2023학년도 대학수학능력시험

수학영역 정답 및 풀이

*최종 수정일 : 22.11.22(화)

[공통: 수학 I ·수학 II]

01. ⑤	02. ④	03. ①	04. ③	05. ⑤
06. ②	07. ④	08. ④	09. ③	10. ④
11. ①	12. ②	13. ③	14. ①	15. ⑤
16. 10	17. 15	18. 22	19. 7	
20. 17	21. 33	22. 13		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\left(\frac{4}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}} = \left(2^2 \div 2^{\sqrt{2}}\right)^{2+\sqrt{2}}$$
$$= \left(2^{2-\sqrt{2}}\right)^{2+\sqrt{2}}$$
$$= 2^{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$$
$$= 2^2$$
$$= 4$$

정답 ⑤

2. **출제의도** : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+3}{1+\frac{5}{x}}$$
$$= \frac{\sqrt{1-0}+3}{1+0}$$
$$= 4$$

정답 ④

3. **출제의도** : 등비수열의 첫째항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r>0)$이라 하자.

$a_2+a_4=30$ ...... ㉠

한편, $a_4+a_6=\frac{15}{2}$

에서

$r^2(a_2+a_4)=\frac{15}{2}$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$r^2\times 30=\frac{15}{2}$

$r^2=\frac{1}{4}$

$r>0$이므로

$r=\frac{1}{2}$

㉠에서

$a_1r+a_1r^3=30$

$a_1\times\frac{1}{2}+a_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=30$

$a_1\times\frac{5}{8}=30$

따라서

$a_1=30\times\frac{8}{5}=48$

정답 ①

4. **출제의도** : 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

EBS

정답풀이 :

$g(x)=x^2f(x)$에서 미분하면

$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$

이때, $f(2)=1$, $f'(2)=3$이므로

$$\begin{aligned} g'(2)&=4f(2)+4f'(2) \\ &=4\times1+4\times3 \\ &=16 \end{aligned}$$

정답 ③

5. **출제의도** : 조건을 만족시키는 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$이므로

$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\tan\theta<0$, $\sin\theta<0$이므로 θ는 제4사분면의 각이고, $\cos\theta>0$이다.

그리고

$$\begin{aligned} \cos^2\theta&=1-\sin^2\theta \\ &=1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 \\ &=\frac{4}{5} \end{aligned}$$

에서

$\cos\theta=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 또는 $\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 $\cos\theta>0$이므로

$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

정답 ⑤

6. **출제의도** : 함수의 극대, 극소의 성질을 이용하여 두 상수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^3-9x^2+ax+5$에서

$f'(x)=6x^2-18x+a$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극대이므로

$f'(1)=6-18+a=0$

$a=12$

이때,

$$\begin{aligned} f'(x)&=6x^2-18x+12 \\ &=6(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=2$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로

$b=2$

따라서 $a+b=12+2=14$

정답 ②

7. **출제의도** : 등차수열의 일반항과 $\sum$의 정의를 이용하여 등차수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차가 같으므로 $a_1=a$라 하면

$$\begin{aligned} a_n&=a+(n-1)\times a \\ &=an \end{aligned}$$

한편

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=2$$

에서

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$$

$$=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{ak}+\sqrt{a(k+1)}}$$

$$=\sum_{k=1}^{15}\frac{\sqrt{a(k+1)}-\sqrt{ak}}{a}$$

$$=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{15}\left(\sqrt{a(k+1)}-\sqrt{ak}\right)$$

$$=\frac{1}{a}\{(\sqrt{2a}-\sqrt{a})+(\sqrt{3a}-\sqrt{2a})+\cdots$$

$$\cdots+(\sqrt{16a}-\sqrt{15a})\}$$

$$=\frac{1}{a}(4\sqrt{a}-\sqrt{a})$$

$$=\frac{3\sqrt{a}}{a}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{a}}=2$$

이때,

$2\sqrt{a}=3$

$a=\frac{9}{4}$

따라서,

$a_4=4a=4\times\frac{9}{4}=9$

정답 ④

8. **출제의도** : 곡선 밖의 점에서 그은 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y=x^3-x+2$에서

$y'=3x^2-1$

이때 곡선 $y=x^3-x+2$ 위의 점 $(t,\ t^3-t+2)$에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3-t+2)=(3t^2-1)(x-t)$

이 직선이 점 $(0,\ 4)$를 지나므로

$4-(t^3-t+2)=(3t^2-1)(0-t)$

정리하면 $t^3=-1$이므로

$t=-1$

따라서 점 $(0,\ 4)$에서 곡선 $y=x^3-x+2$에 그은 접선의 방정식은

$y-2=2(x+1)$

$y=2x+4$

그러므로 직선 $y=2x+4$의 x절편은 -2이다.

정답 ④

9. **출제의도** : 닫힌구간에서 탄젠트함수의 최댓값과 최솟값을 이용하여 두 상수의 곱을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$의 그래프의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6},\ b\right]$에서 최댓값과 최솟값을 가지므로

$-\frac{\pi}{6}<b<\frac{\pi}{4}$

이다.

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $\left[-\frac{\pi}{6},\ b\right]$에서 x의 값이 증가할 때, y의 값은 감소한다.

함수 $f(x)$는 $x=-\frac{\pi}{6}$에서 최댓값 7을 가지므로

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=a-\sqrt{3}\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=7$에서

$a+\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{3}=7$

$a+3=7$

$a=4$

함수 $f(x)$는 $x=b$에서 최솟값 3을 가지므로

$f(b)=4-\sqrt{3}\tan 2b=3$에서

$\tan 2b=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이때, $-\frac{\pi}{3}<2b<\frac{\pi}{2}$이므로

$2b=\frac{\pi}{6}$

$b=\frac{\pi}{12}$

따라서 $a\times b=4\times\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$

정답 ③

10. **출제의도** : 정적분과 넓이의 관계를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$A=B$이므로

$$\int_0^2\{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\}dx=0$$

이어야 한다.

이때,

$$\int_0^2\{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\}dx$$

$$=\int_0^2(x^3+2x^2-k)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-kx\right]_0^2$$

$$=4+\frac{16}{3}-2k$$

$$=\frac{28}{3}-2k=0$$

따라서,

$2k=\frac{28}{3}$

$k=\frac{14}{3}$

정답 ④

11. **출제의도** : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}=\theta$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos\theta$$

$$=25+45-2\times5\times3\sqrt{5}\times\cos\theta$$

$$=70-30\sqrt{5}\cos\theta$$

또 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{CD}}^2=\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos\theta$$

$$=49+45-2\times7\times3\sqrt{5}\times\cos\theta$$

$$=94-42\sqrt{5}\cos\theta$$

이때 $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{CD}}^2$

$70-30\sqrt{5}\cos\theta=94-42\sqrt{5}\cos\theta$에서

$\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\overline{\mathrm{BC}}^2=70-30\sqrt{5}\cos\theta$$

$$=70-30\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$=10$$

즉, $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{10}$

한편,

$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

이므로 $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이를 R라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta} = 2R$$

$$\frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = 2R$$

$$5\sqrt{2} = 2R$$

즉, $R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

정답 ①

12. **출제의도** : 정적분과 넓이의 관계를 이용하여 함수를 구한 후, 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$n-1 \le x \le n$일 때,

