

2023학년도 대학수학능력시험
수학영역 정답 및 풀이

*최종 수정일 : 22.11.22(화)

[공통: 수학 I·수학 II]

01. ⑤ 02. ④ 03. ① 04. ③ 05. ⑤
06. ② 07. ④ 08. ④ 09. ③ 10. ④
11. ① 12. ② 13. ③ 14. ① 15. ⑤
16. 10 17. 15 18. 22 19. 7
20. 17 21. 33 22. 13

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}} &= (2^2 \div 2^{\sqrt{2}})^{2+\sqrt{2}} \\ &= (2^{2-\sqrt{2}})^{2+\sqrt{2}} \\ &= 2^{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} \\ &= 2^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

정답 ⑤

2. 출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+3}{1+\frac{5}{x}} \\ &= \frac{\sqrt{1-0}+3}{1+0} \\ &= 4 \end{aligned}$$

정답 ④

3. 출제의도 : 등비수열의 첫째항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 $r(r>0)$ 이라 하자.

$$a_2 + a_4 = 30 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\text{한편, } a_4 + a_6 = \frac{15}{2}$$

에서

$$r^2(a_2 + a_4) = \frac{15}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$r^2 \times 30 = \frac{15}{2}$$

$$r^2 = \frac{1}{4}$$

$r > 0$ 이므로

$$r = \frac{1}{2}$$

㉠에서

$$a_1 r + a_1 r^3 = 30$$

$$a_1 \times \frac{1}{2} + a_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 30$$

$$a_1 \times \frac{5}{8} = 30$$

따라서

$$a_1 = 30 \times \frac{8}{5} = 48$$

정답 ①

4. 출제의도 : 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x) = x^2 f(x)$ 에서 미분하면

$$g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x)$$

이때, $f(2) = 1$, $f'(2) = 3$ 이므로

$$\begin{aligned} g'(2) &= 4f(2) + 4f'(2) \\ &= 4 \times 1 + 4 \times 3 \\ &= 16 \end{aligned}$$

정답 ③

5. 출제의도 : 조건을 만족시키는 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta \text{이므로}$$

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\tan\theta < 0$, $\sin\theta < 0$ 이므로 θ 는 제4사분면의 각이고, $\cos\theta > 0$ 이다.

그리고

$$\begin{aligned} \cos^2\theta &= 1 - \sin^2\theta \\ &= 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

에서

$$\cos\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } \cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

따라서 $\cos\theta > 0$ 이므로

$$\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

정답 ⑤

6. 출제의도 : 함수의 극대, 극소의 성질을 이용하여 두 상수의 합을 구할 수 있

는가?

정답풀이 :

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + ax + 5$ 에서

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + a$$

함수 $f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 극대이므로

$$f'(1) = 6 - 18 + a = 0$$

$$a = 12$$

이때,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 18x + 12 \\ &= 6(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

이때 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극소이므로

$$b = 2$$

$$\text{따라서 } a + b = 12 + 2 = 14$$

정답 ②

7. 출제의도 : 등차수열의 일반항과 \sum 의 정의를 이용하여 등차수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공차가 같으므로 $a_1 = a$ 라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= a + (n-1) \times a \\ &= an \end{aligned}$$

한편

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = 2$$

에서

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{ak} + \sqrt{a(k+1)}} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \frac{\sqrt{a(k+1)} - \sqrt{ak}}{a} \\ &= \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{15} (\sqrt{a(k+1)} - \sqrt{ak}) \\ &= \frac{1}{a} \{(\sqrt{2a} - \sqrt{a}) + (\sqrt{3a} - \sqrt{2a}) + \dots \\ & \quad \dots + (\sqrt{16a} - \sqrt{15a})\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a} (4\sqrt{a} - \sqrt{a})$$

$$= \frac{3\sqrt{a}}{a}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{a}} = 2$$

이때,

$$2\sqrt{a} = 3$$

$$a = \frac{9}{4}$$

따라서,

$$a_4 = 4a = 4 \times \frac{9}{4} = 9$$

정답 ④

8. 출제의도 : 곡선 밖의 점에서 그은 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$y = x^3 - x + 2 \text{에서}$$

$$y' = 3x^2 - 1$$

이때 곡선 $y = x^3 - x + 2$ 위의 점

$(t, t^3 - t + 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (t^3 - t + 2) = (3t^2 - 1)(x - t)$$

이 직선이 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$4 - (t^3 - t + 2) = (3t^2 - 1)(0 - t)$$

정리하면 $t^3 = -1$ 이므로

$$t = -1$$

따라서 점 $(0, 4)$ 에서 곡선 $y = x^3 - x + 2$

에 그은 접선의 방정식은

$$y - 2 = 2(x + 1)$$

$$y = 2x + 4$$

그러므로 직선 $y = 2x + 4$ 의 x 절편은 -2 이다.

