

II_2. 여러 가지 미분법

[12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다.

[12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.

[12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.

[12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.

[12미적02-10] 이계도함수를 구할 수 있다.

□ 1 함수의 몫의 미분법 ①

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ ($g(x) \neq 0$)이 미분가능할 때,

$$(1) \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' = - \frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$(2) \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

☑(1) $g(x)$ 가 미분가능하므로

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \end{aligned}$$

1 함수의 몫의 미분법 ②

$$= -g'(x) \times \frac{1}{\{g(x)\}^2} = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

(2) $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$ 이므로 By (1)과 곱의 미분법

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' &= f'(x) \times \frac{1}{g(x)} + f(x) \times \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \end{aligned}$$

2 함수 $y = x^n$ (n 은 정수)의 도함수

n 이 정수일 때, $y = x^n$ 이면 $y' = nx^{n-1}$

☑ n 이 음의 정수일 때, $n = -m$ (m 은 양의 정수)로 놓으면

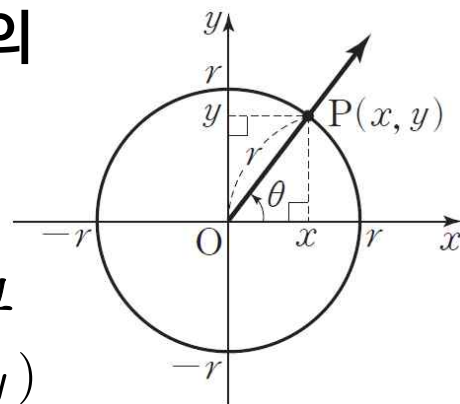
$$x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} y' &= (x^n)' = \left(\frac{1}{x^m} \right)' = -\frac{(x^m)'}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} \\ &= -mx^{-m-1} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

한편, $n = 0$ 일 때, $y = x^0 = 1$ 로 정의하면 $y' = 0$ 이므로 이 경우에도 $y' = nx^{n-1}$ 이 성립한다.

③ 삼각함수 $\csc \theta$, $\sec \theta$, $\cot \theta$ 의 정의

좌표평면의 원점 O 에서 x 축의 양의 방향을 시초선으로 정할 때, 일반각 θ 를 나타내는 동경과 원점 O 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r 인 원의 교점을 $P(x, y)$ 라 하면 $\csc \theta$, $\sec \theta$, $\cot \theta$ 를 다음과 같이 정의한다.



$$\csc \theta = \frac{r}{y} \quad (y \neq 0), \quad \sec \theta = \frac{r}{x} \quad (x \neq 0), \quad \cot \theta = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

이 함수를 차례로 θ 에 대한 코시컨트함수, 시컨트함수, 코탄젠트함수라고 한다.

☆ 삼각함수의 정의 (단, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$)

(1) 사인함수 $\Leftrightarrow \sin \theta = \frac{y}{r}$

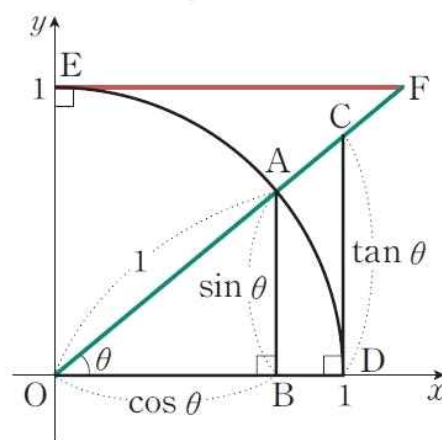
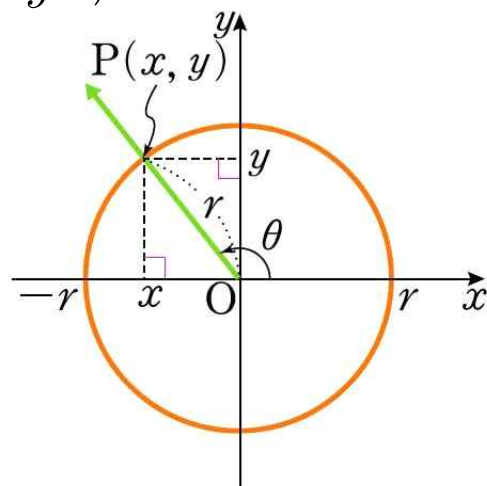
(2) 코사인함수 $\Leftrightarrow \cos \theta = \frac{x}{r}$

