

• 수학 영역 •

정답

1	⑤	2	②	3	①	4	⑤	5	③
6	③	7	④	8	②	9	①	10	⑤
11	①	12	③	13	④	14	④	15	③
16	⑤	17	②	18	②	19	④	20	①
21	⑤	22	5	23	4	24	22	25	2
26	3	27	24	28	120	29	45	30	38

해설

1. [출제의도] 복소수 계산하기

$3i + (1 - 2i) = 1 + (3i - 2i) = 1 + i$ 이다.

2. [출제의도] 다항식 계산하기

$$A - B = (2x^2 + 3xy + 2y^2) - (x^2 + 5xy + 3y^2) \\ = x^2 - 2xy - y^2 \text{이다.}$$

3. [출제의도] 이차함수의 그래프와 이차방정식의 관계 이해하기

이차함수 $y = x^2 + 4x + a$ 의 그래프가 x 축과 접하므로
이차방정식 $x^2 + 4x + a = 0$ 의 판별식
 $\frac{D}{4} = 4 - a = 0$ 이다. 따라서 $a = 4$ 이다.

4. [출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식 이해하기

부등식 $|x - 2| < 3$ 을 풀면 $-3 < x - 2 < 3$,
 $-1 < x < 5$ 이다.
부등식을 만족시키는 정수 x 의 값은 0, 1, 2, 3, 4이다.
따라서 정수 x 의 개수는 5이다.

5. [출제의도] 항등식의 성질 이해하기

x 에 대한 항등식이므로
 $3x^2 + ax + 4 = bx(x - 1) + c(x - 1)(x - 2)$ 에
 $x = 1$ 을 대입하면 $a + 7 = 0$ 이므로 $a = -7$ 이다.
 $x = 0$ 을 대입하면 $4 = 2c$ 이므로 $c = 2$ 이다.
 $x = 2$ 을 대입하면 $2a + 16 = 2b$, $-14 + 16 = 2b$ 이므로
 $b = 1$ 이다.
따라서 $a + b + c = -7 + 1 + 2 = -4$ 이다.

6. [출제의도] 복소수 계산하기

$$x = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i \\ y = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i \text{이므로} \\ x + y = 0 \text{이다.}$$

7. [출제의도] 곱셈 공식을 활용하여 도형 문제 해결하기

\overline{AB} , \overline{BC} , \overline{BF} 의 길이를 각각 a , b , c 라 하자.
직육면체의 겉넓이가 148이므로
 $2(ab + bc + ca) = 148$ 이다.
 $ab + bc + ca = 74 \dots \textcircled{1}$
모든 모서리의 길이의 합이 60이므로
 $4(a + b + c) = 60$ 이다.
 $a + b + c = 15 \dots \textcircled{2}$
곱셈 공식 $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$ 에
 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 대입하면 $a^2 + b^2 + c^2 = 77$ 이다.
따라서
 $\overline{BG}^2 + \overline{GD}^2 + \overline{DB}^2 = (b^2 + c^2) + (a^2 + c^2) + (a^2 + b^2) \\ = 2(a^2 + b^2 + c^2) \\ = 154 \text{이다.}$

8. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 다항식의 나눗셈 문제 해결하기

다항식 $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지가 4이므로
나머지정리에 의해 $f(1) = 4$ 이다.
 $f(1) = 1 + a + b + 6 = 4$ 이므로 $a + b = -3 \dots \textcircled{1}$
 $f(x + 2)$ 를 $x - 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면
 $f(x + 2)$ 는 $x - 1$ 로 나누어떨어지므로
인수정리에 의해 $f(x + 2) = (x - 1)Q(x)$ 이다.
 $x = 1$ 을 대입하면 $f(3) = 0$ 이므로 $9a + 3b = -33$ 이다.
 $3a + b = -11 \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하면 $a = -4$, $b = 1$ 이다.
따라서 $b - a = 5$ 이다.