정답 ④

9. 출제의도 : 닫힌구간에서 탄젠트함수의 최댓값과 최솟값을 이용하여 두 상수의 곱을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x) = a - \sqrt{3}\tan 2x$ 의 그래프의 주

기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$ 에서 최댓값과 최솟값을 가지므로

$$-\frac{\pi}{6} < b < \frac{\pi}{4}$$

이다.

한편, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 구간

$\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$ 에서 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{\pi}{6}$ 에서 최댓값 7을

가지므로

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=a-\sqrt{3}\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=7\text{에서}$$

$$a+\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{3}=7$$

$$a+3=7$$

$$a=4$$

함수 $f(x)$ 는 $x=b$ 에서 최솟값 3을 가지
므로

$$f(b)=4-\sqrt{3}\tan 2b=3\text{에서}$$

$$\tan 2b=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{이때, } -\frac{\pi}{3}<2b<\frac{\pi}{2}\text{이므로}$$

$$2b=\frac{\pi}{6}$$

$$b=\frac{\pi}{12}$$

$$\text{따라서 } a \times b = 4 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

정답 ③

10. 출제의도 : 정적분과 넓이의 관계를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$A=B$ 이므로

$$\int_0^2 \{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\}dx=0$$

이어야 한다.

이때,

$$\int_0^2 \{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\}dx$$

$$=\int_0^2 (x^3+2x^2-k)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-kx\right]_0^2$$

$$=4+\frac{16}{3}-2k$$

$$=\frac{28}{3}-2k=0$$

따라서,

$$2k=\frac{28}{3}$$

$$k=\frac{14}{3}$$

정답 ④

11. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle BAC = \angle CAD = \theta$ 라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos \theta$$

$$= 25 + 45 - 2 \times 5 \times 3\sqrt{5} \times \cos \theta$$

$$= 70 - 30\sqrt{5} \cos \theta$$

또 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AD} \times \overline{AC} \times \cos \theta$$

$$= 49 + 45 - 2 \times 7 \times 3\sqrt{5} \times \cos \theta$$

$$= 94 - 42\sqrt{5} \cos \theta$$

이때 $\angle BAC = \angle CAD$ 이므로

$$\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2$$

$$70 - 30\sqrt{5} \cos \theta = 94 - 42\sqrt{5} \cos \theta \text{에서}$$

$$\cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\overline{BC}^2 = 70 - 30\sqrt{5} \cos \theta$$

$$= 70 - 30\sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$= 10$$

$$\text{즉, } \overline{BC} = \sqrt{10}$$

한편,

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

$$\text{이므로 } \sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이를 R 라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta} = 2R$$

$$\frac{\frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}}{5} = 2R$$

$$5\sqrt{2} = 2R$$

$$\text{즉, } R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

정답 ①

12. 출제의도 : 정적분과 넓이의 관계를 이용하여 함수를 구한 후, 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속
이므로

$$n-1 \leq x \leq n \text{ 일 때,}$$

$$f(x) = 6(x-n+1)(x-n)$$

또는

$$f(x) = -6(x-n+1)(x-n)$$

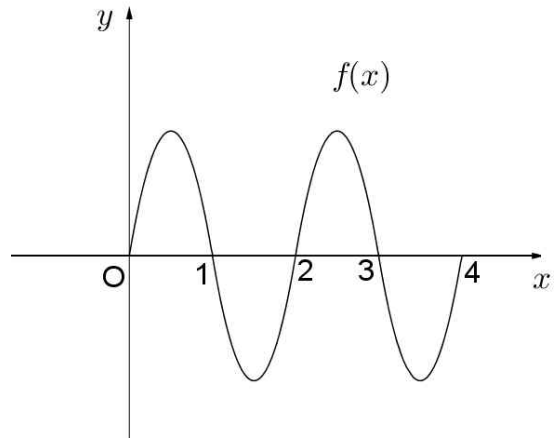
함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 최솟값 0를 가지므로

$$g(2) = \int_0^2 f(t)dt - \int_2^4 f(t)dt = 0$$

$$\int_0^2 f(t)dt = \int_2^4 f(t)dt$$

이때, 함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 최솟값을

가져야 하므로 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서

$$\int_{\frac{1}{2}}^4 f(x)dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$$

$$+ \int_3^4 f(x)dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx$$

$$- \int_0^1 f(x)dx$$

$$= - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$$

$$= - \int_0^{\frac{1}{2}} \{-6x(x-1)\}dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (6x^2 - 6x)dx$$

$$= [2x^3 - 3x^2]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{2}$$

정답 ②

2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

이므로

$$f(4) = 7$$

13. 출제의도 : 거듭제곱근의 뜻을 이해하고 있는가?

