

II_1. 확률의 뜻과 활용

[12확통02-01] 통계적 확률과 수학적 확률의 의미를 이해한다.

[12확통02-02] 확률의 기본 성질을 이해한다.

[12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

[12확통02-04] 여사건의 확률의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있다.

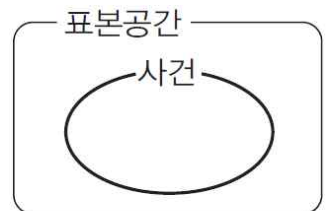
1 시행과 사건 ①

(1) 시행(Trial)

주사위나 동전을 던지는 것처럼 같은 조건에서 반복할 수 있고, 그 결과가 우연에 의하여 정해지는 실험이나 관찰을 ‘시행’이라고 한다.

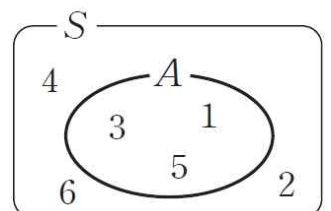
(2) 사건(Event)

① 표본공간(Sample Space) : 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합



② 사건 : 표본공간의 부분집합

③ 근원사건 : 한 개의 원소로 이루어진 사건



1 시행과 사건 ②

예 한 개의 주사위를 한 번 던져서 나오는 눈의 수를 확인하는 시행에서

① 표본공간을 S 라 하면 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

② 홀수이 눈이 나오는 사건을 A 라 하면 $A = \{1, 3, 5\}$

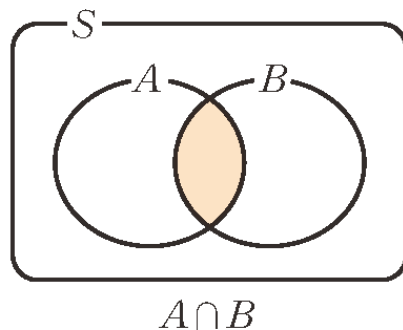
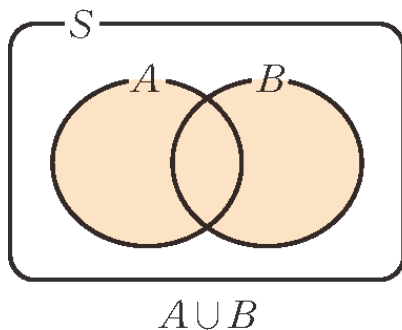
③ 근원사건은 $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$

☑ 표본공간은 공집합이 아닌 경우만 생각한다.

2 배반사건과 여사건 ①

표본공간 S 의 두 사건 A, B 에 대하여

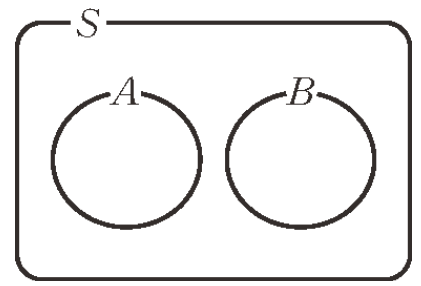
(1) 합사건 : 사건 A 또는 사건 B 가 일어나는 사건을 $A \cup B$ 와 같이 나타낸다.



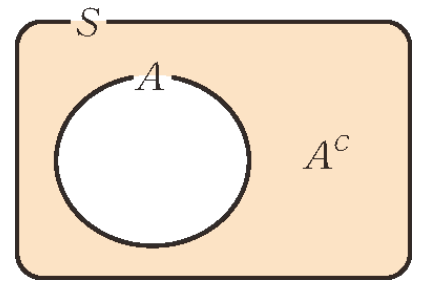
(2) 곱사건 : 두 사건 A 와 B 가 동시에 일어나는 사건을 $A \cap B$ 와 같이 나타낸다.

② 배반사건과 여사건 ②

(3) 배반사건 : 두 사건 A 와 B 가 동시에 일어나지 않을 때, 즉 $A \cap B = \emptyset$ 일 때, 두 사건 A 와 B 는 서로 '배반사건'이라고 한다.



(4) 여사건 : 사건 A 에 대하여 사건 A 가 일어나지 않는 사건을 ' A 의 여사건'이라고 하고, 기호로 A^C 과 같이 나타낸다.



