한눈에 보는 정답

01 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프

유제 본문 5~11쪽

1 1　2 ③　3 ③　4 ①　5 ①
6 ②　7 ②　8 ③

Level 1 기초 연습 본문 12쪽

1 ①　2 ②　3 ②　4 9　5 4

Level 2 기본 연습 본문 13쪽

1 ②　2 ③　3 ①　4 6

Level 3 실력 완성 본문 14쪽

1 ②　2 ③　3 ⑤

02 지수함수와 로그함수의 도함수

유제 본문 17~23쪽

1 ③　2 ③　3 ②　4 ②　5 ①
6 ④　7 20　8 ①

Level 1 기초 연습 본문 24쪽

1 36　2 ②　3 ③　4 10　5 ⑤

Level 2 기본 연습 본문 25쪽

1 ①　2 ②　3 ④　4 ③

Level 3 실력 완성 본문 26쪽

1 ①　2 ④　3 ①

03 삼각함수의 뜻과 그래프

유제 본문 29~37쪽

1 ③　2 ④　3 ②　4 ③　5 ③
6 ①　7 4　8 1　9 ③　10 ④

Level 1 기초 연습 본문 38쪽

1 ④　2 ①　3 ②　4 ②

Level 2 기본 연습 본문 39쪽

1 ③　2 ②　3 ②　4 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 40쪽

1 29　2 ②　3 800　4 ④

04 삼각함수의 미분

유제
본문 43~49쪽

1 ⑤ 2 ④ 3 ③ 4 ③ 5 ⑤
6 ② 7 ① 8 ②

Level 1 기초 연습
본문 50쪽

1 ④ 2 ③ 3 ① 4 ⑤

Level 2 기본 연습
본문 51쪽

1 ④ 2 ④ 3 ④ 4 ③

Level 3 실력 완성
본문 52쪽

1 19 2 ④ 3 ①

05 여러 가지 미분법

유제
본문 55~63쪽

1 ④ 2 ① 3 ④ 4 ⑤ 5 ①
6 ④ 7 ② 8 ①

Level 1 기초 연습
본문 64쪽

1 ⑤ 2 ③ 3 ④ 4 ④ 5 ①

Level 2 기본 연습
본문 65쪽

1 ④ 2 ① 3 ② 4 ①

Level 3 실력 완성
본문 66쪽

1 ④ 2 ⑤ 3 ②

06 도함수의 활용

유제
본문 69~77쪽

1 ⑤ 2 ② 3 ① 4 ② 5 ③
6 ②

Level 1 기초 연습
본문 78쪽

1 ③ 2 ③ 3 ④ 4 33 5 ②

Level 2 기본 연습
본문 79쪽

1 ④ 2 9 3 ① 4 ③

Level 3 실력 완성
본문 80쪽

1 ② 2 ⑤ 3 ①

07 부정적분

유제 본문 83~91쪽

1 ④ 2 ② 3 ④ 4 ③ 5 ③
6 ④ 7 ⑤ 8 ② 9 ② 10 ①

Level 1 기초 연습 본문 92쪽

1 ② 2 ④ 3 2 4 ① 5 ③

Level 2 기본 연습 본문 93쪽

1 ④ 2 4 3 ② 4 ③

Level 3 실력 완성 본문 94쪽

1 ④ 2 ③ 3 15 4 ⑤

08 정적분

유제 본문 97~103쪽

1 ② 2 ③ 3 ① 4 ① 5 ③
6 ① 7 ③ 8 ②

Level 1 기초 연습 본문 104쪽

1 ③ 2 ④ 3 ② 4 2 5 ①

Level 2 기본 연습 본문 105쪽

1 21 2 ② 3 ④ 4 ②

Level 3 실력 완성 본문 106쪽

1 12 2 ② 3 ⑤ 4 ①

09 정적분의 활용

유제 본문 109~113쪽

1 ③ 2 ① 3 ② 4 ② 5 ③
6 ⑤

Level 1 기초 연습 본문 114쪽

1 ④ 2 ① 3 ① 4 250 5 11

Level 2 기본 연습 본문 115쪽

1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ①

Level 3 실력 완성 본문 116쪽

1 ⑤ 2 ① 3 36

01 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프

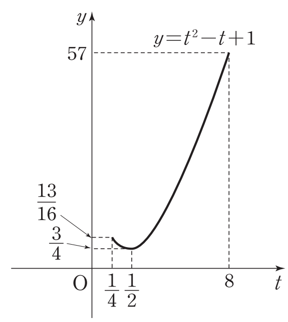
유제 본문 5~11쪽

1 1	**2** ③	**3** ③	**4** ①	**5** ①
6 ②	**7** ②	**8** ③		

1 $a>0$이고, 3^x의 밑이 1보다 크므로 주어진 함수는 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가한다.
그러므로 $x=2$일 때 최댓값 10을 갖고, $x=0$일 때 최솟값 2를 갖는다.
즉, $a\times 3^2+b=10$에서
$9a+b=10$ …… ㉠
$a\times 3^0+b=2$에서
$a+b=2$ …… ㉡
㉠, ㉡을 풀면
$a=1$, $b=1$이므로
$ab=1$

답 1

2 함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x+1$에서
$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$로 놓자.
$0<\frac{1}{2}<1$이고 $-3\le x\le 2$이므로
$\left(\frac{1}{2}\right)^2\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$에서
$\frac{1}{4}\le t\le 8$
$y=\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x+1$
$=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-\left(\frac{1}{2}\right)^x+1$
$=t^2-t+1$
$=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$
$\frac{1}{4}\le t\le 8$이므로 다음 그림에서
$\frac{3}{4}\le y\le 57$



따라서 주어진 함수의 최솟값은 $\frac{3}{4}$이다.

답 ③

3 $\frac{1}{27}\le x\le 27$에서
$\log_3\frac{1}{27}\le\log_3 x\le\log_3 27$
$-3\le\log_3 x\le 3$이므로
$2\times(-3)-1\le 2\log_3 x-1\le 2\times 3-1$에서
$-7\le f(x)\le 5$
따라서 주어진 함수의 최댓값과 최솟값의 합은
$5+(-7)=-2$

답 ③

4 곡선 $y=\log_3(x-2)+3$을 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면
$y=\log_3(x-1)+3$ …… ㉠
곡선 ㉠을 y축에 대하여 대칭이동하면
$y=\log_3(-x-1)+3$ …… ㉡
곡선 ㉡이 점 $(a, 4)$를 지나므로
$4=\log_3(-a-1)+3$
$-a-1=3$
따라서 구하는 a의 값은
$a=-4$

답 ①

5 $3^x=t$로 놓으면 $t>0$
$9^x=(3^2)^x=(3^x)^2=t^2$이므로 주어진 방정식은
$t^2=\frac{7t-3}{4}$
즉, $4t^2-7t+3=0$에서

$(4t-3)(t-1)=0$이므로

$t=\frac{3}{4}$ 또는 $t=1$

즉, $3^x=\frac{3}{4}$ 또는 $3^x=1$

방정식의 서로 다른 두 실근이 α, β이므로

$3^\alpha=\frac{3}{4}$, $3^\beta=1$ 또는 $3^\alpha=1$, $3^\beta=\frac{3}{4}$

$$3^{\alpha+\beta}=3^\alpha\times3^\beta$$
$$=\frac{3}{4}\times1=\frac{3}{4}$$

따라서 $3^{\alpha+\beta}=\frac{3}{4}$에서

$$\alpha+\beta=\log_3\frac{3}{4}$$
$$=1-2\log_3 2$$

답 ①

6 $\frac{4^{2x}}{32}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x}$에서

$\frac{4^{2x}}{32}=\frac{(2^2)^{2x}}{2^5}=2^{4x-5}$이고,

$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x}=(2^{-1})^{1-2x}=2^{2x-1}$이므로

$2^{4x-5}\le 2^{2x-1}$

밑이 1보다 크므로

$4x-5\le 2x-1$

$x\le 2$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 모든 자연수 x는 1, 2이므로 그 합은

$1+2=3$

답 ②

7 $\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-4t-5=0$

$(t+1)(t-5)=0$

$t=-1$ 또는 $t=5$

즉, $\log_2 x=-1$ 또는 $\log_2 x=5$이므로

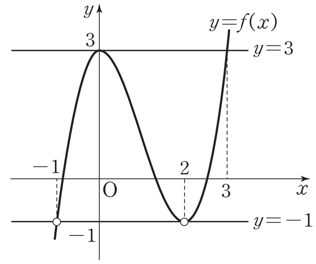
$x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2^5=32$

따라서 구하는 모든 양의 실수 x의 값의 곱은

$\frac{1}{2}\times32=16$

답 ②

8



$\log_{\frac{1}{2}}\{f(x)+1\}\ge\log_2\frac{1}{4}=-2$에서

밑이 1보다 작으므로

$0<f(x)+1\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$

$-1<f(x)\le 3$

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $-1<f(x)\le 3$을 만족시키는 실수 x의 값의 범위는

$-1<x<2$ 또는 $2<x\le 3$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x는 0, 1, 3으로 3개이다.

답 ③

참고

주어진 그래프는 삼차함수 $y=x^3-3x^2+3$의 그래프이다.

Level 1 기초 연습 본문 12쪽

1 ① **2** ② **3** ② **4** 9 **5** 4

1 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면

$y=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$이므로

$A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$y=\log_2 x+k$에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면

$y=\log_2\frac{1}{2}+k=k-1$이므로

$B\left(\frac{1}{2}, k-1\right)$

선분 AB의 길이가 4이므로

$\left|(k-1)-\dfrac{1}{2}\right|=4$

즉, $k-\dfrac{3}{2}=\pm 4$에서

$k=\dfrac{3}{2}+4$ 또는 $k=\dfrac{3}{2}-4$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은

$\left(\dfrac{3}{2}+4\right)+\left(\dfrac{3}{2}-4\right)=3$

답 ①

2 지수함수 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는

$y-c=a^{x-b}$ …… ㉠

함수 ㉠의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 함수는 함수 ㉠의 역함수와 같다.

㉠에 x 대신 y를, y 대신 x를 대입하면

$x-c=a^{y-b}$

즉, $y-b=\log_a(x-c)$이므로

$y=\log_a(x-c)+b$

따라서 $f(x)=\log_a(x-c)+b$이므로

$$\begin{aligned}f(a^2+c)-b&=\log_a(a^2+c-c)+b-b\\&=\log_a a^2\\&=2\end{aligned}$$

답 ②

3 곡선 $y=2-\log_2(ax+b)$가 점 $(2, 2)$를 지나므로

$2=2-\log_2(2a+b)$

$\log_2(2a+b)=0$

$2a+b=1$ …… ㉠

곡선 $y=2-\log_2(ax+b)$, 즉 $y=2-\log_2 a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)$의 점근선이 $x=-1$이므로

$-\dfrac{b}{a}=-1$

즉, $a=b$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=b=\dfrac{1}{3}$이므로

$a+b=\dfrac{2}{3}$

답 ②

4 $3^x=t\ (t>0)$으로 놓으면

$4\cdot 3^x+1=(3^x-2)^2$에서

$4t+1=(t-2)^2$

$4t+1=t^2-4t+4$

$t^2-8t+3=0$ …… ㉠

t에 대한 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 양의 실근 3^α, 3^β을 갖는다.

근과 계수의 관계에 의하여

$3^\alpha\times 3^\beta=3^{\alpha+\beta}=3$

따라서 $\alpha+\beta=1$이므로

$9^{\alpha+\beta}=9$

답 9

5 $\log_3(x-1)+\log_3(4x-7)=\log_8 512$에서

$\log_8 512=\log_{2^3}2^9=\dfrac{9}{3}=3$이므로

$\log_3(x-1)(4x-7)=3$

$(x-1)(4x-7)=27$

$4x^2-11x-20=0$

$(x-4)(4x+5)=0$

따라서 $x=4$ 또는 $x=-\dfrac{5}{4}$이다.

이때 로그의 정의에 의하여 (진수)>0이어야 하므로

$x-1>0$, $4x-7>0$에서 $x>\dfrac{7}{4}$

따라서 구하는 실수 x의 값은

$x=4$

답 4

Level 2 기본 연습

본문 13쪽

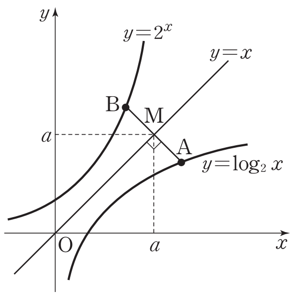
1 ② **2** ③ **3** ① **4** 6

1 지수함수 $y=2^x$은 로그함수 $y=\log_2 x$의 역함수이므로 두 점 A, B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

선분 AB의 중점을 M$(a,\ a)$로 놓으면 원점 O와 직선 AB 사이의 거리가 $3\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{OM}}=a\sqrt{2}=3\sqrt{2}$에서

$a=3$



답 ②

2 ㄱ. $a<b$이고, $2>1$이므로 지수함수의 성질에 의하여

$2^a<2^b$ (참)

ㄴ. $0<a<1$이고 $b>1$이므로

$\log_a b<\log_a 1=0$ (참)

ㄷ. (반례) $b=\frac{3}{2}$이면 $1<\frac{3}{2}<2$이므로 조건을 만족시킨다.

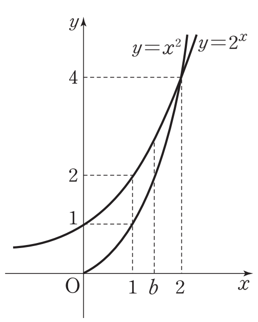
하지만 $2^b=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$이고,

$b^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

$$\begin{aligned}2^b-b^2&=2\sqrt{2}-\frac{9}{4}\\&=\frac{8\sqrt{2}-9}{4}\\&=\frac{\sqrt{128}-\sqrt{81}}{4}>0\end{aligned}$$

따라서 $b^2<2^b$ (거짓)

다른 풀이



그림과 같이 두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=x^2$의 그래프에서 $1<b<2$일 때 $f(b)>g(b)$이므로

$2^b>b^2$ (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

3 $3^x=t$로 놓으면 $t>0$이고

$9^x-2\cdot 3^{x+1}+3=0$에서

$(3^x)^2-2\cdot 3\cdot 3^x+3=0$

$t^2-6t+3=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

t에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근은 3^α, 3^β이고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3^\alpha\times 3^\beta=3^{\alpha+\beta}=3$

이므로 $\alpha+\beta=1$

따라서 x에 대한 방정식 $(\log_3 x)^2+a\log_3 x+b=0$의 두 근은 각각 1, 4이므로 $\log_3 x=s$라 하면 s에 대한 이차방정식 $s^2+as+b=0$의 두 근은 각각

$\log_3 1$, $\log_3 4$

즉, 0, $\log_3 4$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=0+\log_3 4=\log_3 4$에서

$a=-\log_3 4$

$b=0\times\log_3 4=0$

따라서

$$\begin{aligned}a+b&=-\log_3 4+0\\&=-\log_3 4\end{aligned}$$

답 ①

4 $y=\log_2(x+7)-1$에서 x와 y를 바꾸면

$x=\log_2(y+7)-1$

$x+1=\log_2(y+7)$

$y+7=2^{x+1}$

$y=2^{x+1}-7$

따라서 $f^{-1}(x)=2^{x+1}-7$이므로

$f^{-1}(x)+f^{-1}(1-x)\le\frac{5}{2^{x-2}}$에 대입하면

$2^{x+1}-7+2^{1-x+1}-7\le\frac{5}{2^{x-2}}$

$2\cdot 2^x-14+\frac{4}{2^x}\le\frac{20}{2^x}$

모든 실수 x에 대하여 $2^x>0$이므로 양변에 2^x을 곱하면

$2(2^x)^2-14\cdot 2^x-16\le 0$

즉, $(2^x)^2-7\cdot 2^x-8\le 0$

$2^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-7t-8\le 0$

$(t+1)(t-8)\le 0$

$t>0$이므로 $t+1>0$

따라서 $0<t\le 8$이므로

$0<2^x\le 8$에서

$x\le \log_2 8=3$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x는 1, 2, 3이고, 그 합은 6이다.

답 6

Level 3 실력 완성 본문 14쪽

1 ② **2** ③ **3** ⑤

1 $x>0$, $x\ne 1$이고, 로그의 진수의 조건에 의하여

$2x^2-5x+2>0$

$5x+2>0$

즉, $(2x-1)(x-2)>0$이어야 하므로

$0<x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>2$

이때 x는 1이 아닌 자연수이므로

$x>2$

$\log_x(2x^2-5x+2)\le \log_x(5x+2)$에서

$2x^2-5x+2\le 5x+2$

즉, $2x^2-10x\le 0$이므로

$2x(x-5)\le 0$에서

$0\le x\le 5$

이때 $x>2$이므로

$2<x\le 5$

따라서 부등식을 만족시키는 1이 아닌 모든 자연수 x의 값의 합은

$3+4+5=12$

답 ②

2 $A_n(n, \log_a(n+1))$, $A_{n+1}(n+1, \log_a(n+2))$이므로

$l_n=2+2\{\log_a(n+2)-\log_a(n+1)\}$

$$\sum_{k=1}^{30} l_k=\sum_{k=1}^{30} 2+2\sum_{k=1}^{30}\{\log_a(k+2)-\log_a(k+1)\}$$

$$=60+2\{(\log_a 3-\log_a 2)+(\log_a 4-\log_a 3)+\cdots+(\log_a 32-\log_a 31)\}$$

$$=60+2(\log_a 32-\log_a 2)$$

$$=60+2\log_a 16$$

$$=68$$

$60+2\log_a 16=68$에서

$2\log_a 16=8$

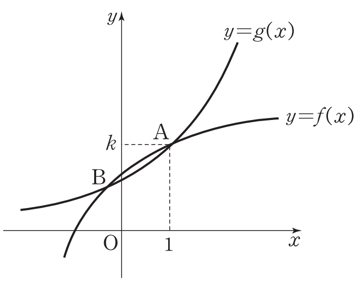
$\log_a 16=4$

즉, $a^4=16=2^4$이므로

$a=2$

답 ③

3



ㄱ. $f(1)=k\log_3 3=k$

$g(1)=2^0+k-1=k$

$f(1)=g(1)$이므로 두 함수의 그래프는 k의 값에 관계없이 x좌표가 1인 점에서 항상 만난다. (참)

ㄴ. $k=1$일 때

$f(0)=\log_3(0+2)$

$=\log_3 2$

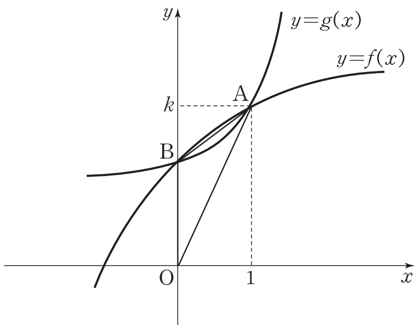
$g(0)=2^{-1}=\frac{1}{2}$

이때 $3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}<2$이므로

$\frac{1}{2}=\log_3 3^{\frac{1}{2}}<\log_3 2$

즉, $f(0)>g(0)$이므로 점 B의 x좌표는 음수이다. (참)

ㄷ.



