Ⅲ_1. 여러 가지 적분법

[12미적03-01] 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
[12미적03-02] 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
[12미적03-03] 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을
구할 수 있다.

1 함수 $y = x^n$ (n은 실수)의 적분 ❶

(1) $n \neq -1$일 때, $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$

(단, C는 적분상수)

(2) $n = -1$일 때, $\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

(단, C는 적분상수)

☑ (1) $n \neq -1$일 때, 함수 $y = x^n$의 미분법에서

$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = x^n$이므로

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

1 함수 $y = x^n$ (n은 실수)의 적분 ❷

(2) $n = -1$일 때, 로그함수의 미분법에서

$(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$이므로

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

예 ① $\displaystyle\int x^{-2}\,dx = \frac{1}{(-2)+1}x^{(-2)+1} + C$

$= -x^{-1} + C = -\dfrac{1}{x} + C$ (단, C는 적분상수)

② $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln|x|\Big]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$

2 지수함수의 적분 ❶

(1) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$ (단, C는 적분상수)

(2) $a \neq 1$, $a > 0$일 때, $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

(단, C는 적분상수)

☑ (2) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$에서 $a^x = \dfrac{1}{\ln a}\left(a^x\right)' = \left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right)'$이므로

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

2 지수함수의 적분 ❷

예 ① $\int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e-1$

② $\int_0^1 2^x\,dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^1 = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$

3 삼각함수의 적분

(1) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ (단, C는 적분상수)

(2) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ (단, C는 적분상수)

(3) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$ (단, C는 적분상수)

(4) $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$ (단, C는 적분상수)

(5) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$ (단, C는 적분상수)

(6) $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$ (단, C는 적분상수)

예 ① $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\cos\frac{\pi}{4} + \cos 0$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$

② $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sin\frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

③ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx = \Big[\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1$

④ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \csc^2 x\,dx = \Big[-\cot x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\cot\frac{\pi}{4} + \cot\frac{\pi}{6}$

$= -1 + \sqrt{3}$

✡ 분수함수의 적분

(1) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

(2) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

(3) $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

(4) $\int \tan x\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C$

(5) $\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + C$

✡ 분수함수를 적분하는 방법

⑴ 분모와 분자를 각각 인수분해하여 약분 ⇒ 기약분수꼴로

⑵ ① (분자의 차수) > (분모의 차수)

⇒ 직접 나눗셈을 하여 몫과 나머지로 나누어 계산

② (분자의 차수) ≤ (분모의 차수)

⇒ 부분분수로 분해

③ 분모가 인수분해 × ⇒ 다른 적분법으로

✡ 부분분수로 분해하는 방법

⑴ $$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right)$$

⑵ $$\frac{(1\text{차식 이하})}{(x+a)(x+b)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b}$$

⑶ $$\frac{(2\text{차식 이하})}{(x^2+a)(x+b)} = \frac{Ax+B}{x^2+a} + \frac{C}{x+b}$$

⑷ $$\frac{(2\text{차식 이하})}{(x+a)(x+b)(x+c)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} + \frac{C}{x+c}$$

⑸ $$\frac{(2\text{차식 이하})}{(x+a)^2(x+b)} = \frac{A}{(x+a)^2} + \frac{B}{x+a} + \frac{C}{x+b}$$

$\boxed{4}$ 치환적분법 ❶

(1) 치환적분법을 이용한 부정적분

미분가능한 함수 $g(x)$에 대하여 $g(x)=t$로 놓고,

좌변은 x, 우변은 t에 대하여 미분하면 $g'(x)\,dx=dt$이므로

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(t)\,dt$$

(2) 치환적분법을 이용한 정적분

미분가능한 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a,\,b]$에서 연속이고 $g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$일 때, 함수 $f(t)$가 α, β를 포함하는 구간에서 연속이면

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

$\boxed{4}$ 치환적분법 ❷

☑ 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하자.

