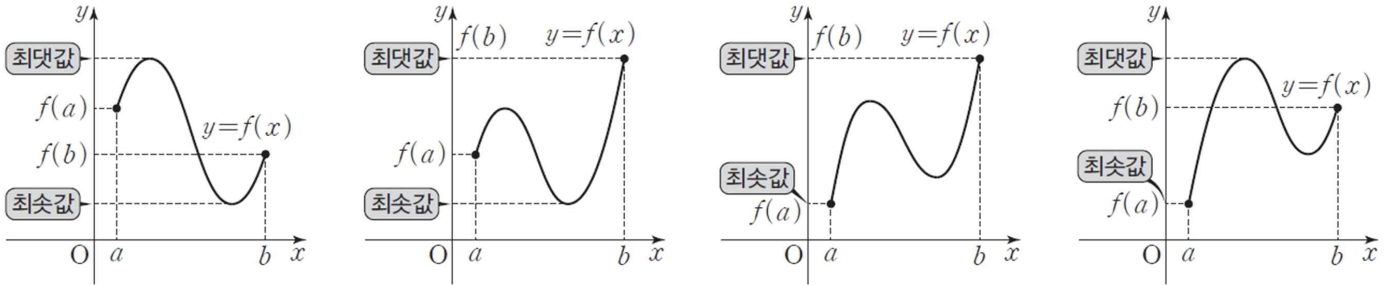


1. 함수의 최대와 최소

- (1) 함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이면 최대·최소 정리에 의하여 함수  $f(x)$ 는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.
- 이때 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값,  $f(a)$ ,  $f(b)$  중에서 가장 큰 값이 함수  $f(x)$ 의 최댓값이고, 가장 작은 값이 함수  $f(x)$ 의 최솟값이다.



- (2) 함수의 최대와 최소의 활용

- 도형의 길이, 넓이, 부피 등의 최댓값 또는 최솟값은 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.
- ① 주어진 조건에 적합한 변수를 정하여 미지수  $x$ 로 놓고  $x$ 의 값의 범위를 조사한다.
  - ② 도형의 길이, 넓이, 부피 등을 함수  $f(x)$ 로 나타낸다.
  - ③ 함수  $y=f(x)$ 의 그래프를 이용하여 ①에서 구한  $x$ 의 값의 범위에서 함수  $f(x)$ 의 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

2. 방정식에의 활용

- (1) 방정식  $f(x)=0$ 의 실근은 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와  $x$ 축이 만나는 점의  $x$ 좌표와 같다. 따라서 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수의 그래프를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

- ① 방정식  $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수  
함수  $y=f(x)$ 의 그래프와  $x$ 축이 만나는 서로 다른 점의 개수를 구한다.
- ② 방정식  $f(x)=g(x)$ 의 서로 다른 실근의 개수  
함수  $y=f(x)-g(x)$ 의 그래프와  $x$ 축이 만나는 서로 다른 점의 개수를 구한다.
- ③ 방정식  $f(x)=k$  ( $k$ 는 상수)의 서로 다른 실근의 개수  
함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $y=k$ 가 만나는 서로 다른 점의 개수를 구한다.

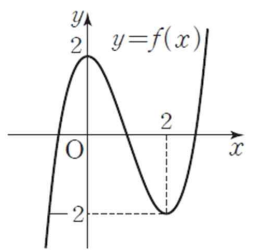
**예** 방정식  $x^3-3x^2+2=0$ 의 서로 다른 실근의 개수를 구해 보자.

$f(x)=x^3-3x^2+2$ 라 하면  $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$ 이므로  $f'(x)=0$ 에서  $x=0$  또는  $x=2$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

따라서 그림과 같이 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는  $x$ 축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식  $x^3-3x^2+2=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



p.061 [예제 1] 닫힌구간  $[-2, 1]$  에서 ❶ 함수

$f(x) = (1/3)x^3 - x^2 - 3x + 2$  의 ❷ 최댓값을  $M$ , ❸ 최솟값을  $m$  이라 할 때, ❹  $M + m$  의 값은?

⇒ ❶ 극값 :  $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3) = 0$

증감표 ⇒

$x$	-2	...	-1	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$\frac{4}{3}$	↗	$\frac{11}{3}$	↘	$-\frac{5}{3}$

❷ :  $M = f(-1) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 2 = \frac{11}{3}$

❸ :  $m = f(1) = \frac{1}{3} - 1 - 3 + 2 = -\frac{5}{3}$

∴ ❹ =  $\frac{11}{3} + \left(-\frac{5}{3}\right) = 2$

p.061 [유제 1] 닫힌구간  $[1, 4]$  에서 ❶ 함수

$f(x) = -x^3 + 3x^2 + a$  의 ❷ 최댓값이 8 이고 ❸ 최솟값이  $m$  일 때,  $m$  의 값은? (단,  $a$  는 상수이다.)