점 B가 y축 위의 점이므로

$f(0)=g(0)$

즉, $k\log_3 2=k-\frac{1}{2}$이므로

$k(1-\log_3 2)=\frac{1}{2}$

$k\log_3 \frac{3}{2}=\frac{1}{2}$에서

$k=\dfrac{1}{2\log_3 \frac{3}{2}}$

삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times k\log_3 2\times 1=\frac{1}{2}\times\dfrac{\log_3 2}{2\log_3 \frac{3}{2}}$

$=\frac{1}{4}\log_{1.5} 2$ (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다

답 ⑤

02 지수함수와 로그함수의 도함수

유제 본문 17~23쪽

1 ③	**2** ③	**3** ②	**4** ②	**5** ①
6 ④	**7** 20	**8** ①		

1 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x+1}+\left(\frac{3}{2}\right)^x}{2^{x-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{2^x}\times\frac{3^x}{2^x}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x}\times\frac{2^x}{3^x}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\left(\frac{3}{4}\right)^x}{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^x}$

$0<\frac{3}{4}<1$, $0<\frac{1}{3}<1$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x=0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x=0$

따라서

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2+\left(\frac{3}{4}\right)^x}{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^x}=\frac{2+0}{\frac{1}{2}+0}=4$

답 ③

2 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)-\log_{\frac{1}{2}}3x\}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\{\log_2 3x-\log_2(2x+1)\}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{3x}{2x+1}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{3}{2+\frac{1}{x}}$

$=\log_2\frac{3}{2}$

답 ③

3 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{\log_2(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2^x-1}{x}}{\frac{\log_2(1+x)}{x}}$

이때 $2^x=e^{x\ln 2}$, $\log_2(1+x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\ln 2}$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln 2}-1}{x\ln 2}\times\ln 2$

$=\ln 2$

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log_2(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}\times\frac{1}{\ln 2}$

$=\dfrac{1}{\ln 2}$

따라서

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{\log_2(1+x)}=\frac{\ln 2}{\frac{1}{\ln 2}}$

$=(\ln 2)^2$

답 ②

4 $a_n=f(n)$

$=\dfrac{n-1}{n}$

$=1-\dfrac{1}{n}$

이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

이때 $-\dfrac{1}{n}=x$로 놓으면 $n=-\dfrac{1}{x}$이고,

$n\to\infty$일 때 $x\to0-$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n)^n=\lim_{x\to0-}(1+x)^{-\frac{1}{x}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0-}\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}$

$=\dfrac{1}{e}$

답 ②

5 $f'(x)=\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'$

$=\dfrac{(e^x)'+\left\{\left(\frac{1}{e}\right)^x\right\}'}{2}$

$=\dfrac{e^x+\left(\frac{1}{e}\right)^x\ln\frac{1}{e}}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\left(e^x-\dfrac{1}{e^x}\right)$

$f'(t)=0$에서

$\frac{1}{2}\left(e^t - \frac{1}{e^t}\right)=0$

즉, $e^t = \frac{1}{e^t}$

양변에 e^t을 곱하면

$(e^t)^2=1$

$e^t>0$이므로 $e^t=1$

따라서 $t=0$

답 ①

6 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

$f(x)=xe^{2x}$에서

$f'(x)=(x)'e^{2x}+x(e^{2x})'$

이때 $e^{2x}=(e^2)^x$이므로

$(e^{2x})'=\{(e^2)^x\}'=(e^2)^x\ln e^2$

$=2e^{2x}$

따라서

$f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}$

$=(2x+1)e^{2x}$

이므로

$f'(1)=(2+1)e^2$

$=3e^2$

답 ④

7 함수 $f(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)$

$f(x)=x^2\log_2 x$에서

$f'(x)=(x^2)'\log_2 x+x^2(\log_2 x)'$

$=2x\log_2 x+\frac{x^2}{x\ln 2}$

$=2x\log_2 x+\frac{x}{\ln 2}$

이므로

$f'(4)=8\log_2 4+\frac{4}{\ln 2}$

$=16+\frac{4}{\ln 2}$

따라서 $a=16,\ b=4$이므로

$a+b=16+4=20$

답 20

8 함수 $f(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-3x+2}&=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x-1)}\\&=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x-1}\right\}\\&=f'(2)\times\frac{1}{2-1}\\&=f'(2)\end{aligned}$$

이때 $f'(x)=\frac{1}{x}$이므로

$f'(2)=\frac{1}{2}$

답 ①

Level 1 기초 연습

본문 24쪽

1 36 **2** ② **3** ③ **4** 10 **5** ⑤

1 주어진 식의 분모와 분자를 각각 6^x으로 나누면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{6^{x+1}+2^{2x}}{5^x+6^{x-1}}&=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{4^x}{6^x}}{\frac{5^x}{6^x}+\frac{1}{6}}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\left(\frac{5}{6}\right)^x+\frac{1}{6}}\\&=\frac{6+0}{0+\frac{1}{6}}\\&=36\end{aligned}$$

답 36

2 $$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{x-1}}&=\lim_{x\to1}\left\{\frac{x+(1-x)}{x}\right\}^{\frac{x}{x-1}}\\&=\lim_{x\to1}\left(1+\frac{1-x}{x}\right)^{\frac{x}{1-x}\times(-1)}\end{aligned}$$

$\frac{1-x}{x}=t$로 놓으면 $x\to1$일 때, $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{x-1}}=\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-1}$$
$$=e^{-1}$$
$$=\frac{1}{e}$$

답 ②

3 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right\}$$
$$=f'(a)+f'(a)$$
$$=2f'(a)$$

$f(x)=e^x$에서 $f'(x)=e^x$이므로

$2f'(a)=2e^a=4e$에서

$a=\ln 2e$

$\quad=\ln 2+1$

답 ③

4 조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 4)$를 지나므로

$f(1)=4$

즉, $a\log_b 1+c=4$이므로

$c=4$

또, 곡선 $y=f(x)$가 점 $(b,\ 6)$을 지나므로

$f(b)=6$

즉, $a\log_b b+4=6$이므로

$a=2$

$f(x)=2\log_b x+4$에서 $f'(x)=\dfrac{2}{x\ln b}$이므로

$f'(1)=\dfrac{2}{\ln b}$

조건 (나)에서 $f'(1)=\dfrac{1}{\ln 2}$이므로

$\dfrac{2}{\ln b}=\dfrac{1}{\ln 2}$

$\ln b=2\ln 2=\ln 4$이므로

$b=4$

따라서 $a+b+c=2+4+4=10$

답 10

5 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다.

따라서

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$$

즉,

$$\lim_{x\to0+}\frac{a\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to0-}(x^2-2x+3)$$
$$=f(0)$$

$f(0)=3$

이고,

$$\lim_{x\to0+}\frac{a\ln(x+1)}{x}=a\lim_{x\to0+}\frac{\ln(x+1)}{x}$$
$$=a\times1$$
$$=a$$

이므로

$a=3$

답 ⑤

Level 2 기본 연습

본문 25쪽

1 ①　**2** ②　**3** ④　**4** ③

1 로그의 성질에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\{\log_a(bx^2+1)-\log_a(2x^2+1)\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\log_a\frac{bx^2+1}{2x^2+1}$$

한편, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{bx^2+1}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{b+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{b}{2}$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\log_a\frac{bx^2+1}{2x^2+1}=\log_a\frac{b}{2}$$

주어진 조건에 의하여

$\log_a\dfrac{b}{2}=2$, 즉 $b=2a^2$이므로

$\dfrac{a^2}{b}=\dfrac{a^2}{2a^2}=\dfrac{1}{2}$

답 ①

2 $\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax}+b}{\ln(1+x)}=3$이고 $x \to 0$일 때, (분모)$\to 0$이므로

(분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 0}(e^{ax}+b)=1+b=0$이므로

$b=-1$

주어진 식에 $b=-1$을 대입하면

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax}-1}{\ln(1+x)}=\lim_{x \to 0}\left\{\frac{e^{ax}-1}{ax} \times \frac{x}{\ln(1+x)} \times a\right\}$$
$$=1 \times 1 \times a$$
$$=a$$

즉, $a=3$

따라서

$a+b=3+(-1)=2$

답 ②

3 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

따라서 $\lim_{x \to 1+} f(x)=\lim_{x \to 1-} f(x)=f(1)$

즉, $\lim_{x \to 1+}(\ln x+a)=\lim_{x \to 1-}(ae^x+b)=f(1)$

$a=ae+b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x \to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$\lim_{x \to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x \to 1+} \frac{(\ln x+a)-(ae+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x \to 1+} \frac{(\ln x+a)-a}{x-1}$$
$$=\lim_{x \to 1+} \frac{\ln x}{x-1}$$

$g(x)=\ln x$로 놓으면 $g(1)=0$, $g'(x)=\frac{1}{x}$이므로

$$\lim_{x \to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x \to 1+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$
$$=g'(1)$$
$$=\frac{1}{1}=1$$

$$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x \to 1-} \frac{(ae^x+b)-(ae+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x \to 1-} \frac{ae^x-ae}{x-1}$$

$h(x)=ae^x$으로 놓으면 $h(1)=ae$, $h'(x)=ae^x$이므로

$$\lim_{x \to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x \to 1-} \frac{h(x)-h(1)}{x-1}$$
$$=h'(1)$$
$$=ae$$

$\lim_{x \to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x \to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$에서

$1=ae$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$a=\frac{1}{e}$, $b=a-ae=\frac{1}{e}-1$

따라서

$$a+b=\frac{1}{e}+\left(\frac{1}{e}-1\right)$$
$$=\frac{2}{e}-1$$

답 ④

4 $e\ln x \le f(x) \le e^x-e$에서

$x>1$일 때, $\frac{e\ln x}{x-1} \le \frac{f(x)}{x-1} \le \frac{e^x-e}{x-1}$

$0<x<1$일 때, $\frac{e^x-e}{x-1} \le \frac{f(x)}{x-1} \le \frac{e\ln x}{x-1}$

한편, $g(x)=e\ln x$, $h(x)=e^x$으로 놓으면

$g'(x)=\frac{e}{x}$, $h'(x)=e^x$

이고, $g(1)=0$, $h(1)=e$이므로

$$\lim_{x \to 1} \frac{e\ln x}{x-1}=\lim_{x \to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$
$$=g'(1)$$
$$=\frac{e}{1}=e$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^x-e}{x-1}=\lim_{x \to 1} \frac{h(x)-h(1)}{x-1}$$
$$=h'(1)$$
$$=e$$

따라서 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}=e$이므로

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x \to 1}\left\{\frac{f(x)}{x-1} \times \frac{1}{x+1}\right\}$$
$$=e \times \frac{1}{2}$$
$$=\frac{e}{2}$$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 26쪽

1 ① **2** ④ **3** ①

1 b_n

$=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}$

$=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n+2}\right)+\cdots$

$+\ln\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)$

$=\ln\left(\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n+1}\times\frac{n+3}{n+2}\times\cdots\times\frac{2n}{2n-1}\times\frac{2n+1}{2n}\right)$

$=\ln\frac{2n+1}{n}$

$=\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}n(b_n-\ln 2)=\lim_{n\to\infty}n\left\{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)-\ln 2\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\ln e^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

답 ①

2 ㄱ. $a_1=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x}{x-1}$

$x-1=t$로 놓으면

$x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$a_1=\lim_{t\to0}\frac{(t+1)\ln(t+1)}{t}$

$=\lim_{t\to0}(t+1)\times\lim_{t\to0}\frac{\ln(t+1)}{t}$

$=1\times1=1$ (참)

ㄴ. $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$

이므로

$a_n=\lim_{x\to1}\frac{x^n\ln x}{x^n-1}$

$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{\ln x}{x-1}\times\frac{x^n}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1}\right\}$

$=1\times\frac{1}{n}$

$=\frac{1}{n}$

따라서

$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{10}k$

$=\frac{10\times11}{2}$

$=55$ (거짓)

ㄷ. ㄴ에서 $a_n=\frac{1}{n}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$=1$ (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

3 조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여

$f(x+a)=f(x)+b$

이고, $0\le x+a<a$일 때, $-a\le x<0$이므로

$x+a=t$로 놓으면 $0\le t<a$이고,

$f(t)=f(t-a)+b$

$=(t-a)^2e^{t-a}+b$ …… ㉠

$-a\le x<a$에서 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}x^2e^x & (-a\le x<0)\\(x-a)^2e^{x-a}+b & (0\le x<a)\end{cases}$$

따라서

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\{(x-a)^2e^{x-a}+b\}$

$=a^2e^{-a}+b$

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}x^2e^x=0$

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$에서

$0=a^2e^{-a}+b$이므로

$b=-a^2e^{-a}$ …… ㉡

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{x^2e^x}{x}=\lim_{x\to0-}xe^x=0$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}&=\lim_{x\to0+}\frac{(x-a)^2e^{x-a}-a^2e^{-a}}{x}\\&=\lim_{x\to0+}\frac{x^2e^x-2axe^x+a^2e^x-a^2}{xe^a}\\&=\lim_{x\to0+}\left\{\frac{(x-2a)e^x}{e^a}+\frac{a^2}{e^a}\times\frac{e^x-1}{x}\right\}\end{aligned}$$

$\lim_{x\to0+}\frac{(x-2a)e^x}{e^a}=-\frac{2a}{e^a}$, $\lim_{x\to0+}\frac{e^x-1}{x}=1$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}&=-\frac{2a}{e^a}+\frac{a^2}{e^a}\\&=\frac{a^2-2a}{e^a}\end{aligned}$$

또, 주어진 조건에 의하여 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능해야 하므로

$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}$에서

$\frac{a^2-2a}{e^a}=\frac{a(a-2)}{e^a}=0$

$0<a<e$이므로

$a=2$, $b=-4e^{-2}$

따라서 $ab=-\frac{8}{e^2}$

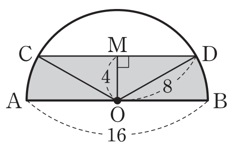
답 ①

03 삼각함수의 뜻과 그래프

유제 본문 29~37쪽

1 ③	2 ④	3 ②	4 ③	5 ③
6 ①	7 4	8 1	9 ③	10 ④

1



위의 그림과 같이 선분 AB의 중점을 O라 하고, 점 O에서 현 CD에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$\overline{OM}=4$, $\overline{OD}=8$

이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{MD}=\sqrt{8^2-4^2}$

$=4\sqrt{3}$

삼각형 ODM은 직각삼각형이므로

$\angle ODM=\frac{\pi}{6}$, $\angle MOD=\frac{\pi}{3}$

$\angle DOB=\frac{\pi}{6}$

따라서 어두운 부분의 넓이는

{(부채꼴 ODB의 넓이)×2+(삼각형 OCD의 넓이)}

$=\frac{1}{2}\times 8^2\times\frac{\pi}{6}\times 2+\frac{1}{2}\times 8\sqrt{3}\times 4$

$=\frac{32}{3}\pi+16\sqrt{3}$

답 ③

2 부채꼴의 반지름의 길이를 r cm, 호의 길이를 l cm, 넓이를 S cm²라 하면

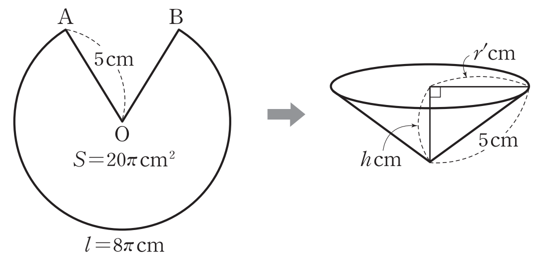
$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r\times 8\pi$

$=4r\pi=20\pi$

이므로

$r=5$

따라서 이 부채꼴의 호 AB를 밑면의 둘레로 하는 원뿔 모양의 용기를 만들면 그림과 같다.



부채꼴로 만든 원뿔의 높이를 h cm, 밑면의 반지름의 길이를 r' cm라 하면

$2\pi r'=8\pi$에서 $r'=4$

$5^2=4^2+h^2$에서 $h=3$

따라서 이 원뿔 모양의 용기의 부피를 V라 하면

$V=\frac{1}{3}\times$(밑넓이)$\times$(높이)

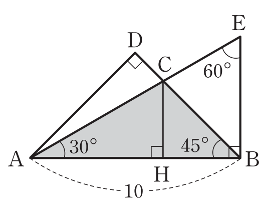
$=\frac{1}{3}\times\pi(r')^2\times h$

$=\frac{1}{3}\pi\times 4^2\times 3$

$=16\pi\,(\text{cm}^3)$

답 ④

3



점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\frac{\overline{CH}}{\tan 30^\circ}$, $\overline{BH}=\frac{\overline{CH}}{\tan 45^\circ}$

$\overline{AB}=\overline{AH}+\overline{BH}$

$=\frac{\overline{CH}}{\tan 30^\circ}+\frac{\overline{CH}}{\tan 45^\circ}$

$=\sqrt{3}\,\overline{CH}+\overline{CH}$

$=(\sqrt{3}+1)\overline{CH}$

$\overline{CH}=\frac{\overline{AB}}{\sqrt{3}+1}$

$=\frac{10}{\sqrt{3}+1}$

$=\frac{10(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$=5(\sqrt{3}-1)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CH}$

$=\frac{1}{2}\times 10\times 5(\sqrt{3}-1)$

$=25(\sqrt{3}-1)$

답 ②

4 $x^2-ax-a^2=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=a$ …… ㉠

$\sin\theta\cos\theta=-a^2$ …… ㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$1+2\sin\theta\cos\theta=a^2$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$1-2a^2=a^2$

$a^2=\frac{1}{3}$

$a>0$이므로

$a=\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 ③

5 그림에서 함수 $y=a\cos bx+c$의 최댓값과 최솟값이 각각 3, -1이고 $a>0$이므로

$a+c=3$, $-a+c=-1$

위의 두 식을 풀면

$a=2$, $c=1$

또한, 주기는 π이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi$에서

$b=2$

따라서 $a+b+c=2+2+1=5$

답 ③

6 함수 $y=\sin\frac{\pi}{3}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$이므로 $y=\sin\frac{\pi}{3}x$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표 중에서 양수인 최솟값은 3이다.

또한, $\overline{BC}=2$이고 두 점 B, C의 좌표를 각각 $(b, 0)$, $(b+2, 0)$으로 놓으면 함수 $y=\sin\frac{\pi}{3}x$의 그래프는 직선 $x=\frac{3}{2}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{b+(b+2)}{2}=\frac{3}{2}$, 즉 $b=\frac{1}{2}$

따라서 $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $C\left(\frac{5}{2}, 0\right)$이므로 점 A의 좌표는

$\left(\frac{1}{2}, \sin\frac{\pi}{6}\right)$, 즉 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$이다.

