p.018 $\boxed{2}$ 함수의 연속

1. 함수의 연속과 불연속

(1) 함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.

(ii) 극한값 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$가 존재한다.

(iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)=f(a)$

참고 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이다. $\Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to a-} f(x)=\lim\limits_{x \to a+} f(x)=f(a)$

p.018 $\boxed{2}$ 함수의 연속

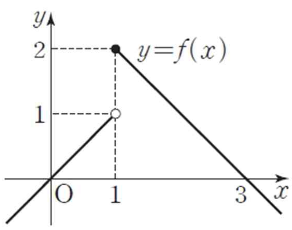
(2) 함수의 불연속

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아닐 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이라고 한다.

예 ① 함수 $f(x)=\begin{cases} x & (x<1) \\ -x+3 & (x \geq 1) \end{cases}$은 $x=1$에서 $f(1)=2$로 정의되어 있지만

$\lim\limits_{x \to 1-} f(x)=\lim\limits_{x \to 1-} x=1$, $\lim\limits_{x \to 1+} f(x)=\lim\limits_{x \to 1+} (-x+3)=2$이므로

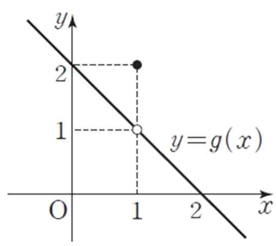
극한값 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$가 존재하지 않는다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.



② 함수 $g(x)=\begin{cases} -x+2 & (x \neq 1) \\ 2 & (x=1) \end{cases}$은 $x=1$에서 $g(1)=2$로 정의되어 있고,

$\lim\limits_{x \to 1} g(x)=\lim\limits_{x \to 1}(-x+2)=1$로 극한값 $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$가 존재하지만 $\lim\limits_{x \to 1} g(x) \neq g(1)$

이다. 따라서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.



p.018 $\boxed{2}$ 함수의 연속

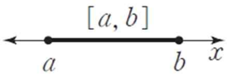
2. 구간

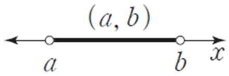
두 실수 a, b $(a<b)$에 대하여

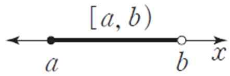
(1) 실수의 집합 $\{x \mid a \le x \le b\}$, $\{x \mid a < x < b\}$, $\{x \mid a \le x < b\}$, $\{x \mid a < x \le b\}$를 구간이라고 하며, 이것을 각각 기호로

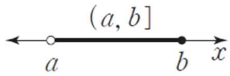
$$[a,\ b],\ (a,\ b),\ [a,\ b),\ (a,\ b]$$

와 같이 나타낸다. 이때 $[a,\ b]$를 닫힌구간, $(a,\ b)$를 열린구간이라고 하며, $[a,\ b)$, $(a,\ b]$를 반닫힌 구간 또는 반열린 구간이라고 한다.





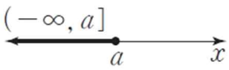


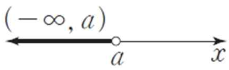


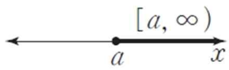
(2) 실수의 집합 $\{x \mid x \le a\}$, $\{x \mid x < a\}$, $\{x \mid x \ge a\}$, $\{x \mid x > a\}$도 구간이라고 하며, 이것을 각각 기호로

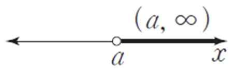
$$(-\infty,\ a],\ (-\infty,\ a),\ [a,\ \infty),\ (a,\ \infty)$$

와 같이 나타낸다.









(3) 실수 전체의 집합은 기호로 $(-\infty,\ \infty)$와 같이 나타낸다.

p.019 [예제 1] 함수 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x^2-a)}{x-2} & (x \ne 2) \\ b & (x = 2) \end{cases}$ 가

❶ $x=2$에서 연속일 때, ❷ $a+b$의 값은?

⇨ ❶ $\Rightarrow \displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x(x^2-a)}{x-2} = b$

(분모) $\to 0 \Rightarrow$ (분자) $\to 0$: $2(4-a)=0 \quad \therefore\ a=4$

$$b = \lim_{x \to 2} \frac{x(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2} x(x+2) = 2 \times 4 = 8$$

$\therefore$ ❷ $= 4+8=12$

p.019 [유제 1] 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+a & (x<-1) \\ 2x+3a & (x\geq -1) \end{cases}$ 이

❶ $x=-1$에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

⇨ ❶ $\Rightarrow$ (좌) = (우&함) : $1+3+a=-2+3a$, $2a=6$

$\therefore\ a=3$

p.019 [유제 2] 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3x+a}-2}{x-1} & (x\neq 1) \\ b & (x=1) \end{cases}$ 이

❶ $x=1$에서 연속일 때, ❷ $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수)

⇨ ❶ $\Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+a}-2}{x-1}=b$

(분모) $\to 0$ $\Rightarrow$ (분자) $\to 0$: $\sqrt{3+a}-2=0$

$\sqrt{3+a}=2$, $3+a=4$ $\therefore\ a=1$

$$b=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}=\frac{3}{2+2}=\frac{3}{4}\quad\therefore\ ❷=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$$

p.020 $\boxed{2}$ 함수의 연속

3. 구간에서의 연속

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 실수 x에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 연속 또는 그 구간에서 연속함수라고 한다.