(1) 합성함수의 미분법에서

$$\frac{d}{dx}F(g(x))=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x)$$

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=F(g(x))+C$$

(단, C는 적분상수) …… ㉠

이때 $g(x)=t$로 놓으면 $F(g(x))=F(t)$이고,

$\displaystyle\int f(t)\,dt=F(t)+C$ (단, C는 적분상수)이므로

$$\therefore \int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(t)\,dt$$

4 치환적분법 ❸

(2) $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$일 때 ㉠에 의하여

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \Big[F(g(x))\Big]_a^b$$

$$= F(g(b)) - F(g(a)) = F(\beta) - F(\alpha)$$

$$= \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

$$\therefore \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

4 치환적분법 ❹

☑ ① $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$에서 $f(x) = t$로 놓으면 $f'(x)\,dx = dt$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C$$

$$= \ln|f(x)| + C$$ (단, C는 적분상수)

② $F'(x) = f(x)$이고 $f(x)$가 연속함수일 때, 상수 a, b $(a \neq 0)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

(단, C는 적분상수)

4 치환적분법 ❺

예 ① $\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx$에서 $x^2=t$로 놓으면 $2x\,dx=dt$이고,

$x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^1 2xe^{x^2}\,dx=\int_0^1 e^t\,dt=\Big[e^t\Big]_0^1=e-1$$

② $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x}\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx$

$$=-\Big[\ln|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\ln\frac{1}{2}+\ln 1=\ln 2$$

✡ 치환적분법을 이용한 정적분

(1) $\sqrt{a^2-x^2}$, $\dfrac{1}{a^2-x^2}$인 꼴

$\Rightarrow x=a\sin\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$로 치환

$\Rightarrow \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$을 이용

(2) $\sqrt{x^2+a^2}$, $\dfrac{1}{x^2+a^2}$인 꼴

$\Rightarrow x=a\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 치환

$\Rightarrow 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$을 이용

✡ 삼각치환법

(1) $a^2 - x^2$ ⇨ Let $x = a\sin\theta \Rightarrow dx = a\cos\theta\, d\theta$

$\therefore\ a^2 - x^2 = a^2\left(1 - \sin^2\theta\right) = a^2\cos^2\theta$

(2) $a^2 + x^2$ ⇨ Let $x = a\tan\theta \Rightarrow dx = a\sec^2\theta\, d\theta$

$\therefore\ a^2 + x^2 = a^2\left(1 + \tan^2\theta\right) = a^2\sec^2\theta$

(3) $x^2 - a^2$ ⇨ Let $x = a\sec\theta \Rightarrow dx = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$

$\therefore\ x^2 - a^2 = a^2\left(\sec^2\theta - 1\right) = a^2\tan^2\theta$

☑ 위와 같이 치환할 경우 적분 구간에서
삼각함수가 증가(또는 감소)하여야 한다.

5 부분적분법 ❶

(1) 부분적분법을 이용한 부정적분

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

(2) 부분적분법을 이용한 정적분

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$가
닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

5 부분적분법 ❷

☑ $f(x)$ ⇐ (미분하기 쉬운 것) (적분하기 쉬운 것) ⇒ $g'(x)$

(로그) – (분수) – (다항) – (삼각) – (지수)

$\ln x$ – $\dfrac{1}{x}$ – $(1,\ x,\ x^2)$ – $(\sin x,\ \cos x)$ – e^x

☑ (1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

곱의 미분법에 의하여

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

이므로

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx \quad ㉠$$

따라서

5 부분적분법 ❸

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

(2) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, ㉠에 의하여

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b$$

이므로

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

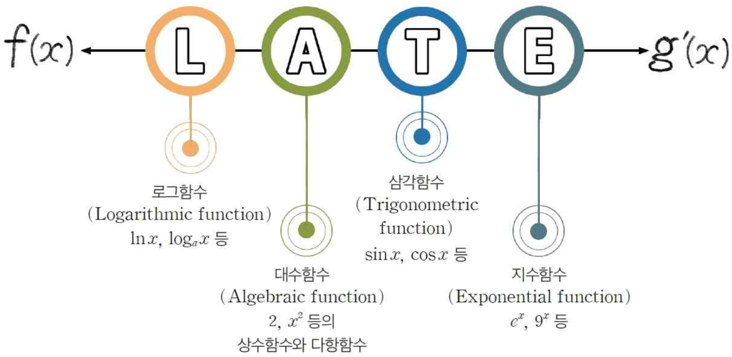
5 부분적분법 ❹

예 ① $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$에서 $f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = \Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)\,dx$$

