Ⅲ_4. 유리함수

[10공수2-03-04] 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 탐구할 수 있다.

A : 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 탐구하여 설명할 수 있다.

B : 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다.

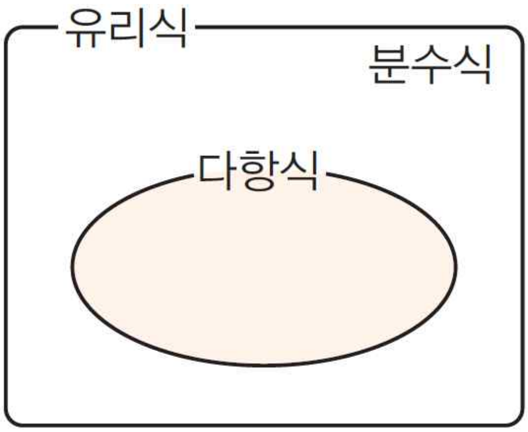
C : 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 안다.

D : 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프를 그릴 수 있다.

E : 안내된 절차에 따라 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 그릴 수 있다.

1 유리식 ❶

(1) 유리식



두 다항식 A, B ($B \neq 0$)에 대하여 $\frac{A}{B}$의 꼴로 나타낸 식을 '유리식'이라 한다. 특히, B가 0이 아닌 상수이면 $\frac{A}{B}$는 다항식이 되므로 다항식도 유리식이다.

다항식이 아닌 유리식을 '분수식'이라 한다.

1 유리식 ❷

(2) 유리식의 성질

다항식 A, B, C ($B \neq 0$, $C \neq 0$)에 대하여

① $\frac{A}{B} = \frac{A \times C}{B \times C}$ ② $\frac{A}{B} = \frac{A \div C}{B \div C}$

(3) 유리식의 사칙연산

다항식 A, B, C, D에 대하여($BCD \neq 0$)

① $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{B} = \frac{A \pm C}{B}$, $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{AD \pm BC}{BD}$ (복호동순)

② $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$, $\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$

✡ 유리식의 계산

두 다항식 A, $B(B \neq 0)$에 대하여
A를 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R이라 하면

$A = BQ + R$ (단, R의 차수는 B의 차수보다 낮다.)

가 성립한다. 여기에 양변을 B로 나누면

$\dfrac{A}{B} = Q + \dfrac{R}{B}$ (단, R의 차수는 B의 차수보다 낮다.)

즉, 유리식 $\dfrac{A}{B}$는 $Q + \dfrac{R}{B}$와 같이 (다항식) + (분수식)의 꼴로 변형한 후 계산하는 것이 편리하다.

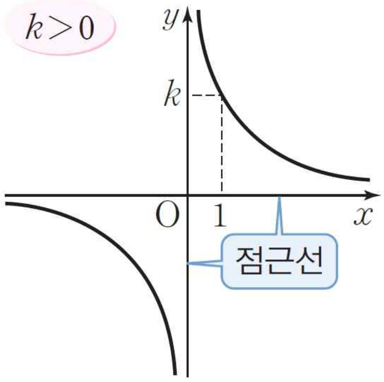
2 유리함수 ⇨ 점근선과 k의 값

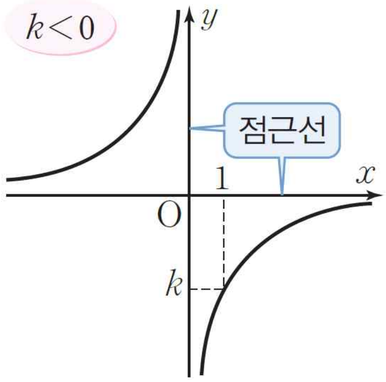
함수 $y = f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 유리식일 때,
이 함수를 '유리함수'라 한다.
특히, $f(x)$가 x에 대한 다항식일 때
이 함수를 '다항함수'라 한다.

3 유리함수의 정의역

다항함수가 아닌 유리함수에서
정의역이 주어져 있지 않을 때는 (분모의 값) $\neq 0$인
실수 전체의 집합을 정의역으로 한다.

$\boxed{4}$ 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq 0)$의 그래프





(1) 정의역과 치역은 0을 제외한 실수 전체의 집합이다.