$f(x) = 6(x-n+1)(x-n)$

또는

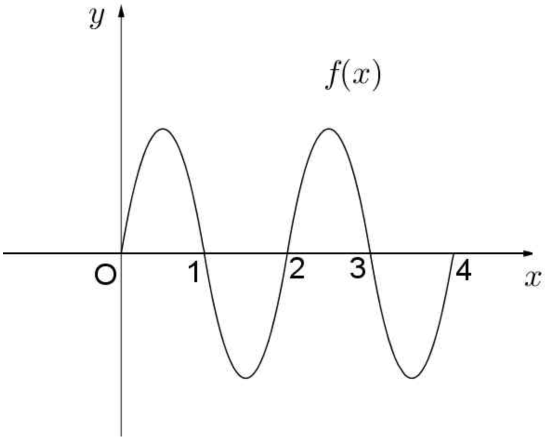
$f(x) = -6(x-n+1)(x-n)$

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 최솟값 0를 가지므로

$$g(2) = \int_0^2 f(t)dt - \int_2^4 f(t)dt = 0$$

$$\int_0^2 f(t)dt = \int_2^4 f(t)dt$$

이때, 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 최솟값을 가져야 하므로 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서

$$\int_{\frac{1}{2}}^4 f(x)dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx$$

$$= -\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$$

$$= -\int_0^{\frac{1}{2}} \{-6x(x-1)\}dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (6x^2-6x)dx$$

$$= \left[2x^3-3x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{2}$$

EBS

정답 ②

13. **출제의도** : 거듭제곱근의 뜻을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

m^{12}의 n제곱근은 x에 대한 방정식

$x^n = m^{12}$ ----㉠

의 근이다.

이때, m의 값에 따라 ㉠의 방정식이 정수근을 갖도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수를 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $m=2$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 2^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 12$

이므로

$f(2)=5$

(ⅱ) $m=3$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 3^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 12$

이므로

$f(3)=5$

(ⅲ) $m=4$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 4^{12}$

즉,

$x^n = 2^{24}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$

이므로

$f(4)=7$

(ⅳ) $m=5$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 5^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 12$

이므로

$f(5)=5$

(ⅴ) $m=6$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 6^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 12$

이므로

$f(6)=5$

(ⅵ) $m=7$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 7^{12}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 12$

이므로

$f(7)=5$

(ⅶ) $m=8$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n = 8^{12}$

즉,

$x^n = 2^{36}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$

이므로

EBS

$f(8)=8$

(viii) $m=9$일 때,

㉠의 방정식은

$x^n=9^{12}$

즉,

$x^n=3^{24}$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n의 값은

$2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$

이므로

$f(9)=7$

따라서,

$\sum_{m=2}^{9} f(m)$

$=f(2)+f(3)+\cdots+f(9)$

$=5+5+7+5+5+5+8+7$

$=5\times5+7\times2+8$

$=47$

정답 ③

14. 출제의도 : 극한으로 표현된 함수에 대하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ.

$x>1$에서 $g(x)=x$이므로

$$h(1)=\lim_{t\to0+}g(1+t)\times\lim_{t\to2+}g(1+t)$$

$$=\lim_{t\to0+}(1+t)\times\lim_{t\to2+}(1+t)$$

$$=1\times3$$

$$=3 \text{ (참)}$$

ㄴ.

$$h(x)=\lim_{t\to0+}g(x+t)\times\lim_{t\to2+}g(x+t)$$

이므로

$x<-3$일 때 $h(x)=x\times(x+2)$

$x=-3$일 때 $h(-3)=-3\times f(-1)$

$-3<x<-1$일 때

$h(x)=x\times f(x+2)$

$x=-1$일 때 $h(-1)=f(-1)\times1$

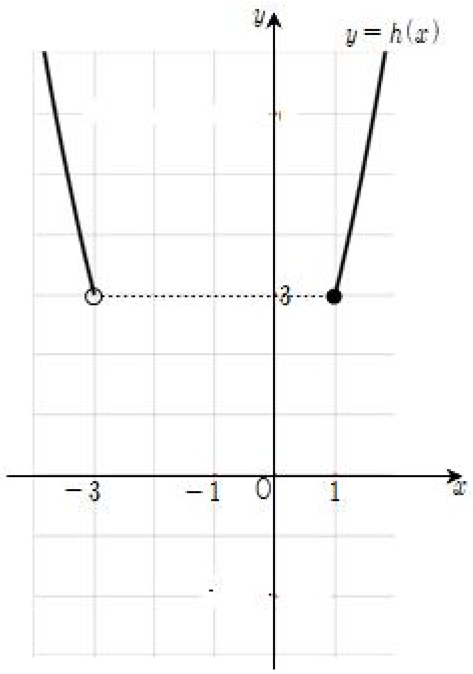
$-1<x<1$일 때

$h(x)=f(x)\times(x+2)$

$x=1$일 때 $h(1)=1\times3$

$x>1$일 때 $h(x)=x\times(x+2)$

즉, $x<-3$ 또는 $x\geq1$일 때, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.

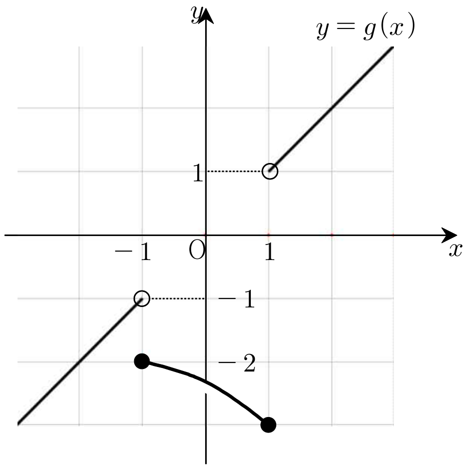


$f(-3)\neq3$이면 함수 $h(x)$는 $x=-3$에서 불연속이다.

즉, 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이라 할 수 없다. (거짓)

ㄷ.

함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 감소하고 $g(-1)=-2$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



이때,

$h(-3)=-3\times f(-1)=-3\times(-2)=6$

$h(-1)=f(-1)\times 1=-2\times 1=-2$

이다.

$-3<x<-1$에서 $h(x)>0$

또 $-1<x<1$에서

$h(x)=f(x)\times(x+2)$이므로

$h'(x)=f'(x)\times(x+2)+f(x)$

$f'(x)<0$, $x+2>0$, $f(x)<0$이므로

$h'(x)<0$

즉, $-1<x<1$에서 함수 $h(x)$는 감소하고, $f(1)=3$이므로

함수 $h(x)$는 최솟값을 갖지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

정답 ①

[다른 풀이]

ㄴ. <반례>

$f(x)=2$라 하자.

