

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=S_{n+1}-S_n\\&=(n+1)^3-(n+1)-(n^3-n)\\&=3n^2+3n\\&=3n(n+1)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{18}\frac{1}{a_{k+1}}&=\sum_{k=1}^{18}\frac{1}{3k(k+1)}\\&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{18}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{19}\right)\right\}\\&=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{19}\right)\\&=\frac{6}{19}\end{aligned}$$

답 ②

8 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4이고 공차가 2인 등차수열이므로

$$\begin{aligned}a_n&=4+2(n-1)\\&=2n+2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}&=\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{(\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k})(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})}\\&=\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}\end{aligned}$$

이때 $a_{k+1}-a_k=2$이므로

$$\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}=\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{2}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}\\&=\sum_{k=1}^{8}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{2}\\&=\frac{1}{2}\{(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})+(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2})+(\sqrt{a_4}-\sqrt{a_3})+\cdots\\&\quad+(\sqrt{a_9}-\sqrt{a_8})\}\\&=\frac{1}{2}(\sqrt{a_9}-\sqrt{a_1})\end{aligned}$$

따라서 $a_1=4$, $a_9=20$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}&=\frac{1}{2}(\sqrt{20}-\sqrt{4})\\&=\frac{1}{2}(2\sqrt{5}-2)\\&=\sqrt{5}-1\end{aligned}$$

답 ③

Level 1 기초 연습

본문 96~97쪽

1 ⑤	2 ③	3 ②	4 ②	5 ①
6 ①	7 ④	8 ④	9 22	10 ②

1 $\sum_{k=1}^{9}a_k=\sum_{k=1}^{6}(a_k+5)$에서

$\sum_{k=1}^{9}a_k=\sum_{k=1}^{6}a_k+\sum_{k=1}^{6}5$

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6)+5\times6$

정리하면

$a_7+a_8+a_9=30$ $\cdots\cdots$ ㉠

세 수 a_7, a_8, a_9는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a_7+a_9=2a_8$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$3a_8=30$

따라서 $a_8=10$

답 ⑤

2 $\sum_{k=1}^{10}k(k^3+k)-\sum_{k=1}^{10}k(k^3-1)$

$$\begin{aligned}&=\sum_{k=1}^{10}\{k(k^3+k)-k(k^3-1)\}\\&=\sum_{k=1}^{10}(k^2+k)\\&=\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k\\&=\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}\\&=385+55\\&=440\end{aligned}$$

답 ③

3 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열이므로

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)$

$$\begin{aligned}&=\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k\\&=\frac{10\{2\times1+(10-1)\times2\}}{2}+\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}\\&=100+2^{11}-2\\&=2146\end{aligned}$$

답 ②

4 $\sum_{k=1}^{15}(a_k+1)^2-\sum_{k=1}^{15}(a_k-2)^2$

$=\sum_{k=1}^{15}\{(a_k+1)^2-(a_k-2)^2\}$

$=\sum_{k=1}^{15}(a_k^2+2a_k+1-a_k^2+4a_k-4)$

$=\sum_{k=1}^{15}(6a_k-3)$

$=6\sum_{k=1}^{15}a_k-\sum_{k=1}^{15}3$

$=6\times10-3\times15$

$=15$

답 ②

5 $\sum_{k=1}^{10}(a_k-3)=80$에서

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-3)=\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}3$

$=\sum_{k=1}^{10}a_k-30$

이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_k-30=80$

$\sum_{k=1}^{10}a_k=110$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=200$에서

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=\sum_{k=1}^{10}a_k+2\sum_{k=1}^{10}b_k$

$=110+2\sum_{k=1}^{10}b_k$

이므로

$110+2\sum_{k=1}^{10}b_k=200$

$2\sum_{k=1}^{10}b_k=90$

$\sum_{k=1}^{10}b_k=45$

따라서

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3b_k-5)=2\sum_{k=1}^{10}a_k+3\sum_{k=1}^{10}b_k-\sum_{k=1}^{10}5$

$=2\times110+3\times45-5\times10$

$=305$

답 ①

6 $\frac{S_{k+1}}{S_k}=\frac{S_k+a_{k+1}}{S_k}$

$=1+\frac{a_{k+1}}{S_k}$

이므로

$\sum_{k=1}^{15}\frac{S_{k+1}}{S_k}=\sum_{k=1}^{15}\left(1+\frac{a_{k+1}}{S_k}\right)$