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$\overline{BC}\times\overline{AB}=2\times\frac{1}{2}=1$

답 ①

7 직선 $x+2y-3=0$의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로

$\tan\theta=-\frac{1}{2}$

즉, $\cot\theta=-2$이므로

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{1+\cos(\pi+\theta)}$$

$$=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)-\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$$

$$=\frac{-2\sin\theta\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{-2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$=-2\cot\theta$

$=-2\times(-2)$

$=4$

답 4

8 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 π이므로

$A+B+C=\pi$

따라서 $\frac{B+C}{2}=\frac{\pi-A}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$이므로

$\sin\left(\frac{2\pi-A}{2}\right)\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi+A}{2}\right)\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)$

$=\sin\left(\pi-\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)$

$\qquad+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)$

$=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

$=\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}=1$

답 1

9 $f(|f(x)|)=\sin(|\sin x|)=\frac{1}{2}$에서

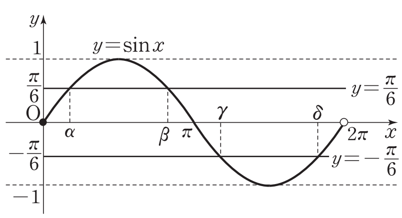
$|\sin x|=2n\pi+\frac{\pi}{6}$ 또는 $|\sin x|=2n\pi+\frac{5\pi}{6}$

(단, n은 음이 아닌 정수)

그런데 $0\le |\sin x|\le 1$이고

$\frac{5\pi}{6}>1$이므로 $|\sin x|=\frac{\pi}{6}$에서

$\sin x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\sin x=-\frac{\pi}{6}$



(ⅰ) $\sin x=\frac{\pi}{6}$일 때

두 근을 α, β라 하면 α, β는 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대칭이므로

$\alpha+\beta=\pi$이다.

(ⅱ) $\sin x=-\frac{\pi}{6}$일 때

두 근을 γ, δ라 하면 γ, δ는 직선 $x=\frac{3}{2}\pi$에 대칭이므로

$\gamma+\delta=3\pi$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 방정식 $\sin(|\sin x|)=\frac{1}{2}$의 모든 근의 합은

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi+3\pi=4\pi$

답 ③

10 x에 대한 이차함수 $y=x^2-2x\cos\theta+1$에서

$y=(x-\cos\theta)^2+1-\cos^2\theta$

이므로 꼭짓점의 좌표는

$(\cos\theta,\ 1-\cos^2\theta)$

꼭짓점이 부등식 $2\sqrt{2}x-2y-1<0$을 만족시키므로

$2\sqrt{2}\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)-1<0$에서

$2\cos^2\theta+2\sqrt{2}\cos\theta-3<0$

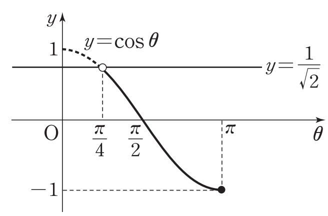
$(\sqrt{2}\cos\theta-1)(\sqrt{2}\cos\theta+3)<0$

그런데 $\sqrt{2}\cos\theta+3>0$이고

$0\le\theta\le\pi$에서 $-1\le\cos\theta\le 1$이므로

$-1\le\cos\theta<\frac{1}{\sqrt{2}}$

따라서 $\frac{\pi}{4}<\theta\le\pi$



답 ④

Level 1 기초 연습

본문 38쪽

1 ④ **2** ① **3** ② **4** ②

1 $-1\le\cos ax\le 1$에서 $-3\le 3\cos ax\le 3$이므로 함수 $y=3\cos ax$의 치역은

$\{y\,|\,-3\le y\le 3\}$

함수 $y=2+3\cos a(x-1)$의 그래프는

$y=3\cos ax$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 치역은

$\{y\,|\,-1\le y\le 5\}$이다.

즉, $M=5$, $m=-1$이다.

또한, $3\cos ax=3\cos(ax+2\pi)=3\cos a\left(x+\frac{2\pi}{a}\right)$이므로 함수 $y=3\cos ax$의 주기는 $\frac{2\pi}{a}$ $(a>0)$이다.

따라서 함수 $y=2+3\cos a(x-1)$의 주기도 $\frac{2\pi}{a}$이다.

즉, $\frac{2\pi}{a}=\pi$이므로

$a=2$

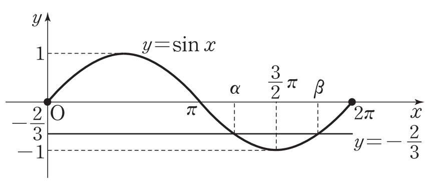
따라서

$M+m+a=5+(-1)+2$

$=6$

답 ④

2 $3\sin x=-2$에서 $\sin x=-\frac{2}{3}$이므로 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{2}{3}$를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



$0\le x\le 2\pi$에서 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{2}{3}$의 교점의 x좌표를 $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$라 하면 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}\pi$이므로

$\alpha+\beta=3\pi$, 즉 방정식 $3\sin x=-2$를 만족시키는 모든 x의 값의 합 θ는

$\theta=\alpha+\beta=3\pi$

따라서

$\cos\theta=\cos 3\pi=\cos(2\pi+\pi)$

$=\cos\pi=-1$

답 ①

3 $\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin^2\alpha=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\cos^2\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\alpha+\sin^2\theta+\tan^2\theta$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta+\tan^2\theta$

$=1+\tan^2\theta$

$=\sec^2\theta$

$=\frac{1}{\cos^2\theta}$

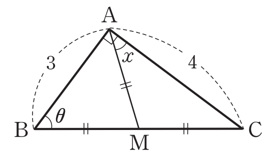
$=\frac{1}{\overline{OA}^2}$

$\frac{1}{\overline{OA}^2}=9$에서 $\overline{OA}>0$이므로

$\overline{OA}=\frac{1}{3}$

답 ②

4



$\angle A=\frac{\pi}{2}$이고, 점 M은 직각삼각형 ABC의 빗변의 중점이므로 점 M은 삼각형 ABC의 외심이다.

즉, $\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}$

따라서 삼각형 MAB는 이등변삼각형이므로

$\angle ABM=\angle BAM$

$\angle ABM=\theta$, $\angle CAM=x$라 하면

$x+\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$x=\frac{\pi}{2}-\theta$

$\sin(\angle CAM)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

삼각형 ABC는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

따라서 $\cos\theta=\frac{3}{5}$

답 ②

다른 풀이

점 M은 삼각형 ABC의 외심이므로

$\overline{AM}=\overline{CM}$

즉, 삼각형 MCA가 이등변삼각형이므로

$\angle CAM=\angle ACM$

또한, 삼각형 ABC가 직각삼각형이므로

$\overline{BC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

따라서

$\sin(\angle CAM)=\sin(\angle ACM)$

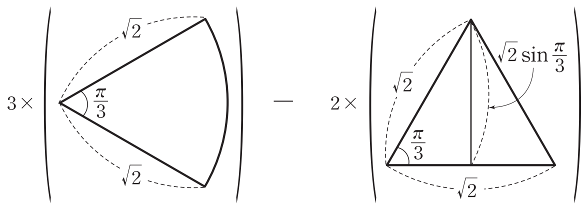
$=\frac{3}{5}$

Level 2 기본 연습

본문 39쪽

1 ③ **2** ② **3** ② **4** ⑤

1 세 원이 각각 서로 다른 원의 중심을 지나므로 세 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 삼각형은 정삼각형이다. 구하는 부분의 넓이는 다음과 같다.



반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴의 넓이를 S_1, 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정삼각형의 넓이를 S_2라 하면 구하는 부분의 넓이는 $3S_1-2S_2$이다.

$S_1=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$

$S_2=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서

$$\begin{aligned}3S_1-2S_2&=3\times\frac{\pi}{3}-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\pi-\sqrt{3}\end{aligned}$$

답 ③

2 임의의 정수 k에 대하여

$f(4k)=\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned}f(4k+1)&=\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\\&=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\\&=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(4k+2)&=\sin\left(2k\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)\\&=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\\&=-\sin\frac{\pi}{3}\\&=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(4k+3)&=\sin\left(2k\pi+\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\\&=\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{3}\right)\\&=-\cos\frac{\pi}{3}\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

ㄱ. $f(n)=f(4k)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (참)

ㄴ. $f(4k+2)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $f(4k+4)=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$f(4k+2)+f(4k+4)=0$ (참)

ㄷ. $\sum_{k=1}^{50}\log_2|f(2k-1)|$

$$\begin{aligned}&=\log_2|f(1)|+\log_2|f(3)|+\cdots+\log_2|f(99)|\\&=\log_2\left|\frac{1}{2}\right|+\log_2\left|-\frac{1}{2}\right|+\cdots+\log_2\left|-\frac{1}{2}\right|\\&=\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^{50}\\&=\log_2 2^{-50}\\&=-50\ (\text{거짓})\end{aligned}$$

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

3 $y=2\sin^2 x+a\cos x+3$

$=2(1-\cos^2 x)+a\cos x+3$

$=-2\cos^2 x+a\cos x+5$

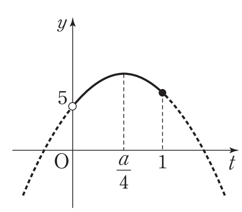
$\cos x=t$로 놓으면

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$이므로

$0\le t\le 1$이고, $y=-2t^2+at+5$

$$\begin{aligned}y&=-2t^2+at+5\\&=-2\left(t^2-\frac{a}{2}t\right)+5\\&=-2\left(t-\frac{a}{4}\right)^2+\frac{a^2}{8}+5\end{aligned}$$

(i) $0<\frac{a}{4}\le 1$일 때, 즉 $0<a\le 4$일 때



$t=\frac{a}{4}$일 때 최댓값은

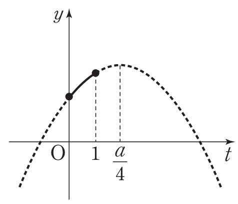
$\frac{a^2}{8}+5$이고, $\frac{a^2}{8}+5=\frac{49}{8}$에서

$\frac{a^2}{8}=\frac{9}{8}$, $a^2=9$

$0<a\leq 4$이므로

$a=3$

(ⅱ) $\frac{a}{4}>1$일 때, 즉 $a>4$일 때



$t=1$일 때 최댓값은

$-2+a+5=\frac{49}{8}$이므로

$a=\frac{25}{8}$

이때 $\frac{25}{8}<4$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 양수 a의 값은 3이다.

답 ②

4 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$이고,

$\sin(\pi+x)=-\sin x$이므로

$$f(x)=\frac{16\sin^2(\pi+x)+9}{4\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

$$=\frac{16\sin^2 x+9}{4\sin x}$$

$\sin x=t$라 하면 $0<x<\pi$일 때 $0<t\leq 1$이다. 이때

$g(t)=\frac{16t^2+9}{4t}$라 하자.

$$g(t)=\frac{16t^2+9}{4t}$$

$$=4t+\frac{9}{4t}$$

$$\geq 2\sqrt{4t\times\frac{9}{4t}}=6$$

함수 $g(t)$의 최솟값이 6이고, 등호는 $4t=\frac{9}{4t}$에서

$t=\frac{3}{4}$일 때 성립한다.

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값 β는 6이고, $\sin\alpha=\frac{3}{4}$이므로

$$\beta\times\sin\alpha=6\times\frac{3}{4}$$

$$=\frac{9}{2}$$

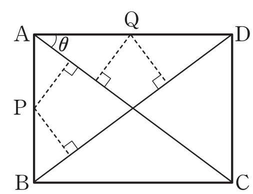
답 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 40쪽

1 29 **2** ② **3** 800 **4** ④

1



$\angle\text{DAC}=\angle\text{BDA}=\theta$라 하면

$t=\overline{\text{AQ}}\sin\theta+\overline{\text{DQ}}\sin\theta$

$=\overline{\text{AD}}\sin\theta$

$=4\sin\theta$

마찬가지로

$s=\overline{\text{AP}}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\overline{\text{BP}}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\overline{\text{AB}}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\overline{\text{AB}}\cos\theta$

$=3\cos\theta$

그런데 $\overline{\text{AC}}=\sqrt{\overline{\text{AB}}^2+\overline{\text{BC}}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$,

$\sin\theta=\frac{\overline{\text{CD}}}{\overline{\text{AC}}}=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=\frac{\overline{\text{AD}}}{\overline{\text{AC}}}=\frac{4}{5}$이므로

$s=t=\frac{12}{5}$

$s+t=\frac{24}{5}$이므로

$m=5$, $n=24$

따라서

$m+n=5+24=29$

답 29

2 $(x^2+1)(1+\cos\alpha)+2x(1+\sin\alpha)=0$을 정리하면

$(1+\cos\alpha)x^2+2(1+\sin\alpha)x+(1+\cos\alpha)=0$

(ⅰ) $1+\cos\alpha=0$이면

$1+\sin\alpha\neq0$이므로 $x=0$

따라서 $\alpha=\pi$일 때 실근을 갖는다.

(ⅱ) $1+\cos\alpha\neq0$이면

$$\frac{D}{4}=(1+\sin\alpha)^2-(1+\cos\alpha)^2\geq0$$

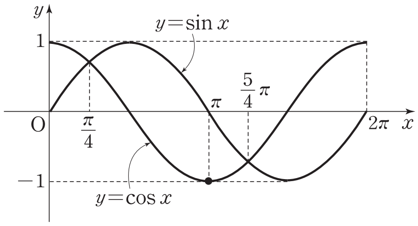
$(\sin\alpha+\cos\alpha+2)(\sin\alpha-\cos\alpha)\geq0$

그런데 $\sin\alpha\geq-1$, $\cos\alpha>-1$이므로

$\sin\alpha+\cos\alpha+2>0$

따라서 $\sin\alpha-\cos\alpha\geq0$이므로

$\frac{\pi}{4}\leq\alpha\leq\frac{5}{4}\pi\ (\alpha\neq\pi)$



(ⅰ), (ⅱ)에서 최댓값 $M=\frac{5}{4}\pi$, 최솟값 $m=\frac{\pi}{4}$이므로

$$M+m=\frac{5}{4}\pi+\frac{1}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$$

답 ②

3 호 AB를 $2n$등분한 각 부채꼴 $\mathrm{OP}_{k-1}\mathrm{P}_k\ (k=1, 2, \cdots, 2n)$의 중심각의 크기는

$$\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2n}=\frac{\pi}{4n}$$

또한, 직각삼각형 $\mathrm{OP_1H_1}$에서 $\angle\mathrm{P_1OH_1}=\frac{\pi}{4n}=\theta$라 하면

$\overline{\mathrm{OP_1}}=2$이므로

$$\sin\theta=\frac{\overline{\mathrm{P_1H_1}}}{\overline{\mathrm{OP_1}}}=\frac{\overline{\mathrm{P_1H_1}}}{2}$$

직각삼각형 $\mathrm{OP_2H_2}$에서 $\angle\mathrm{P_2OH_2}=2\times\frac{\pi}{4n}=2\theta$이고

$\overline{\mathrm{OP_2}}=2$이므로

$$\sin2\theta=\frac{\overline{\mathrm{P_2H_2}}}{\overline{\mathrm{OP_2}}}=\frac{\overline{\mathrm{P_2H_2}}}{2}$$

이와 같은 방법으로

$$\sin3\theta=\frac{\overline{\mathrm{P_3H_3}}}{2},\ \cdots,\ \sin(2n-1)\theta=\frac{\overline{\mathrm{P}_{2n-1}\mathrm{H}_{2n-1}}}{2}$$

임을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
&f(n)\\
&=\sum_{k=1}^{2n-1}\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{H}_k}^2\\
&=\overline{\mathrm{P_1H_1}}^2+\overline{\mathrm{P_2H_2}}^2+\cdots+\overline{\mathrm{P}_{2n-1}\mathrm{H}_{2n-1}}^2\\
&=4\{\sin^2\theta+\sin^22\theta+\cdots+\sin^2(2n-1)\theta\}\\
&=4\{\sin^2\theta+\sin^2(2n-1)\theta\}+4\{\sin^22\theta+\sin^2(2n-2)\theta\}\\
&\qquad+\cdots+4\{\sin^2(n-1)\theta+\sin^2(n+1)\theta\}+4\sin^2n\theta\\
&=4\left\{\sin^2\theta+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}+4\left\{\sin^22\theta+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right\}\\
&\qquad+\cdots+4\left\{\sin^2(n-1)\theta+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-(n-1)\theta\right)\right\}\\
&\qquad+4\sin^2\frac{\pi}{4}\\
&=4\{\sin^2\theta+\cos^2\theta\}+4\{\sin^22\theta+\cos^22\theta\}+\cdots\\
&\qquad+4\{\sin^2(n-1)\theta+\cos^2(n-1)\theta\}+4\times\frac{1}{2}\\
&=4(n-1)+2\\
&=4n-2
\end{aligned}$$

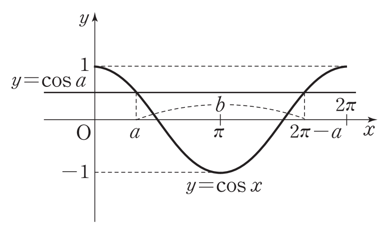
따라서

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{20}f(n)&=\sum_{n=1}^{20}(4n-2)\\
&=4\times\frac{20\times21}{2}-2\times20\\
&=840-40\\
&=800
\end{aligned}$$

답 800

4 $\cos x=\cos a$에서 $x=a$ 또는 $x=2\pi-a$

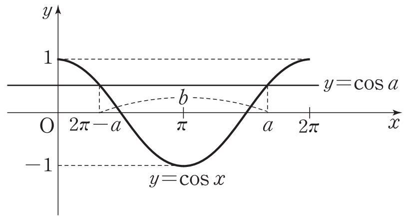
(ⅰ) $0\leq a<\pi$일 때



위의 그림에서 $\cos b\leq\cos a$를 만족시키는 b의 값의 범위는

$a \le b \le 2\pi - a$

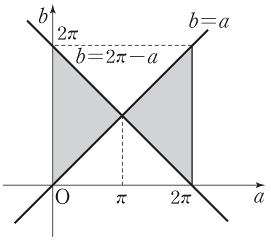
(ⅱ) $\pi \le a \le 2\pi$ 일 때



위의 그림에서 $\cos b \le \cos a$를 만족시키는 b의 값의 범위는

$2\pi - a \le b \le a$

(ⅰ), (ⅱ)에서 점 P(a, b)의 영역은 다음 그림과 같다.



따라서 점 P가 나타내는 영역의 넓이는

$2 \times \frac{1}{2} \times 2\pi \times \pi = 2\pi^2$

답 ④

04 삼각함수의 미분

유제 본문 43~49쪽

1 ⑤	**2** ④	**3** ③	**4** ③	**5** ⑤
6 ②	**7** ①	**8** ②		

1 $\cos(x-y)=\frac{1}{3}$에서

$\frac{\pi}{2}<x<\pi$, $0<y<\frac{\pi}{2}$이므로

$0<x-y<\pi$

$\sin(x-y)=\sqrt{1-\cos^2(x-y)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\cos x=-\frac{2}{3}$에서 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$이므로

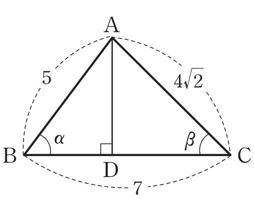
$\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

따라서

$$\begin{aligned}\cos y&=\cos(x-(x-y))\\&=\cos x\cos(x-y)+\sin x\sin(x-y)\\&=-\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\\&=\frac{2\sqrt{10}-2}{9}\end{aligned}$$

답 ⑤

2



삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AD}^2&=\overline{AB}^2-\overline{BD}^2\\&=\overline{AC}^2-\overline{CD}^2\end{aligned}$$

$\overline{BD}=x$라 하면 $\overline{CD}=7-x$이므로

$\overline{AD}^2=5^2-x^2=(4\sqrt{2})^2-(7-x)^2$에서

$25-x^2=32-49+14x-x^2$

$x=3$

즉, $\overline{BD}=3$, $\overline{CD}=4$, $\overline{AD}=4$이다.