☑ $A \cap A^C = \emptyset$ 이므로

사건 A 와 그 여사건 A^C 는 서로 배반사건이다.

② 배반사건과 여사건 ③

예 한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행에서 홀수의 눈이 나오는 사건을 A , 3의 배수의 눈이 나오는 사건을 B , 4의 약수의 눈이 나오는 사건을 C 라 하면

$$A = \{1, 3, 5\}, B = \{3, 6\}, C = \{1, 2, 4\}$$

① $A \cup B = \{1, 3, 5, 6\}, A \cap B = \{3\}$

② $B \cap C = \emptyset$ 이므로 두 사건 B 와 C 는 서로 배반사건이다.

③ 사건 A 의 여사건은 $A^C = \{2, 4, 6\}$ 이다.

③ 확률의 뜻 ①

(1) 확률(Probability)

어떤 시행에서 사건 A 가 일어날 가능성(Possibility)을 수로 나타낸 것을 사건 A 가 일어날 ‘확률’이라 하고, 기호로 $P(A)$ 와 같이 나타낸다.

(2) 수학적 확률

표본공간이 S 인 어떤 시행에서 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 표본공간 S 의 사건 A 가 일어날 확률 $P(A)$ 를

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{(\text{사건 } A \text{의 원소의 개수})}{(\text{표본공간 } S \text{의 원소의 개수})}$$

로 정의하고, 이것을 사건 A 가 일어날 ‘수학적 확률’이라고.

③ 확률의 뜻 ②

예 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나온 두 눈의 수의 차가 2일 확률을 구해 보자. 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던지는 시행에서 표본공간을 S 라 하면

$S = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\}$ 이므로

$n(S) = 6 \times 6 = 36$ 이고, 나온 두 눈이 수의 차가 2인 사건을 A 라 하면 $A = \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 5), (4, 2), (4, 6), (5, 3), (6, 4)\}$ 이므로 $n(A) = 8$

따라서 구하는 확률 $P(A)$ 는

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

③ 확률의 뜻 ③

☑ 수학적 확률은 표본공간이 공집합이 아닌 유한집합인 경우에만 생각한다.

(3) 통계적 확률

같은 시행을 n 번 반복할 때, 사건 A 가 일어난 횟수를 r_n 이라 하자. 이때 시행 횟수 n 이 한없이 커짐에 따라 상대도수 $\frac{r_n}{n}$ 이 일정한 값 p 에 가까워질 때, 이 값 p 를 사건 A 가 일어날 ‘통계적 확률’이라고 한다. 그런데 실제로 n 의 값을 한없이 크게 할 수 없으므로 n 이 충분히 클 때의 상대도수 $\frac{r_n}{n}$ 을 통계적 확률로 생각한다.

③ 확률의 뜻 ④

☑ 일반적으로 사건 A 가 일어날 수학적 확률이 p 일 때, 시행 횟수 n 을 충분히 크게 하면 사건 A 가 일어날 상대도수

$\frac{r_n}{n}$ 은 수학적 확률 p 에 가까워진다.

☑ $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{n} = p$ (일정한 값 \doteq 수학적 확률)

④ 확률의 기본 성질 ①

표본공간이 S 인 어떤 시행에서

- (1) 임의의 사건 A 에 대하여 $0 \leq P(A) \leq 1$
- (2) 반드시 일어나는 사건 S 에 대하여 $P(S) = 1$
- (3) 절대로 일어나지 않는 사건 \emptyset 에 대하여 $P(\emptyset) = 0$

☑ 어떤 시행에서 표본공간 S 의 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 임의의 사건 A 에 대하여 $\emptyset \subset A \subset S$ 이므로 $0 \leq n(A) \leq n(S)$ 이 부등식의 각 변을 $n(S)$ 로 나누면

$$0 \leq \frac{n(A)}{n(S)} \leq 1, \text{ 즉 } 0 \leq P(A) \leq 1$$

④ 확률의 기본 성질 ②

특히 반드시 일어나는 사건 S 에 대하여

$P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$ 이고, 절대로 일어나지 않는 사건 \emptyset 에

대하여 $n(\emptyset) = 0$ 이므로 $P(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{n(S)} = 0$ 이다.