$=\sum_{k=1}^{15}1+\sum_{k=1}^{15}\frac{a_{k+1}}{S_k}$

$=15+\sum_{k=1}^{15}\frac{a_{k+1}}{S_k}$

$\sum_{k=1}^{15}\frac{S_{k+1}}{S_k}=20$이므로

$\sum_{k=1}^{15}\frac{a_{k+1}}{S_k}=\sum_{k=1}^{15}\frac{S_{k+1}}{S_k}-15$

$=20-15$

$=5$

답 ①

7 $\frac{k^3+1}{k+1}=\frac{(k+1)(k^2-k+1)}{k+1}$

$=k^2-k+1$

따라서

$\sum_{k=1}^{10}\frac{k^3+1}{k+1}=\sum_{k=1}^{10}(k^2-k+1)$

$=\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1$

$=\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{10\times11}{2}+10$

$=385-55+10$

$=340$

답 ④

8 $\frac{2}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}$

$=\frac{2(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})}{(\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1})(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})}$

$=\frac{2(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})}{(2k+1)-(2k-1)}$

$=\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}$

이므로

$\sum_{k=1}^{12}\frac{2}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}$

$=\sum_{k=1}^{12}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$

$=(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots$

$+(\sqrt{23}-\sqrt{21})+(\sqrt{25}-\sqrt{23})$

$=-1+\sqrt{25}$

$=-1+5$

$=4$

답 ④

9 $\sum_{k=1}^{20} \frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$

$=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\cdots$

$+\left(\frac{1}{a_{20}}-\frac{1}{a_{21}}\right)$

$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{21}}$

$=1-\frac{1}{a_{21}}$

이므로

$1-\frac{1}{a_{21}}=\frac{8}{15}$

$\frac{1}{a_{21}}=1-\frac{8}{15}$

$=\frac{7}{15}$

$a_{21}=\frac{15}{7}$

따라서 $p=7$, $q=15$이므로

$p+q=22$

답 22

10 다항식 $f(x)=x^2+2x-1$을 $x-n$으로 나눈 나머지는

$f(n)=n^2+2n-1$

이므로

$a_n=n^2+2n-1$

따라서

$\sum_{k=1}^{8} \frac{2}{1+a_k}$

$=\sum_{k=1}^{8} \frac{2}{1+k^2+2k-1}$

$=\sum_{k=1}^{8} \frac{2}{k^2+2k}$

$=\sum_{k=1}^{8} \frac{2}{k(k+2)}$

$=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$

$+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)$

$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$

$=\frac{58}{45}$

답 ②

Level 2 기본 연습

본문 98쪽

1 ②	2 ②	3 ③	4 15

1 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 각각 a, d라 하자.

$a_3=a+2d$이므로 조건 (가)에서

$a+2d=2a$

$a=2d$

따라서

$a_n=a+(n-1)d$

$=d(n+1)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

조건 (나)에서

$\sum_{k=1}^{15} a_k=\sum_{k=1}^{15} d(k+1)$

$=d\left(\sum_{k=1}^{15} k+\sum_{k=1}^{15} 1\right)$

$=d\times\frac{15\times16}{2}+15d$

$=120d+15d$

$=135d$

$135d=270$에서

$d=2$

따라서

$a_{10}=a+9d$

$=2d+9d$

$=11d$

$=11\times2$

$=22$

답 ②

2 $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$

$=2\times\frac{n(n+1)}{2}-n$

$=n^2$

$\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$

$=2\times\frac{n(n+1)}{2}+n$

$=n^2+2n$

한편 수열 $\{2^{n-1}\}$은 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열이므로

$\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}=\frac{2^n-1}{2-1}$

$=2^n-1$

$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)<\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}<\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$에서

$n^2<2^n-1<n^2+2n$ …… ㉠

$n\le4$일 때 $n^2\ge2^n-1$이므로

부등식 ㉠을 만족시키지 않는다.

$n=5$일 때 $5^2=25$, $2^5-1=31$, $5^2+2\times5=35$이므로

부등식 ㉠을 만족시킨다.