$\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$

$\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이므로

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\&=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=-\frac{\sqrt{2}}{10}\end{aligned}$$

답 ④

3 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=\sin\theta$ …… ㉠

$\tan\alpha\tan\beta=\cos\theta$ …… ㉡

이고, $\tan(\alpha+\beta)=-\frac{1}{3}$이므로

$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\frac{1}{3}$ …… ㉢

㉠, ㉡을 ㉢에 대입하면

$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=-\frac{1}{3}$ …… ㉣

$-3\sin\theta=1-\cos\theta$ …… ㉤

㉤의 양변을 제곱하면 $9\sin^2\theta=1-2\cos\theta+\cos^2\theta$

$9(1-\cos^2\theta)=1-2\cos\theta+\cos^2\theta$

$5\cos^2\theta-\cos\theta-4=0$

$(5\cos\theta+4)(\cos\theta-1)=0$

㉣에서 $\cos\theta\neq1$이므로

$\cos\theta=-\frac{4}{5}$

이것을 ㉤에 대입하면

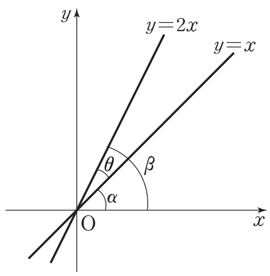
$\sin\theta=-\frac{3}{5}$

따라서

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{4}$

답 ③

4 두 직선 $y=x+1$, $y=2x-1$이 이루는 예각의 크기는 평행이동한 두 직선 $y=x$, $y=2x$가 이루는 예각의 크기와 같다.



위의 그림과 같이 두 직선 $y=x$, $y=2x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\theta=\beta-\alpha$

$\tan\alpha=1$, $\tan\beta=2$이므로

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{2-1}{1+2\times1}=\frac{1}{3}$$

따라서

$$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{3}-1}{1+\frac{1}{3}}=-\frac{1}{2}$$

답 ③

5 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)이라 하면

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{ax+b}=\frac{1}{3}$이고, $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(ax+b)=0$

따라서 $\frac{\pi}{2}a+b=0$에서

$b=-\frac{\pi}{2}a$

$x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{ax+b}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{ax-\frac{\pi}{2}a}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{a\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{t\to0}\frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{at}=\lim_{t\to0}\frac{-\sin t}{at}=-\frac{1}{a}$$

즉, $-\frac{1}{a}=\frac{1}{3}$에서

$a=-3$, $b=\frac{3}{2}\pi$이므로

$f(x)=-3x+\frac{3}{2}\pi$

따라서

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-3\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{3}{2}\pi=3\pi$$

답 ⑤

6
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2\cos x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2\cos x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}\right\}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}=1\times\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}$$

답 ②

7 $f(x)=a\cos^2 x=a\cos x\cos x$

에서

$$f'(x)=a(\cos x)'\cos x+a\cos x(\cos x)'=-a\sin x\cos x-a\cos x\sin x=-2a\sin x\cos x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2a\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}=-2a\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$에서 $-\frac{\sqrt{3}}{2}a=1$

$$a=-\frac{2}{\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

답 ①

8 $2\pi-\pi\cos x=t$로 놓으면

$x\to 0$일 때 $t\to\pi$이고, $f'(x)=\cos x$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2\pi-\pi\cos x)-f(\pi)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(2\pi-\pi\cos x)-f(\pi)}{(2\pi-\pi\cos x)-\pi}\cdot\frac{\pi(1-\cos x)}{x^2}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(2\pi-\pi\cos x)-f(\pi)}{(2\pi-\pi\cos x)-\pi}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\pi(1-\cos x)}{x^2}$$

$$=\lim_{t\to\pi}\frac{f(t)-f(\pi)}{t-\pi}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\pi(1-\cos x)}{x^2}$$

$$=f'(\pi)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\pi\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\cos\pi\cdot\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{\pi}{1+\cos x}\right\}$$

$$=(-1)\times\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\lim_{x\to 0}\frac{\pi}{1+\cos x}$$

$$=(-1)\times 1^2\times\frac{\pi}{1+1}$$

$$=-\frac{\pi}{2}$$

답 ②

Level 1 기초 연습

본문 50쪽

1 ④ **2** ③ **3** ① **4** ⑤

1 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\times\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha\times 1}=5$$

$\tan\alpha+1=5-5\tan\alpha$이므로

$6\tan\alpha=4$

$\tan\alpha=\frac{2}{3}$

$\sec^2\alpha=1+\tan^2\alpha$

$\qquad=1+\frac{4}{9}=\frac{13}{9}$

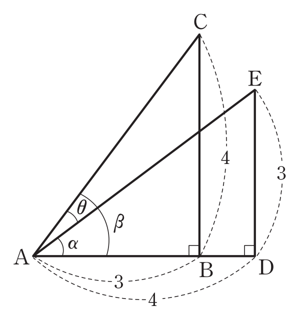
$\cos^2\alpha=\frac{1}{\sec^2\alpha}=\frac{9}{13}$

$\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$이므로

$\cos\alpha=-\frac{3}{\sqrt{13}}=-\frac{3\sqrt{13}}{13}$

답 ④

2



직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

직각삼각형 ADE에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AE}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

$\angle EAD=\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\sin\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\alpha=\frac{4}{5}$

$\angle CAB=\beta\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\sin\beta=\frac{4}{5},\ \cos\beta=\frac{3}{5}$이므로

$\sin\theta=\sin(\beta-\alpha)$

$\qquad=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$

$\qquad=\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}$

$\qquad=\frac{7}{25}$

답 ③

3 $f(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\sin x$

$=\cos x\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\sin\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\sin x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\sin x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

ㄱ. $y=\cos x$의 주기는 2π이므로 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$의 주기는 2π이다. (참)

ㄴ. $f(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 0=\frac{\sqrt{3}}{2}\neq 0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이 아니다. (거짓)

ㄷ. $-1\le\cos x\le 1$이고

$-\frac{\sqrt{3}}{2}\le\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

함수 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 최솟값은 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

다른 풀이

ㄴ. $f(-x)=\cos\left(-x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}\sin(-x)$

$=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\sin x$

$=\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\sin x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

$-f(x)=-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\sin x$

$=-\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin x$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}\sin x$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

이므로

$f(-x)\neq -f(x)$

즉, 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이 아니다. (거짓)

4 $f(x)=\sin x-x\cos x$에서

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}=1$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+2h\right)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+2h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+2h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2h}\times 2$$

$$=2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

한편, $f(x)=\sin x-x\cos x$에서

$f'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)$

$=x\sin x$

이므로

$2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\times\frac{\pi}{2}\times\sin\frac{\pi}{2}=\pi$

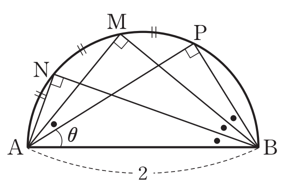
답 ⑤

Level 2 기본 연습

본문 51쪽

1 ④ **2** ④ **3** ④ **4** ③

1



그림과 같이 같은 길이의 호에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$\angle ABN=x$라 하면

$\angle ABP=3x$

따라서 직각삼각형 APB에서

$3x+\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$x=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{3}$

$\overline{\mathrm{BN}}=\overline{\mathrm{AB}}\cos x$

$=2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{3}\right)$

$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\theta}{3}+\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\theta}{3}\right)$

$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\theta}{3}+\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{3}\right)$

$=\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{3}+\sin\frac{\theta}{3}$

$\overline{\mathrm{BN}}=a\cos\frac{\theta}{3}+b\sin\frac{\theta}{3}$에서

$a=\sqrt{3},\ b=1$

따라서

$a^2+b^2=(\sqrt{3})^2+1^2=4$

답 ④

2 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{5}{7}$ ⋯⋯ ㉠

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{7}$ ⋯⋯ ㉡

㉠+㉡에서

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{4}{7}$

$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}$

$=\sqrt{1-\frac{25}{49}}$

$=\frac{2\sqrt{6}}{7}$ $\left(0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}\text{이므로}\right)$

따라서

$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$

$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$

$=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

$=\frac{\frac{2\sqrt{6}}{7}}{\frac{4}{7}}$

$=\frac{\sqrt{6}}{2}$

답 ④

다른 풀이

㉠+㉡에서 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{4}{7}$

㉠−㉡에서 $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{7}$

따라서

$\tan\alpha\tan\beta=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=-\frac{1}{4}$

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

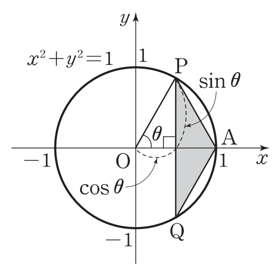
$\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{7}$에서 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\sqrt{6}}{7}$이므로

$$\frac{\frac{2\sqrt{6}}{7}}{\frac{5}{7}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}$$

따라서

$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sqrt{6}}{2}$

3



위의 그림에서

$S(\theta)=\left\{\frac{1}{2}\times(1-\cos\theta)\times\sin\theta\right\}\times 2$

$=\sin\theta(1-\cos\theta)$

$S\left(\frac{\theta}{2}\right)=\sin\frac{\theta}{2}\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{S\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\sin\frac{\theta}{2}\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)(1+\cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin\theta(1-\cos^2\theta)}{\sin\frac{\theta}{2}\left(1-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)} \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{1+\cos\frac{\theta}{2}}{1+\cos\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin^3\theta}{\sin^3\frac{\theta}{2}} \times \frac{2}{2}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \left\{ \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3 \times \left(\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^3 \times 8 \right\}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3 \times \lim_{\theta \to 0+} \left(\frac{1}{\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}}\right)^3 \times 8$$

$$= 1^3 \times \left(\frac{1}{1}\right)^3 \times 8$$

$$= 8$$

답 ④

4 $x \to 0+$ 일 때, $x > \sin x$이므로 함수 $f(x)$를 $f(x)=\sin x$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[\sin x,\ x]$에서 연속이고, 열린 구간$(\sin x, x)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$\dfrac{f(x)-f(\sin x)}{x-\sin x} = f'(c)$ $(\sin x < c < x)$인 c가 존재한다.

$f'(x)=\cos x$이고 $x \to 0+$ 일 때

$\sin x \to 0+$ 이므로 $c \to 0+$ $(\sin x < c < x)$

따라서

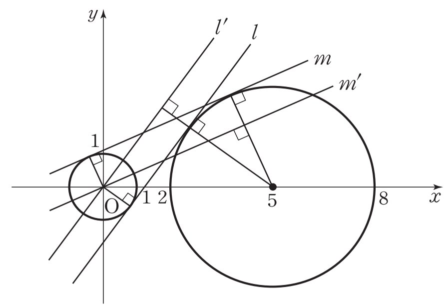
$$\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x - \sin x} = \lim_{c \to 0+} \cos c$$
$$= 1$$

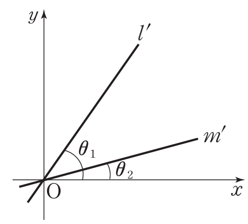
답 ③

Level 3 실력 완성 본문 52쪽

1 19 **2** ④ **3** ①

1 두 직선 l, m을 각각 원점을 지나도록 평행이동한 직선을 l', m'이라 하면 다음 그림에서 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기는 두 직선 l', m'이 이루는 예각의 크기와 같다.





직선 l'이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ_1이라 하면

$$\sin\theta_1 = \frac{3+1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\cos\theta_1 = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}$$
$$= \frac{3}{5}$$

직선 m'이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ_2라 하면

$$\sin\theta_2 = \frac{3-1}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{21}}{5}$$

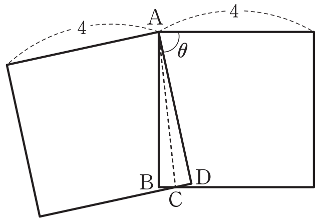
$$\sin\theta = \sin(\theta_1 - \theta_2)$$
$$= \sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2$$
$$= \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{21}}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{2}{5}$$
$$= \frac{-6+4\sqrt{21}}{25}$$

따라서 $p=25$, $q=-6$이므로

$p+q=25+(-6)=19$

답 19

2 그림과 같이 겹쳐진 도형의 꼭짓점을 B, C, D라 하자.



삼각형 ABC와 삼각형 ADC는 합동(RHS 합동)이므로

두 삼각형 ABC, ADC의 넓이는 $\frac{1}{2}$로 서로 같다.

또한,

$$\triangle \mathrm{ADC}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{CD}}$$
$$=\frac{1}{2}\times 4\times\overline{\mathrm{CD}}$$
$$=\frac{1}{2}$$

이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=\frac{1}{4}$

$\angle\mathrm{CAD}=\alpha$라 하면

$$\tan\alpha=\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AD}}}=\frac{\frac{1}{4}}{4}=\frac{1}{16}$$

한편, $2\alpha+\theta=\frac{\pi}{2}$에서

$\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$이므로

$$\tan\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\theta}{2}}$$
$$=\frac{1-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}$$
$$=\frac{1}{16}$$

$$16\left(1-\tan\frac{\theta}{2}\right)=1+\tan\frac{\theta}{2}$$

$$17\tan\frac{\theta}{2}=15$$

따라서 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{15}{17}$

답 ④

3 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하려면 $x=0$과 $x=\pi$에서 미분가능해야 한다.

(i) $x=0$에서의 미분가능성

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0+}f(x)=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0-}(e^x+bx+c)=\lim_{x\to 0+}\pi\sin x=0$$

즉, $1+c=0$ …… ㉠

$$f'(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{(e^x+bx+c)-0}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{e^x+bx-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{e^x-1}{x}+b$$
$$=1+b$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{\pi\sin x-\pi\sin 0}{x-0}$$
$$=\pi\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}$$
$$=\pi$$

이때 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$의 값이 존재해야 하므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

이어야 한다.

따라서 $1+b=\pi$ …… ㉡

(ii) $x=\pi$에서의 미분가능성

함수 $f(x)$가 $x=\pi$에서 미분가능하면 $x=\pi$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to\pi-}f(x)=\lim_{x\to\pi+}f(x)=f(\pi)$$

$$\lim_{x\to\pi-}\pi\sin x=\lim_{x\to\pi+}a(x-\pi)\ln x=0$$

즉, $0=0=0$

$$f'(\pi)=\lim_{x\to\pi-}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}$$
$$=\lim_{x\to\pi-}\frac{\pi\sin x-\pi\sin\pi}{x-\pi}$$
$$=\lim_{x\to\pi-}\frac{\pi\sin x}{x-\pi}$$

이때 $x-\pi=t$라 하면

$x\to\pi-$일 때 $t\to 0-$이므로

$$\lim_{x\to\pi-}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim_{t\to0-}\frac{\pi\sin(\pi+t)}{t}$$

$$=-\pi\times\lim_{t\to0-}\frac{\sin t}{t}$$

$$=-\pi$$

$$\lim_{x\to\pi+}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi+}\frac{a(x-\pi)\ln x-0}{x-\pi}$$

$$=a\ln\pi$$

이때 $\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}$의 값이 존재해야 하므로

$$\lim_{x\to\pi-}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi+}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}$$

즉, $-\pi=a\ln\pi$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$a=-\frac{\pi}{\ln\pi}$, $b=\pi-1$, $c=-1$

따라서

$$\frac{b-c}{a}=\frac{\pi-1-(-1)}{-\frac{\pi}{\ln\pi}}$$

$$=-\ln\pi$$

답 ①

05 여러 가지 미분법

유제 본문 55~63쪽

1 ④	2 ①	3 ④	4 ⑤	5 ①
6 ④	7 ②	8 ①		

1 $f(x)=\dfrac{x^3-x+2}{2x^2}$

$=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}(x-x^{-1}+2x^{-2})$

이므로

$f'(x)=\dfrac{1}{2}(1+x^{-2}-4x^{-3})$

$=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}\right)$

따라서

$f'(1)=\dfrac{1}{2}(1+1-4)=-1$

답 ④

2 $f(x)=\dfrac{ax}{x+3}$에서

$f'(x)=\dfrac{(ax)'(x+3)-ax\cdot(x+3)'}{(x+3)^2}$

$=\dfrac{a(x+3)-ax}{(x+3)^2}$

$=\dfrac{3a}{(x+3)^2}$

$f'(0)=\dfrac{3a}{9}=\dfrac{a}{3}=2$에서

$a=6$

답 ①

다른 풀이

$f(x)=\dfrac{ax}{x+3}=\dfrac{a(x+3)-3a}{x+3}$

$=a-\dfrac{3a}{x+3}$

$f'(x)=0-3a\times\dfrac{-1}{(x+3)^2}$

$=\dfrac{3a}{(x+3)^2}$

$f'(0)=\dfrac{a}{3}=2$에서

$a=6$

3 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x+\sec x}$에서

$f'(x)=\dfrac{(\sin x)'(x+\sec x)-\sin x(x+\sec x)'}{(x+\sec x)^2}$

$=\dfrac{\cos x(x+\sec x)-\sin x(1+\sec x\tan x)}{(x+\sec x)^2}$

$f'(0)=\dfrac{1\cdot(0+1)-0\cdot(1+0)}{(0+1)^2}=1$

답 ④

4 $y=\cot^2(3x)$, $u=\cot(3x)$로 놓으면

$y=u^2$이므로

$f'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=2u\cdot\{-3\csc^2(3x)\}$

$=-6\cot(3x)\csc^2(3x)$

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-6\cot\dfrac{3}{4}\pi\times\csc^2\dfrac{3}{4}\pi$

$=-6\times(-1)\times2$

$=12$

답 ⑤

5 $f(x)=\cos x$, $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$에서

$f'(x)=-\sin x$

$g'(x)=\dfrac{(2x)'(x^2+1)-2x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$이므로

$h'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=g'\left(f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

$=g'(0)f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

$=2\times(-1)$

$=-2$

답 ①

6 $f(x)=\ln|x^2-3|$에서

$f'(x)=\dfrac{(x^2-3)'}{x^2-3}$

$=\dfrac{2x}{x^2-3}$

$f(2)=f(-2)=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)+f(-x)}{x-2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}+\frac{f(-x)-f(-2)}{x-2}\right\}$ …… ㉠

이때

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

$-x=t$라 하면

$x\to2$일 때 $t\to-2$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(-x)-f(-2)}{x-2}$

$\displaystyle=\lim_{t\to-2}\left\{\frac{f(t)-f(-2)}{t-(-2)}\cdot(-1)\right\}$

$=-f'(-2)$

이므로 ㉠에서

$\displaystyle\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}+\frac{f(-x)-f(-2)}{x-2}\right\}$