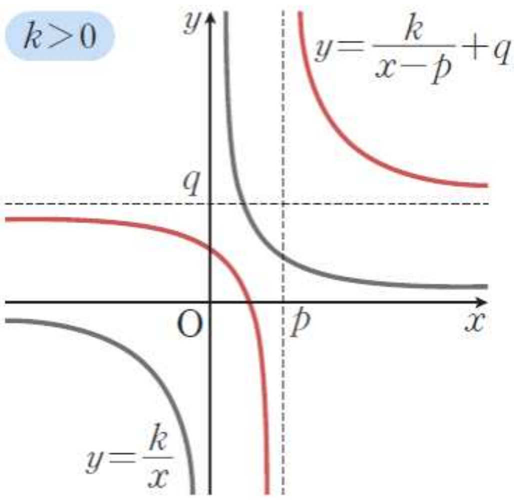
(2) 점근선은 x축 $(y=0)$, y축$(x=0)$이다.

(3) $k>0$이면 그래프는 제1, 3사분면에 있고,
$k<0$이면 그래프는 제2, 4사분면에 있다.

(4) $|k|$의 값이 커질수록 그래프가 원점에서 멀어진다.

(5) 원점 $(0,\ 0)$과 직선 $y=\pm x$에 대하여 대칭이다.

$\boxed{5}$ 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ $(k\neq 0)$의 그래프



(1) 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

(2) 정의역은 $\{x\,|\,x\neq p$인 실수$\}$,
치역은 $\{y\,|\,y\neq q$인 실수$\}$이다.

(3) 점근선은 두 직선 $x=p$, $y=q$이다.

$$y=\pm(x-p)+q$$
$\uparrow$

(4) 두 점근선의 교점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이고, 교점 $(p,\ q)$를 지나고 기울기가 ± 1인 직선에 대하여 대칭이다.

$\boxed{6}$ **유리함수 $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ 의 그래프**

유리함수 $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc \neq 0,\ c \neq 0)$의 그래프는

(1) $y = \dfrac{k}{x-p} + q$의 꼴로 변형하여 그리거나

(2) 점근선과 y절편을 찾아 그린다.

(3) 점근선은 $x = -\dfrac{d}{c}$, $y = \dfrac{a}{c}$이다.

y축의 방향으로
q만큼 평행이동

$y = \dfrac{k}{x-p} + q \ (k \neq 0)$

x축의 방향으로
p만큼 평행이동

✡ **유리함수 $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc \neq 0,\ c \neq 0)$ ❶**

(1) 점근선 : $x = -\dfrac{d}{c}$ $\Leftarrow$ (분모) $= 0$

$y = \dfrac{a}{c}$ $\Leftarrow$ x의 계수 ($\because$ 나눗셈의 몫)

(2) $k = a \times \underbrace{\left(-\dfrac{d}{c}\right)}_{}+ b$ ($\because$ 나눗셈의 나머지)

(분모가 0이 되는 x의 값)

☑ k의 값이 같아야 평행이동하면 겹쳐질 수 있다.

(3) $|k|$의 값이 커진다. $\Leftrightarrow$ 점근선의 교점에서 멀어진다.

(4) $k > 0$ $\Leftrightarrow$ 그래프는 제1, 3사분면 부분에 존재한다.

$k < 0$ $\Leftrightarrow$ 그래프는 제2, 4사분면 부분에 존재한다.

✡ 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ($ad-bc\neq 0$, $c\neq 0$) ❷

(5) ① $ad-bc=0$, $c\neq 0 \Rightarrow y=\dfrac{a}{c}$: 상수함수

② $c=0$, $d\neq 0 \Rightarrow y=\dfrac{a}{d}x+\dfrac{b}{d}$: 일차함수

(6) (점근선의 교점) = (대칭이 되는 직선의 교점)

① 점대칭 : $\left(-\dfrac{d}{c},\ \dfrac{a}{c}\right)$

② 선대칭 : $y=\pm\left(x+\dfrac{d}{c}\right)+\dfrac{a}{c}$

✡ 유리함수와 역함수

유리함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ($ad-bc\neq 0$, $c\neq 0$)에 대하여

(1) 역함수는 $f^{-1}(x)=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$

☑ 원래 함수식에서 분자의 x의 계수인 a와 분모의 상수항인 d의 위치 및 그 부호를 각각 바꾼 것과 같다.

(2) $f(x)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow f\circ f=I$

$\Leftrightarrow y=x$에 대한 대칭도형

$\Rightarrow$ 점근선의 교점 $\left(-\dfrac{d}{c},\ \dfrac{a}{c}\right)$가 $y=x$ 위에 있다.

$\therefore\ a=-d \Leftrightarrow a+d=0$