$n\ge6$일 때 $2^n>(n+1)^2$, 즉 $2^n-1>n^2+2n$이므로

부등식 ㉠을 만족시키지 않는다.

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 n의 값은 5이다.

답 ②

3 등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로

$a_{k+1}-a_k=2$ $(k=1, 2, 3, \cdots)$

$$\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{a_{k+1}-a_k}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{10}}-\frac{1}{a_{11}}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{11}}\right)$$

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$이라 하면

$a_{11}=a+10\times2$
$=a+20$

$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{5}{48}$에서

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{11}}\right)=\frac{5}{48}$$
$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+20}=\frac{5}{24}$$
$$\frac{20}{a(a+20)}=\frac{5}{24}$$

$a^2+20a-96=0$

$(a-4)(a+24)=0$

$a>0$에서 $a=4$

따라서 $a_2=4+2=6$

답 ③

4 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차가 모두 d $(d>0)$이므로

$a_{n+1}-a_n=d$, $a_n=dn$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

따라서

$$\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}=\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{(\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k})(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})}=\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}=\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{d}$$

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}=\sum_{k=1}^{15}\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{d}$$
$$=\frac{1}{d}\{(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})+(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2})+(\sqrt{a_4}-\sqrt{a_3})+\cdots+(\sqrt{a_{16}}-\sqrt{a_{15}})\}$$
$$=\frac{1}{d}(\sqrt{a_{16}}-\sqrt{a_1})=\frac{1}{d}(\sqrt{16d}-\sqrt{d})=\frac{1}{d}(4\sqrt{d}-\sqrt{d})=\frac{3\sqrt{d}}{d}$$

$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$에서

$$\frac{3\sqrt{d}}{d}=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

양변을 제곱하면

$$\frac{9d}{d^2}=\frac{15}{25}$$
$$\frac{9}{d}=\frac{3}{5}$$

따라서 $d=15$

답 15

Level 3 실력 완성

본문 99쪽

1 380 **2** 51 **3** ④

1 원 $x^2+y^2=4$는 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 2이므로 이 원 위의 점 P에 대하여

$|\overline{\mathrm{OA}_k}-2|\le\overline{\mathrm{PA}_k}\le\overline{\mathrm{OA}_k}+2$ $(k=1, 2, 3, \cdots, 10)$

이 성립한다.

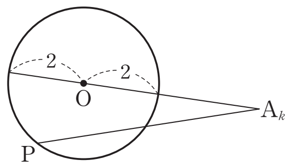
이때 조건 (나)에서

$\overline{OA_k}>2\ (k=1, 2, 3, \cdots, 10)$

이므로

$M_k=\overline{OA_k}+2$

$=\sqrt{x_k^2+y_k^2}+2$



$m_k=\overline{OA_k}-2$

$=\sqrt{x_k^2+y_k^2}-2$

이때

$M_k^2+m_k^2$

$=(\sqrt{x_k^2+y_k^2}+2)^2+(\sqrt{x_k^2+y_k^2}-2)^2$

$=2(x_k^2+y_k^2)+8$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10}(M_k^2+m_k^2)=2\left(\sum_{k=1}^{10}x_k^2+\sum_{k=1}^{10}y_k^2\right)+\sum_{k=1}^{10}8$$

$$=2(100+50)+8\times10$$

$$=380$$

답 380

2 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{4k-3}$로 놓자.

$S_n=2n^2+3n$에서 $S_1=2+3=5$이므로

$\frac{a_1}{4-3}=5$

즉, $a_1=5$ ······ ㉠

$n\geq2$일 때, $S_n-S_{n-1}=\frac{a_n}{4n-3}$이므로

$\frac{a_n}{4n-3}=2n^2+3n-\{2(n-1)^2+3(n-1)\}$

$=4n+1$

$a_n=(4n-3)(4n+1)\ (n\geq2)$ ······ ㉡

㉡에 $n=1$을 대입하면 $a_1=5$이므로

㉠, ㉡에 의하여

$a_n=(4n-3)(4n+1)\ (n\geq1)$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{37}-\frac{1}{41}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{41}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{40}{41}$$

$$=\frac{10}{41}$$

따라서 $p=41$, $q=10$이므로

$p+q=51$

답 51

3 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 한 변의 길이가 n이므로 점 A_n의 x좌표를 x_n이라 하면 조건 (가)에 의하여

$\sqrt{x_n}-(-x_n)=n$

즉, $\sqrt{x_n}+x_n=n$

따라서 20 이하의 자연수 n에 대하여 다음이 성립한다.