(3) 탄젠트함수 $\Leftrightarrow \tan \theta = \frac{y}{x}$

(4) 코시컨트함수 $\Leftrightarrow \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{r}{y}$

(5) 시컨트함수 $\Leftrightarrow \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{r}{x}$

(6) 코탄젠트함수 $\Leftrightarrow \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{x}{y}$



☆ 삼각함수의 제곱 관계

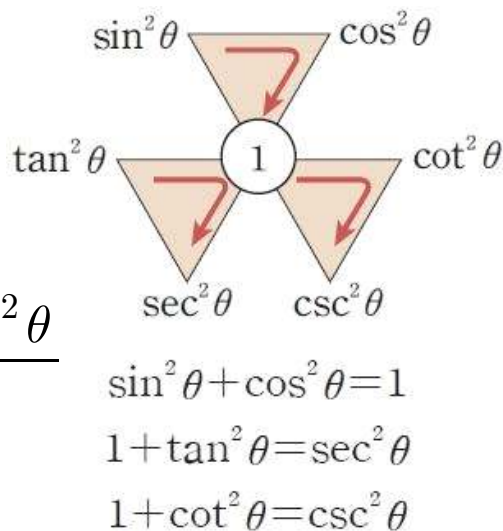
$$(1) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$(2) 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$\begin{aligned} \checkmark \text{ (좌변)} &= 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \theta} = \sec^2 \theta \end{aligned}$$

$$(3) 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

$$\checkmark \text{ (좌변)} = 1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} = \csc^2 \theta$$



④ 삼각함수의 도함수

몫의 미분법을 이용하여 여러 가지 삼각함수의 도함수를 구할 수 있다.

$$(1) y = \tan x \text{ 이면 } y' = \sec^2 x$$

$$(2) y = \cot x \text{ 이면 } y' = -\csc^2 x$$

$$(3) y = \sec x \text{ 이면 } y' = \sec x \tan x$$

$$(4) y = \csc x \text{ 이면 } y' = -\csc x \cot x$$

$$\checkmark (1) y = \tan x \text{ 에 대하여 } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ 이므로}$$

$$y' = (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)'$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x
\end{aligned}$$

(2) $y = \cot x$ 에 대하여 $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ 이므로

$$\begin{aligned}
y' &= (\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' \\
&= \frac{(-\sin x) \times \sin x - \cos x \times \cos x}{\sin^2 x} \\
&= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x
\end{aligned}$$

(3) $y = \sec x$ 에 대하여 $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ 이므로

$$\begin{aligned}
y' &= (\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x} \right)' = -\frac{-\sin x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x
\end{aligned}$$

(4) $y = \csc x$ 에 대하여 $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ 이므로

$$\begin{aligned}
y' &= (\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x} \right)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \\
&= -\frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x} = -\csc x \cot x
\end{aligned}$$

☆ 삼각함수의 도함수

$$(1) (\sin x)' = \cos x$$

$$(2) (\cos x)' = -\sin x$$

$$(3) (\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(4) (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(5) (\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(6) (\cot x)' = -\csc^2 x$$

⑤ 합성함수의 미분법 ①

두 함수 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 가 미분가능할 때,
합성함수 $y = f(g(x))$ 도 미분가능하며 그 도함수는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \quad \text{또는}$$

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x)) \times g'(x)$$

☑ 함수 $u = g(x)$ 에서 x 의 증분 Δx 에 대한 u 의 증분을 Δu 라 하고, 함수 $y = f(u)$ 에서 u 의 증분 Δu 에 대한

$$y \text{의 증분을 } \Delta y \text{라 하면 } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (\Delta u \neq 0)$$

이고, 두 함수 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 가 미분가능하므로

5 합성함수의 미분법 ②

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{dy}{du}, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

이때 미분가능한 함수 $u = g(x)$ 는 연속이므로

$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$ 에서 $\Delta x \rightarrow 0$ 이면 $\Delta u \rightarrow 0$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

또한 $\frac{dy}{du} = f'(u) = f'(g(x))$ 이고, $\frac{du}{dx} = g'(x)$ 이므로

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x)) \times g'(x)$$

5 합성함수의 미분법 ③

예 함수 $y = (3x + 2)^5$ 의 도함수를 구해 보자.