(iv) $m=5$ 일 때,

㉠의 방정식은

$$x^n = 5^{12}$$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은

2, 3, 4, 6, 12

이므로

$$f(5) = 5$$

(v) $m=6$ 일 때,

㉠의 방정식은

$$x^n = 6^{12}$$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은

2, 3, 4, 6, 12

이므로

$$f(6) = 5$$

(vi) $m=7$ 일 때,

㉠의 방정식은

$$x^n = 7^{12}$$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은

2, 3, 4, 6, 12

이므로

$$f(7) = 5$$

(vii) $m=8$ 일 때,

㉠의 방정식은

$$x^n = 8^{12}$$

즉,

$$x^n = 2^{36}$$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은

2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

이므로

정답풀이 :

m^{12} 의 n 제곱근은 x 에 대한 방정식

$$x^n = m^{12} \quad \text{----} \text{㉠}$$

의 근이다.

이때, m 의 값에 따라 ㉠의 방정식이 정수근을 갖도록 하는 2 이상의 자연수 n 의 개수를 구하면 다음과 같다.

(i) $m=2$ 일 때,

㉠의 방정식은

$$x^n = 2^{12}$$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은

2, 3, 4, 6, 12

이므로

$$f(2) = 5$$

(ii) $m=3$ 일 때,

㉠의 방정식은

$$x^n = 3^{12}$$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은

2, 3, 4, 6, 12

이므로

$$f(3) = 5$$

(iii) $m=4$ 일 때,

㉠의 방정식은

$$x^n = 4^{12}$$

즉,

$$x^n = 2^{24}$$

이 방정식의 근 중 정수가 존재하기 위한 n 의 값은

$f(8) = 8$
 (viii) $m = 9$ 일 때,
 ㉠의 방정식은
 $x^n = 9^{12}$
 즉,
 $x^n = 3^{24}$
 이 방정식의 근 중 정수가 존재하기
 위한 n 의 값은
 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
 이므로
 $f(9) = 7$

따라서,

$$\sum_{m=2}^9 f(m)$$

$$= f(2) + f(3) + \cdots + f(9)$$

$$= 5 + 5 + 7 + 5 + 5 + 5 + 8 + 7$$

$$= 5 \times 5 + 7 \times 2 + 8$$

$$= 47$$

정답 ③

14. 출제의도 : 극한으로 표현된 함수에 대하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ.
 $x > 1$ 에서 $g(x) = x$ 이므로

$$h(1) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(1+t) \times \lim_{t \rightarrow 2+} g(1+t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} (1+t) \times \lim_{t \rightarrow 2+} (1+t)$$

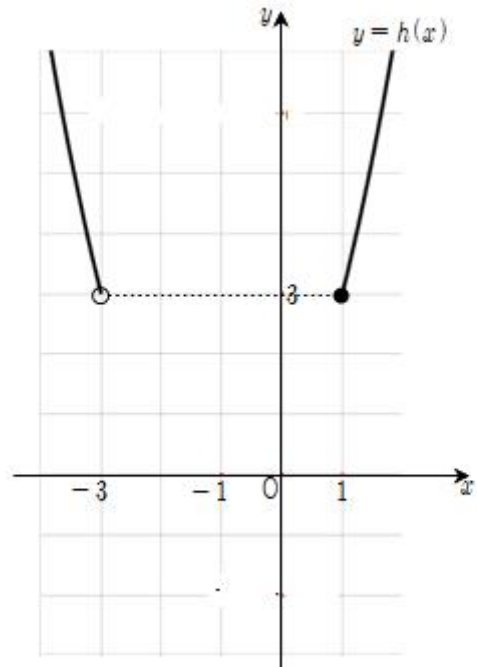
$$= 1 \times 3$$

$$= 3 \text{ (참)}$$

ㄴ.

$$h(x) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(x+t) \times \lim_{t \rightarrow 2+} g(x+t)$$