9. [출제의도] 인수분해 계산하기

$$x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 = x^2(x + y) - y^2(x + y) \\ = (x + y)^2(x - y) \\ x = -2 + 3i, y = 2 + 3i \text{이므로} \\ x - y = -4, x + y = 6i \text{이다.} \\ \text{따라서 } (x + y)^2(x - y) = (6i)^2 \times (-4) = 144 \text{이다.}$$

10. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기

이차함수 $y = x^2 + 6x - 3$ 의 그래프와
직선 $y = kx - 7$ 이 만나지 않으므로
 $x^2 + 6x - 3 = kx - 7$ 에서
이차방정식 $x^2 + (6 - k)x + 4 = 0$ 의 판별식
 $D = (6 - k)^2 - 16 \\ = k^2 - 12k + 20 \\ = (k - 2)(k - 10) < 0 \\ 2 < k < 10$ 이므로 만족하는 자연수 $k = 3, 4, \dots, 9$
이다. 따라서 자연수 k 의 개수는 7이다.

11. [출제의도] 이차방정식의 판별식을 이용하여 항등식의 성질 이해하기

이차방정식 $x^2 - 2(m + a)x + m^2 + m + b = 0$ 이 중근을
가지므로 판별식 $\frac{D}{4} = (m + a)^2 - m^2 - m - b = 0$ 이고
식을 m 에 대하여 정리하면 $(2a - 1)m + a^2 - b = 0$ 이다.
실수 m 의 값에 관계없이 등식이 항상 성립하므로
 $2a - 1 = 0$, $a^2 - b = 0$ 이고 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$ 이다.
따라서 $12(a + b) = 12 \times \frac{3}{4} = 9$ 이다.

12. [출제의도] 삼차방정식 이해하기

삼차방정식 $x^3 + x - 2 = (x - 1)(x^2 + x + 2) = 0$ 이므로
 α , β 는 $x^2 + x + 2 = 0$ 의 두 허근이다.
근과 계수의 관계에서 $\alpha + \beta = -1$, $\alpha\beta = 2$ 이므로
 $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \\ = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ = \frac{1 - 4}{2} \\ = -\frac{3}{2} \text{이다.}$

[다른 풀이]

α , β 는 $x^2 + x + 2 = 0$ 의 두 허근이므로
 $\alpha^2 + \alpha + 2 = 0$ 에서 $\alpha^2 = -\alpha - 2$ 이고, 같은 방법으로
 $\beta^2 = -\beta - 2$ 이다. 따라서
 $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{-(\alpha + \beta) - 4}{\alpha\beta} = -\frac{3}{2} \text{이다.}$

13. [출제의도] 연립이차방정식 이해하기

연립방정식 $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \dots \textcircled{1} \\ x^2 - 2y^2 = -1 \dots \textcircled{2} \end{cases}$ 을 풀기 위해
 $\textcircled{1}$ 을 y 에 대하여 정리하면 $y = \frac{2x + 1}{3}$ 이다.

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$x^2 - 2\left(\frac{2x + 1}{3}\right)^2 = -1, x^2 - 8x + 7 = 0 \text{이므로}$$

$x = 1$ 또는 $x = 7$ 이다.

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{cases} x = 1 & \text{또는} & x = 7 \\ y = 1 & & y = 5 \end{cases} \text{이다.}$$

조건에서 $\alpha \neq \beta$ 이므로 $\alpha = 7$, $\beta = 5$

따라서 $\alpha + \beta = 7 + 5 = 12$ 이다.

14. [출제의도] 다항식의 연산을 활용한 실생활 문제 해결하기

물체 A 와 물체 B 의 질량을 각각 m_A , m_B 라 하고
물체 A 와 물체 B 의 속력을 각각 v_A , v_B 라 하자.
물체 A 의 질량이 물체 B 의 질량의 3배이므로
 $m_A = 3m_B$ 이다.