$=f'(2)-f'(-2)$

$=\dfrac{2\times2}{2^2-3}-\dfrac{2\times(-2)}{(-2)^2-3}$

$=8$

답 ④

다른 풀이

$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-3}$이고 $x\neq\pm\sqrt{3}$인 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)=f(x)$, $f(2)=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)+f(-x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2f(x)}{x-2}$

$\displaystyle=2\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=2f'(2)$

$=8$

7 $|f(x)|$에 자연로그를 취하면

$\ln|f(x)|=\ln\left|\dfrac{(x-1)(x+4)}{(x+2)^3}\right|$

$\ln|f(x)|=\ln|x-1|+\ln|x+4|-3\ln|x+2|$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{3}{x+2}$에서

$f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+4)}{(x+2)^3}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{3}{x+2}\right)$

따라서

$f'(0)=\dfrac{(-1)\times4}{2^3}\left(-1+\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{2}\right)$

$=-\dfrac{4}{8}\times\left(-\dfrac{9}{4}\right)$

$=\dfrac{9}{8}$

답 ②

8 $f(0)=1$, $f(1)=2$이므로

$g(1)=0$, $g(2)=1$

또, $f'(0)=2$, $f'(1)=3$이므로

$g'(1)=\dfrac{1}{f'(g(1))}$

$=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{2}$

$g'(2)=\dfrac{1}{f'(g(2))}$

$=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{3}$

$h(x)=(g\circ g)(x)=g(g(x))$에서

$h'(x)=g'(g(x))g'(x)$이므로

$h'(2)=g'(g(2))g'(2)$

$=g'(1)g'(2)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}$

$=\dfrac{1}{6}$

답 ①

Level 1 기초 연습

본문 64쪽

1 ⑤ **2** ③ **3** ④ **4** ④ **5** ①

1 $f(x)=\dfrac{3x}{2x^2+1}$에서

$$f'(x)=\frac{(3x)'(2x^2+1)-3x(2x^2+1)'}{(2x^2+1)^2}$$
$$=\frac{3(2x^2+1)-3x\cdot 4x}{(2x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-6x^2+3}{(2x^2+1)^2}$$
따라서
$$f'(1)=\frac{-6+3}{(2+1)^2}$$
$$=-\frac{1}{3}$$

답 ⑤

2 $f(x)=a\tan 2x+\sec 2x$에서

$f'(x)=2a\sec^2 2x+2\sec 2x\tan 2x$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2a\sec^2\frac{\pi}{3}+2\sec\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{3}$$
$$=2a\times 2^2+2\times 2\times\sqrt{3}$$
$$=8a+4\sqrt{3}$$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-4\sqrt{3}$에서

$8a+4\sqrt{3}=-4\sqrt{3}$이므로

$a=-\sqrt{3}$

답 ③

3 $g(x)=\ln f(x)$라 하면 $g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$이고

$g(2)=\ln f(2)=\ln 1=0$

따라서

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$
$$=g'(2)$$
$$=\frac{f'(2)}{f(2)}$$
$$=\frac{4}{1}=4$$

답 ④

4 $f(x)=2^x+2^{2x}$에서

$f'(x)=2^x\ln 2+2\times 2^{2x}\ln 2$

$=(2^x+2^{2x+1})\ln 2$

$f'(x)=36\ln 2$에서

$(2^x+2^{2x+1})\ln 2=36\ln 2$

$2^x+2^{2x+1}=36$

$2\cdot 2^{2x}+2^x-36=0$ ⋯⋯ ㉠

$2^x=t$로 놓으면 $t>0$이고

$2t^2+t-36=0$

$(t-4)(2t+9)=0$

$t=4$ ($t>0$이므로)

$2^x=4$에서 구하는 x의 값은

$x=2$

답 ④

5 $$\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{g(1+h)-g(1)}{h}+\frac{g(1-h)-g(1)}{-h}\right\}$$
$$=g'(1)+g'(1)$$
$$=2g'(1)$$

$f(0)=1$이고 $f'(x)=1+e^x$에서

$g(1)=0,\ g'(1)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2}$이므로

$2g'(1)=1$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 65쪽

1 ④ **2** ① **3** ② **4** ①

1 $f(x)=\frac{\tan^2 x-1}{\sec x}$에서

$f'(x)$
$$=\frac{2\tan x\sec^2 x\cdot\sec x-(\tan^2 x-1)\cdot\sec x\tan x}{\sec^2 x}$$
$$=\frac{\sec x\tan x(2\sec^2 x-\tan^2 x+1)}{\sec^2 x}$$
$$=\frac{\tan x(\sec^2 x+2)}{\sec x}\ (\sec^2 x-\tan^2 x=1\text{이므로})$$
$$=\tan x(\sec x+2\cos x)$$
따라서
$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}\left(\sec\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}\right)$$
$$=\frac{5}{3}$$

답 ④

다른 풀이 1

$$f(x)=\frac{\tan^2 x-1}{\sec x}$$
$$=\frac{(\sec^2 x-1)-1}{\sec x}$$
$$=\frac{\sec^2 x-2}{\sec x}$$
$$=\sec x-2\cos x$$

$f'(x)=\sec x\tan x+2\sin x$

따라서

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sec\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{6}+2\sin\frac{\pi}{6}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}+2\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{5}{3}$$

다른 풀이 2

$$f(x)=\frac{\tan^2 x-1}{\sec x}$$
$$=\cos x\tan^2 x-\cos x$$
$$=\sin x\tan x-\cos x$$
$$f'(x)=\cos x\tan x+\sin x\sec^2 x+\sin x$$
$$=\sin x+\sin x\sec^2 x+\sin x$$
$$=\sin x(\sec^2 x+2)$$

따라서

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\left(\sec^2\frac{\pi}{6}+2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}+2\right)$$
$$=\frac{5}{3}$$

2 $x\neq1$일 때

$$f(x)=\sum_{n=1}^{20}x^{n-1}$$
$$=1+x+x^2+\cdots+x^{19}$$
$$=\frac{x^{20}-1}{x-1}$$

이므로

$$f'(x)=\frac{(x^{20}-1)'(x-1)-(x^{20}-1)(x-1)'}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{20x^{19}(x-1)-(x^{20}-1)}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{19x^{20}-20x^{19}+1}{(x-1)^2}\ (\text{단, } x\neq1)$$

$g(x)=(x-1)^2f'(x)$에서 $g(1)=0$이고

$x\neq1$일 때 $g(x)=19x^{20}-20x^{19}+1$

따라서 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=19x^{20}-20x^{19}+1$

$g'(x)=380x^{19}-380x^{18}$이므로

$g'(-1)=-380-380=-760$

답 ①

3 $f(x)=x^2+4$에서

$f'(x)=2x$

$f(g(x))=f(x)g(x)-2x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)-4x$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(g(1))g'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)-4$ …… ㉡

㉡에 $f(1)=5$, $f'(1)=2$, $g(1)=3$을 대입하면

$f'(3)g'(1)=2\times3+5g'(1)-4$

$f'(3)=6$이므로

$6g'(1)=5g'(1)+2$에서

$g'(1)=2$

답 ②

다른 풀이

$f(g(x))=\{g(x)\}^2+4$에서

$\{g(x)\}^2+4=(x^2+4)g(x)-2x^2$

양변을 x에 대하여 미분하면

$2g(x)g'(x)=2xg(x)+(x^2+4)g'(x)-4x$

양변에 $x=1$을 대입하면

$2g(1)g'(1)=2g(1)+5g'(1)-4$

$g(1)=3$이므로

$6g'(1)=5g'(1)+2$

$g'(1)=2$

4 $f(x)=\sqrt{x^3+x^2+x+1}$에서

$f'(x)=\{(x^3+x^2+x+1)^{\frac{1}{2}}\}'$

$$=\frac{1}{2}(x^3+x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}(x^3+x^2+x+1)'$$

$$=\frac{3x^2+2x+1}{2\sqrt{x^3+x^2+x+1}}$$

함수 $f(x-1)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$g(f(x-1))=x$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x-1))f'(x-1)=1$ …… ㉡

$f(1)=2$이므로 ㉡의 양변에 $x=2$를 대입하면

$g'(f(1))f'(1)=1$

$f'(1)=\frac{6}{2\sqrt{4}}=\frac{3}{2}$이므로

$g'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{2}{3}$

답 ①

Level 3 실력 완성

본문 66쪽

1 ④ **2** ⑤ **3** ②

1 $g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$에서

$$g'(x)=\frac{f''(x)f(x)-f'(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$$

$$g'(0)=\frac{f''(0)f(0)-\{f'(0)\}^2}{\{f(0)\}^2}$$

$f(x)=(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$에서

$f(0)=1$

$f'(x)$

$$=1\cdot(x^2+1)(x^4+1)+(x+1)\cdot 2x\cdot(x^4+1)+(x+1)(x^2+1)\cdot 4x^3$$

$$=(x^2+1)(x^4+1)+2x(x+1)(x^4+1)+4x^3(x+1)(x^2+1)$$

따라서 $f'(0)=1$

$f''(0)$은 $f''(x)$의 상수항이고, 이는 $f'(x)$의 일차항의 계수와 같으므로

$f''(0)=2$

따라서

$$g'(0)=\frac{2\times1-1^2}{1^2}$$

$$=1$$

답 ④

다른 풀이

$|f(x)|$에 자연로그를 취하면

$\ln|f(x)|=\ln|(x+1)(x^2+1)(x^4+1)|$

양변을 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{4x^3}{x^4+1}$$

$g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$이므로

$$g(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{4x^3}{x^4+1}$$

$$g'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}+\frac{12x^2(x^4+1)-4x^3\cdot 4x^3}{(x^4+1)^2}$$

따라서

$$g'(0)=-1+\frac{2-0}{1}+\frac{0-0}{1}=1$$

2 함수 $h(x)$가 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$f(x)=h(g(x))$에서

$f(f(x))=g(x)$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(f(x))f'(x)=g'(x)$ …… ㉡

㉡에 $x=0$을 대입하면

$f'(f(0))f'(0)=g'(0)$

$f'(1)\times1=e$

따라서

$f'(1)=e$

답 ⑤

3 ㄱ. $f(x)=\begin{cases}\frac{-x}{\sqrt{2-x^2}} & (-1<x<0)\\ \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} & (0\le x<1)\end{cases}$ 이므로

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{\frac{-h}{\sqrt{2-h^2}}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0-} \frac{-1}{\sqrt{2-h^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{\frac{h}{\sqrt{2-h^2}}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{1}{\sqrt{2-h^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

즉, $\lim_{h \to 0-} \frac{f(h)}{h} \neq \lim_{h \to 0+} \frac{f(h)}{h}$ (거짓)

ㄴ. $g(0)=1$이므로

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h)-g(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{1+hf(h)}-1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1-\{1+hf(h)\}}{h\{1+hf(h)\}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-f(h)}{1+hf(h)}$$

$= -f(0) = 0$ (참)

ㄷ. $x \neq 0$일 때 $f(x)$는 미분가능하므로

$$g'(x) = \begin{cases} -\frac{f(x)+xf'(x)}{\{1+xf(x)\}^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

$$g''(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g'(h)-g'(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{f(h)+hf'(h)}{\{1+hf(h)\}^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\left\{\frac{f(h)}{h}+f'(h)\right\}}{\{1+hf(h)\}^2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}} & (-1<x<0) \\ \frac{2}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}} & (0<x<1) \end{cases}$$ 이고

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0-} f'(h) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0+} f'(h) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

이므로

$$\lim_{h \to 0-} \frac{-\left\{\frac{f(h)}{h}+f'(h)\right\}}{\{1+hf(h)\}^2} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{h \to 0+} \frac{-\left\{\frac{f(h)}{h}+f'(h)\right\}}{\{1+hf(h)\}^2} = -\sqrt{2}$$

따라서 $g''(0)$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ②

06 도함수의 활용

유제 본문 69~77쪽

1 ⑤ 2 ② 3 ① 4 ② 5 ③ 6 ②

1 $f(x)=2e^{x+1}$이라 하면

$f'(x)=2e^{x+1}$

접점의 좌표를 $(a,\ 2e^{a+1})$이라 하면 이 점에서 접선의 기울기는 $f'(a)=2e^{a+1}$이므로 접선의 방정식은

$y-2e^{a+1}=2e^{a+1}(x-a)$

$y=2e^{a+1}x-2(a-1)e^{a+1}$ …… ㉠

직선 ㉠이 원점을 지나므로

$x=0,\ y=0$을 대입하면

$0=-2(a-1)e^{a+1}$에서 $e^{a+1}>0$이므로

$a=1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=2e^2x$이므로

$k=2e^2$

답 ⑤

2 $f(x)=\sin(\ln x^2)+1$이라 하면

$f'(x)=\cos(\ln x^2)\times(\ln x^2)'$

$=\dfrac{2\cos(\ln x^2)}{x}$

$f'(1)=2$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=2(x-1)$

즉, $y=2x-1$ …… ㉠

따라서 직선 ㉠의 x절편은 $\dfrac{1}{2}$, y절편은 -1이므로

직선 ㉠과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times1=\dfrac{1}{4}$

답 ②

3 $f(x)=4\ln x-3x+\dfrac{1}{x}$에서

$f'(x)=\dfrac{4}{x}-3-\dfrac{1}{x^2}$

$=\dfrac{4x-3x^2-1}{x^2}$

$=\dfrac{-(3x-1)(x-1)}{x^2}$

$f'(x)=0$에서

$x=\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{3}$일 때 극소, $x=1$일 때 극대이므로

$m=f\left(\dfrac{1}{3}\right)=4\ln\dfrac{1}{3}-1+3$

$=-4\ln3+2$

$M=f(1)=4\ln1-3+1$

$=-2$

따라서

$M+m=-2+(-4\ln3+2)$

$=-4\ln3$

답 ①

4 $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+3}$이라 하면

$f'(x)=\dfrac{2x(x^2+3)-x^2\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$

$=\dfrac{6x}{(x^2+3)^2}$

$f''(x)=\dfrac{6(x^2+3)^2-6x\cdot 2\cdot 2x\cdot(x^2+3)}{(x^2+3)^4}$

$=\dfrac{6(x^2+3)-24x^2}{(x^2+3)^3}$

$=\dfrac{-18(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$

$x>0$일 때 $f''(x)=0$이면 $x=1$이고 $f''(x)$의 부호가 $x=1$의 좌우에서 양에서 음으로 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$는 $x=1$에서 변곡점을 갖는다.

$f(1)=\dfrac{1}{4}$이므로 변곡점의 좌표는 $\left(1,\ \dfrac{1}{4}\right)$이다.

따라서 $a=1,\ b=\dfrac{1}{4}$이므로

$20(a+b)=20\left(1+\frac{1}{4}\right)=25$

답 ②

5 $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$에서

$f'(x)=\sqrt{1-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$

$=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ (단, $-1<x<1$)

$f'(x)=0$에서 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로 닫힌 구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	극소	↗	극대	↘	0

함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 극소이고, $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 극대이므로 극솟값은

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}}$

$=-\frac{1}{2}$

극댓값은

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{2}$

구간의 양 끝점에서의 함숫값은 $f(-1)=f(1)=0$이므로 최댓값은 $M=\frac{1}{2}$, 최솟값은 $m=-\frac{1}{2}$이다.

따라서 $M-m=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

답 ③

6 $f(x)=\tan x-2x$라 하면

$f'(x)=\sec^2 x-2$

$f'(x)=0$에서

$\sec^2 x=2$, $\cos^2 x=\frac{1}{2}$이고 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $x=-\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{\pi}{4}$

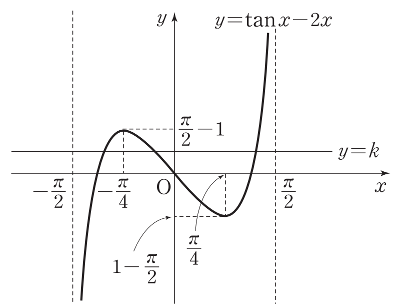
$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

함수 $f(x)$는 $x=-\frac{\pi}{4}$에서 극댓값 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-1$, $x=\frac{\pi}{4}$에서 극솟값 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\pi}{2}$를 갖는다.

$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} f(x)=\infty$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



방정식 $f(x)=k$의 실근의 개수는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같으므로 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖기 위한 실수 k의 값의 범위는

$1-\frac{\pi}{2}<k<\frac{\pi}{2}-1$

따라서 $\alpha=1-\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{\pi}{2}-1$일 때 $\beta-\alpha$의 값은 최대이고

$\beta-\alpha=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\left(1-\frac{\pi}{2}\right)=\pi-2$

답 ②

Level 1 기초 연습

본문 78쪽

1 ③ **2** ③ **3** ④ **4** 33 **5** ②

1 $f(x)=xe^x$이라 하면

$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

$f'(1)=2e$이므로 곡선 $y=xe^x$ 위의 점 $(1,\ e)$에서의 접선의 방정식은

$y-e=2e(x-1)$에서

$y=2ex-e$

따라서 $a=2e$, $b=-e$이므로

$a+b=2e+(-e)$

$\quad=e$

답 ③

2 $f(x)=kx+\ln(x^2+1)$에서

$f'(x)=k+\dfrac{2x}{x^2+1}$

$\quad=\dfrac{kx^2+2x+k}{x^2+1}$

$k>0$이므로 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않기 위해서는 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

$x^2+1>0$이므로

$kx^2+2x+k\ge 0$

방정식 $kx^2+2x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1-k^2=-(k+1)(k-1)\le 0$에서

$k\ge 1$ ($k>0$이므로)

따라서 k의 최솟값은 1이다.

답 ③

3 $f(x)=\dfrac{3x-4}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\dfrac{3(x^2+1)-(3x-4)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$\quad=\dfrac{-3x^2+8x+3}{(x^2+1)^2}$

$\quad=-\dfrac{(3x+1)(x-3)}{(x^2+1)^2}$

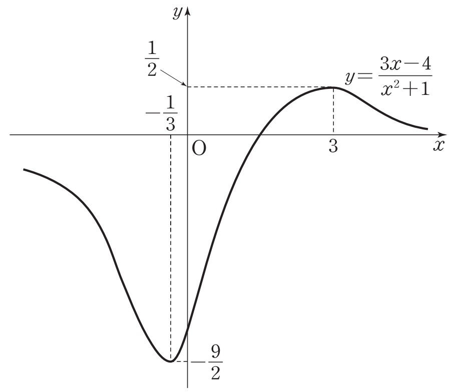
$f'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{1}{3}$일 때 극솟값 $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{9}{2}$, $x=3$일 때 극댓값 $f(3)=\dfrac{1}{2}$을 갖는다.

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$의 최댓값 $M=\dfrac{1}{2}$, 최솟값 $m=-\dfrac{9}{2}$이므로

$M+m=\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{9}{2}\right)=-4$

답 ④

4 $f(x)=a\sin 2x+b\sin x$라 하자.