☞ 한 개의 주사위를 던지는 시행에서

① 나오는 눈의 수가 1이상일 확률 : $\frac{6}{6} = 1$

② 나오는 눈의 수가 7이상일 확률 : $\frac{0}{6} = 0$

⑤ 확률의 덧셈정리 ①

표본공간 S 의 두 사건 A, B 에 대하여 사건 A 또는 사건 B 가 일어날 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

특히 두 사건 A 와 B 가 배반사건이면

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

☑ 표본공간 S 의 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 두 사건 A 와 B 에 대하여

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

이 등식의 양변을 $n(S)$ 로 나누면

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

⑤ 확률의 덧셈정리 ②

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

특히 두 사건 A 와 B 가 배반사건, 즉 $A \cap B = \emptyset$ 이면

$P(A \cap B) = 0$ 이므로

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

예 1부터 20까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 20장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 카드 1장을 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적힌 수가 3의 배수 또는 4의 배수일 확률을 구해 보자. 이 주머니에서 임의로 카드 1장을 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적힌 수가 3의 배수인 사건을 A , 4의 배수인 사건을 B 라 하면 사건 $A \cap B$ 는 꺼낸 카드에 적힌 수가 12의 배수인 사건이므로

⑤ 확률의 덧셈정리 ③

$$P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}, P(B) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}, P(A \cap B) = \frac{1}{20}$$

따라서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \frac{1}{20} = \frac{3}{10} + \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{1}{2}$$

☑ 사건 A, B, C 가 서로 배반

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

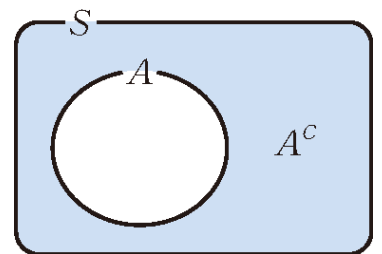
☑ 사건 A_1, A_2, \dots 가 서로 배반

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

⑥ 여사건의 확률 ①

(1) 사건 A 와 그 여사건 A^C 에 대하여

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$



(2) 두 사건 A, B 와 그 각각의 여사건 A^C, B^C 에 대하여

$$\textcircled{1} P(A^C \cap B^C) = 1 - P(A \cup B)$$

$$\textcircled{2} P(A^C \cup B^C) = 1 - P(A \cap B)$$

☑ (1) 표본공간 S 의 사건 A 에 대하여 사건 A 와 그 여사건 A^C 은 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$$P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C)$$

이때 $P(A \cup A^C) = P(S) = 1$ 이므로

$$P(A) + P(A^C) = 1 \quad \therefore P(A^C) = 1 - P(A)$$

6 여사건의 확률 ②

(2) 드모르간의 법칙에 의하여

$$A^C \cap B^C = (A \cup B)^C, \quad A^C \cup B^C = (A \cap B)^C$$

이므로 여사건의 확률에 의하여

$$P(A^C \cap B^C) = P((A \cup B)^C) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(A^C \cup B^C) = P((A \cap B)^C) = 1 - P(A \cap B)$$

☑ 일반적으로 ‘적어도 ~일 확률’, ‘~ 이상일 확률’, ‘~ 이하일 확률’, ‘~가 아닐 확률’ 등을 구할 때는 여사건의 확률을 이용하면 편리한 경우가 많다.

$$\checkmark P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(B)$$

6 여사건의 확률 ③

예 흰 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있는 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공 중 흰 공의 개수가 1 이상일 확률을 구해 보자.

이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공 중 흰 공의 개수가 1 이상인 사건을 A 라 하면 그 여사건 A^C 은 꺼낸 공이 모두 검은 공인 사건이므로

$$P(A^C) = \frac{{}_4C_3}{{}_7C_3} = \frac{4}{35}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}$$

6 여사건의 확률 ④

예 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 나온 눈의 수가 짝수가 아니거나 소수가 아닐 확률을 구해 보자.

한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 짝수인 사건을 A , 소수인 사건을 B 라 하면, 나온 눈의 수가 짝수가 아니거나 소수가 아닌 사건은 $A^C \cup B^C$ 이므로 구하는 확률은

$$P(A^C \cup B^C) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$