(1) 열린구간에서의 연속

함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b)에 속하는 모든 실수 x에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 열린구간 (a, b)에서 연속이라고 한다.

(2) 닫힌구간에서의 연속

함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이라고 한다.

① 함수 $f(x)$는 열린구간 (a, b)에서 연속이다.　　② $\lim_{x \to a+} f(x)=f(a)$, $\lim_{x \to b-} f(x)=f(b)$

p.020 $\boxed{2}$ 함수의 연속

4. 연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 다음 함수도 $x=a$에서 연속이다.

(1) $cf(x)$ (단, c는 상수)

(2) $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$

(3) $f(x)g(x)$

(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a) \neq 0$)

설명 함수의 연속의 정의와 함수의 극한에 대한 성질을 이용하면 연속함수의 성질이 성립함을 보일 수 있다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$, $\lim_{x \to a} g(x)=g(a)$이므로 함수의 극한에 대한 성질에 의하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

(1) $\lim_{x \to a} cf(x)=c\lim_{x \to a} f(x)=cf(a)$ (c는 상수)이므로 함수 $cf(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

(2) $\lim_{x \to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x \to a} f(x)+\lim_{x \to a} g(x)=f(a)+g(a)$,

$\lim_{x \to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x \to a} f(x)-\lim_{x \to a} g(x)=f(a)-g(a)$

이므로 두 함수 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

(3) $\lim_{x \to a} f(x)g(x)=\lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x)=f(a)g(a)$이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

(4) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}$ ($g(a) \neq 0$)이므로 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x=a$에서 연속이다.

p.020 $\boxed{2}$ 함수의 연속

참고 ① 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 어떤 구간에서 연속이면 함수

$$cf(x)\ (c\text{는 상수}),\ f(x)+g(x),\ f(x)-g(x),\ f(x)g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x)\neq 0)$$

도 그 구간에서 연속이다.

② 함수 $y=x$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 연속함수의 성질 (3)에 의하여 함수

$$y=x^2,\ y=x^3,\ y=x^4,\ \cdots,\ y=x^n\ (n\text{은 2 이상의 자연수})$$

도 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이때 상수함수도 실수 전체의 집합에서 연속이므로 연속함수의 성질 (1), (2)에 의하여 다항함수

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0\ (a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \cdots,\ a_1,\ a_0\text{은 상수})$$

도 실수 전체의 집합에서 연속이다. 즉, 모든 다항함수는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

p.021 [예제 2] 함수 $f(x)=\begin{cases} 3x-5 & (x<1) \\ x^2+9x & (x\geq 1)\end{cases}$ 에 대하여

❶ 함수 $f(x)\{f(x)-a\}$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값은?

⇨ ❶ $x=1$에서 연속 ⇒ (좌극한) = (우극한 & 함숫값) :

$(3-5)\times(3-5-a)=(1+9)\times(1+9-a)$

$(-2)\times(-2-a)=10\times(10-a)$

$4+2a=100-10a,\ 12a=96$

$\therefore\ a=8$

p.021 [유제 3] 두 함수 $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & (x<a) \\ x+5 & (x \geq a) \end{cases}$,

$g(x)=x^2-2x-3$에 대하여 ❶ $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 ❷ 서로 다른 모든 실수 a의 값의 ❸ 합은?

⇨ ❶ $x=a$에서 연속 ⇒ (좌극한) = (우극한 & 함숫값) :

$(2a+3)(a^2-2a-3)=(a+5)(a^2-2a-3)$

$(a^2-2a-3)(a-2)=(a+1)(a-3)(a-2)=0$

❷ 서로 다른 a의 값 : -1, 2, 3

∴ ❸ $=(-1)+2+3=4$

p.021 [유제 4] 이차함수 $f(x)=x^2+6x-10$에 대하여

❶ 함수 $\dfrac{f(x)-x^2}{f(x)+k}$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 ❷ 자연수 k의 최솟값은?

⇨ ❶ : $f(x)+k=x^2+6x-10+k \neq 0$

⇒ $x^2+6x-10+k=0$의 실근이 없다.