점 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ 3\right)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=a\sin\dfrac{\pi}{2}+b\sin\dfrac{\pi}{4}$

$\quad=a+\dfrac{b}{\sqrt{2}}=3$

에서 $\sqrt{2}a+b=3\sqrt{2}$ …… ㉠

$f'(x)=2a\cos 2x+b\cos x$

$f''(x)=-4a\sin 2x-b\sin x$

$f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$이므로

$f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-4a\sin\dfrac{\pi}{2}-b\sin\dfrac{\pi}{4}$

$\quad=-4a-\dfrac{b}{\sqrt{2}}=0$

에서 $b=-4\sqrt{2}a$ …… ㉡

㉠, ㉡을 풀면

$a=-1$, $b=4\sqrt{2}$

따라서

$a^2+b^2=1+32=33$

답 33

5 $kx^2-2\ln x>1$에서 $k>\dfrac{2\ln x+1}{x^2}$이므로

$f(x)=\dfrac{2\ln x+1}{x^2}$ $(0<x<1)$이라 하자.

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x^2-(2\ln x+1)\times 2x}{x^4}$$

$$=-\frac{4\ln x}{x^3}$$

$0<x<1$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

$\lim_{x\to 1-} f(x)=1$에서 $f(x)<1$이므로 $k\geq 1$이다.

따라서 실수 k의 최솟값은 1이다.

답 ②

Level 2 기본 연습

본문 79쪽

1 ④ **2** 9 **3** ① **4** ③

1 접점의 좌표를 $(\alpha,\ ke^{-\alpha-1})$ 이라 하자.

$y=ke^{-x-1}$에서 $y'=-ke^{-x-1}$이므로

$x=\alpha$에서 접선의 기울기는 $-ke^{-\alpha-1}$이고

접선의 방정식은

$y-ke^{-\alpha-1}=-ke^{-\alpha-1}(x-\alpha)$ …… ㉠

직선 ㉠이 원점을 지나므로

$0-ke^{-\alpha-1}=-ke^{-\alpha-1}(0-\alpha)$

에서 $\alpha=-1$

$x=-1$에서 접선의 기울기가 -3이므로

$-ke^{-(-1)-1}=-3$

따라서 $k=3$

답 ④

2 $f(x)=e^{-x}(x^4+ax^3+5x^2)$에서

$f'(x)=-e^{-x}(x^4+ax^3+5x^2)+e^{-x}(4x^3+3ax^2+10x)$

$\quad=e^{-x}\{-x^4+(4-a)x^3+(3a-5)x^2+10x\}$

$f'(1)=0$에서

$f'(1)=e^{-1}(8+2a)=0$

이므로 $a=-4$

이때

$f(x)=e^{-x}x^2(x^2-4x+5)$

$f'(x)=e^{-x}(-x^4+8x^3-17x^2+10x)$

$\quad=-e^{-x}x(x^3-8x^2+17x-10)$

$\quad=-e^{-x}x(x-1)(x-2)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=5$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	$\frac{2}{e}$	↘	$\frac{4}{e^2}$	↗	$\frac{250}{e^5}$	↘

$f(x)$는 $x=1,\ x=5$에서 극대이고

$f(5)-f(1)=\dfrac{250}{e^5}-\dfrac{2}{e}=\dfrac{2(125-e^4)}{e^5}>0$

이므로 $x\geq 0$일 때, $f(x)$는 $x=5$에서 최댓값을 갖는다.

따라서 $b=5$이므로

$b-a=5-(-4)=9$

답 9

3 $f(x)=4\cos^2 x-3,\ g(x)=a\cos x-a$라 하자.

두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$의 교점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$이므로

$4\cos^2 t-3=a\cos t-a$

$4\cos^2 t-a\cos t+a-3=0$ …… ㉠

$f'(x)=8\cos x(-\sin x)=-8\sin x\cos x$

$g'(x)=-a\sin x$

이고 교점에서 두 곡선의 접선이 일치하므로

$f'(t)=g'(t)$에서

$-8\sin t\cos t=-a\sin t$

$\sin t(8\cos t-a)=0$

$\sin t=0$ 또는 $\cos t=\dfrac{a}{8}$ …… ㉡

(i) $\sin t=0$일 때

$t=\pi$이고 $\cos t=-1$이므로 ㉠에 대입하면

$4+a+a-3=0$에서

$a=-\dfrac{1}{2}$이므로 양수 a는 존재하지 않는다.

(ii) $\cos t=\dfrac{a}{8}$일 때

㉠에서

$4\left(\dfrac{a}{8}\right)^2-a\left(\dfrac{a}{8}\right)+a-3=0$

$a^2-16a+48=0$

$(a-12)(a-4)=0$

따라서 $a=12$ 또는 $a=4$

$a=12$이면 $\cos t=\frac{3}{2}$을 만족시키는 실수 t가 존재하지 않으므로 성립하지 않는다.

$a=4$이면 $\cos t=\frac{1}{2}$이므로 $t=\frac{\pi}{3}$, $t=\frac{5}{3}\pi$일 때 성립한다.

(i), (ii)에서 구하는 양수 a의 값은 4이다.

답 ①

4 $h(x)=\ln(1-x)+x^2+x$라 하면

$0\le x\le \frac{1}{2}$에서 $h(x)\ge a$가 성립하여야 한다.

$$h'(x)=\frac{-1}{1-x}+2x+1$$

$$=\frac{x(1-2x)}{1-x}\ge 0$$

이므로 $h(x)$는 $0\le x\le \frac{1}{2}$에서 증가하고

최솟값은 $h(0)=0$이다.

즉, $h(x)\ge 0$이므로 $a\le 0$이다.

따라서 실수 a의 최댓값은 0이다.

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 80쪽

1 ② **2** ⑤ **3** ①

1 $y=\sin^2 x$에서 $y'=2\sin x\cos x$

곡선 $y=\sin^2 x$ 위의 점 $(t,\ \sin^2 t)$에서 접선의 기울기는 $2\sin t\cos t$이므로 접선의 방정식은

$y-\sin^2 t=2\sin t\cos t(x-t)$에서

$y=2x\sin t\cos t+\sin^2 t-2t\sin t\cos t$ …… ㉠

직선 ㉠의 $x=\frac{\pi}{2}$일 때 y좌표가 $f(t)$이므로

$$f(t)=\pi\sin t\cos t+\sin^2 t-2t\sin t\cos t$$

$$=\sin t(\pi\cos t+\sin t-2t\cos t)$$

$$f'(t)=\cos t(\pi\cos t+\sin t-2t\cos t)$$

$$+\sin t(-\pi\sin t+\cos t-2\cos t+2t\sin t)$$

$$=(\pi-2t)(\cos^2 t-\sin^2 t)$$

$0<t<\frac{\pi}{2}$일 때 $f'(t)=0$에서 $\pi-2t\ne 0$이므로

$\cos^2 t-\sin^2 t=0$

그런데 $0<t<\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos t=\sin t$

따라서 $t=\frac{\pi}{4}$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	…	$\frac{\pi}{4}$	…	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗	극대	↘	

함수 $f(t)$는 $t=\frac{\pi}{4}$에서 극대이면서 최대가 된다.

따라서 $f(t)$의 최댓값은

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

답 ②

2 점 P의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{t}\right)$이라 하자.

선분 AP의 길이가 최소가 되는 점 P는 제1사분면에 있으므로 $t>0$이다.

$f(t)=\overline{\mathrm{AP}}^2$이라 하면

$$f(t)=(t-4)^2+\left(\frac{1}{t}-4\right)^2$$

$$=t^2-8t+16+\frac{1}{t^2}-\frac{8}{t}+16$$

$$=t^2-8t+\frac{1}{t^2}-\frac{8}{t}+32$$

$$f'(t)=2t-8-\frac{2}{t^3}+\frac{8}{t^2}$$

$$=\frac{2(t^4-4t^3+4t-1)}{t^3}$$

$$=\frac{2(t+1)(t-1)(t^2-4t+1)}{t^3}$$

$t>0$일 때 $f'(t)=0$에서

$t=1$ 또는 $t=2\pm\sqrt{3}$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$2-\sqrt{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$2+\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

$$f(2-\sqrt{3})=(2-\sqrt{3}-4)^2+\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}-4\right)^2$$
$$=(-2-\sqrt{3})^2+(-2+\sqrt{3})^2$$
$$=14$$

$f(2+\sqrt{3})=14$

따라서 함수 $f(t)$의 최솟값은 14이고, 선분 AP의 길이의 최솟값은 $\sqrt{14}$이다.

답 ⑤

3 $f(x)=|x^2-1|e^{-x}$에서

$$f(x)=\begin{cases}(x^2-1)e^{-x} & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 1)\\ (1-x^2)e^{-x} & (-1<x<1)\end{cases}$$

ㄱ. $-1<x<1$에서 $f(x)=(1-x^2)e^{-x}$이므로

$$f'(x)=-2xe^{-x}+(1-x^2)(-e^{-x})$$
$$=(x^2-2x-1)e^{-x}$$
$$f'(0)=(0-0-1)e^0$$
$$=-1 \text{ (참)}$$

ㄴ. $$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{\{(1+h)^2-1\}e^{-(1+h)}-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}(2+h)e^{-(1+h)}$$
$$=2e^{-1}$$
$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{\{1-(1+h)^2\}e^{-(1+h)}-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}(-2-h)e^{-(1+h)}$$
$$=-2e^{-1}$$
$$\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\ne\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(거짓)

ㄷ. $x<-1$ 또는 $x>1$일 때

$$f'(x)=2xe^{-x}+(x^2-1)(-e^{-x})$$
$$=-(x^2-2x-1)e^{-x}$$

$-1<x<1$일 때

$$f'(x)=(x^2-2x-1)e^{-x}$$

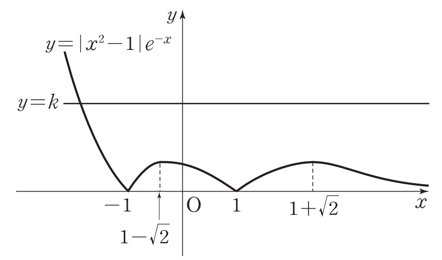
이고 ㄴ과 같은 방법으로 $f(x)$는 $x=1$, $x=-1$에서 미분가능하지 않다.

$f'(x)=0$에서

$x=1-\sqrt{2}$, $x=1+\sqrt{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$1-\sqrt{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘



함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 극솟값 0을 갖는다.

또, $x=1-\sqrt{2}$, $x=1+\sqrt{2}$에서 극댓값을 갖고

$f(1-\sqrt{2})>0$, $f(1+\sqrt{2})>0$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이다.

따라서 양수 k에 대하여 방정식 $f(x)=k$의 실근의 개수의 최솟값은 1이다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

07 부정적분

유제 본문 83~91쪽

1 ④	2 ②	3 ④	4 ③	5 ③
6 ④	7 ⑤	8 ②	9 ②	10 ①

1 $f(x)=\int \frac{(2x-1)^2}{x^2}dx$

$=\int \frac{4x^2-4x+1}{x^2}dx$

$=\int(4-4x^{-1}+x^{-2})dx$

$=4x-4\ln|x|-\frac{1}{x}+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $x>0$이므로

$f(x)=4x-4\ln x-\frac{1}{x}+C$

따라서

$f(2)-f(1)$

$=\left(8-4\ln 2-\frac{1}{2}+C\right)-\left(4-0-1+C\right)$

$=\frac{9}{2}-4\ln 2$

답 ④

2 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $x+\frac{1}{x}$이므로

$f'(x)=x+\frac{1}{x}$

$f(x)=\int\left(x+\frac{1}{x}\right)dx$

$=\frac{1}{2}x^2+\ln|x|+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $x>0$이므로

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+\ln x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $\left(1,\ -\frac{1}{2}\right)$을 지나므로

$f(1)=\frac{1}{2}+C=-\frac{1}{2}$에서

$C=-1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\ln x-1$이므로

$f(e)=\frac{1}{2}e^2+\ln e-1$

$=\frac{1}{2}e^2$

답 ②

3 $f'(x)=2e^x$에서

$f(x)=\int 2e^x dx$

$=2e^x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=2+C=1$에서

$C=-1$

따라서 $f(x)=2e^x-1$이므로

$f(\ln 2)=2e^{\ln 2}-1$

$=4-1$

$=3$

답 ④

4 $f(x)=\int \frac{4^x-9}{2^x+3}dx$

$=\int \frac{(2^x+3)(2^x-3)}{2^x+3}dx$

$=\int(2^x-3)dx$

$=\frac{2^x}{\ln 2}-3x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=\frac{1}{\ln 2}+C=\frac{1}{\ln 2}$에서

$C=0$

따라서 $f(x)=\frac{2^x}{\ln 2}-3x$이므로

$f(\log_2 3)=\frac{2^{\log_2 3}}{\ln 2}-3\log_2 3$

$$=\frac{3}{\ln 2}-\frac{3\ln 3}{\ln 2}$$
$$=\frac{3-3\ln 3}{\ln 2}$$

답 ③

5 $f(x)=\int \cos(\pi+x)dx$

$=\int(-\cos x)dx$

$=-\sin x+C$ (단, C는 적분상수)

$f'(x)=-\cos x$이고 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$에서

$-1+C=-\frac{1}{2}$이므로

$C=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=-\sin x+\frac{1}{2}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

$=0$

답 ③

6 $\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=f''(x)$

$=-\sin x$

이므로

$f'(x)=\int(-\sin x)dx$

$=\cos x+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

$f'(0)=1+C_1=2$에서

$C_1=1$

따라서 $f'(x)=\cos x+1$이므로

$f(x)=\int(\cos x+1)dx$

$=\sin x+x+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

$f(0)=0+C_2=3$에서

$C_2=3$

따라서 $f(x)=\sin x+x+3$이므로

$f(\pi)=0+\pi+3$

$=\pi+3$

답 ④

7 $(2+\cos x)'=-\sin x$이므로

$f(x)=\int\frac{\sin x}{2+\cos x}dx$

$=-\int\frac{(2+\cos x)'}{2+\cos x}dx$

$=-\ln|2+\cos x|+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $2+\cos x>0$이므로

$f(x)=-\ln(2+\cos x)+C$

$f(0)=-\ln(2+1)+C=0$에서

$C=\ln 3$

따라서 $f(x)=-\ln(2+\cos x)+\ln 3$이므로

$f(\pi)=-\ln(2-1)+\ln 3$

$=\ln 3$

답 ⑤

8 $f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$에서 $(1+x^2)'=2x$이므로

$f(x)=\int\frac{2x}{1+x^2}dx$

$=\ln|1+x^2|+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $1+x^2>0$이므로

$f(x)=\ln(1+x^2)+C$

$f(0)=\ln 1+C=-2$이므로

$C=-2$

이때 방정식 $f(x)=0$에서

$\ln(1+x^2)-2=0$

$\ln(1+x^2)=2$

$1+x^2=e^2$

$x^2=e^2-1$

따라서 $x=\pm\sqrt{e^2-1}$이므로 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은

$\sqrt{e^2-1}\times(-\sqrt{e^2-1})=-(e^2-1)$

$=1-e^2$

답 ②

9 $f'(x)=x\cos 2x=0\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$에서

$x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{4}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘	

함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극대인 동시에 최대이므로

$f(x)$의 최댓값은 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$이다.

$$f(x)=\int x\cos 2x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}+0+C=\frac{\pi}{2}$에서

$C=\frac{3}{8}\pi$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{3}{8}\pi$이고

$f(0)=\frac{3\pi+2}{8}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi-2}{8}$

따라서 $f(x)$의 최솟값은 $\frac{3\pi-2}{8}$이다.

답 ②

10 $F'(x)=f(x)$이므로 $F(x)=xf(x)-x^2\ln x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-2x\ln x-x^2\cdot\frac{1}{x}$

$xf'(x)=2x\ln x+x$, $f'(x)=2\ln x+1$

이므로

$f(x)=\int(2\ln x+1)dx$

$u(x)=2\ln x+1$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{2}{x}$, $v(x)=x$이므로

$$f(x)=\int(2\ln x+1)dx$$
$$=x(2\ln x+1)-\int\frac{2}{x}\cdot x\,dx$$
$$=2x\ln x+x-2x+C$$
$$=2x\ln x-x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(1)=0-1+C=-2$에서

$C=-1$

따라서 $f(x)=2x\ln x-x-1$이므로

$$f(2)=4\ln 2-2-1$$
$$=4\ln 2-3$$

답 ①

Level 1 기초 연습

본문 92쪽

1 ② **2** ④ **3** 2 **4** ① **5** ③

1 $\int\{2f(x)+4\}dx=x^2\ln x+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)+4=2x\ln x+x$

따라서 $f(x)=x\ln x+\frac{1}{2}x-2$이므로

$$f(2)=2\ln 2+1-2$$
$$=2\ln 2-1$$

답 ②

2 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$이므로

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}$에서

$$f(x)=\int\left(x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=2\sqrt{x}+\ln x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(1)=2+0+C=4$에서

$C=2$

따라서 $f(x)=2\sqrt{x}+\ln x+2$이므로

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=2\sqrt{\frac{1}{4}}+\ln\frac{1}{4}+2$$
$$=1-2\ln 2+2$$
$$=3-2\ln 2$$

답 ④

3 곡선 위의 임의의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $\sin x+\cos x$이므로

$f'(x)=\sin x+\cos x$

$f(x)=\int(\sin x+\cos x)dx$

$=-\cos x+\sin x+C$ (단, C는 적분상수)

곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로

$f(0)=-1+0+C=0$에서

$C=1$

따라서 $f(x)=-\cos x+\sin x+1$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-0+1+1$

$=2$

답 2

4 $f(x)=\int\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx$

$=\int\frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1}dx$

$=\int(e^x-1)dx$

$=e^x-x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=1-0+C=-1$에서

$C=-2$

따라서 $f(x)=e^x-x-2$이므로

$f(\ln 2)=e^{\ln 2}-\ln 2-2$

$=2-\ln 2-2$

$=-\ln 2$

답 ①

5 $(4x^2+1)'=8x$이므로

$f(x)=\int\frac{4x}{4x^2+1}dx$

$=\frac{1}{2}\int\frac{8x}{4x^2+1}dx$

$=\frac{1}{2}\ln|4x^2+1|+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $4x^2+1>0$이므로

$f(x)=\frac{1}{2}\ln(4x^2+1)+C$

$f(0)=0+C=1$에서

$C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\ln(4x^2+1)+1$이므로

$f(\sqrt{2})=\frac{1}{2}\ln 9+1$

$=\ln 3+1$

답 ③

Level 2 기본 연습

본문 93쪽

1 ④ **2** 4 **3** ② **4** ③

1 조건 (나)에 의하여

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}\times 3$

$=3f'(x)$

$=\sec^2 x$

이므로 $f'(x)=\frac{1}{3}\sec^2 x$

$f(x)=\int\frac{1}{3}\sec^2 x\,dx$

$=\frac{1}{3}\tan x+C$ (단, C는 적분상수)

조건 (가)에 의하여

$f(0)=0+C=2$이므로

$C=2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}\tan x+2$이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}\tan\frac{\pi}{4}+2$

$=\frac{1}{3}+2$

$=\frac{7}{3}$

답 ④

2 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$이므로

$f'(x)=\begin{cases} kx & (x<0) \\ 1+\cos x & (x>0) \end{cases}$에서

$f(x)=\begin{cases} \frac{k}{2}x^2+C_1 & (x<0) \\ x+\sin x+C_2 & (x>0) \end{cases}$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

$f(-1)=\frac{k}{2}+C_1=1$에서

$C_1=1-\frac{k}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+1+C_2=\frac{\pi}{2}$에서

$C_2=-1$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\left(\frac{k}{2}x^2+C_1\right)=C_1$

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(x+\sin x+C_2)=C_2$

에서 $C_1=C_2$이어야 한다.