⇒ ❶ 극값 :  $f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x - 2) = 0$

증감표 ⇒

$x$	1	...	2	...	4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$a+2$	↗	$a+4$	↘	$a-16$

❷ =  $f(2) = -8 + 12 + a = 8 \quad \therefore a = 4$

∴  $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 4$

∴ ❸ =  $m = f(4) = -64 + 48 + 4 = -12$

p.061 [유제 2] 양수  $a$ 에 대하여 닫힌구간  $[0, 3a]$ 에서

- ① 함수  $f(x) = x^4 - 6a^2x^2 - 8a^3x$ 의 ② 최댓값이  $M$ 이고  
 ③ 최솟값이  $-48$ 일 때, ④  $a^4 + M$ 의 값은?

$$\Rightarrow \text{① 극값 : } f'(x) = 4x^3 - 12a^2x - 8a^3$$

$$= 4(x+a)^2(x-2a) = 0$$

증감표  $\Rightarrow$

$x$	0	...	$2a$	...	$3a$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-24a^4$	$\nearrow$	$3a^4$

$$\text{③} = f(2a) = -24a^4 = -48 \quad \therefore a^4 = 2$$

$$\text{②} : M = f(3a) = 81a^4 - 54a^4 - 24a^4 = 3a^4 = 6$$

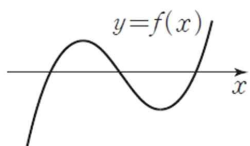
$$\therefore \text{④} = 2 + 6 = 8$$

## p.062 [5] 도함수의 활용 (2)

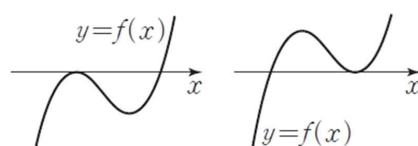
(2) 삼차방정식의 서로 다른 실근의 개수

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수  $f(x)$ 에 대하여 이차방정식  $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 즉 함수  $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때, 삼차방정식  $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 다음과 같다.

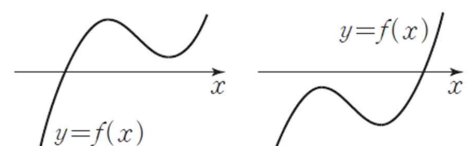
- ① (극댓값)  $\times$  (극솟값)  $< 0$ 인 경우: 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 [그림 1]과 같이  $x$ 축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식  $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
- ② (극댓값)  $\times$  (극솟값)  $= 0$ 인 경우: 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 [그림 2]와 같이  $x$ 축과 접하고 다른 한 점을 지나므로 방정식  $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
- ③ (극댓값)  $\times$  (극솟값)  $> 0$ 인 경우: 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 [그림 3]과 같이  $x$ 축과 오직 한 점에서 만나므로 방정식  $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

**참고** 삼차함수  $f(x)$ 가 극값을 갖지 않는 경우, 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는  $x$ 축과 오직 한 점에서 만나므로 방정식  $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

## p.062 [5] 도함수의 활용 (2)

### 3. 부등식에의 활용

함수의 그래프를 이용하여 어떤 구간에서 부등식  $f(x) \geq 0$ 이 성립함을 증명할 수 있다.  
방정식에서와 마찬가지로 극대, 극소를 이용하여 최댓값 또는 최솟값을 찾으면 된다.

(1) 모든 실수  $x$ 에 대하여 성립하는 부등식

- ① 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) \geq 0$ 의 증명:  $(f(x)$ 의 최솟값) $\geq 0$ 임을 보인다.
- ② 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) \geq g(x)$ 의 증명:  $(f(x) - g(x))$ 의 최솟값 $\geq 0$ 임을 보인다.
- ③ 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) \geq k$  ( $k$ 는 상수)의 증명:  $(f(x)$ 의 최솟값) $\geq k$ 임을 보이거나  $(f(x) - k)$ 의 최솟값 $\geq 0$ 임을 보인다.

(2)  $x \geq a$ 에서 성립하는 부등식

- ①  $x \geq a$ 에서  $f(x) > 0$ 의 증명:  $x \geq a$ 에서  $(f(x)$ 의 최솟값) $> 0$ 임을 보인다.
- ②  $x \geq a$ 에서  $f(x) < 0$ 의 증명:  $x \geq a$ 에서  $(f(x)$ 의 최댓값) $< 0$ 임을 보인다.