$u = 3x + 2$ 라 하면 $y = u^5$ 이고 $\frac{dy}{du} = 5u^4$, $\frac{du}{dx} = 3$ 이므로

$$y' = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 5u^4 \times 3 = 15(3x + 2)^4$$

☑ 함수 $f(x)$ 가 미분가능할 때, 함수 $y = \{f(x)\}^n$
(n 은 정수)는 미분가능하고 그 도함수는

$$y' = n \{f(x)\}^{n-1} \times f'(x)$$

□ 6 로그함수의 도함수 ①

$$(1) (\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

$$(2) (\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (\text{단, } a \neq 1, a > 0)$$

(3) 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(x) \neq 0$ 일 때,

$$\textcircled{1} (\ln |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\textcircled{2} (\log_a |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$$

□ 6 로그함수의 도함수 ②

☑(1) 함수 $y = \ln |x|$ 의 정의역은 $\{x \mid x \neq 0 \text{인 실수}\}$ 이므로

$$\textcircled{1} x > 0 \text{일 때, } y = \ln |x| = \ln x \text{이므로 } y' = \frac{1}{x}$$

$$\textcircled{2} x < 0 \text{일 때, } y = \ln |x| = \ln(-x) \text{이므로}$$

합성함수의 미분법에 의하여

$$y' = \frac{1}{-x} \times (-x)' = \frac{1}{-x} \times (-1) = \frac{1}{x}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에 의하여 } (\ln |x|)' = \frac{1}{x}$$

☆ 로그미분법 ①

- (1) 양변에 절댓값을 취한다.(양수일 경우는 생략)
- (2) 양변에 자연로그를 취한다.
- (3) 양변을 x 에 대하여 미분한다.

$$(4) y = \ln |x| \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

예) $y = a^x$ 을 미분하시오.

$$\Rightarrow \text{자연로그} : \ln y = \ln a^x = x \ln a$$

$$x \text{에 대하여 미분} : \frac{y'}{y} = \ln a$$

$$\therefore y' = y \times \ln a = a^x \ln a$$

☆ 로그미분법 ②

예) $y = \frac{x(x+2)}{(x-1)^2}$ 을 미분하시오.

$$\Rightarrow \ln |y| = \ln \left| \frac{x(x+2)}{(x-1)^2} \right|$$

$$= \ln |x| + \ln |x+2| - 2\ln |x-1|$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-1} = \frac{-4x-2}{x(x+2)(x-1)}$$

$$\therefore y' = y \times \frac{-4x-2}{x(x+2)(x-1)} = -\frac{4x+2}{(x-1)^3}$$

☆ 로그미분법 ③

예 $y = x^x$ 을 미분하시오.

$$\Rightarrow \ln |y| = \ln |x^x| = x \ln |x|$$

$$\frac{y'}{y} = \ln |x| + x \times \frac{1}{x} = \ln |x| + 1$$

$$\therefore y' = y \times (\ln |x| + 1) = x^x (\ln |x| + 1)$$

7 함수 $y = x^\alpha$ (α 는 실수, $x > 0$)의 도함수

α 가 실수일 때, $y = x^\alpha$ ($x > 0$)이면 $y' = \alpha x^{\alpha-1}$

☑ $x^\alpha = (e^{\ln x})^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ 이므로

$$\begin{aligned} y' &= (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \times (\alpha \ln x)' \\ &= e^{\alpha \ln x} \times \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \times \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

예 함수 $y = \sqrt{x}$ 에 대하여

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

⑧ 매개변수로 나타낸 함수의 미분법 ①

(1) 두 변수 x, y 사이의 관계를 변수 t 를 매개로 하여

$$x = f(t), y = g(t)$$

로 나타낼 때 변수 t 를 ‘매개변수’라 하고,
이 함수를 ‘매개변수로 나타낸 함수’라 한다.

(2) 매개변수 t 로 나타낸 함수

$$x = f(t), y = g(t)$$

에서 두 함수 $f(t), g(t)$ 가 미분가능하고 $f'(t) \neq 0$ 일 때,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

⑧ 매개변수로 나타낸 함수의 미분법 ②

☑ 매개변수 t 의 증분 Δt 에 대한 x 의 증분을 Δx ,
 y 의 증분을 Δy 라 하면

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \bigg/ \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

이때 $x = f(t)$ 는 t 에 대하여 미분가능하고,
 $f'(t) \neq 0$ 이므로 $\Delta x \rightarrow 0$ 이면 $\Delta t \rightarrow 0$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} \bigg/ \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \\ &= \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) \bigg/ \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \end{aligned}$$

⑧ 매개변수로 나타낸 함수의 미분법 ③

예 ① 매개변수 t 로 나타낸 함수 $x = t^3 + t$, $y = t^2 + 2t$ 에서

$\frac{dy}{dx}$ 를 구해 보자. $\frac{dx}{dt} = 3t^2 + 1$, $\frac{dy}{dt} = 2t + 2$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{2t + 2}{3t^2 + 1}$$