$-3<x<-1$일 때, $h(x)=x\times 2=2x$

$x=-1$일 때, $h(x)=2\times 1=2$

$-1<x<1$일 때, $h(x)=2(x+2)$

이때,

$\lim\limits_{x\to -1-} h(x)=\lim\limits_{x\to -1-} 2x=-2$

$\lim\limits_{x\to -1+} h(x)=\lim\limits_{x\to -1-} 2(x+2)=2$

$h(-1)=2$

이므로

$\lim\limits_{x\to -1-} h(x)\neq\lim\limits_{x\to -1+} h(x)$

이다.

즉, 함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. <반례>

$f(x)=-x-3$이라 하자.

$x<-3$일 때, $h(x)=x(x+2)$

$x=-3$일 때, $h(x)=-3\times(-2)=6$

$-3<x<-1$일 때,

$h(x)=x\times\{-(x+2)-3\}=-x(x+5)$

$x=-1$일 때, $h(-1)=-2\times 1=-2$

$-1<x<1$일 때,

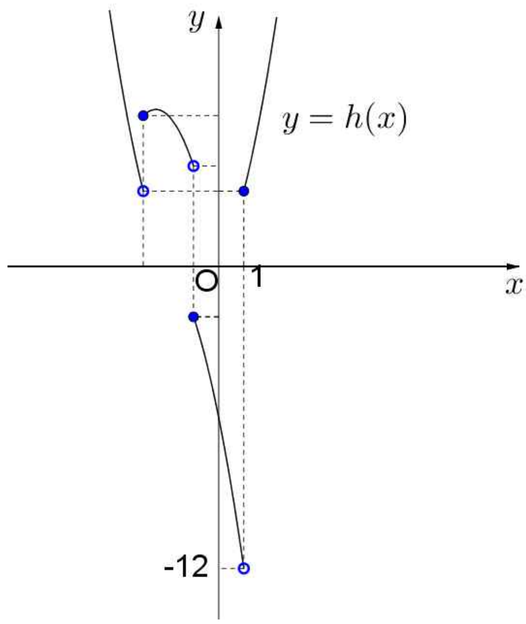
$h(x)=(-x-3)\times(x+2)=-(x+3)(x+2)$

$x=1$일 때, $h(x)=1\times 3=3$

$x>1$일 때, $h(x)=x(x+2)$

이때, $\lim\limits_{x\to 1-} h(x)=-12$, $h(1)=3$이므로

함수 $h(x)$의 최솟값은 없다. (거짓)



15. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 a_9의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(ⅰ) a_6이 3의 배수인 경우

$a_7=40$이므로

$\frac{a_6}{3}=a_7$

$a_6=3a_7=3\times40=120$

$a_7=40$이 3의 배수가 아니므로

$a_8=a_6+a_7=120+40=160$

$a_8=160$이 3의 배수가 아니므로

$a_9=a_7+a_8=40+160=200$

(ⅱ) $a_6=3k-2$(k는 자연수)인 경우

$a_5+a_6=a_7$

$a_5=a_7-a_6$
$=40-(3k-2)$
$=42-3k$
$=3(14-k)$

a_5는 자연수이므로

$3(14-k)>0$에서

$k<14$

한편, a_5는 3의 배수이므로

$a_6=\frac{a_5}{3}$

즉, $3k-2=\frac{3(14-k)}{3}$에서

$4k=16$

$k=4$

따라서

$a_6=3\times4-2=10$

이므로

$a_8=a_6+a_7$
$=10+40$
$=50$

$a_8=50$이 3의 배수가 아니므로

$a_9=a_7+a_8$
$=40+50$
$=90$

(ⅲ) $a_6=3k-1$(k는 자연수)인 경우

$a_5+a_6=a_7$

$a_5=a_7-a_6$
$=40-(3k-1)$
$=41-3k$

a_5는 자연수이므로

$41-3k>0$에서

$k<\frac{41}{3}$ ⋯⋯ ㉠

한편, a_5는 3의 배수가 아니므로

$a_4+a_5=a_6$에서

$a_4=a_6-a_5$
$=(3k-1)-(41-3k)$
$=6k-42$
$=3(2k-14)$

a_4가 자연수이므로

$3(2k-14)>0$에서

$k>7$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$7<k<\frac{41}{3}$

한편, a_4는 3의 배수이므로

$a_5=\frac{a_4}{3}$

즉, $41-3k=\frac{3(2k-14)}{3}$에서

$5k=55$

$k=11$

따라서

$a_6=3\times11-1=32$

이므로

$$\begin{aligned} a_8 &= a_6 + a_7 \\ &= 32+40 \\ &= 72 \end{aligned}$$

$a_8=72$가 3의 배수이므로

$$a_9 = \frac{a_8}{3} = \frac{72}{3} = 24$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 a_9의 최댓값은

$M=200$이고 최솟값은 $m=24$이다.

따라서

$M+m=200+24=224$

정답 ⑤

16. 출제의도 : 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_2(3x+2)=2+\log_2(x-2)$

에서

$\log_2(3x+2)=\log_2 2^2+\log_2(x-2)$

$\log_2(3x+2)=\log_2\{4\times(x-2)\}$

이므로

$3x+2=4(x-2)$

$3x+2=4x-8$

$x=10$

정답 10

17. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)dx \\ &= \int (4x^3-2x)dx \\ &= x^4-x^2+C \ (C\text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

이때 $f(0)=3$이므로 $C=3$

따라서

$f(x)=x^4-x^2+3$이므로

$f(2)=16-4+3=15$

정답 15

18. 출제의도 : 수열의 합의 기호의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sum_{k=1}^{5}(3a_k+5)=55$에서

$3\sum_{k=1}^{5}a_k+25=55$

$\sum_{k=1}^{5}a_k=10$

$\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=32$에서

$\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}b_k=32$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{5}b_k &= -\sum_{k=1}^{5}a_k+32 \\ &= -10+32 \\ &= 22 \end{aligned}$$

정답 22

19. 출제의도 : 근의 조건이 주어진 방정식에서 미분을 이용하여 정수 k를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

방정식

$2x^3-6x^2+k=0$ ----㉠

에서

$f(x)=2x^3-6x^2+k$

라 하면 방정식의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표이다.

한편,

$f'(x)=6x^2-12x$

$\quad\quad =6x(x-2)$

이므로

$f'(x)=0$

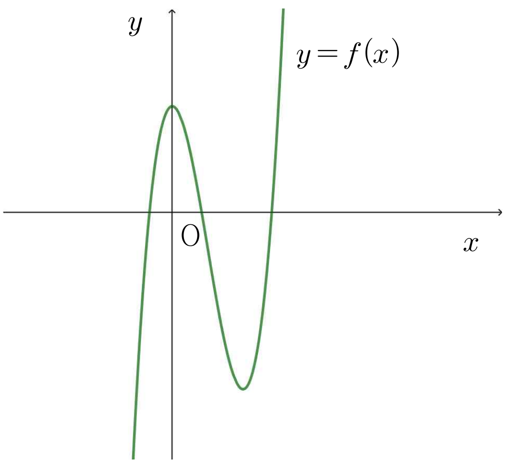
에서

$x=0$ 또는 $x=2$

그러므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	k	$\searrow$	$k-8$	$\nearrow$

이때, ㉠이 2개의 서로 다른 양의 실근을 갖기 위해서는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, 함수 $f(x)$의 극댓값은 양수이어야 하고 함수 $f(x)$의 극솟값은 음수이어야 한다.