$x_n=1$일 때,

$\sqrt{x_n}+x_n=2$이므로 $n=2$

$x_n=4$일 때,

$\sqrt{x_n}+x_n=6$이므로 $n=6$

$x_n=9$일 때,

$\sqrt{x_n}+x_n=12$이므로 $n=12$

$x_n=16$일 때,

$\sqrt{x_n}+x_n=20$이므로 $n=20$

(i) $n=2, 6, 12, 20$일 때

정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 네 꼭짓점의 x좌표와 y좌표는 모두 정수이므로

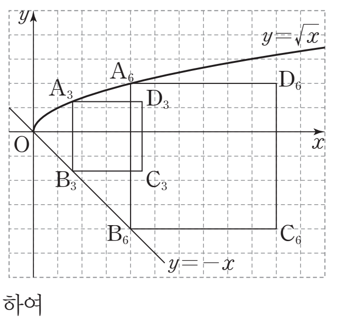
$a_n=(n+1)^2$

$=n^2+2n+1$

(ii) $n\neq2, 6, 12, 20$일 때

정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 네 꼭짓점의 x좌표와 y좌표는 모두 정수가 아니므로

$a_n=n^2$



(i), (ii)에 의하여

$$\sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{20}k^2+(5+13+25+41)$$

$$=\frac{20\times21\times41}{6}+84$$

$$=2870+84$$

$$=2954$$

답 ④

07 수학적 귀납법

유제 본문 103~107쪽

1 ① 2 ⑤ 3 24 4 ② 5 ④

1 수열 $\{a_n\}$이 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n=a_1\times 2^{n-1}$

$a_{10}=a_1\times 2^9$

$=64$

따라서

$a_1=\frac{64}{2^9}=\frac{2^6}{2^9}$

$=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$

답 ①

2 $(a_{n+1}-a_n)^2-2(a_{n+1}-a_n)-3=0$에서

$(a_{n+1}-a_n+1)(a_{n+1}-a_n-3)=0$

$a_{n+1}-a_n=-1$ 또는 $a_{n+1}-a_n=3$

모든 항이 양수이므로

$a_{n+1}-a_n=3$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고, 공차가 3인 등차수열이다.

따라서 $a_{10}=2+9\times 3=29$

답 ⑤

3 $a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n=\frac{1}{2n+3}$ ······ (＊)

이라 하자.

(＊)에 $n=4$를 대입하면

$a_1\times a_2\times a_3\times a_4=\frac{1}{2\times 4+3}$

$=\frac{1}{11}$ ······ ㉠

(＊)에 $n=5$를 대입하면

$a_1\times a_2\times a_3\times a_4\times a_5=\frac{1}{2\times 5+3}$

$=\frac{1}{13}$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$\frac{a_1\times a_2\times a_3\times a_4\times a_5}{a_1\times a_2\times a_3\times a_4}=\frac{\frac{1}{13}}{\frac{1}{11}}$

이므로 $a_5=\frac{11}{13}$

따라서 $p+q=13+11=24$

답 24

4 $a_1=1$, $b_1=1$이므로

$a_2=-a_1+4b_1$

$=-1+4=3$

$b_2=3b_1-a_1$

$=3-1=2$

$a_2=3$, $b_2=2$이므로

$a_3=-a_2+4b_2$

$=-3+8=5$

$b_3=3b_2-a_2$

$=6-3=3$

$a_3=5$, $b_3=3$이므로

$a_4=-a_3+4b_3$

$=-5+12=7$

$b_4=3b_3-a_3$

$=9-5=4$

$a_4=7$, $b_4=4$

따라서 $a_4+b_4=7+4=11$

답 ②

5 (i) $n=1$일 때, (좌변)$=1\times 1!=\boxed{1}$,

(우변)$=2!-1=\boxed{1}$이므로 (＊)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, (＊)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}(k\times k!)=(m+1)!-1$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $\boxed{(m+1)\times(m+1)!}$을 더하면

$\sum_{k=1}^{m}(k\times k!)+(m+1)\times(m+1)!$

$=\{(m+1)!-1\}+(m+1)\times(m+1)!$

$\sum_{k=1}^{\boxed{m+1}}(k\times k!)=(m+1)!\times(1+m+1)-1$

$=(m+1)!\times(m+2)-1$

$=(m+2)!-1$

이므로 $n=m+1$일 때도 (＊)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (＊)이 성립한다.