물체 A 의 속력이 물체 B 의 속력의 $\frac{1}{2}$ 배이므로

$$v_A = \frac{1}{2}v_B \text{이다.}$$

물체 A 와 물체 B 의 구심력의 크기가 같으므로

$$\frac{m_A(v_A)^2}{r_A} = \frac{m_B(v_B)^2}{r_B} \text{이다.}$$

$$\frac{3m_B\left(\frac{1}{2}v_B\right)^2}{r_A} = \frac{m_B(v_B)^2}{r_B} \text{이므로}$$

$$3 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{r_A} \text{이다. 따라서 } \frac{r_A}{r_B} = \frac{3}{4} \text{이다.}$$

15. [출제의도] 이차함수를 활용한 실생활 문제 해결하기

b^2 의 최댓값을 구하기 위해 $f(a) = 4a(10 - a)$ 라 하면
 $f(a) = 4a(10 - a)$ ($0 < a < 10$)
 $= -4(a^2 - 10a)$
 $= -4(a^2 - 10a + 25) + 100$
 $= -4(a - 5)^2 + 100$ 이므로
 $f(a)$ 는 $a = 5$ 일 때 최댓값 100을 갖는다.
따라서 b^2 의 최댓값은 100이다.

16. [출제의도] 인수정리를 이용하여 다항식의 나눗셈 문제 해결하기

최고차항의 계수가 1이고 조건 (나)에 의하여
 $f(x) = (x - 2)^2(x + a) + 2(x - 2)$ (a 는 상수)이다.
조건 (가)에 의하여
 $f(0) = 4a - 4 = 0$ 이므로 $a = 1$ 이다.
 $f(x) = (x - 2)^2(x + 1) + 2(x - 2)$
 $= (x - 2)\{(x - 2)(x + 1) + 2\}$
 $= (x - 2)(x^2 - x)$
 $= (x - 1)\{x(x - 2)\}$ 이므로
 $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 몫은 $Q(x) = x(x - 2)$ 이다.
따라서 $Q(5) = 15$ 이다.

[다른 풀이]

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 조건 (가)에 의하여
 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 로 놓을 수 있다. (a , b 는 상수)
 $f(x)$ 를 $(x - 2)^2$ 으로 나눈 몫을 $P(x)$ 라 하면
조건 (나)에서 나머지가 $2(x - 2)$ 이므로
 $f(x) = (x - 2)^2P(x) + 2(x - 2)$ 이다.
 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 이므로
 $x(x^2 + ax + b) = (x - 2)^2P(x) + 2(x - 2) \dots \textcircled{1}$
 $x = 2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $2(4 + 2a + b) = 0$ 에서
 $b = -2a - 4 \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $x(x^2 + ax - 2a - 4) = (x - 2)^2P(x) + 2(x - 2)$
 $x(x - 2)(x + a + 2) = (x - 2)\{(x - 2)P(x) + 2\}$
 $x(x + a + 2) = (x - 2)P(x) + 2 \dots \textcircled{3}$
 $x = 2$ 를 $\textcircled{3}$ 에 대입하면 $2(2 + a + 2) = 2$ 에서
 $a = -3$ 이다.

$a = -3$ 을 ㉠에 대입하면
 $b = 2$ 이다.

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2)$ 이므로
 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 할 때,
 $Q(x) = x(x-2)$ 이다.
따라서 $Q(5) = 15$ 이다.

17. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소 추론하기

이차방정식
 $x^2 - (a+4)x + 3a + 3 = (x-3)\{x - (a+1)\} = 0$ 의
근은 $x = 3$, $x = a+1$ 이다. $0 < a < 2$ 이므로
 $A(a+1, 0)$, $B(3, 0)$, $C(0, 3a+3)$ 이다.
삼각형 ABC의 밑변의 길이 $\overline{AB} = 2 - a$ 이고
높이 $\overline{OC} = 3a + 3$ 이다.
삼각형 ABC의 넓이는
 $\frac{1}{2}(2-a)(3a+3) = -\frac{3}{2}(a-2)(a+1)$
 $= -\frac{3}{2}(a^2 - a - 2)$
 $= -\frac{3}{2}\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{8}$ 이다.
따라서 $0 < a < 2$ 에서 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은
 $a = \frac{1}{2}$ 일 때 $\frac{27}{8}$ 이다.