그러므로

$k>0$이고 $k-8<0$

이므로

$0<k<8$

따라서, 정수 k는 $1,2,3,4,5,6,7$로 그 개수는 7이다.

정답 7

20. **출제의도** : 속도와 가속도를 이용하여 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$t\geq 2$일 때

$v(t)=3t^2+4t+C$ (C는 적분상수)

이때 $v(2)=0$이므로

$12+8+C=0$에서 $C=-20$

즉, $0\leq t\leq 3$에서

$$v(t)=\begin{cases} 2t^3-8t & (0\leq t\leq 2) \\ 3t^2+4t-20 & (2\leq t\leq 3) \end{cases}$$

따라서 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v(t)|\,dt$$

$$=\int_0^2 |v(t)|\,dt+\int_2^3 |v(t)|\,dt$$

$$=-\int_0^2 v(t)\,dt+\int_2^3 v(t)\,dt$$

$$=-\int_0^2 (2t^3-8t)\,dt+\int_2^3 (3t^2+4t-20)\,dt$$

$$=-\left[\frac{1}{2}t^4-4t^2\right]_0^2+\left[t^3+2t^2-20t\right]_2^3$$

$$=-(-8)+9$$

$$=17$$

정답 17

21. 출제의도 : 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 자연수의 값의 합을 구할 수 있는가?

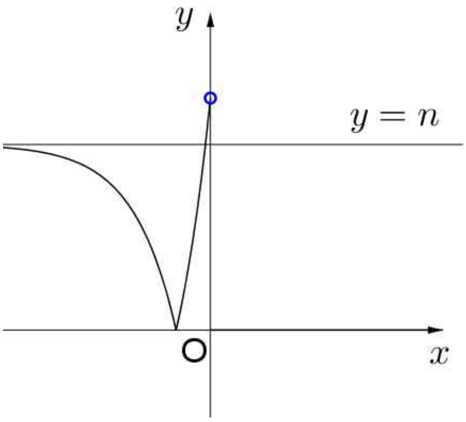
정답풀이 :

함수 $y=3^{x+2}-n$의 그래프는 함수 $y=3^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 $-n$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

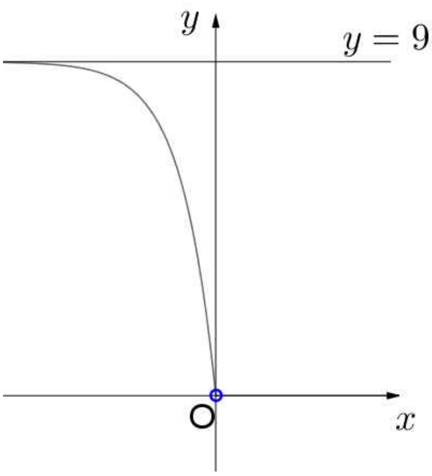
함수 $y=\left|3^{x+2}-n\right|$의 그래프는 점 $(0,\ |9-n|)$을 지나고 점근선의 방정식은 $y=n$이다.

$x<0$일 때, 자연수 n의 값에 따른 함수 $y=\left|3^{x+2}-n\right|$의 그래프는 다음과 같다.

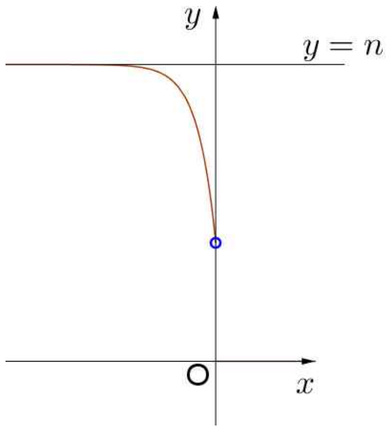
$1 \le n < 9$일 때,



$n=9$일 때,



$n>9$일 때,

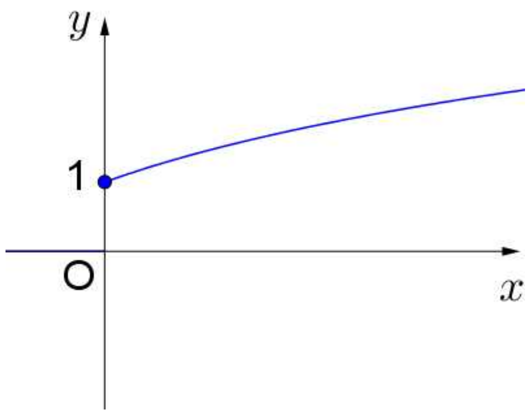


또, 함수 $y=\log_2(x+4)-n$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 $-n$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

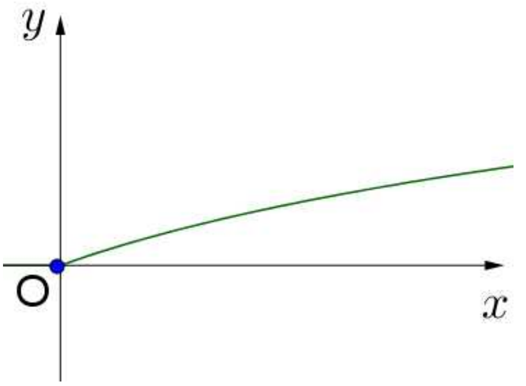
함수 $y=\left|\log_2(x+4)-n\right|$의 그래프는 점 $(0,\ |2-n|)$을 지나고 점근선의 방정식은 $x=-4$이다.

$x \ge 0$일 때, 자연수 n의 값에 따른 함수 $y=\left|\log_2(x+4)-n\right|$의 그래프는 다음과 같다.

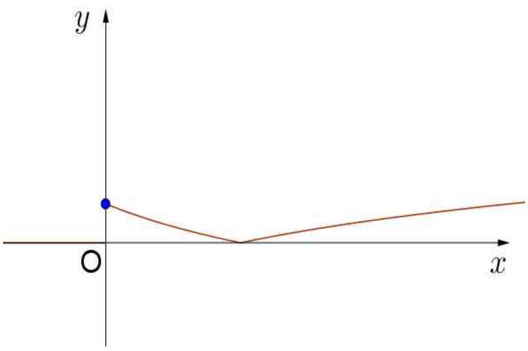
$n=1$일 때,



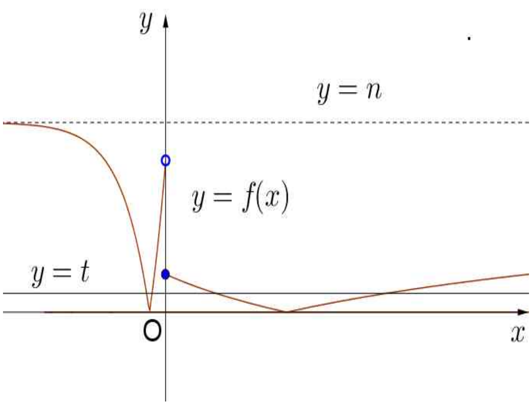
$n=2$일 때,



$n>2$일 때,



x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수 $g(t)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수와 같다.