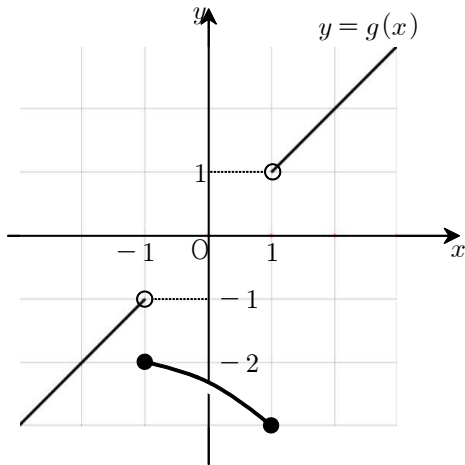
이므로
 $x < -3$ 일 때 $h(x) = x \times (x+2)$
 $x = -3$ 일 때 $h(-3) = -3 \times f(-1)$
 $-3 < x < -1$ 일 때
 $h(x) = x \times f(x+2)$
 $x = -1$ 일 때 $h(-1) = f(-1) \times 1$
 $-1 < x < 1$ 일 때
 $h(x) = f(x) \times (x+2)$
 $x = 1$ 일 때 $h(1) = 1 \times 3$
 $x > 1$ 일 때 $h(x) = x \times (x+2)$
 즉, $x < -3$ 또는 $x \geq 1$ 일 때, 함수
 $y = h(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$f(-3) \neq 3$ 이면 함수 $h(x)$ 는 $x = -3$ 에서 불연속이다.

즉, 함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이라 할 수 없다. (거짓)

ㄷ.
 함수 $g(x)$ 가 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 감소하고 $g(-1) = -2$ 일 때, 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



이때,

$$h(-3) = -3 \times f(-1) = -3 \times (-2) = 6$$

$$h(-1) = f(-1) \times 1 = -2 \times 1 = -2$$

이다.

$$-3 < x < -1 \text{에서 } h(x) > 0$$

$$\text{또 } -1 < x < 1 \text{에서}$$

$$h(x) = f(x) \times (x+2) \text{이므로}$$

$$h'(x) = f'(x) \times (x+2) + f(x)$$

$$f'(x) < 0, x+2 > 0, f(x) < 0 \text{이므로}$$

$$h'(x) < 0$$

즉, $-1 < x < 1$ 에서 함수 $h(x)$ 는 감소하고, $f(1) = 3$ 이므로

함수 $h(x)$ 는 최솟값을 갖지 않는다.

(거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

정답 ①

[다른 풀이]

ㄴ. <반례>

$f(x) = 2$ 라 하자.

$$-3 < x < -1 \text{일 때, } h(x) = x \times 2 = 2x$$

$$x = -1 \text{일 때, } h(x) = 2 \times 1 = 2$$

$$-1 < x < 1 \text{일 때, } h(x) = 2(x+2)$$

이때,

$$\lim_{x \rightarrow -1-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} 2x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} 2(x+2) = 2$$

$$h(-1) = 2$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1+} h(x)$$

이다.

즉, 함수 $h(x)$ 는 $x = -1$ 에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. <반례>

$f(x) = -x - 3$ 이라 하자.

$$x < -3 \text{일 때, } h(x) = x(x+2)$$

$$x = -3 \text{일 때, } h(x) = -3 \times (-2) = 6$$

$$-3 < x < -1 \text{일 때,}$$

$$h(x) = x \times \{-(x+2) - 3\} = -x(x+5)$$

$$x = -1 \text{일 때, } h(-1) = -2 \times 1 = -2$$

$$-1 < x < 1 \text{일 때,}$$

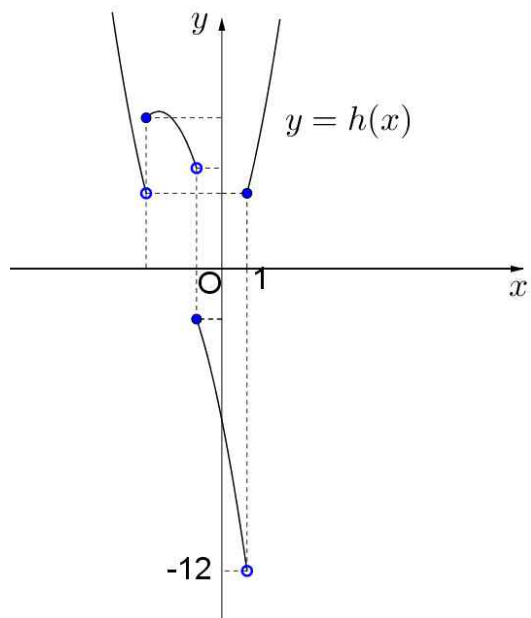
$$h(x) = (-x-3) \times (x+2) = -(x+3)(x+2)$$