판별식 : $D/4=9+10-k=19-k<0$ ∴ $k>19$

∴ ❷ $=20$

p.022 $\boxed{2}$ 함수의 연속

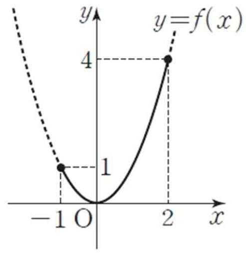
5. 최대 · 최소 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

예 함수 $f(x)=x^2$은 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다. 이때

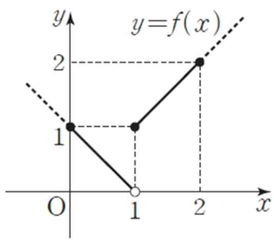
$$f(-1)=1,\ f(0)=0,\ f(2)=4$$

이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같으므로 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 4, 최솟값은 0이다.



참고 ① 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이 아니면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 최댓값 또는 최솟값을 갖지 않을 수도 있다.

예를 들어 $x=1$에서 불연속인 함수 $f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x<1) \\ x & (x\geq 1) \end{cases}$은 닫힌구간 $[0, 2]$에서 최솟값을 갖지 않는다.



② 함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b) 또는 구간 $[a, b)$ 또는 구간 $(a, b]$에서 연속인 경우에는 함수 $f(x)$가 이 구간에서 최댓값 또는 최솟값을 갖지 않을 수도 있다.

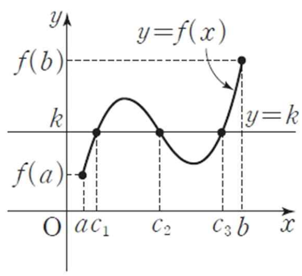
예를 들어 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)=x^2$은 열린구간 $(-1, 2)$ 또는 구간 $[-1, 2)$에서 연속이고 두 구간에서 최솟값 $f(0)=0$을 갖지만 두 구간에서 최댓값을 갖지 않는다.

p.022 $\boxed{2}$ 함수의 연속

6. 사잇값의 정리

(1) 사잇값의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.



예 함수 $f(x)=x^2$은 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 $f(0)=0$, $f(2)=4$이므로 $f(c)=3$인 c가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

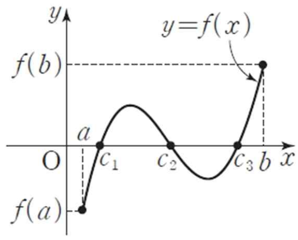
이때 $f(c)=c^2=3$에서 $0<\sqrt{3}<2$인 $c=\sqrt{3}$이 존재한다.

p.022 $\boxed{2}$ 함수의 연속

(2) 사잇값의 정리의 활용

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.



설명 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르므로 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 값인 0에 대하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

p.023 [예제 3] 함수 $f(x)=\begin{cases} -2x+2a & (x<1) \\ x^2+a & (x \geq 1) \end{cases}$ 이

닫힌구간 $[0, 2]$에서 ❶ 최솟값 $\lim_{x \to 1-} f(x)$를 가질 때,

함수 $f(x)$의 ❷ 최댓값을 M이라 하자. ❸ $a+M$의 값은?

(단, a는 상수이다.)

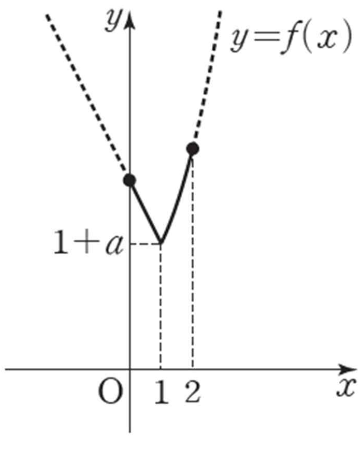
⇨ ❶&❷ $x=1$에서 연속 ⇒ (좌극한) = (우극한&함숫값) :

$-2+2a=1+a \quad \therefore \ a=3$

$f(0)=2a=6, \ f(2)=4+a=7$

$\therefore \ M=f(2)=7$

$\therefore$ ❸ $=3+7=10$



p.023 [유제 5] ❶ x에 대한 방정식 $x^2+6x+5=a$는 a의 값에 관계없이 항상 서로 다른 실근의 개수가 1이다. ❷ 이 실근이 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재하도록 하는 ❸ 모든 자연수 a의 값의 합은?

⇨ ❶ : Let $f(x)=x^3+6x+5-a$

❷ : $f(0)\times f(1)=(5-a)\times(1+6+5-a)$

$=(5-a)(12-a)=(a-5)(a-12)<0$

$\therefore$ a값의 범위 : $5<a<12$

$\therefore$ ❸ $=6+7+8+9+10+11=\dfrac{11\times12}{2}-\dfrac{5\times6}{2}=51$