함수 $g(t)$의 최댓값이 4이므로

$9-n>0$이고 $2-n<0$이어야 한다.

즉, $2<n<9$이다.

따라서 자연수 n의 값은

3, 4, 5, 6, 7, 8

이고, 그 합은

$3+4+5+6+7+8=33$

이다.

정답 33

22. 출제의도 : 평균값의 정리와 접선의 방정식을 이용하여 함수 $f(x)$를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=-3$이므로

$$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$$

이라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

조건 (가)에서

$f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$

이므로 $x\neq 1$일 때,

$$f'(g(x))=\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \quad \text{----㉠}$$

이때, 두 점 $(1, f(1))$, $(x, f(x))$를 지나는 직선의 기울기가 $f'(g(x))$이고

조건(나)에서 $g(x)\geq\frac{5}{2}$이므로 두 점

$(1, f(1))$, $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$를 지나는 직선은

점 $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$에서 접하는 직선이다.

그러므로 직선

$$y-f\left(\frac{5}{2}\right)=f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

는 점 $(1, f(1))$을 지난다.

즉,

$$1+a+b-3-\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^3+a\left(\frac{5}{2}\right)^2+b\left(\frac{5}{2}\right)-3\right\}$$

$=\left\{3\times\left(\frac{5}{2}\right)^2+5a+b\right\}\left(1-\frac{5}{2}\right)$

이 식을 정리하면

$-\frac{117}{8}-\frac{21}{4}a-\frac{3}{2}b=\left(\frac{75}{4}+5a+b\right)\left(-\frac{3}{2}\right)$

$\frac{9}{4}a=-\frac{108}{8}$

$a=-6$

그러므로

$f(x)=x^3-6x^2+bx-3$

$f'(x)=3x^2-12x+b$

한편, ㉠에서

$\lim_{x\to1}f'(g(x))=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

이때, $g(x)$는 연속함수이므로 $g(1)=k$라 하면 좌변은

$\lim_{x\to1}f'(g(x))$

$=\lim_{x\to1}\{3\{g(x)\}^2-12g(x)+b\}$

$=3k^2-12k+b$ -----㉡

또, 우변은

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)$

$=3-12+b$

$=b-9$ -----㉢

㉡과 ㉢으로부터

$3k^2-12k+b=b-9$

$3k^2-12k+9=0$

$k^2-4k+3=0$

$(k-1)(k-3)=0$

$k=1$ 또는 $k=3$

즉,

$g(1)=1$ 또는 $g(1)=3$

이때, $g(1)=1$은 $g(x)$가 최솟값 $\frac{5}{2}$를 갖는다는 것에 모순이다.

그러므로

$g(1)=3$

한편, 조건 (다)에서 $f(g(1))=6$이므로

$f(3)=6$

$27-54+3b-3=6$

$3b=36$

$b=12$

따라서,

$f(x)=x^3-6x^2+12x-3$

이므로

$f(4)=4^3-6\times4^2+12\times4-3=13$

정답 13

[다른 풀이 1]

두 점 $(1, f(1))$, $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$를 지나는 직선

$y-f\left(\frac{5}{2}\right)=f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)$

는 점 $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$에서 접하는 직선이다.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)-\left\{f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}$

$=(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$ ----㉠

이다.

조건 (가)에서

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}f'(g(x))$

이고 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f'(1)=f'(g(1))$

이다.

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)-f'\left(\frac{5}{2}\right)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+2(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)$

EBS

$=3\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)$ -----㉡

이고 $g(1)=k$ $\left(k\geq\frac{5}{2}\right)$라 하면

$f'(1)=f'(k)$

이므로 ㉡에서

$f'(1)-f'\left(\frac{5}{2}\right)=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$

이고

$f'(k)-f'\left(\frac{5}{2}\right)=3\left(k-\frac{3}{2}\right)\left(k-\frac{5}{2}\right)$

에서

$3\left(k-\frac{3}{2}\right)\left(k-\frac{5}{2}\right)=\frac{9}{4}$

이므로

$k=3$

따라서

$f'(1)=f'(3)=\alpha$라 하면

$f'(x)=3(x-1)(x-3)+\alpha$

$\quad\quad=3x^2-12x+9+\alpha$

양변을 x에 대하여 부정적분하면

$f(x)=x^3-6x^2+(9+\alpha)x+C$

(단, C는 적분상수)

조건 (다)에서 $f(0)=-3$, $f(3)=6$이므로

$C=-3$, $\alpha=3$

그러므로

$f(x)=x^3-6x^2+12x-3$

따라서

$f(4)=4^3-6\times4^2+12\times4-3=13$

[다른 풀이 2]

조건 (다)에서 $f(0)=-3$이므로 두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$f(x)=x^3+ax^2+bx-3$

한편, 조건 (가)에서

$f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$

이므로

$f(x)-f(1)$
$=(x^3+ax^2+bx-3)-(1+a+b-3)$
$=x^3-1+a(x^2-1)+b(x-1)$
$=(x-1)\{x^2+x+1+a(x+1)+b\}$
$=(x-1)\{x^2+(a+1)x+a+b+1\}$

즉,

$f'(g(x))=x^2+(a+1)x+a+b+1$ ----㉠

그리고

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이고

$g(x)=y$라 하면

$3y^2+2ay+b=x^2+(a+1)x+a+b+1$

따라서 y에 대하여 정리하면

$3y^2+2ay-\{x^2+(a+1)x+a+1\}=0$

이고 y에 대하여 풀면

$y=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+3\{x^2+(a+1)x+a+1\}}}{3}$

이고 근호 안을 정리하면

$D/4=3\left\{x^2+(a+1)x+\frac{1}{3}a^2+a+1\right\}$

$\quad\quad=3\left\{\left(x+\frac{a+1}{2}\right)^2+\frac{(a+3)^2}{12}\right\}$

따라서

$g(x)=\frac{-a\pm\sqrt{3\left\{\left(x+\frac{a+1}{2}\right)^2+\frac{(a+3)^2}{12}\right\}}}{3}$

즉,

$y=g(x)$의 그래프는 $y=\pm k\sqrt{x^2+l}$ (k, l은 상수)의 그래프를 평행이동한 그래프이다.

이때 함수 $g(x)$가 최솟값을 가지므로

$g(x)=\frac{-a+\sqrt{3\left\{\left(x+\frac{a+1}{2}\right)^2+\frac{(a+3)^2}{12}\right\}}}{3}$

이고, $g(x)$는 $x=-\frac{a+1}{2}$에서 최솟값

EBS

$\dfrac{-a+\sqrt{\dfrac{(a+3)^2}{4}}}{3}=\dfrac{-a+\dfrac{|a+3|}{2}}{3}$을 가진다.