## p.062 [5] 도함수의 활용 (2)

(3) 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 성립하는 부등식

닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간  $(a, b)$ 에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서  $f(x) \geq 0$ 의 증명

- ① 열린구간  $(a, b)$ 에서  $f'(x) \geq 0$ 이면  $f(a) \geq 0$ 임을 보인다.
- ② 열린구간  $(a, b)$ 에서  $f'(x) \leq 0$ 이면  $f(b) \geq 0$ 임을 보인다.
- ③ 열린구간  $(a, b)$ 에서 함수  $f(x)$ 의 극값이 존재하면 극값을 고려하여 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 최솟값을 구하고  $(f(x)$ 의 최솟값) $\geq 0$ 임을 보인다.



[예 2] ❶  $x$ 에 대한 삼차방정식  $x^3 + 4x^2 - 9x - 14 = x^2 + a$ 가 ❷ 서로 다른 세 실근을 갖고, 세 실근의 곱이 양수가 되도록 하는 정수  $a$ 의 ❸ 최댓값과 ❹ 최솟값의 ❺ 합은?

⇒ ❶ :  $x^3 + 3x^2 - 9x - 14 = a$

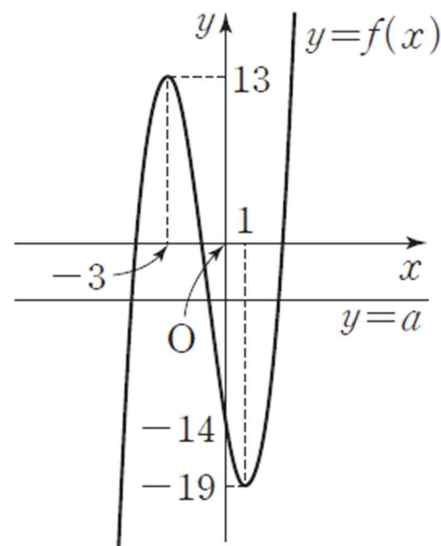
Let  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 14 \Rightarrow y = a$ 와의 교점

극값 :  $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$   
 $= 3(x+3)(x-1) = 0$

❷ : 교점의  $x$ 좌표 중 두 개는 음수,  
 한 개는 양수  $\Rightarrow -14 < a < 13$

❸ = 12, ❹ = -13

∴ ❺ =  $12 + (-13) = -1$



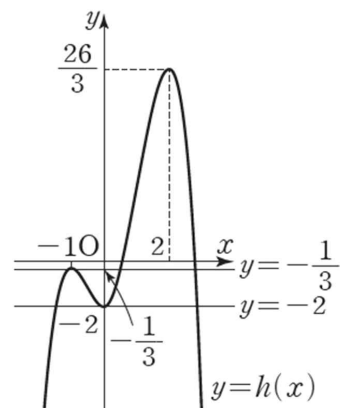
[유제 3] 두 함수  $f(x) = x^4 + a$ ,  $g(x) = \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - 2$ 에 대하여 ❶  $x$ 에 대한 방정식  $f(x) = g(x)$ 가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 ❷ 모든 실수  $a$ 의 값의 합은?

⇒ ❶ :  $-x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - 2 = a$

Let  $h(x) = -x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - 2 \Rightarrow y = a$ 와의 교점

극값 :  $h'(x) = -4x^3 + 4x^2 + 8$   
 $= -4x(x+1)(x-2) = 0$

∴ ❷ =  $-\frac{1}{3} - 2 = -\frac{7}{3}$



p.063 [유제 4] 두 함수  $f(x) = 3x^4 + 2x^2 + a$ ,

$g(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3$  이 있다. 모든 실수  $x$ 에 대하여 부등식

❶  $f(x) \geq g(x)$ 가 성립하도록 하는 ❷ 실수  $a$ 의 **최솟값**은?

⇒ ❶ : Let  $h(x) = f(x) - g(x) = 3x^4 - 4x^3 + a + 3$

$$\Rightarrow \{h(x) \text{의 최솟값}\} \geq 0$$

$$\text{극값 : } h'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x - 1) = 0$$

증감표 ⇒

$x$	...	0	...	1	...
$h'(x)$	—	0	—	0	+
$h(x)$		$a+3$		$a+2$	

$$h(x) \text{의 최솟값 : } h(1) = a + 2 \geq 0 \therefore a \geq -2$$

$$\therefore \text{❷} = -2$$

## p.064 [5] 도함수의 활용 (2)

### 4. 속도와 가속도

(1) 수직선 위를 움직이는 점의 속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$ 에서의 위치가  $x=f(t)$ 일 때, 점 P의 시각  $t$ 에서의 속도  $v$ 는

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t)$$

**설명** 점 P가 수직선 위를 움직일 때, 시각  $t$ 에서의 점 P의 위치를  $x$ 라 하면  $x$ 는  $t$ 에 대한 함수이다. 이 함수를  $x=f(t)$ 라 하면 시각  $t$ 에서  $t+\Delta t$ 까지의 점 P의 위치의 변화량  $\Delta x$ 는

$$\Delta x = f(t + \Delta t) - f(t)$$

이다. 시각  $t$ 에서  $t+\Delta t$ 까지의 점 P의 평균 속도는

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

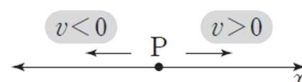
이고, 이것은 함수  $f(t)$ 의 평균변화율이다.