18. [출제의도] 항등식을 활용한 나머지 추론하기

다항식 $(4x+2)^{10}$ 을 x 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,
나머지를 R 이라 하면
 $(4x+2)^{10} = xQ(x) + R$ 이고
 $x = 0$ 을 대입하면
 $R = \boxed{1024}$ 이다.
 $(4x+2)^{10} = xQ(x) + \boxed{1024}$ 에
 $x = 505$ 를 대입하면
 $2022^{10} = 505 \times Q(505) + \boxed{1024}$ 이다.
나머지는 505보다 작은 수이므로
 $2022^{10} = 505 \times Q(505) + \boxed{1024}$
 $= 505 \times Q(505) + 505 \times 2 + 14$
 $= 505 \times \{Q(505) + \boxed{2}\} + \boxed{14}$ 이다.
 2022^{10} 을 505로 나누었을 때의 나머지는 $\boxed{14}$ 이다.
따라서 $a+b+c = 1024+2+14 = 1040$ 이다.

19. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한 복소수 문제 해결하기

$z + \bar{z} = -1$, $z\bar{z} = 1$ 이므로
 z, \bar{z} 는 이차방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근이다.
양변에 $x-1$ 을 곱하면 $x^3 - 1 = 0$ 이므로 $x^3 = 1$ 이다.
그러므로 $z^3 = 1$, $(\bar{z})^3 = 1$ 이다.
따라서
 $\frac{\bar{z}}{z^5} + \frac{(\bar{z})^2}{z^4} + \frac{(\bar{z})^3}{z^3} + \frac{(\bar{z})^4}{z^2} + \frac{(\bar{z})^5}{z}$
 $= \frac{\bar{z}}{z^2} + \frac{(\bar{z})^2}{z} + \frac{1}{1} + \frac{\bar{z}}{z^2} + \frac{(\bar{z})^2}{z}$
 $= \frac{2\bar{z}}{z^2} + \frac{2(\bar{z})^2}{z} + 1$
 $= \frac{2z\bar{z}}{z^3} + \frac{2z^2(\bar{z})^2}{z^3} + 1$
 $= 2 + 2 + 1$
 $= 5$ 이다.
[다른 풀이]
 $z^3 = 1$, $(\bar{z})^3 = 1$, $z\bar{z} = 1$ 에서 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 이다.
 $\frac{\bar{z}}{z^5} + \frac{(\bar{z})^2}{z^4} + \frac{(\bar{z})^3}{z^3} + \frac{(\bar{z})^4}{z^2} + \frac{(\bar{z})^5}{z}$
 $= (\bar{z})^6 + (\bar{z})^6 + (\bar{z})^6 + (\bar{z})^6 + (\bar{z})^6$

$$= 5(\bar{z})^6 = 5 \text{이다.}$$

20. [출제의도] 다항식의 연산을 이용하여 도형 문제 해결하기

정오각형의 한 내각의 크기는 $\frac{180^\circ \times 3}{5} = 108^\circ$ 이다.
 $\triangle ABE$ 는 이등변삼각형이고 $\angle BAE = 108^\circ$ 이므로
 $\angle ABE = 36^\circ$ 이다.
 $\triangle BAC$ 는 이등변삼각형이고 $\angle ABC = 108^\circ$ 이므로
 $\angle BAC = 36^\circ$ 이다.
 $\angle BAP = \angle ABP = 36^\circ$ 이므로 $\angle APB = 108^\circ$ 이고
 $\angle APE = 72^\circ$ 이고 $\angle EAP = 72^\circ$ 이다.
 $\triangle APE$ 는 이등변삼각형이므로 $\overline{PE} = 1$ 이다.
 $\overline{BE} : \overline{PE} = \overline{PE} : \overline{BP}$
 $x : 1 = 1 : (x-1)$
 $x(x-1) = 1$, $x^2 - x - 1 = 0$ 이다.
 $x > 0$ 이므로 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 이다.
 $x^2 = x + 1$
 $x^3 = (x+1)x = 2x + 1$
 $x^4 = (2x+1)x = 3x + 2$
 $x^5 = (3x+2)x = 5x + 3$
 $x^6 = (5x+3)x = 8x + 5$
 $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - x^7 + x^8$
 $= 1 + (-x + x^2) + x^2(-x + x^2) + x^4(-x + x^2)$
 $+ x^6(-x + x^2)$
 $= 1 + 1 + x^2 + x^4 + x^6$
 $= 2 + (x+1) + (3x+2) + (8x+5)$
 $= 12x + 10$
 $= 12 \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 10$
 $= 16 + 6\sqrt{5}$ 이므로
 $p = 16$, $q = 6$ 이다.
따라서 $p+q = 22$ 이다.

21. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계 추론하기

조건 (가)에 의하여
 $f(x)g(x) = (x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$ 이고
조건 (나)에 의하여
 $f(x) = 0$ 의 두 실근이 α , $\alpha+5$
즉, $f(x) = 0$ 의 두 실근의 차가 5이다.
따라서 $\begin{cases} f(x) = a(x-2)(x+3) \\ g(x) = \frac{1}{a}(x+2)(x-3) \end{cases}$ 이거나
 $\begin{cases} f(x) = a(x+2)(x-3) \\ g(x) = \frac{1}{a}(x-2)(x+3) \end{cases}$ 이다. (단, $a \neq 0$ 는 상수)
ㄱ. $f(2) = 0$ 이면 $\begin{cases} f(x) = a(x-2)(x+3) \\ g(x) = \frac{1}{a}(x+2)(x-3) \end{cases}$ 이므로
 $g(3) = 0$ 이다. (참)
ㄴ. $g(2) > 0$ 이므로
 $\begin{cases} f(x) = a(x-2)(x+3) \\ g(x) = \frac{1}{a}(x+2)(x-3) \end{cases}$ 이고, $a < 0$ 인 상수이다.
 $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{11}{4}a < 0$, $g\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{9}{4a} > 0$
따라서 $f\left(\frac{5}{2}\right) < 0 < g\left(\frac{5}{2}\right)$ 이다. (참)
ㄷ.
(i) $\begin{cases} f(x) = a(x-2)(x+3) \\ g(x) = \frac{1}{a}(x+2)(x-3) \end{cases}$ (단, $a \neq 0$)인 경우
방정식
 $f(x) - g(x) = \left(a - \frac{1}{a}\right)x^2 + \left(a + \frac{1}{a}\right)x - 6\left(a - \frac{1}{a}\right) = 0$
이 서로 다른 두 정수 근을 가지므로 이차방정식이다.
그러므로 $a - \frac{1}{a} \neq 0$, $a \neq \pm 1$ 이다.