따라서

(i) $a \geq -3$인 경우

$\dfrac{-a+\dfrac{|a+3|}{2}}{3}=\dfrac{-a+\dfrac{a+3}{2}}{3}=\dfrac{-a+3}{6}=\dfrac{5}{2}$

에서 $a=-12$인데 $a \geq -3$을 만족하지 않는다.

(ii) $a<-3$인 경우

$\dfrac{-a+\dfrac{|a+3|}{2}}{3}=\dfrac{-a-\dfrac{a+3}{2}}{3}=\dfrac{-3a-3}{6}=\dfrac{5}{2}$

에서 $a=-6$

(i).(ii)에 의해 $a=-6$

그러므로

$f(x)=x^3-6x^2+bx-3$ ----ⓛ

$f'(x)=3x^2-12x+b$ ----ⓒ

한편, ㉠에서 $f'(x)$와 $g(x)$가 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 1} f'(g(x))=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$f'(g(1))=f'(1)$

이때, $g(1)=k$라 하면 ⓒ으로부터

$3k^2-12k+b=-9+b$

$3k^2-12k+9=0$

$k^2-4k+3=0$

$(k-1)(k-3)=0$

$k=1$ 또는 $k=3$

즉,

$g(1)=1$ 또는 $g(1)=3$

이때, $g(1)=1$은 $g(x)$가 최솟값 $\dfrac{5}{2}$를 갖는다는 것에 모순이다.

그러므로

$g(1)=3$

한편, 조건 (다)에서 $f(g(1))=6$이므로

$f(3)=6$

이것을 ⓛ에 대입하면

$27-54+3b=9$

$3b=36$

$b=12$

따라서,

$f(x)=x^3-6x^2+12x-3$

이므로

$f(4)=4^3-6\times 4^2+12\times 4-3=13$

■ [선택: 기하]
23. ⑤ 24. ③ 25. ④ 26. ② 27. ①
28. ② 29. 12 30. 24

23. **출제의도** : 좌표공간의 점을 대칭이동한 점의 좌표와 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
좌표공간의 점 A$(2, 2, -1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는
B$(2, -2, 1)$
따라서 점 C$(-2, 1, 1)$에 대하여 선분 BC의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BC}} &= \sqrt{(-2-2)^2+(1+2)^2+(1-1)^2}\\ &= \sqrt{16+9}\\ &= \sqrt{25}\\ &= 5\end{aligned}$$

정답 ⑤

24. **출제의도** : 초점의 좌표와 준선의 방정식이 주어진 포물선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
초점이 점 F$\left(\frac{1}{3}, 0\right)$이고 준선이 직선 $x=-\frac{1}{3}$인 포물선의 방정식은

$$y^2=\frac{4}{3}x$$

이 포물선 위에 점 $(a, 2)$가 있으므로

$$2^2=\frac{4}{3}\times a$$

따라서 $a=3$

정답 ③

[다른 풀이]
점 $(a, 2)$가 초점이 점 F$\left(\frac{1}{3}, 0\right)$이고 준선이 직선 $x=-\frac{1}{3}$인 포물선 위에 있으므로 A$(a, 2)$라 하면 선분 AF의 길이와 점 A에서 직선 $x=-\frac{1}{3}$까지의 거리가 같다. 즉,

$$\sqrt{\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+(2-0)^2}=\left|a-\left(-\frac{1}{3}\right)\right|$$

$$\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+4=\left(a+\frac{1}{3}\right)^2$$

$$a^2-\frac{2}{3}a+\frac{1}{9}+4=a^2+\frac{2}{3}a+\frac{1}{9}$$

$$\frac{4}{3}a=4$$

따라서 $a=3$

25. **출제의도** : 타원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하고, 타원의 방정식에서 두 초점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
점 $(2, 1)$이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위에 있으므로

$$\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{y}{b^2}=1$$

즉,

$$y=-\frac{2b^2}{a^2}x+b^2$$

EBS

이고, 주어진 조건에 의하여 접선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로

$-\frac{2b^2}{a^2}=-\frac{1}{2}$

$a^2=4b^2$

이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{4}{4b^2}+\frac{1}{b^2}=1$

$b^2=2$

$a^2=8$

그러므로 주어진 타원의 방정식은

$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$

타원의 두 초점을 각각 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}(c', 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c^2=8-2=6$

이므로

$c=\sqrt{6}$

따라서 구하는 두 초점 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{FF'}}=2\sqrt{6}$

정답 ④

26. **출제의도** : 위치벡터의 성분과 벡터의 내적, 벡터의 연산을 이용하여 좌표평면 위의 위치벡터의 종점이 그리는 도형의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\vec{p}=(x, y)$, $\vec{q}=(x', y')$이라 하고

$\mathrm{A}(2, 4)$, $\mathrm{B}(2, 8)$, $\mathrm{C}(1, 0)$, $\mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{Q}(x', y')$이라 하자.

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

이므로

$\overline{\mathrm{AP}}\perp\overline{\mathrm{PB}}$

이다. 그러므로 점 P는 선분 AB을 지름으로 하는 원 위를 움직인다. 즉, 점 P는 선분 AB의 중점인 점 $\mathrm{M}(2, 6)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 위에 있다.

한편,

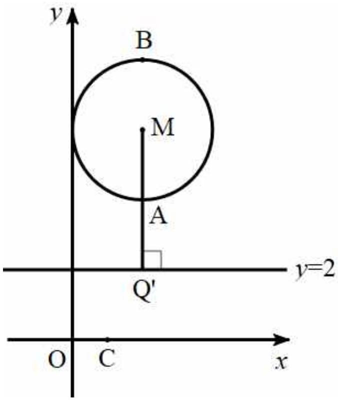
$\vec{q}=\frac{1}{2}\vec{a}+t\vec{c}$

$=\frac{1}{2}(2, 4)+t(1, 0)$

$=(1+t, 2)$

이므로 점 Q는 직선 $y=2$ 위에 있다.

이때 $|\vec{p}-\vec{q}|$의 값은 두 점 P, Q 사이의 거리와 같고 다음 그림과 같이 점 M에서 직선 $y=2$에 내린 수선의 발을 Q′이라 하면 점 P가 점 A에 있고, 점 Q가 점 Q′에 있을 때 두 점 P, Q 사이의 거리가 최소가 된다.



이때 $\mathrm{A}(2, 4)$, $\mathrm{Q'}(2, 2)$이므로

$|\vec{p}-\vec{q}|=\overline{\mathrm{PQ}}\geq\overline{\mathrm{AQ'}}=2$

따라서 구하는 최솟값은 2이다.

정답 ②

[참고]

$\vec{p}=(x, y)$라 하고 $\mathrm{A}(2, 4)$, $\mathrm{B}(2, 8)$, $\mathrm{P}(x, y)$라 하면

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

에서

$(x-2, y-4)\cdot(x-2, y-8)=0$

$(x-2)^2+(y-4)(y-8)=0$

$(x-2)^2+(y-6)^2=4$

이므로 점 P는 중심이 $(2,6)$이고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점이다.