$$= 0 + \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$



5 부분적분법 ❺

② $\int_1^e \ln x\,dx$에서 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$이므로

$$\int_1^e \ln x\,dx = \Big[x\ln x\Big]_1^e - \int_1^e 1\,dx = e - \Big[x\Big]_1^e$$

$$= e-(e-1)=1$$

✡ $E_c = \int e^x \cos x \, dx$

Let $f(x) = e^x, \; g'(x) = \cos x$

$$E_c = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x) \, dx$$

$$E_c = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx\right)$$

$$2E_c = e^x(\sin x + \cos x) + C_1$$

$$\therefore \; E_c = \int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x(\sin x + \cos x) + C$$

✡ $E_s = \int e^x \sin x \, dx$

Let $f(x) = e^x, \; g'(x) = \sin x$

$$E_s = e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x) \, dx$$

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$E_s = -e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx\right)$$

$$2E_s = e^x(\sin x - \cos x) + C_1$$

$$\therefore \; E_s = \int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + C$$

✡ $L_2 = \int (\ln x)^2 \, dx$

Let $f(x) = (\ln x)^2, \; g'(x) = 1$

$$L_2 = x(\ln x)^2 - \int \left(x \times \frac{2\ln x}{x} \right) dx$$

$$\int \left(x \times \frac{2\ln x}{x} \right) dx = 2\int \ln x \, dx = 2x\ln x - 2x - C_1$$

$$\therefore \; L_2 = \int (\ln x)^2 \, dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$$

$$= x\{(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\} + C$$

6 정적분으로 표시된 함수의 미분

연속함수 $f(x)$에 대하여

(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ (단, a는 상수)

(2) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x+a} f(t)\,dt = f(x+a) - f(x)$ (단, a는 상수)

(3) 두 함수 $g(x)$, $h(x)$가 미분가능할 때,

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

$$= f(h(x)) \times h'(x) - f(g(x)) \times g'(x)$$

☑ 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = \dfrac{d}{dx}\Big[F(t)\Big]_a^x$

$$= \frac{d}{dx}\{F(x) - F(a)\} = F'(x) = f(x)$$

(2) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x+a} f(t)\,dt = \dfrac{d}{dx}\Big[F(t)\Big]_x^{x+a}$

$$= \frac{d}{dx}\{F(x+a) - F(x)\} = F'(x+a) - F'(x)$$

$$= f(x+a) - f(x)$$

(3) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt = \dfrac{d}{dx}\Big[F(t)\Big]_{g(x)}^{h(x)}$

$$= \frac{d}{dx}[F(h(x)) - F(g(x))]$$

$$= F'(h(x)) \times h'(x) - F'(g(x)) \times g'(x)$$

$$= f(h(x)) \times h'(x) - f(g(x)) \times g'(x)$$

예 ① $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x 2^t\,dt = 2^x$

② $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x+a} \sin t\,dt = \sin(x+a) - \sin x$

③ $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2}^{x^2+1} \ln t\,dt$

$$= \ln\left(x^2+1\right) \times \left(x^2+1\right)' - \ln x^2 \times \left(x^2\right)'$$

$$2x\ln\left(x^2+1\right) - 2x\ln x^2 = 2x\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

7 정적분으로 표시된 함수의 극한 ❶

연속함수 $f(x)$에 대하여

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_{a}^{a+x} f(t)\,dt = f(a)$ (단, a는 상수)

(2) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \int_{a}^{x} f(t)\,dt = f(a)$ (단, a는 상수)

(3) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \int_{a^n}^{x^n} f(t)\,dt = f\left(a^n\right) \times n a^{n-1}$ (단, a는 상수)

(4) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{a+ph}^{a+qh} f(t)\,dt = f(a) \times q - f(a) \times p$

(단, a는 상수)

7 정적분으로 표시된 함수의 극한 ❷

☑ 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_{a}^{a+x} f(t)\,dt = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \Big[F(t)\Big]_{a}^{a+x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{F(a+x) - F(a)}{x} = F'(a) = f(a)$$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \int_{a}^{x} f(t)\,dt = \lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \Big[F(t)\Big]_{a}^{x}$

$$= \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x-a} = F'(a) = f(a)$$