$f(x) - g(x) = 0$ 의 양변에 a 를 곱하면
 $(a^2 - 1)x^2 + (a^2 + 1)x - 6(a^2 - 1) = 0$ 이다.
근과 계수의 관계에 의해
 $mn = -6$ 이고, m, n 이 정수이므로
 $(m, n) = (-6, 1), (1, -6), (-3, 2), (2, -3),$
 $(-2, 3), (3, -2), (-1, 6), (6, -1)$
로 8가지 경우이다.
① $(m, n) = (-6, 1), (1, -6)$ 인 경우
 $m+n = \frac{-a^2-1}{a^2-1} = -5$, $-a^2-1 = -5a^2+5$
 $a = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$ 이다.
 x 에 대한 방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 은 $x = -6$, $x = 1$ 을
두 정수 근으로 갖는다.
② $(m, n) = (-3, 2), (2, -3)$ 인 경우
 $m+n = \frac{-a^2-1}{a^2-1} = -1$, $-a^2-1 = -a^2+1$
만족하는 a 의 값은 존재하지 않는다.
 x 에 대한 방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 은 $x = -3$, $x = 2$ 를
두 정수 근으로 가질 수 없다.
③ $(m, n) = (-2, 3), (3, -2)$ 인 경우
 $m+n = \frac{-a^2-1}{a^2-1} = 1$, $-a^2-1 = a^2-1$
 $a = 0$ 이다.
 $a \neq 0$ 이므로 x 에 대한 방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 은
 $x = -2$, $x = 3$ 을 두 정수 근으로 가질 수 없다.
④ $(m, n) = (-1, 6), (6, -1)$ 인 경우
 $m+n = \frac{-a^2-1}{a^2-1} = 5$, $-a^2-1 = 5a^2-5$
 $a = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$ 이다.
 x 에 대한 방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 은 $x = -1$, $x = 6$ 을
두 정수 근으로 갖는다.
(ii) $\begin{cases} f(x) = a(x+2)(x-3) \\ g(x) = \frac{1}{a}(x-2)(x+3) \end{cases}$ (단, $a \neq 0$)인 경우
 $f(x) - g(x) = \left(a - \frac{1}{a}\right)x^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x - 6\left(a - \frac{1}{a}\right)$ 에서
(i)과 같은 방법으로 하면 된다.
따라서 x 에 대한 방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 이 서로 다른
두 정수 m, n 을 근으로 가지면 $|m+n| = 5$ 이다. (참)
22. [출제의도] 다항식 계산하기
 $(x+4)(2x^2-3x+1) = 2x^3+5x^2-11x+4$ 이므로
 x^2 의 계수는 5이다.
23. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기
이차방정식 $x^2 + ax - 4 = 0$ 의 두 근이 -4 , b 이므로
근과 계수의 관계에 의하여
두 근의 합 $-4 + b = -a$ 이고
두 근의 곱 $-4 \times b = -4$ 이다.
따라서 $b = 1$, $a = 3$ 이므로 $a+b = 4$ 이다.
24. [출제의도] 이차부등식 이해하기
이차부등식 $x^2 + 8x + (a-6) < 0$ 이 해를 갖지 않도록
하기 위해서는 이차방정식 $x^2 + 8x + (a-6) = 0$ 의
판별식 $\frac{D}{4} = 4^2 - (a-6) \leq 0$ 이어야한다.
따라서 $a \geq 22$ 이므로 최솟값은 22이다.
25. [출제의도] 인수분해 추론하기
주어진 이차식을 x 에 대한 내림차순으로 정리하면
 $x^2 + (ky+1)x - 3y^2 + 11y - 6$
 $= x^2 + (ky+1)x - (3y-2)(y-3)$ 이다.
 x, y 에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면
 $(3y-2) - (y-3) = ky+1$ 이다.
 y 의 계수를 비교하면 $k = 2$ 이다.
[다른 풀이]

주어진 이차식을 x 에 대한 내림차순으로 정리한
이차방정식은 $x^2 + (ky+1)x - 3y^2 + 11y - 6 = 0$ 이다.
이때 $(ky+1)^2 - 4(-3y^2 + 11y - 6) = A$ 라 하면

$$x = \frac{-(ky+1) \pm \sqrt{A}}{2} \text{이다.}$$

$$x^2 + (ky+1)x - 3y^2 + 11y - 6 = 0$$

$$= \left\{ x - \frac{-(ky+1) + \sqrt{A}}{2} \right\} \left\{ x - \frac{-(ky+1) - \sqrt{A}}{2} \right\}$$

이때 x, y 에 대한 일차식이 되려면 A 가 완전제곱식
이어야 하므로 이차방정식 $A=0$ 의 판별식 $D=0$ 이다.
 y 에 대한 이차방정식

$$(k^2+12)y^2 + 2(k-22)y + 25 = 0 \text{에 대해}$$

$$\frac{D}{4} = (k-22)^2 - 25(k^2+12) = 0 \text{이다.}$$

식을 전개하여 인수분해하면

$$6k^2 + 11k - 46 = (k-2)(6k+23) = 0 \text{이다.}$$

따라서 자연수 k 의 값은 2이다.