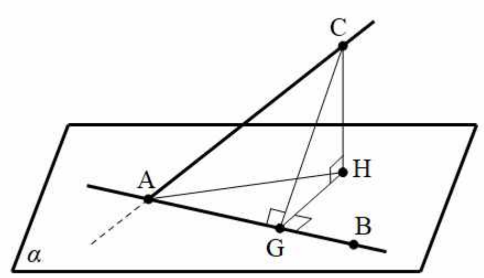
27. 출제의도 : 삼수선의 정리를 이용하여 공간에서 두 직선이 이루는 각의 크기, 직선과 평면이 이루는 각의 크기, 두 평면이 이루는 각의 크기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

다음 그림과 같이 점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 G, 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면, 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HG}\perp\overline{AB}$

이다.



직각삼각형 AGC에서 $\angle CAG=\theta_1$이고,

$\sin\theta_1=\dfrac{4}{5}$이므로 양수 k에 대하여

$\overline{AC}=5k$라 하면 $\overline{CG}=4k$이고,

$\cos\theta_1=\dfrac{3}{5}$이다.

또, 직각삼각형 AHC에서

$\angle CAH=\dfrac{\pi}{2}-\theta_1$이므로

$$\overline{CH}=\overline{AC}\times\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta_1\right)$$
$$=5k\times\cos\theta_1$$
$$=5k\times\dfrac{3}{5}=3k$$

이때 직각삼각형 CGH에서

$$\overline{GH}=\sqrt{\overline{CG}^2-\overline{CH}^2}$$
$$=\sqrt{(4k)^2-(3k)^2}$$
$$=\sqrt{7}k$$

이고, $\angle CGH=\theta_2$이므로

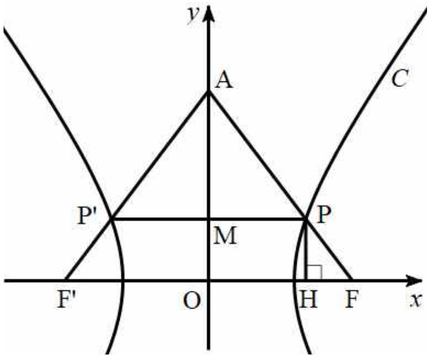
$$\cos\theta_2=\dfrac{\overline{GH}}{\overline{CG}}$$
$$=\dfrac{\sqrt{7}k}{4k}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$$

정답 ①

28. 출제의도 : 쌍곡선의 점근선의 방정식을 이용하여 쌍곡선의 방정식을 구하고, 주축의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 선분 PP′이 y축과 만나는 점을 M이라 하자.



$\overline{AP}:\overline{PP'}=5:6$이고 점 M은 선분 PP′의 중점이므로

$\overline{AP}:\overline{MP}=5:3$

이고, 직각삼각형 AMP에서

$\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MP}}=\dfrac{4}{3}$

즉, 직선 AF의 기울기는 $-\frac{4}{3}$이고 직선 AF′의 기울기는 $\frac{4}{3}$이므로 쌍곡선 C의 두 점근선의 기울기는 $\pm\frac{4}{3}$이다.

쌍곡선 C의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>0$, $b>0$)

으로 놓으면

$\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$

이므로

$a=3k$, $b=4k$ (단, $k>0$)

이라 하면 쌍곡선 C의 방정식은

$$\frac{x^2}{9k^2}-\frac{y^2}{16k^2}=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이다.

이때 점 F의 x좌표는

$\sqrt{9k^2+16k^2}=\sqrt{25k^2}=5k$

이고, 직각삼각형 PHF에서 $\overline{PF}=1$이므로

$\overline{HF}=\frac{3}{5}$, $\overline{PH}=\frac{4}{5}$

이다.

즉, 점 P의 좌표는

$P\left(5k-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

이고 이 점이 쌍곡선 C 위에 있으므로 ㉠에 대입하면

$$\frac{\left(5k-\frac{3}{5}\right)^2}{9k^2}-\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^2}{16k^2}=1$$

$25k^2-6k+\frac{9}{25}-\frac{9}{25}=9k^2$

$16k^2-6k=0$

$2k(8k-3)=0$

$k>0$이므로 $k=\frac{3}{8}$

따라서 구하는 쌍곡선 C의 주축의 길이는

$2a=2\times3k=6k=6\times\frac{3}{8}=\frac{9}{4}$

정답 ②

29. **출제의도** : 벡터의 연산과 벡터의 내적을 이용하여 조건을 만족시키는 점의 위치를 찾고, 벡터의 내적을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{BP} &= \overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB} \\ &= \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

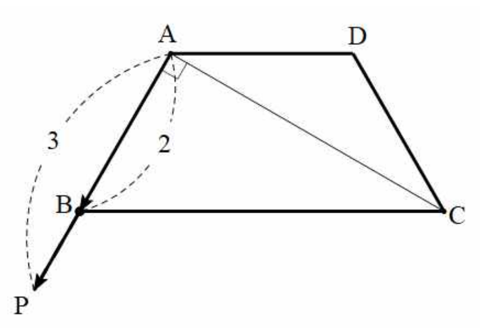
이므로

$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

따라서 점 P는 선분 BA를 $1:3$으로 외분하는 점이고,

$\overline{AP}=\frac{3}{2}\overline{AB}=3$

이다.



한편, $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=4$, $\angle CBA=\frac{\pi}{3}$이므로 $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$, $\overline{AC}=2\sqrt{3}$이다.

따라서 점 P에서 직선 AC에 내린 수선의 발이 A이다.
점 Q에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 조건 (나)에 의하여

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} = 6$

이어야 하므로 점 H는 선분 AC 위에 있고

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} = |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AH}| = 2\sqrt{3} \times \overline{AH} = 6$

즉,

$\overline{AH} = \sqrt{3}$

이다.
따라서 점 H는 선분 AC의 중점이므로 점 Q는 선분 AC의 수직이등분선인 직선 DH 위에 있다.
이때 삼각형 ABQ에서

$\angle PBQ = \angle BAQ + \angle BQA$

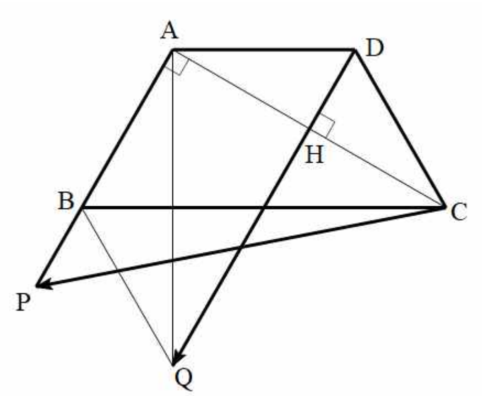
이므로

$2 \times \angle BQA = \angle PBQ$

를 만족시키려면

$\angle BAQ = \angle BQA$,

즉, $\overline{AB} = \overline{BQ}$이어야 한다.
따라서 조건을 만족시키는 점 Q는 다음 그림과 같이 점 A를 지나고 직선 BC에 수직인 직선이 직선 DH와 만나는 점이어야 한다.