따라서 $1-\frac{k}{2}=-1$이므로

$k=4$

답 4

3 $f(x)=\int(1+\sin x)^3\cos x\,dx$에서

$1+\sin x=t$로 놓으면

$\frac{dt}{dx}=\cos x$이므로

$f(x)=\int(1+\sin x)^3\cos x\,dx$

$=\int t^3\,dt$

$=\frac{1}{4}t^4+C$

$=\frac{1}{4}(1+\sin x)^4+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=1$이므로

$\frac{1}{4}+C=1$

$\therefore C=\frac{3}{4}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}(1+\sin x)^4+\frac{3}{4}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)^4+\frac{3}{4}$

$=\frac{1}{4}\times 2^4+\frac{3}{4}$

$=4+\frac{3}{4}$

$=\frac{19}{4}$

답 ②

4 $f(x)+xf'(x)=(3x+2)e^x$에서

$\{xf(x)\}'=(3x+2)e^x$이므로

$xf(x)=\int(3x+2)e^x\,dx$

$=(3x+2)e^x-\int 3e^x\,dx$

$=(3x-1)e^x+C$ (단, C는 적분상수)

$xf(x)=(3x-1)e^x+C$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2e+C=2e$에서

$C=0$

따라서 $xf(x)=(3x-1)e^x$이고 양변에 $x=2$를 대입하면 $2f(2)=5e^2$이므로

$f(2)=\frac{5}{2}e^2$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 94쪽

1 ④ **2** ③ **3** 15 **4** ⑤

1 조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 미분가능한 함수이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$

$=f'(x)+f'(x)$

$=2f'(x)$

즉, $2f'(x)=4xe^{x^2}$에서

$f'(x)=2xe^{x^2}$

$f(x)=\int 2xe^{x^2}dx$

$x^2=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x$이므로

$$f(x)=\int 2xe^{x^2}dx$$
$$=\int e^t dt$$
$$=e^t+C$$
$$=e^{x^2}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

함수 $f(x)$가 미분가능하면 연속이므로 조건 (나)에서

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$$
$$=e+C=2e$$

즉, $C=e$이다.

따라서 $f(x)=e^{x^2}+e$이므로

$$f(0)=e^0+e$$
$$=e+1$$

답 ④

2 $f'(x)=e^{-3x+1}$이므로

$f(x)=\int e^{-3x+1}dx$

$-3x+1=t$로 놓으면

$\dfrac{dt}{dx}=-3$이므로

$$f(x)=\int e^{-3x+1}dx$$
$$=-\frac{1}{3}\int e^t dt$$
$$=-\frac{1}{3}e^t+C$$
$$=-\frac{1}{3}e^{-3x+1}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{3}+C=-\dfrac{1}{3}$에서

$C=0$

따라서 $f(x)=-\dfrac{1}{3}e^{-3x+1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}e^{-3n+1}\right)$$
$$=-\frac{1}{3}(e^{-2}+e^{-5}+e^{-8}+\cdots)$$
$$=-\frac{1}{3}\times\frac{e^{-2}}{1-e^{-3}}$$
$$=-\frac{1}{3}\times\frac{e}{e^3-1}$$
$$=\frac{e}{3(1-e^3)}$$

답 ③

3 조건 (가)에서 $f'(x)=\ln x-1$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=e$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 극솟값을 갖는다.

$f(x)=\int(\ln x-1)dx$

$u(x)=\ln x-1$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\dfrac{1}{x}$, $v(x)=x$이므로

$$f(x)=\int(\ln x-1)dx$$
$$=x(\ln x-1)-\int\frac{1}{x}\cdot x\,dx$$
$$=x\ln x-x-x+C$$
$$=x\ln x-2x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

조건 (나)에서

$f(e)=e-2e+C=-e$

이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=x\ln x-2x$이므로 방정식 $f(x)=x$, 즉

$x\ln x-2x=x$의 실근은 $x(\ln x-3)=0$에서

$x=0$ 또는 $\ln x=3$

이때 $x>0$이므로

$\ln x=3$, $x=e^3$

따라서 $\alpha=e^3$이므로

$\ln\alpha^5=\ln(e^3)^5=\ln e^{15}=15$

답 15

4 $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=3$에서 $x\to1$일 때, (분모)$\to0$이므로

(분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=2$

이때 $f(x)$가 미분가능한 함수이면 $f(x)$는 연속함수이므로

$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=2$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f'(1)=3$$

$f'(x)=axe^{x-1}$에서 $f'(1)=3$이므로

$a=3$

$f'(x)=3xe^{x-1}$에서

$f(x)=\int 3xe^{x-1}dx$

$u(x)=3x,\ v'(x)=e^{x-1}$으로 놓으면

$u'(x)=3,\ v(x)=e^{x-1}$이므로

$$f(x)=\int 3xe^{x-1}dx$$
$$=3xe^{x-1}-\int 3e^{x-1}dx$$
$$=3xe^{x-1}-3e^{x-1}+C$$

그런데 $f(1)=3-3+C=2$이므로

$C=2$

즉, $f(x)=3xe^{x-1}-3e^{x-1}+2$이므로

$$f(2)=6e-3e+2$$
$$=3e+2$$

따라서 $a+f(2)$의 값은

$3+(3e+2)=3e+5$

답 ⑤

08 정적분

유제

본문 97~103쪽

1 ② 2 ③ 3 ① 4 ① 5 ③
6 ① 7 ③ 8 ②

1 $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}dx$

$=\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\int_1^2 \frac{1}{x}dx-\int_1^2 \frac{1}{x+1}dx$

$=\Big[\ln|x|\Big]_1^2-\Big[\ln|x+1|\Big]_1^2$

$=(\ln 2-0)-(\ln 3-\ln 2)$

$=\ln\frac{4}{3}$

답 ②

2 $f(x)=|x|+\cos x$라 하면

$f(-x)=|-x|+\cos(-x)$

$=|x|+\cos x$

$=f(x)$

이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

따라서

$\int_{-\pi}^{\pi}(|x|+\cos x)dx$

$=2\int_0^{\pi}(|x|+\cos x)dx$

$=2\int_0^{\pi}(x+\cos x)dx$

$=2\left[\frac{1}{2}x^2+\sin x\right]_0^{\pi}$

$=2\left(\frac{\pi^2}{2}-0\right)$

$=\pi^2$

답 ③

3 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}$

$=\int_1^2\frac{1}{x}dx$

$=\Big[\ln x\Big]_1^2$

$=\ln 2-\ln 1$

$=\ln 2$

답 ①

4 $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}(\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\sqrt[n]{e^3}+\cdots+\sqrt[n]{e^n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{e^k}$

$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}$

$=2\int_0^1 e^x dx$

$=2\Big[e^x\Big]_0^1$

$=2(e-1)$

답 ①

5 $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이고

$x=e$일 때 $t=1$, $x=e^2$일 때 $t=2$이므로

$\int_e^{e^2}\frac{(\ln x)^3}{x}dx=\int_1^2 t^3dt$

$=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_1^2$

$=\frac{1}{4}(16-1)$

$=\frac{15}{4}$

답 ③

6 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 x+1)\cos x\,dx$에서

$\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 x+1)\cos x\,dx$$
$$=\int_0^1(t^4+1)dt$$
$$=\left[\frac{1}{5}t^5+t\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{5}+1$$
$$=\frac{6}{5}$$

답 ①

7 $\int_1^2 x\ln x\,dx$에서

$f(x)=\ln x$, $g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2$이므로

$$\int_1^2 x\ln x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{2}x\,dx$$
$$=(2\ln 2-0)-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^2$$
$$=2\ln 2-\left(1-\frac{1}{4}\right)$$
$$=2\ln 2-\frac{3}{4}$$

답 ③

8 $\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx$에서

$f(x)=\cos x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=-\sin x$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx=\left[e^x\cos x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

또, $\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx$에서

$u(x)=\sin x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=\cos x$, $v(x)=e^x$이므로

$$\int_0^{\pi}e^x\sin x\,dx=\left[e^x\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx$$
$$=-\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx=\left[e^x\cos x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx$$

이므로 식을 정리하면

$$2\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx=\left[e^x\cos x\right]_0^{\pi}$$에서

$$\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\left[e^x\cos x\right]_0^{\pi}$$
$$=\frac{1}{2}(-e^{\pi}-1)$$
$$=-\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$$

답 ②

Level 1 기초 연습

본문 104쪽

1 ③ **2** ④ **3** ② **4** 2 **5** ①

1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\,dx$$
$$=\left[-\cos x-\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-1-(-1)$$
$$=0$$

답 ③

2 $\int_0^1 (3^{x+1}-\sqrt{9^x})dx$

$=\int_0^1 (3\times 3^x-3^x)dx$

$=2\int_0^1 3^x dx$

$=2\left[\frac{3^x}{\ln 3}\right]_0^1$

$=2\left(\frac{3}{\ln 3}-\frac{1}{\ln 3}\right)$

$=\frac{4}{\ln 3}$

답 ④

3 $0\le x\le \frac{\pi}{4}$일 때 $\cos x\ge \sin x$이고,

$\frac{\pi}{4}\le x\le \frac{\pi}{2}$일 때 $\cos x\le \sin x$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x-\sin x|dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x-\cos x)dx$

$=\left[\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[-\cos x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=(\sqrt{2}-1)+\{(-1)-(-\sqrt{2})\}$

$=2(\sqrt{2}-1)$

답 ②

4 $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx$에서

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e^2$일 때 $t=2$이므로

$\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx=\int_0^2 t\,dt$

$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^2$

$=2$

답 2

5 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos 6x\,dx$에서

$f(x)=x$, $g'(x)=\cos 6x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\frac{1}{6}\sin 6x$이므로

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos 6x\,dx=\left[\frac{1}{6}x\sin 6x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{6}\sin 6x\,dx$

$=0-\left[-\frac{1}{36}\cos 6x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$=-\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{36}\right)$

$=-\frac{1}{18}$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 105쪽

1 21 **2** ② **3** ④ **4** ②

1 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=3+f(x)$

이때 $x>0$이므로

$f'(x)=\frac{3}{x}$

$f(x)=\int \frac{3}{x}dx$

$=3\ln x+C$ (단, C는 적분상수)

주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1\times f(1)=3\times 1+\int_1^1 f(t)dt$에서

$f(1)=3$

$f(1)=3\ln 1+C=3$에서

$C=3$

따라서 $f(x)=3\ln x+3$이므로

$f(e^6)=3\ln e^6+3$

$=3\times 6+3$

$=21$

답 21

2 $\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

$$a_n=\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}dx$$
$$=\int_0^1 t^n dt$$
$$=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{n+1}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{28} a_n a_{n+1}$$
$$=\sum_{n=1}^{28}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$=\sum_{n=1}^{28}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{29}-\frac{1}{30}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{30}$$
$$=\frac{7}{15}$$

답 ②

3 $f(t)=t\sin\dfrac{\pi}{2}t$라 하고, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x t\sin\frac{\pi}{2}t\,dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\left[F(t)\right]_1^x}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}F'(1)$$
$$=\frac{1}{2}f(1)$$
$$=\frac{1}{2}$$

답 ④

4 $$f(x)=\ln x-\int_1^e\frac{2f(t)}{x}dt$$
$$=\ln x-\frac{2}{x}\int_1^e f(t)dt$$

$\int_1^e f(t)dt=a$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=\ln x-\dfrac{2a}{x}$이므로

$$a=\int_1^e\left(\ln t-\frac{2a}{t}\right)dt$$
$$=\int_1^e \ln t\,dt-2a\int_1^e\frac{1}{t}dt$$
$$=\left[t\ln t\right]_1^e-\int_1^e t\cdot\frac{1}{t}dt-2a\left[\ln t\right]_1^e$$
$$=e-\left[t\right]_1^e-2a$$
$$=e-(e-1)-2a$$
$$=1-2a$$

즉, $a=1-2a$에서

$$a=\frac{1}{3}$$

따라서 $f(x)=\ln x-\dfrac{2}{3x}$이므로

$$f(1)=-\frac{2}{3}$$

답 ②

Level 3 실력 완성

본문 106쪽

1 12 **2** ② **3** ⑤ **4** ①

1 $x-t=z$로 놓으면 $\dfrac{dz}{dt}=-1$이고

$t=0$일 때 $z=x$, $t=x$일 때 $z=0$이므로

$$\int_0^x tf(x-t)dt=-\int_x^0(x-z)f(z)dz$$
$$=\int_0^x(x-z)f(z)dz$$
$$=x\int_0^x f(z)dz-\int_0^x zf(z)dz$$

즉, $x\int_0^x f(z)dz-\int_0^x zf(z)dz=-4\sin 3x+ax$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(z)dz+xf(x)-xf(x)=-12\cos 3x+a$

이므로

$\int_0^x f(z)dz=-12\cos 3x+a$ …… ㉡

㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=-12+a$

따라서 상수 a의 값은 12이다.

답 12

2 $\int_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{3x}f(3x+1)dx$에서

$3x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{1}{3}$일 때 $t=2$이다.

또, $1\le t\le 2$일 때 $f(t)=2t-1$이므로

$\int_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{3x}f(3x+1)dx$

$=\int_1^2\sqrt{t-1}f(t)\cdot\frac{1}{3}dt$

$=\frac{1}{3}\int_1^2\sqrt{t-1}(2t-1)dt$ …… ㉠

㉠에서 $t-1=s$로 놓으면

$t=s+1$, $\frac{dt}{ds}=1$이고

$t=1$일 때 $s=0$, $t=2$일 때 $s=1$이므로

$\frac{1}{3}\int_1^2\sqrt{t-1}(2t-1)dt$

$=\frac{1}{3}\int_0^1\sqrt{s}(2s+1)ds$

$=\frac{1}{3}\int_0^1(2s^{\frac{3}{2}}+s^{\frac{1}{2}})ds$

$=\frac{1}{3}\left[\frac{4}{5}s^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\right)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{12+10}{15}$

$=\frac{22}{45}$

답 ②

3 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f'\left(\frac{2k}{n}-1\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f'\left(\frac{2k}{n}-1\right)\times\frac{1}{n}$

$=\int_0^1 xf'(2x-1)dx$

$\int_0^1 xf'(2x-1)dx$에서

$2x-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$이고

$x=0$일 때 $t=-1$, $x=1$일 때 $t=1$이므로

$\int_0^1 xf'(2x-1)dx$

$=\int_{-1}^1\left\{\frac{t+1}{2}f'(t)\cdot\frac{1}{2}\right\}dt$

$=\frac{1}{4}\int_{-1}^1(t+1)f'(t)dt$

$=\frac{1}{4}\int_{-1}^1 tf'(t)dt+\frac{1}{4}\int_{-1}^1 f'(t)dt$

이때 조건 (가)에서

$f'(-x)=-f'(x)$

이므로

$\int_{-1}^1 f'(t)dt=0$

$g(x)=xf'(x)$라 하면

$g(-x)=-xf'(-x)$

$=xf'(x)=g(x)$

이므로

$\int_{-1}^1 tf'(t)dt=2\int_0^1 tf'(t)dt$

따라서

$\int_0^1 xf'(2x-1)dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 tf'(t)dt$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left[tf(t)\right]_0^1-\int_0^1 f(t)dt\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{f(1)-\int_0^1 f(t)dt\right\} \quad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (나)에서

$$\int_0^1 f'(x)dx=\left[f(x)\right]_0^1$$

$$=f(1)-f(0)$$

$$=-\frac{1}{3}$$

이고 $f(0)=0$이므로

$$f(1)=-\frac{1}{3}$$

조건 (다)에서

$$\int_0^1 f(t)dt=-\frac{1}{5}$$

따라서 ㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f'\left(\frac{2k}{n}-1\right)=\frac{1}{2}\left\{f(1)-\int_0^1 f(t)dt\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)$$

$$=-\frac{1}{15}$$

답 ⑤

4 원점 O에 대하여 $\angle \mathrm{AOP}_k=\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{n}\times k=\frac{k\pi}{2n}$이므로

점 P_k의 좌표는 $\mathrm{P}_k\left(2\cos\frac{k\pi}{2n},\ 2\sin\frac{k\pi}{2n}\right)$이다.

원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P_k에서의 접선의 방정식은

$2x\cos\frac{k\pi}{2n}+2y\sin\frac{k\pi}{2n}=4$에서

$x\cos\frac{k\pi}{2n}+y\sin\frac{k\pi}{2n}=2$

이 접선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각

$\left(\frac{2}{\cos\frac{k\pi}{2n}},\ 0\right)$, $\left(0,\ \frac{2}{\sin\frac{k\pi}{2n}}\right)$이므로

이 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S_k는

$$S_k=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\cos\frac{k\pi}{2n}}\times\frac{2}{\sin\frac{k\pi}{2n}}$$

$$=\frac{2}{\sin\frac{k\pi}{2n}\cos\frac{k\pi}{2n}}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{S_k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2n}\cos\frac{k\pi}{2n}$$

이때 $\cos\frac{\pi}{2}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{S_k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}\cos\frac{k\pi}{2n}$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}\cos\frac{k\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^1 t\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2\pi}$$

답 ①

다른 풀이

$\angle \mathrm{AOP}_k=\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{n}\times k=\frac{k\pi}{2n}$이므로 점 P_k의 좌표는

$\mathrm{P}_k\left(2\cos\frac{k\pi}{2n},\ 2\sin\frac{k\pi}{2n}\right)$이다.