② 매개변수 t 로 나타낸 곡선 $x = e^t + t$, $y = e^{2t}$ 에서

$t = 0$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 를 구해 보자. $\frac{dx}{dt} = e^t + 1$, $\frac{dy}{dt} = 2e^{2t}$

$$\text{이므로 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{2e^{2t}}{e^t + 1} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

⑧ 매개변수로 나타낸 함수의 미분법 ④

따라서 $t = 0$ 일 때 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은 $\textcircled{7}$ 에 $t = 0$ 을 대입한

값과 같으므로

$$\left\{ \frac{dy}{dx} \right\}_{t=0} = \frac{2e^0}{e^0 + 1} = \frac{2 \times 1}{1 + 1} = 1$$

☆ 매개변수로 나타낸 함수

$$(1) \text{ 원 : } x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

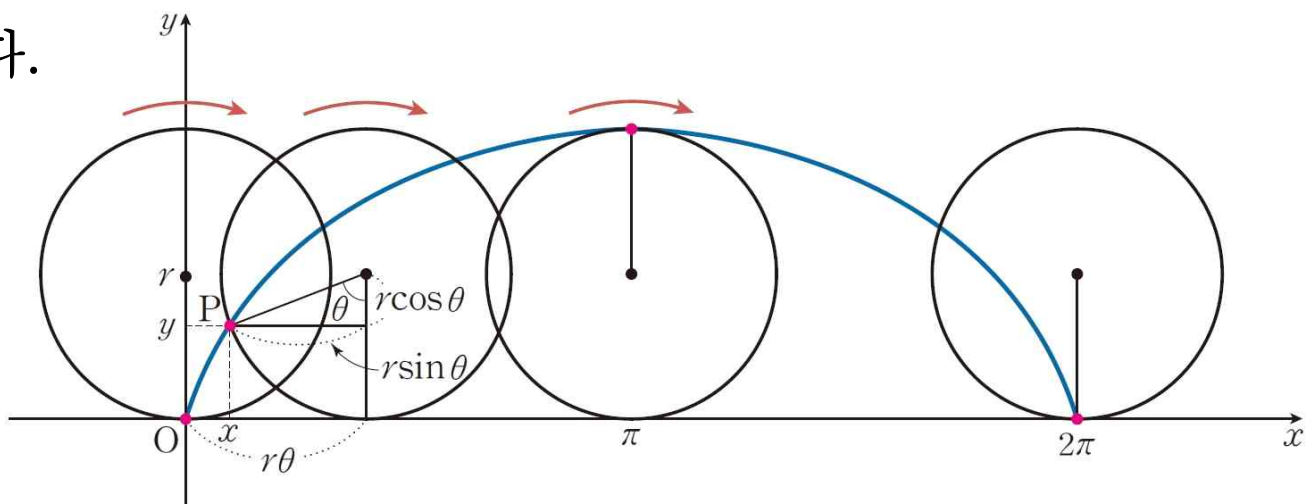
$$(2) \text{ 포물선 : } y^2 = 4px \Rightarrow \begin{cases} x = pt^2 \\ y = 2pt \end{cases} \quad (t \text{ 는 실수})$$

$$(3) \text{ 타원 : } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

$$(4) \text{ 쌍곡선 : } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = a \sec \theta \\ y = b \tan \theta \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq \theta < 2\pi \\ \theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \end{array} \right)$$

☆ 사이클로이드(cycloid) 곡선

다음 그림과 같이 직선을 따라 원을 굴렸을 때, 원주 위의 고정된 점 $P(x, y)$ 가 그리는 궤적을 ‘사이클로이드 곡선’이라고 한다.



$$x = r\theta - r \sin \theta = r(\theta - \sin \theta), \quad y = r - r \cos \theta = r(1 - \cos \theta)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \bigg/ \frac{dx}{d\theta} = \frac{r \sin \theta}{r(1 - \cos \theta)} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \quad (0 < \theta < 2\pi)$$

9 음함수의 미분법 ①

(1) 음함수

방정식 $f(x, y) = 0$ 에서 x 와 y 가 정의되는 구간을 적당히 정하면 y 는 x 의 함수가 된다. 이와 같은 의미에서 x 의 함수 y 가 방정식

$$f(x, y) = 0$$

의 꼴로 주어졌을 때, x 의 함수 y 가 ‘음함수 꼴로 주어졌다’고 한다.