따라서

$p=1$, $f(m)=(m+1)\times(m+1)!$, $g(m)=m+1$

이므로

$p+\frac{f(4)}{g(9)}=1+\frac{5\times 5!}{10}$

$=1+\frac{5\times120}{10}$

$=61$

답 ④

Level 1 기초 연습

본문 108쪽

1 ③ 2 12 3 ④ 4 ③

1 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$

를 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

등차중항의 성질에 의하여

$a_6=\frac{a_1+a_{11}}{2}$

$=\frac{1+31}{2}$

$=16$

따라서

$a_5+a_6+a_7=2\times\frac{a_5+a_7}{2}+a_6$

$=2\times a_6+a_6$

$=3\times a_6$

$=3\times16$

$=48$

답 ③

2 $a_1=1$

$a_1<2$이므로

$a_2=\sqrt{a_1^2+1}=\sqrt{1+1}$

$=\sqrt{2}$

$a_2<2$이므로

$a_3=\sqrt{a_2^2+1}=\sqrt{2+1}$

$=\sqrt{3}$

$a_3<2$이므로

$a_4=\sqrt{a_3^2+1}=\sqrt{3+1}$

$=2$

$a_4\geq2$이므로

$a_5=\sqrt{a_4}=\sqrt{2}$

$a_5<2$이므로

$a_6=\sqrt{a_5^2+1}$

$=\sqrt{2+1}$

$=\sqrt{3}$

따라서

$a_1\times a_2\times a_3\times a_4\times a_5\times a_6$

$=1\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}$

$=12$

답 12

3 $a_{n+1}=\sqrt{a_na_{n+2}}$에서

$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$r^4=\frac{a_5}{a_1}$

$=\frac{1}{\frac{1}{81}}=81$

이때 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로

$r=3$

따라서 $a_6=3$, $a_7=9$, $a_8=27$, $a_9=81$, $a_{10}=243$이므로

$a_k<100$을 만족시키는 k의 최댓값은 9이다.

답 ④

4 (i) $n=1$일 때, (좌변)$=\boxed{3}$, (우변)$=2$이므로

($*$)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, ($*$)이 성립한다고 가정하면

$3^k>k^2+1$ …… ㉠

㉠의 양변에 3을 곱하면

$3^{\boxed{k+1}}>3k^2+3$

이때

$3k^2+3=(k^2+2k+2)+(2k^2-2k+1)$

$=(\boxed{k^2+2k+2})+\left\{2\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right\}$

$>\boxed{k^2+2k+2}$

$=(k+1)^2+1$

즉, $3^{\boxed{k+1}}>3k^2+3>\boxed{(k+1)^2+1}$이므로

$n=k+1$일 때도 ($*$)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

($*$)이 성립한다.

따라서 $p=3$, $f(k)=k+1$, $g(k)=(k+1)^2+1$이므로

$\frac{f(5)\times g(7)}{p}=\frac{6\times65}{3}=130$

답 ③

Level 2 기본 연습

본문 109쪽

1 ② 2 21 3 63 4 ④

1 $a_1=1$

$a_2=a_1^3\times(-1)^1$

$=1\times(-1)=-1$

$a_3=a_2^3\times(-1)^2$

$=-1\times1=-1$

$a_4=a_3^3\times(-1)^3$

$=-1\times(-1)=1$

$a_5=a_4^3\times(-1)^4$

$=1\times1=1$

$a_6=a_5^3\times(-1)^5$

$=1\times(-1)=-1$

$a_7=a_6^3\times(-1)^6$

$=-1\times1=-1$

$a_8=a_7^3\times(-1)^7$

$=-1\times(-1)=1$

⋮

즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+4}$가 성립한다.