원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P_k에서의 접선의 방정식은

$2x\cos\frac{k\pi}{2n}+2y\sin\frac{k\pi}{2n}=4$에서

$x\cos\frac{k\pi}{2n}+y\sin\frac{k\pi}{2n}=2$

이 접선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각

$\left(\frac{2}{\cos\frac{k\pi}{2n}},\ 0\right)$, $\left(0,\ \frac{2}{\sin\frac{k\pi}{2n}}\right)$이므로

이 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S_k는

$$S_k=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\cos\frac{k\pi}{2n}}\times\frac{2}{\sin\frac{k\pi}{2n}}$$

$$=\frac{4}{\sin\frac{k\pi}{n}}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{S_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4}\sin\frac{k\pi}{n}$$

이때 $\sin\pi=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{S_k}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^1\sin\pi x\,dx$$
$$=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{\pi}-\left(-\frac{1}{\pi}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2\pi}$$

참고

$$\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{4\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$
$$=\frac{1}{4\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\pi}$$
$$=\frac{1}{4\pi}\{1-(-1)\}$$
$$=\frac{1}{2\pi}$$

09 정적분의 활용

유제 본문 109～113쪽

1 ③ **2** ① **3** ② **4** ② **5** ③
6 ⑤

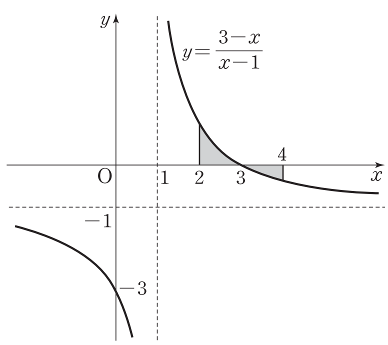
1 $y=\dfrac{3-x}{x-1}$

$=\dfrac{-(x-1)+2}{x-1}$

$=-1+\dfrac{2}{x-1}$

$y=0$에서 $x=3$

즉, 곡선 $y=\dfrac{3-x}{x-1}$는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 부분의 넓이는

$\displaystyle\int_2^4\left|\frac{3-x}{x-1}\right|dx$

$\displaystyle=\int_2^3\left(-1+\frac{2}{x-1}\right)dx+\int_3^4\left(1-\frac{2}{x-1}\right)dx$

$=\Big[-x+2\ln|x-1|\Big]_2^3+\Big[x-2\ln|x-1|\Big]_3^4$

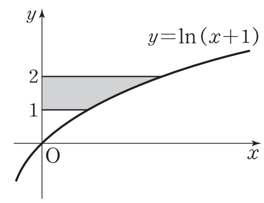
$=(-3+2\ln 2)-(-2+0)+(4-2\ln 3)-(3-2\ln 2)$

$=4\ln 2-2\ln 3$

답 ③

2 $y=\ln(x+1)$에서

$x+1=e^y$, 즉 $x=e^y-1$



따라서 위의 그림에서 곡선 $y=\ln(x+1)$과 y축 및 두 직선 $y=1$, $y=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\displaystyle\int_1^2|e^y-1|dy=\int_1^2(e^y-1)dy$

$=\Big[e^y-y\Big]_1^2$

$=(e^2-2)-(e-1)$

$=e^2-e-1$

답 ①

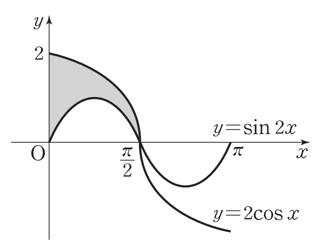
3 $2\cos x=\sin 2x$에서

$2\cos x-2\sin x\cos x=0$

$2\cos x(1-\sin x)=0$

$\cos x=0$ 또는 $\sin x=1$이므로

$x=\dfrac{\pi}{2}$



따라서 두 곡선 $y=2\cos x$, $y=\sin 2x$와 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|2\cos x-\sin 2x|dx$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x-\sin 2x)dx$

$=\Big[2\sin x+\dfrac{1}{2}\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\left(2-\dfrac{1}{2}\right)-\left(0+\dfrac{1}{2}\right)$

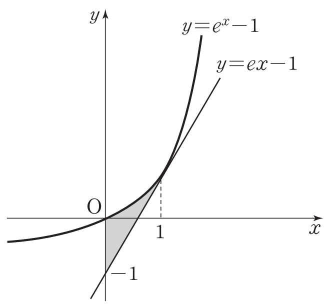
$=2-1=1$

답 ②

참고

$$\sin 2x = \sin(x+x)$$
$$= \sin x \cos x + \cos x \sin x$$
$$= 2\sin x \cos x$$

4 $f(x)=e^x-1$이라 하면 기울기가 e이므로
$f'(x)=e^x=e$에서 $x=1$
따라서 점 $(1, e-1)$에서의 접선의 방정식은
$y-(e-1)=e(x-1)$
$y=ex-1$

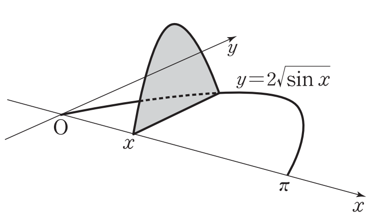


따라서 곡선 $y=e^x-1$과 y축 및 직선 $y=ex-1$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1 |(e^x-1)-(ex-1)|\,dx$$
$$=\int_0^1 (e^x-ex)\,dx$$
$$=\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\left(e-\frac{e}{2}\right)-(1-0)$$
$$=\frac{e}{2}-1$$

답 ②

5



이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 반원이고, 이 반원의 지름의 길이가 $2\sqrt{\sin x}$이므로 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{\pi}{2}\times(\sqrt{\sin x})^2$$
$$=\frac{\pi}{2}\sin x$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^\pi \frac{\pi}{2}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}\Big[-\cos x\Big]_0^\pi$$
$$=\frac{\pi}{2}(1+1)$$
$$=\pi$$

답 ③

6 이 입체도형의 단면이 반지름의 길이가 e^x인 원이므로
단면의 넓이를 $S(x)$라 하면
$S(x)=\pi e^{2x}$
따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^1 S(x)\,dx=\int_0^1 \pi e^{2x}\,dx$$
$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$$
$$=\pi\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}(e^2-1)$$

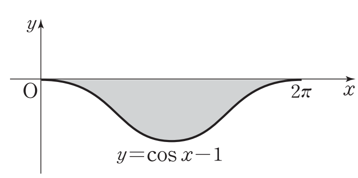
답 ⑤

Level 1 기초 연습

본문 114쪽

1 ④ **2** ① **3** ① **4** 250 **5** 11

1



구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^{2\pi}|\cos x-1|\,dx$$

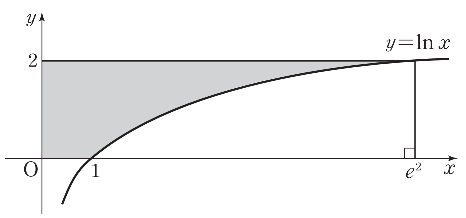
$$=\int_{0}^{2\pi}(1-\cos x)dx$$

$$=\Big[x-\sin x\Big]_{0}^{2\pi}$$

$$=2\pi$$

답 ④

2 곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=2$의 교점의 좌표가 $(e^2,\ 2)$이므로 구하는 도형의 넓이는 가로의 길이가 e^2이고 세로의 길이가 2인 직사각형의 넓이에서 곡선 $y=\ln x$와 x축 및 직선 $x=e^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 빼면 된다.



따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=2e^2-\int_{1}^{e^2}\ln x\,dx$$

$$=2e^2-\Big[x\ln x-x\Big]_{1}^{e^2}$$

$$=2e^2-\{(e^2\ln e^2-e^2)-(0-1)\}$$

$$=2e^2-(2e^2-e^2+1)$$

$$=e^2-1$$

답 ①

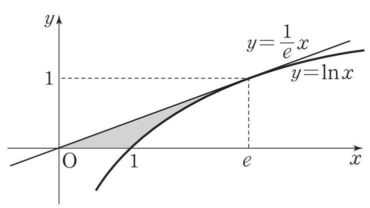
다른 풀이

$$S=\int_{0}^{2}e^y dy=\Big[e^y\Big]_{0}^{2}=e^2-1$$

3 $y=\ln x$의 도함수가 $y'=\frac{1}{x}$이므로 곡선 $y=\ln x$ 위의 점 $(e,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{e}(x-e)$에서

$y=\frac{1}{e}x$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{0}^{e}\frac{1}{e}x\,dx-\int_{1}^{e}\ln x\,dx$$

$$=\Big[\frac{1}{2e}x^2\Big]_{0}^{e}-\Big[x\ln x-x\Big]_{1}^{e}$$

$$=\frac{e}{2}-\{(e-e)-(0-1)\}$$

$$=\frac{e}{2}-1$$

답 ①

다른 풀이

$y=\ln x$의 도함수가 $y'=\frac{1}{x}$이므로 곡선 $y=\ln x$ 위의 점 $(e,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{e}(x-e)$에서

$y=\frac{1}{e}x$

$y=\ln x$에서 $x=e^y$이고, $y=\frac{1}{e}x$에서 $x=ey$이므로

구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{0}^{1}(e^y-ey)dy$$

$$=\Big[e^y-\frac{e}{2}y^2\Big]_{0}^{1}$$

$$=\frac{e}{2}-1$$

4 물탱크의 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=(\sqrt{30-x})^2$

$=30-x\,(\mathrm{m}^2)$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_{0}^{10}(30-x)dx$$

$$=\Big[30x-\frac{1}{2}x^2\Big]_{0}^{10}$$

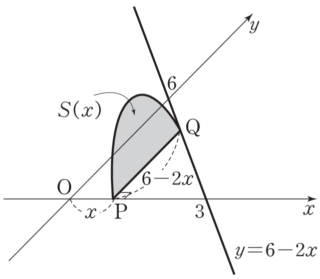
$$=300-50$$

$$=250\ (\mathrm{m}^3)$$

따라서 a의 값은 250이다.

답 250

5 직선 $y=6-2x$의 x절편은 3이고, 직선 $y=6-2x$와 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형을 밑면으로 하는 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면은 반지름의 길이가 $3-x$인 반원이다.



이때 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\frac{\pi}{2}(3-x)^2$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^3 \frac{\pi}{2}(3-x)^2dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{3}(3-x)^3\right]_0^3$$
$$=\frac{\pi}{2}\times\{0-(-9)\}$$
$$=\frac{9}{2}\pi$$

따라서 $p=2,\ q=9$이므로

$p+q=2+9=11$

답 11

Level 2 기본 연습

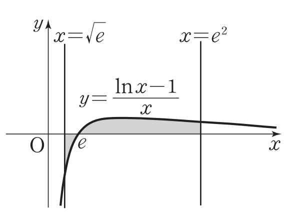
본문 115쪽

1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ①

1 곡선 $y=\frac{\ln x-1}{x}$과 x축의 교점의 x좌표는

$\frac{\ln x-1}{x}=0$에서 $\ln x=1$이므로

$x=e$



이때 $\sqrt{e}<x<e$에서 $y<0$이고

$e<x<e^2$에서 $y>0$이므로

구하는 넓이를 S라 하면

$$S=-\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{\ln x-1}{x}dx+\int_e^{e^2}\frac{\ln x-1}{x}dx$$

$\ln x-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이고

$x=\sqrt{e}$일 때 $t=-\frac{1}{2}$, $x=e$일 때 $t=0$, $x=e^2$일 때 $t=1$이므로

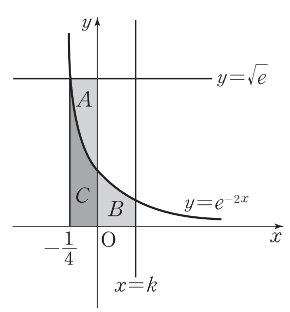
$$S=-\int_{-\frac{1}{2}}^{0}t\,dt+\int_0^1 t\,dt$$
$$=-\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}+\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{5}{8}$$

답 ②

2 $e^{-2x}=\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}$에서 $-2x=\frac{1}{2}$이므로

$x=-\frac{1}{4}$

그림과 같이 곡선 $y=e^{-2x}$과 x축, y축 및 직선 $x=-\frac{1}{4}$로 둘러싸인 부분을 C라 하고, 세 부분 $A,\ B,\ C$의 넓이를 각각 $a,\ b,\ c$라 하자.



이때 A의 넓이와 B의 넓이가 같으므로

$a+c=b+c$이다.

$a+c=\frac{1}{4}\times\sqrt{e}=\frac{\sqrt{e}}{4}$

$$b+c=\int_{-\frac{1}{4}}^{k}e^{-2x}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-\frac{1}{4}}^{k}$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-2k}+\frac{\sqrt{e}}{2}$$

즉, $\frac{\sqrt{e}}{4}=-\frac{1}{2}e^{-2k}+\frac{\sqrt{e}}{2}$에서

$\frac{1}{2}e^{-2k}=\frac{\sqrt{e}}{4}$이므로

$e^{-2k}=\frac{\sqrt{e}}{2}$

따라서 구하는 값은

$$\ln(2e^{-2k})=\ln\sqrt{e}$$

$$=\ln e^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

답 ③

3 $f(x)=(2x^2+a)e^x$에서

$$f'(x)=4xe^x+(2x^2+a)e^x$$

$$=(2x^2+4x+a)e^x$$

$e^x>0$이므로 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $2x^2+4x+a\geq 0$이어야 한다.

이차방정식 $2x^2+4x+a=0$의 판별식을 D라 하면

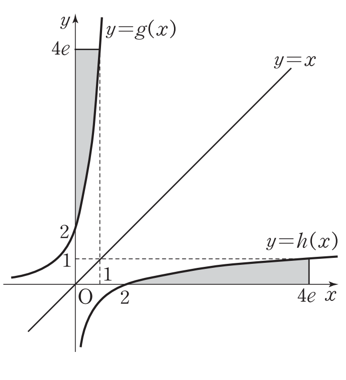
$\frac{D}{4}=4-2a\leq 0$에서

$a\geq 2$

따라서 a의 최솟값은 2이므로

$m=2,\ g(x)=(2x^2+2)e^x$

이때 $g(0)=2,\ g(1)=4e$에서 $h(2)=0,\ h(4e)=1$이므로 두 함수 $y=g(x),\ y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$$\int_m^{4e}h(x)dx=\int_2^{4e}h(x)dx$$

$$=1\times 4e-\int_0^1 g(x)dx$$

$$=1\times 4e-\int_0^1(2x^2+2)e^x dx$$

$$=4e-\left[(2x^2+2)e^x\right]_0^1+\int_0^1 4xe^x dx$$

$$=4e-(4e-2)+\left[4xe^x\right]_0^1-\int_0^1 4e^x dx$$

$$=2+4e-(4e-4)$$

$$=6$$

답 ④

4 물의 높이가 x일 때, 수면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=4x\sqrt{2x^2+4}$

구하는 물의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^4 4x\sqrt{2x^2+4}\,dx$$

$2x^2+4=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=4x$이고

$x=0$일 때 $t=4$, $x=4$일 때 $t=36$이므로

$$V=\int_0^4 4x\sqrt{2x^2+4}\,dx$$

$$=\int_4^{36}\sqrt{t}\,dt$$

$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_4^{36}$$

$$=\frac{2}{3}(6^3-2^3)$$

$$=\frac{416}{3}$$

답 ①

Level 3 실력 완성

본문 116쪽

1 ⑤ **2** ① **3** 36

1 $\int_0^x f(t)dt=\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt-e^x+1$에서

$\int_0^x f(t)dt=f(x)-e^x+1$ …… ㉠

ㄱ. ㉠의 양변을 미분하면

$f(x)=f'(x)-e^x$

따라서 $f'(x)=f(x)+e^x$ (참)

ㄴ. $\{e^{-x}f(x)\}'=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)$

$=-e^{-x}f(x)+e^{-x}\{f(x)+e^x\}=1$ (참)

ㄷ. ㄴ의 $\{e^{-x}f(x)\}'=1$에서 양변을 x에 대하여 적분하면

$e^{-x}f(x)=\int 1dx=x+C$ (C는 적분상수)

이므로 양변에 e^x을 곱하면

$f(x)=(x+C)e^x$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=f(0)-e^0+1$에서

$f(0)=0$

㉡에서 $x=0$을 대입하면

$f(0)=C$

따라서 $C=0$

즉, $f(x)=xe^x$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^1 xe^x dx=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx$

$=\left[xe^x\right]_0^1-\left[e^x\right]_0^1=1$ (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

2 $f(x)=x\sin 2x$라 하면

$f(-x)=-x\times\sin(-2x)$

$=x\sin 2x$

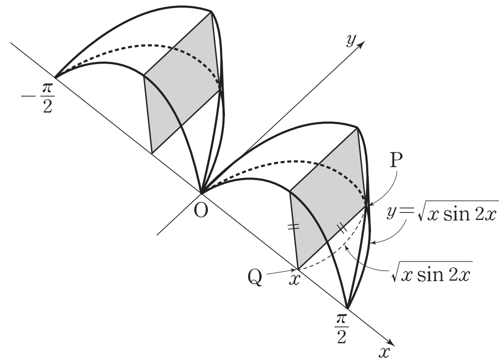
$=f(x)$

이므로 함수 $f(x)$는 y축에 대하여 대칭인 함수이다.

곡선 $y=\sqrt{x\sin 2x}$ 위의 점 P에서 x축 위에 내린 수선의 발을 Q라 하면 다음 그림에서 $\overline{PQ}=\sqrt{x\sin 2x}$ 이므로 선분 PQ를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이 $S(x)$는

$S(x)=\overline{PQ}^2$

$=x\sin 2x$



따라서 구하는 입체도형의 부피 V는

$V=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} S(x)dx$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx$

여기서

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx$

$=\left[x\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)dx$

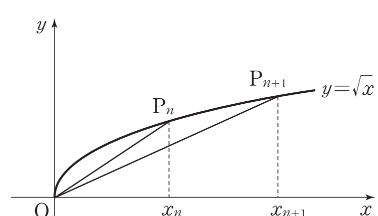
$=\frac{\pi}{4}+\left[\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{\pi}{4}$

이므로 $V=\frac{\pi}{2}$

답 ①

3



x축 위에 두 점 $X_n(x_n, 0)$, $X_{n+1}(x_{n+1}, 0)$을 잡는다.

$S_n=$(△OP_nX_n의 넓이)+(도형 $X_nX_{n+1}P_{n+1}P_n$의 넓이)

$-$(△$OX_{n+1}P_{n+1}$의 넓이)

$$=\frac{1}{2}x_n\sqrt{x_n}+\int_{x_n}^{x_{n+1}}\sqrt{x}\,dx-\frac{1}{2}x_{n+1}\sqrt{x_{n+1}}$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{x_n}^{x_{n+1}}-\frac{1}{2}\left(x_{n+1}^{\frac{3}{2}}-x_n^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(x_{n+1}^{\frac{3}{2}}-x_n^{\frac{3}{2}}\right)$$

이므로

$$S_n=\frac{1}{6}\left(x_{n+1}^{\frac{3}{2}}-x_n^{\frac{3}{2}}\right) \quad \cdots\cdots ㉠$$

또한, $x_1=1$, $x_2=4$이므로

$$S_1=\frac{7}{6}$$

수열 $\{S_n\}$은 공비가 $\frac{4}{5}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{7}{6}}{1-\frac{4}{5}}=\frac{35}{6}$$

또한, ㉠에서 양변에 6을 곱하고 n 대신에

$1, 2, 3, \cdots, n-1$을 대입하여 각 변끼리 더하면

$$6S_1+6S_2+6S_3+\cdots+6S_{n-1}$$

$$=(x_2^{\frac{3}{2}}-x_1^{\frac{3}{2}})+(x_3^{\frac{3}{2}}-x_2^{\frac{3}{2}})+(x_4^{\frac{3}{2}}-x_3^{\frac{3}{2}})+\cdots+(x_n^{\frac{3}{2}}-x_{n-1}^{\frac{3}{2}})$$

$$=x_n^{\frac{3}{2}}-x_1^{\frac{3}{2}}$$

$$=x_n^{\frac{3}{2}}-1$$

따라서 $x_n^{\frac{3}{2}}=1+6\sum_{k=1}^{n-1}S_k$이므로

$$\lim_{n\to\infty}x_n^{\frac{3}{2}}=1+6\times\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}S_k$$

$$=1+6\sum_{n=1}^{\infty}S_n$$

$$=1+6\times\frac{35}{6}$$

$$=36$$

답 36