☑ 함수 $y = \frac{x}{3x+1}$ 를 음함수의 꼴로 나타내면

$$3xy - x + y = 0 \text{ 이다.}$$

9 음함수의 미분법 ②

(2) 음함수의 미분법

x 의 함수 y 가 음함수 $f(x, y) = 0$ 의 꼴로 주어졌을 때, y 를 x 의 함수로 보고 각 항을 x 에 대하여 미분하여

$\frac{dy}{dx} = y'$ 를 구하는 것을 ‘음함수의 미분법’이라고 한다.

☑ 음함수의 미분법은 y 를 x 에 대한 식으로 나타내기 어려울 때 이용하면 편리하다.

① 같은 변수 : $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$

② y 가 x 의 함수 : $\frac{d}{dx} y^n = ny^{n-1} \frac{dy}{dx} = ny^{n-1} y'$

9 음함수의 미분법 ③

예 ① 방정식 $x^2 + y^2 = r^2$ (r 은 상수)에서 y' 를 구해 보자.
 y 를 x 의 함수로 보고 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$(x^2)' + (y^2)' = (r^2)', \quad 2x + 2y \times y' = 0$$

$$2y \times y' = -2x \quad \therefore y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

② 곡선 $x^3 - xy^2 = 6$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기를 구해 보자.

y 를 x 의 함수로 보고 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 - (1 \times y^2 - x \times 2y \times y') = 0$$

$$2xy \times y' = 3x^2 - y^2$$

9 음함수의 미분법 ④

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y^2}{2xy} \quad (\text{단, } xy \neq 0) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

따라서 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $\textcircled{7}$ 에 $x = 2$,
 $y = 1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$y'_{(2, 1)} = \frac{3 \times 2^2 - 1^2}{2 \times 2 \times 1} = \frac{11}{4}$$

10 역함수의 미분법 ①

미분가능한 함수 $f(x)$ 의 역함수 $y = g(x)$ 가 존재하고
이 역함수가 미분가능할 때,

$$(1) \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \quad (\text{단, } f'(g(x)) \neq 0) \quad \text{또는}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad \left(\text{단, } \frac{dx}{dy} \neq 0 \right)$$

$$(2) \quad f(a) = b \text{ 이면 } g'(b) = \frac{1}{f'(g(b))} = \frac{1}{f'(a)} \\ (\text{단, } f'(a) \neq 0)$$

10 역함수의 미분법 ②

☑ 함수 $f(x)$ 의 역함수 $y = g(x)$ 이므로
역함수의 정의에 의하여

$$f(g(x)) = x$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면 By 합성함수의 미분법

$$f'(g(x)) \times g'(x) = 1$$

$$\therefore g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \quad (\text{단, } f'(g(x)) \neq 0)$$

☑ $y = g(x)$ 에서 $x = f(y)$ 이므로

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$1 = \frac{d}{dx} f(y) = \frac{d}{dy} f(y) \times \frac{dy}{dx} = f'(y) \times \frac{dy}{dx}$$

10 역함수의 미분법 ③

$$= \frac{dx}{dy} \times \frac{dy}{dx} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \left(\text{단, } \frac{dx}{dy} \neq 0 \right)$$

예 함수 $f(x) = (x+1)^3$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g'(8)$ 의 값을 구해 보자.

$$g(8) = a \text{라 하면 } f(a) = 8, \text{ 즉 } (a+1)^3 = 8 \text{에서 } a = 1 \text{ 따라서 } g(8) = 1 \text{이고 } f'(x) = 3(x+1)^2 \text{에서 } f'(1) = 12$$

$$\therefore g'(8) = \frac{1}{f'(g(8))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{12}$$

11 이계도함수 ①

함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 미분가능할 때,
함수 $f'(x)$ 의 도함수

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

를 함수 $y = f(x)$ 의 이계도함수라 하고,

기호로 y'' , $f''(x)$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$ 와 같이 나타낸다.

☑ f, g 가 x 의 미분가능한 함수일 때,

$$(f \times g)'' = (f' \times g + f \times g')'$$

$$= f'' \times g + 2 \times f' \times g' + f \times g''$$

11 이계도함수 ②

예 함수 $y = x^2 \ln x$ 의 이계도함수를 구해 보자.

$$\begin{aligned} y' &= (x^2)' \times \ln x + x^2 \times (\ln x)' \\ &= 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} y'' &= (2x)' \times \ln x + 2x \times (\ln x)' + 1 \\ &= 2 \ln x + 2x \times \frac{1}{x} + 1 = 2 \ln x + 3 \end{aligned}$$