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15}a_k&=(a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7+a_8)\\&\quad+(a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12})+a_{13}+a_{14}+a_{15}\\&=0+0+0+a_1+a_2+a_3\\&=0+0+0+1+(-1)+(-1)\\&=-1\end{aligned}$$

답 ②

2 $a_1=15$, $a_2=10$이므로

$a_3=|a_2-a_1|$

$=|10-15|=5$

$a_4=|a_3-a_2|$

$=|5-10|=5$

$a_5=|a_4-a_3|$

$=|5-5|=0$

$a_6=|a_5-a_4|$

$=|0-5|=5$

$a_7=|a_6-a_5|$

$=|5-0|=5$

$a_8=|a_7-a_6|$

$=|5-5|=0$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=15$, $a_2=10$이고,

제3항부터 5, 5, 0이 반복된다.

따라서 $\sum_{k=1}^{10}a_k=55$, $\sum_{k=1}^{11}a_k=55$이므로

$\sum_{k=1}^{m}a_k=55$를 만족시키는 m의 값은 10, 11이고, 그 합은

$10+11=21$

답 21

3 (i) 세 자리 자연수 중 세 숫자가 모두 다른 자연수의 개수는

$5\times4\times3=60$이므로

$a_3=60$

(ii) 연속하는 세 숫자가 모두 다른 n자리 자연수의 마지막 두 숫자를 c_1, c_2라 하면 그 뒤에 쓸 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5 중에서 c_1, c_2를 제외한 나머지 세 숫자 중 하나이다.

즉, $a_{n+1}=3\times a_n$이 성립한다.

(i), (ii)에서 $p=60$, $q=3$이므로

$p+q=63$

답 63

4 $a_1\ge0$이므로

$a_2=a_1-2$

$a_2<0$이므로

$a_3=-a_2=-a_1+2$

$a_3\ge0$이므로

$a_4=a_3-2=-a_1$

$a_4<0$이므로

$a_5=-a_4=a_1$

⋮

즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+4}$가 성립한다.

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{30}a_k&=(a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7+a_8)+\cdots\\&\quad+(a_{25}+a_{26}+a_{27}+a_{28})+a_{29}+a_{30}\\&=0+0+\cdots+0+a_1+a_2\\&=a_1+(a_1-2)\\&=2a_1-2\end{aligned}$$

이므로 $2a_1-2=\frac{3}{2}$에서

$2a_1=\frac{7}{2}$

$a_1=\frac{7}{4}$

답 ④

Level 3 실력 완성 본문 110쪽

1 ④　2 136　3 ④

1 $a_1=1$

$a_2=a_1=1$

$a_3=a_1+1=2$

$a_4=a_2=1$

$a_5=a_2+1=2$

$a_6=a_3=2$

$a_7=a_3+1=3$

$a_8=a_4=1$

$a_9=a_4+1=2$

$a_{10}=a_5=2$

$a_{11}=a_5+1=3$

$a_{12}=a_6=2$

⋮

(i) $a_1=1$이고, $a_{2n}=a_n$이므로 자연수 m에 대하여

$n=2^m$일 때 $a_n=1$

이때 $a_{2n+1}=a_n+1$이므로

$n=2^m+1$일 때 $a_n=2$

즉, $k=2^1+1,\ 2^2+1,\ 2^3+1,\ \cdots,\ 2^6+1$일 때 $a_k=2$이므로 $a_k=2$인 100 이하의 자연수 k의 개수는 6이다.

(ii) $a_{2n}=a_n$에서

$a_3=2$이므로

$a_6=a_{12}=a_{24}=a_{48}=a_{96}=2$

$a_5=2$이므로

$a_{10}=a_{20}=a_{40}=a_{80}=2$

$a_9=2$이므로

$a_{18}=a_{36}=a_{72}=2$

$a_{17}=2$이므로

$a_{34}=a_{68}=2$

$a_{33}=2$이므로

$a_{66}=2$

$a_k=2$인 100 이하의 자연수 k의 개수는 15이다.