26. [출제의도] 제한된 범위에서 이차함수의 최대, 최소 문제 해결하기

$$\text{이차함수 } f(x) = ax^2 + bx + 5 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + 5$$

에서 꼭짓점의 x 좌표는 $x = -\frac{b}{2a} < 0$ 이고,

$a < 0$ 이므로 $1 \leq x \leq 2$ 에서 이차함수 $y = f(x)$ 는 감소한다.

이차함수 $y = f(x)$ 의 최대값은

$$f(1) = a + b + 5 = 3 \text{이다.}$$

$a + b = -2$ 이고 a, b 는 음의 정수이므로

$$a = -1, b = -1 \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } f(-2) = 4a - 2b + 5 = -4 + 2 + 5 = 3 \text{이다.}$$

27. [출제의도] 복소수의 성질을 이용하여 추론하기

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{1+i} \text{라 하면 } z_1^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2 = \frac{2}{2i} = -i,$$

$$z_1^4 = (z_1^2)^2 = (-i)^2 = -1, z_1^8 = (z_1^4)^2 = (-1)^2 = 1 \text{이다.}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \text{라 하면}$$

$$z_2^2 = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2 = \frac{2+2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$z_2^3 = z_2^2 \times z_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \times \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \frac{4i}{4} = i$$

$$z_2^6 = (z_2^3)^2 = i^2 = -1$$

$$z_2^{12} = (z_2^6)^2 = (-1)^2 = 1 \text{이다.}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n = 2 \text{을 만족시키려면}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^n = 1 \text{과 } \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n = 1 \text{을 동시에 만족시키는}$$

자연수 n 을 찾아야 한다.

따라서 자연수 n 의 최소값은 8, 12의 최소공배수인 24이다.

28. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 문제 해결하기

근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = -2a, \alpha\beta = -b \text{이므로}$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= (-2a)^2 + 4b$$

$$= 4a^2 + 4b$$

$$|\alpha - \beta| = 2\sqrt{a^2 + b} < 12 \text{ (} a, b \text{는 자연수)이므로}$$

$$a^2 + b < 36 \text{이다.}$$

$a=1$ 일 때, $b < 35$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 34)$ 로 개수는 34이다.

$a=2$ 일 때, $b < 32$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는

$(2, 1), (2, 2), \dots, (2, 31)$ 로 개수는 31이다.

$a=3$ 일 때, $b < 27$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는

$(3, 1), (3, 2), \dots, (3, 26)$ 으로 개수는 26이다.

$a=4$ 일 때, $b < 20$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는

$(4, 1), (4, 2), \dots, (4, 19)$ 로 개수는 19이다.

$a=5$ 일 때, $b < 11$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는

$(5, 1), (5, 2), \dots, (5, 10)$ 으로 개수는 10이다.

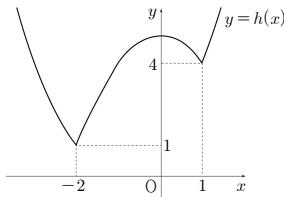
따라서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 총 개수는

$$34 + 31 + 26 + 19 + 10 = 120 \text{이다.}$$

29. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용한 문제 해결하기

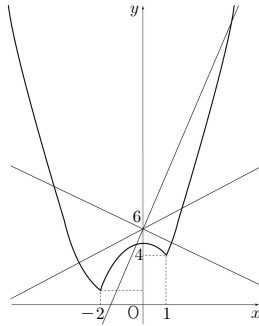
$$\text{함수 } h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ g(x) & (-2 < x < 1) \end{cases}$$

의 그래프를 그리면 아래의 그래프와 같다.



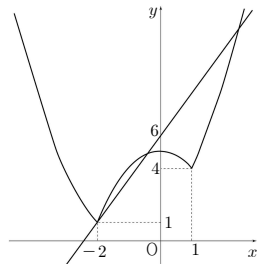
직선 $y = mx + 6$ 의 y 절편은 6이다.

y 절편이 6인 직선의 기울기를 변화시키며 그래프를 그려보면



직선 $y = mx + 6$ 과 함수 $y = h(x)$ 의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나는 경우는 다음 두 가지뿐이다.