이때 점 P의 위치  $x=f(t)$ 의 시각  $t$ 에서의 순간변화율을 시각  $t$ 에서의 점 P의 순간속도 또는 속도라고 하며 보통  $v$ 로 나타낸다.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t)$$

**참고** 속도  $v$ 의 부호는 점 P의 운동 방향을 나타낸다.

$v > 0$ 이면 점 P는 양의 방향으로 움직이고,  $v < 0$ 이면 점 P는 음의 방향으로 움직인다.



## p.064 [5] 도함수의 활용 (2)

(2) 수직선 위를 움직이는 점의 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$ 에서의 속도가  $v$ 일 때, 점 P의 시각  $t$ 에서의 가속도  $a$ 는

$$a = \frac{dv}{dt}$$

**설명** 점 P의 속도  $v$ 도 시각  $t$ 에 대한 함수이므로 이 함수의 순간변화율을 생각할 수 있다. 점 P의 시각  $t$ 에서의 속도의 순간변화율을 시각  $t$ 에서의 점 P의 가속도라고 하며 보통  $a$ 로 나타낸다.

$$a = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

**예** 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$ 에서의 위치  $x$ 가  $x = 2t^3 - t$ 일 때,

점 P의 시각  $t$ 에서의 속도  $v$ 는

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 1$$

점 P의 시각  $t$ 에서의 가속도  $a$ 는

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t$$

따라서 점 P의 시각  $t=1$ 에서의 속도와 가속도는

$$v = 6 \times 1^2 - 1 = 5$$

$$a = 12 \times 1 = 12$$

p.065 [예제 3] 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각  $t$  ( $t > 0$ )에서의 위치  $x_P(t)$ ,  $x_Q(t)$ 가  $x_P(t) = t^3 - 10t^2 + 6t$ ,  $x_Q(t) = -t^3 + 2t^2 - 12t$ 이다. ❶ 두 점 P, Q의 가속도가 같아지는 순간 ❷ 두 점 P, Q 사이의 **거리**는?

$$\Rightarrow \text{속도} : v_P(t) = 3t^2 - 20t + 6, v_Q(t) = -3t^2 + 4t - 12$$

$$\text{가속도} : a_P(t) = 6t - 20, a_Q(t) = -6t + 4$$

$$\text{❶} : 6t - 20 = -6t + 4, 12t = 24 \therefore t = 2$$

$$x_P(2) = 8 - 40 + 12 = -20$$

$$x_Q(2) = -8 + 8 - 24 = -24$$

$$\therefore \text{❷} = |-24 - (-20)| = 4$$

p.065 [유제 5] 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$  ( $t \geq 0$ )에서의 위치  $x(t)$ 가 ❶  $x(t) = t^3 - 2t^2 - 3t$ 이다. ❷ 점 P가 시각  $t = 0$ 일 때 원점을 출발한 후 다시 원점을 지나는 순간 ❸ 점 P의 **속도**는?

$$\Rightarrow \text{❶} : v(t) = 3t^2 - 4t - 3$$

$$\text{❷} : x(t) = t^3 - 2t^2 - 3t = t(t+1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = 3 \quad (\because t > 0)$$

$$\therefore \text{❸} = v(3) = 27 - 12 - 3 = 12$$

p.065 [유제 6] 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각  $t$  ( $t > 0$ )에서의 위치  $x_P(t)$ ,  $x_Q(t)$ 가  $x_P(t) = t^3 + t^2 - 5t$ ,  $x_Q(t) = 3t^2 + at$ 이다. ❶ 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간

❷ 두 점 P, Q가 만날 때, 상수  $a$ 의 **값**은?

$$\Rightarrow \text{❶} : v_P(t) = 3t^2 + 2t - 5 = (3t+5)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = 1 \quad (\because t > 0)$$

$$x_P(1) = 1 + 1 - 5 = -3, \quad x_Q(1) = 3 + a$$

$$\text{❷} : -3 = 3 + a$$

$$\therefore a = -6$$