(i), (ii)에서 구하는 자연수 k의 개수는

$6+15=21$

답 ④

2 $a_1=5$

$a_2=3-\frac{5}{a_1}=3-\frac{5}{5}$

$=2$

$a_3=3-\frac{5}{a_2}$

$=3-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$

$a_4=2a_3-3$

$=2\times\frac{1}{2}-3=-2$

$a_5=3-\frac{5}{a_4}$

$=3+\frac{5}{2}=\frac{11}{2}$

$a_6=2a_5-3$

$=2\times\frac{11}{2}-3=8$

$a_7=3-\frac{5}{a_6}$

$=3-\frac{5}{8}=\frac{19}{8}$

$a_8=2a_7-3$

$=2\times\frac{19}{8}-3=\frac{7}{4}$

$a_9=2a_8-3$

$=2\times\frac{7}{4}-3=\frac{1}{2}$

⋮

이므로 $n\geq3$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+6}$이 성립한다.

따라서

$\sum_{n=1}^{50}a_n=a_1+a_2+\sum_{n=3}^{50}a_n$

$=5+2+8\times\left\{\frac{1}{2}+(-2)+\frac{11}{2}+8+\frac{19}{8}+\frac{7}{4}\right\}$

$=136$

답 136

3 (i) 직선 AC와 직선 P_1Q_1이 평행하므로

$\overline{AQ_1}:\overline{BQ_1}=4:3$

또 직선 BC와 직선 Q_1R_1이 평행하므로

$\overline{AR_1}:\overline{CR_1}=4:3$

닮음인 두 삼각형 AP_1C와 R_1P_2C에서

$\overline{AP_1}:\overline{R_1P_2}=\overline{AC}:\overline{R_1C}$

$=(4+3):3$

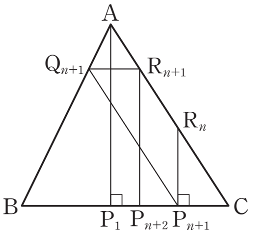
$=7:3$

이므로 $1:l_1=7:3$에서

$l_1=\frac{3}{7}$

(ii) 점 P_1이 선분 BC를 $3:4$로 내분하는 점이므로

$\overline{BP_1}=3k,\ \overline{CP_1}=4k$로 놓을 수 있다.



닮음인 두 삼각형 AP_1C와 $R_nP_{n+1}C$에서

$\overline{AP_1} : \overline{R_nP_{n+1}} = \overline{CP_1} : \overline{CP_{n+1}}$

$1 : l_n = 4k : \overline{CP_{n+1}}$이므로

$\overline{CP_{n+1}} = 4k \times l_n$

또 $\overline{BC} = 7k$이므로

$\overline{BP_{n+1}} = 7k - 4k \times l_n$ …… ㉠

한편 $\overline{BP_{n+1}} : \overline{CP_{n+1}} = \overline{BQ_{n+1}} : \overline{AQ_{n+1}}$이므로

$\overline{AR_{n+1}} : \overline{CR_{n+1}} = \overline{AQ_{n+1}} : \overline{BQ_{n+1}}$

$= \overline{CP_{n+1}} : \overline{BP_{n+1}}$

에서

$\overline{AR_{n+1}} : \overline{CR_{n+1}} = \overline{CP_{n+1}} : \overline{BP_{n+1}}$ …… ㉡

이때 닮음인 두 삼각형 AP_1C와 $R_{n+1}P_{n+2}C$에서

$\overline{AP_1} : \overline{R_{n+1}P_{n+2}} = \overline{AC} : \overline{CR_{n+1}}$

$1 : l_{n+1} = (\overline{AR_{n+1}} + \overline{CR_{n+1}}) : \overline{CR_{n+1}}$

$$l_{n+1} = \frac{\overline{CR_{n+1}}}{\overline{AR_{n+1}} + \overline{CR_{n+1}}}$$

㉡에서

$$l_{n+1} = \frac{\overline{BP_{n+1}}}{\overline{CP_{n+1}} + \overline{BP_{n+1}}}$$

$$= \frac{\overline{BP_{n+1}}}{\overline{BC}}$$

$$= \frac{\overline{BP_{n+1}}}{7k}$$

즉, $\overline{BP_{n+1}} = 7k \times l_{n+1}$ …… ㉢

㉠, ㉢에서

$7k \times l_{n+1} = 7k - 4k \times l_n$이므로

$l_{n+1} = -\frac{4}{7} l_n + 1$

따라서 $p = -\frac{4}{7}$, $q = 1$

(i), (ii)에서

$l_1 + p + 2q = \frac{3}{7} + \left(-\frac{4}{7}\right) + 2$

$= \frac{13}{7}$

답 ④

memo