(i) $y = mx + 6$ 이 점 $(-2, 1)$ 을 지나는 경우



$y = mx + 6$ 에 점 $(-2, 1)$ 을 대입하면

$$1 = -2m + 6, m = \frac{5}{2} \text{이다.}$$

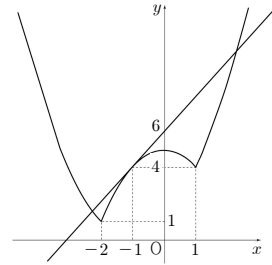
(ii) $y = mx + 6$ 이 $y = g(x)$ 에 접하는 경우

이차방정식 $-x^2 + 5 = mx + 6, x^2 + mx + 1 = 0$ 의

판별식 $D = m^2 - 4 = 0$ 이므로 $m = \pm 2$ 이다.

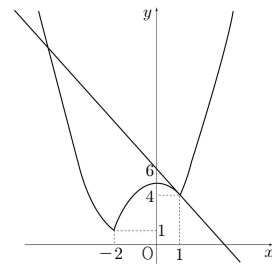
$m = 2$ 인 경우, 아래의 그림과 같이 직선 $y = mx + 6$ 과

함수 $y = h(x)$ 의 그래프는 점 $(-1, 4)$ 를 포함한 서로 다른 세 점에서 만난다.



$m = -2$ 인 경우, 아래의 그림과 같이

직선 $y = -2x + 6$ 과 함수 $y = h(x)$ 의 그래프는 점 $(1, 4)$ 를 포함한 서로 다른 두 점에서 만난다.



(i), (ii)에 의해 모든 m 의 값은 $\frac{5}{2}, 2$ 이다.

$$S = \frac{5}{2} + 2 = \frac{9}{2} \text{이므로 } 10S = 10 \times \frac{9}{2} = 45 \text{이다.}$$

30. [출제의도] 여러 가지 방정식 문제 해결하기

다항식 $P_n(x)$ 를 $x^2 + x + 1$ 로 나눌 때 몫을 $A_n(x)$ 라

하자. $P_n(x)$ 가 $x^2 + x + 1$ 로 나누어떨어지므로

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3) \cdots (1+x^{n-1})(1+x^n) - 64 = (x^2+x+1)A_n(x) \text{이다.}$$

이차방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근을 ω 라고 하면

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1 \text{이다.}$$

ω 는 $P_n(x) = 0$ 의 근이므로 $P_n(\omega) = 0$ 이다.

$$Q_n(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \cdots (1+x^{n-1})(1+x^n)$$

이라 할 때,

$$P_n(\omega) = 0 \text{이 되려면 } Q_n(\omega) = 64 \text{이어야 한다.}$$

$$Q_5(\omega) = (1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4)(1+\omega^5)$$

$$= (-\omega^2) \cdot (-\omega) \cdot 2 \cdot (-\omega^2) \cdot (-\omega) = 2$$

$$Q_6(\omega) = (-\omega^2) \cdot (-\omega) \cdot 2 \cdot (-\omega^2) \cdot (-\omega) \cdot 2 = 4$$

$$Q_7(\omega) = Q_6(\omega) \cdot (-\omega^2) = 4 \cdot (-\omega^2) = -4\omega^2$$

$$Q_8(\omega) = Q_7(\omega) \cdot (-\omega) = (-4\omega^2) \cdot (-\omega) = 4$$

$$Q_9(\omega) = Q_8(\omega) \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$$

$$Q_{10}(\omega) = Q_9(\omega) \cdot (-\omega^2) = -8\omega^2$$

$$Q_{11}(\omega) = Q_{10}(\omega) \cdot (-\omega) = 8$$

\vdots

$$Q_{18}(\omega) = 64$$

$$Q_{19}(\omega) = -64\omega^2$$

$$Q_{20}(\omega) = 64 \text{이다.}$$

따라서 $n = 18$ 또는 $n = 20$ 이고

모든 자연수 n 의 값의 합은 $18 + 20 = 38$ 이다.