이때 직각삼각형 AQD에서

$\overline{AD} = 2$, $\overline{AQ} = 2\sqrt{3}$

이므로

$\overline{DQ} = \sqrt{4+12} = 4$

따라서

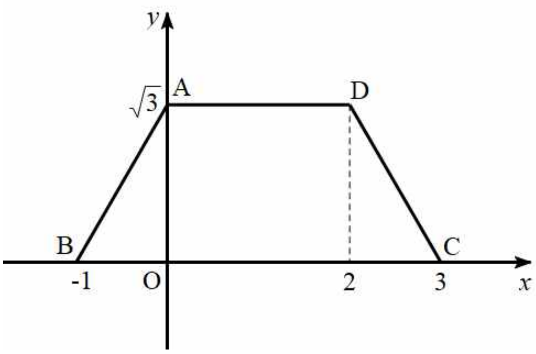
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DQ} &= (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP}) \cdot \overrightarrow{DQ} \\ &= \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DQ} \\ &= |\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{DQ}|\cos\frac{\pi}{2} + |\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{DQ}|\cos 0 \\ &= 0 + 3 \times 4 \times 1 \\ &= 12\end{aligned}$$

정답 12

[다른 풀이]
다음 그림과 같이 네 점 A, B, C, D의 좌표가 각각

$A(0,\ \sqrt{3})$, $B(-1,\ 0)$, $C(3,\ 0)$, $D(2,\ \sqrt{3})$

이 되도록 좌표평면을 설정하자.



점 P의 좌표를 $P(a,\ b)$라 하면

$\overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BP})$

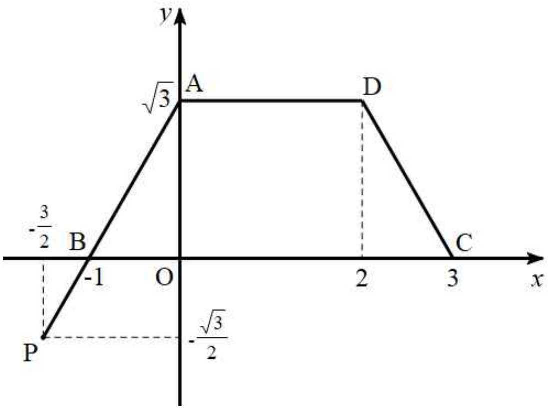
에서

$(3,\ -\sqrt{3}) = 2\{(2,\ 0) + (a+1,\ b)\}$

$3 = 2(a+3)$에서 $a = -\dfrac{3}{2}$

$-\sqrt{3} = 2b$에서 $b = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

즉, $P\left(-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로 다음 그림과 같이 세 점 A, B, P는 한 직선 위에 있고 $\overline{BP} = 1$이다.



또, 점 Q의 좌표를 Q(x, y)라 하면

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PQ} = 6$

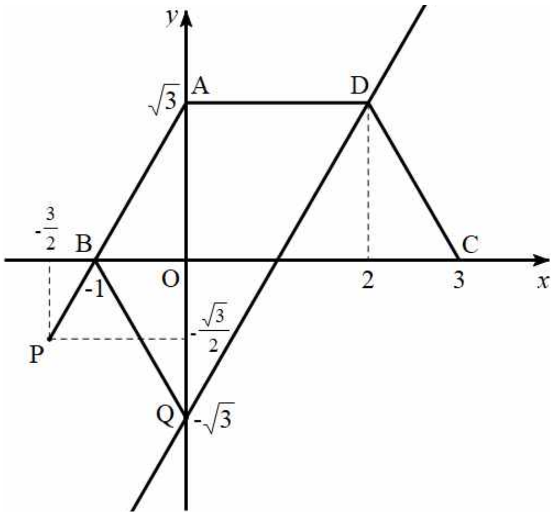
에서

$(3, -\sqrt{3}) \cdot \left(x+\frac{3}{2}, y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=6$

$3x+\frac{9}{2}-\sqrt{3}y-\frac{3}{2}=6$

$y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$

이므로 점 Q는 직선 $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$ 위에 있다.



이때 삼각형 ABQ에서

$\angle PBQ = \angle BAQ + \angle BQA$

이므로

$2 \times \angle BQA = \angle PBQ$

를 만족시키려면

$\angle BAQ = \angle BQA$,

즉 $\overline{AB} = \overline{BQ}$이어야 한다.

따라서 조건을 만족시키는 점 Q의 좌표는 Q$(0, -\sqrt{3})$이므로

$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DQ} = \left(-\frac{9}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (-2, -2\sqrt{3})$

$=9+3$

$=12$

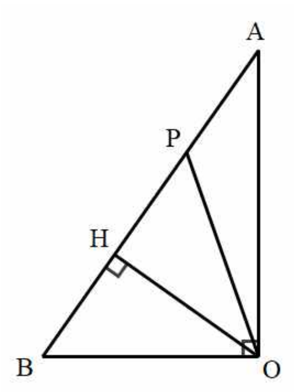
30. 출제의도 : 공간에서 두 평면이 이루는 각의 크기를 구하여 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

구 S의 중심, 즉 삼각형 BCD의 외심을 O라 하면 직각삼각형 ABO에서

$\overline{AB}=6\sqrt{3}$, $\overline{BO}=6$, $\overline{AO}=6\sqrt{2}$

이다.



이때 점 P가 구 S 위에 있으므로

$\overline{OP}=6$

즉, 삼각형 OBP가 이등변삼각형이므로 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 BP의 중점이다.

한편, $\triangle ABO \backsim \triangle OBH$이므로

$6 : 6\sqrt{3} = \overline{BH} : 6$

에서

$\overline{BH}=2\sqrt{3}$

따라서

$\overline{AP} = \overline{AB} - \overline{BP}$

$=\overline{AB}-2\times\overline{BH}$

$=6\sqrt{3}-2\times2\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}$

이므로 삼각형 PQR는 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형이다.

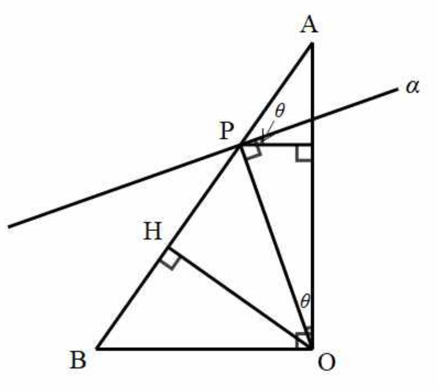
즉, 삼각형 PQR의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2=3\sqrt{3}$$

한편, 다음 그림과 같이 평면 α와 평면 PQR가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\angle AOP=\theta$

이다.



이때 직각삼각형 OBG에서

$$\sin(\angle BOH)=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos(\angle BOH)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

이고, $\theta=\frac{\pi}{2}-2\angle BOH$이므로

$$\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\angle BOH\right)$$

$=\sin(2\angle BOH)$

$=2\sin(\angle BOH)\cos(\angle BOH)$

$=2\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$k=3\sqrt{3}\times\cos\theta$

$=3\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$=2\sqrt{6}$

이므로

$k^2=(2\sqrt{6})^2=24$

정답 24