$$x = 1 \text{일 때, } h(x) = 1 \times 3 = 3$$

$$x > 1 \text{일 때, } h(x) = x(x+2)$$

$$\text{이때, } \lim_{x \rightarrow 1-} h(x) = -12, h(1) = 3 \text{이므로}$$

함수 $h(x)$ 의 최솟값은 없다. (거짓)



15. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 a_9 의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i) a_6 이 3의 배수인 경우

$a_7 = 40$ 이므로

$$\frac{a_6}{3} = a_7$$

$$a_6 = 3a_7 = 3 \times 40 = 120$$

$a_7 = 40$ 이 3의 배수가 아니므로

$$a_8 = a_6 + a_7 = 120 + 40 = 160$$

$a_8 = 160$ 이 3의 배수가 아니므로

$$a_9 = a_7 + a_8 = 40 + 160 = 200$$

(ii) $a_6 = 3k - 2$ (k 는 자연수)인 경우

$$a_5 + a_6 = a_7$$

$$a_5 = a_7 - a_6$$

$$= 40 - (3k - 2)$$

$$= 42 - 3k$$

$$= 3(14 - k)$$

a_5 는 자연수이므로

$$3(14 - k) > 0 \text{에서}$$

$$k < 14$$

한편, a_5 는 3의 배수이므로

$$a_6 = \frac{a_5}{3}$$

$$\text{즉, } 3k - 2 = \frac{3(14 - k)}{3} \text{에서}$$

$$4k = 16$$

$$k = 4$$

따라서

$$a_6 = 3 \times 4 - 2 = 10$$

이므로

$$\begin{aligned} a_8 &= a_6 + a_7 \\ &= 10 + 40 \\ &= 50 \end{aligned}$$

$a_8 = 50$ 이 3의 배수가 아니므로

$$\begin{aligned} a_9 &= a_7 + a_8 \\ &= 40 + 50 \\ &= 90 \end{aligned}$$

(iii) $a_6 = 3k - 1$ (k 는 자연수)인 경우

$$a_5 + a_6 = a_7$$

$$a_5 = a_7 - a_6$$

$$= 40 - (3k - 1)$$

$$= 41 - 3k$$

a_5 는 자연수이므로

$$41 - 3k > 0 \text{에서}$$

$$k < \frac{41}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

한편, a_5 는 3의 배수가 아니므로

$$a_4 + a_5 = a_6 \text{에서}$$

$$a_4 = a_6 - a_5$$

$$= (3k - 1) - (41 - 3k)$$

$$= 6k - 42$$

$$= 3(2k - 14)$$

a_4 가 자연수이므로

$$3(2k - 14) > 0 \text{에서}$$

$$k > 7 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 에서

$$7 < k < \frac{41}{3}$$

한편, a_4 는 3의 배수이므로

$$a_5 = \frac{a_4}{3}$$

$$\text{즉, } 41 - 3k = \frac{3(2k - 14)}{3} \text{에서}$$

$$5k = 55$$

$$k = 11$$

따라서

$$a_6 = 3 \times 11 - 1 = 32$$

이므로

$$\begin{aligned} a_8 &= a_6 + a_7 \\ &= 32 + 40 \\ &= 72 \end{aligned}$$

$a_8 = 72$ 가 3의 배수이므로

$$a_9 = \frac{a_8}{3} = \frac{72}{3} = 24$$

(i), (ii), (iii)에서 a_9 의 최댓값은 $M=200$ 이고 최솟값은 $m=24$ 이다.

따라서

$$M+m=200+24=224$$

정답 ⑤

16. 출제의도 : 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$$\log_2(3x+2) = 2 + \log_2(x-2)$$

에서

$$\log_2(3x+2) = \log_2 2^2 + \log_2(x-2)$$

$$\log_2(3x+2) = \log_2\{4 \times (x-2)\}$$

이므로

$$3x+2 = 4(x-2)$$

$$3x+2 = 4x-8$$

$$x = 10$$

정답 10

17. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int (4x^3 - 2x) dx$$

$$= x^4 - x^2 + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

이때 $f(0) = 3$ 이므로 $C = 3$

따라서

$$f(x) = x^4 - x^2 + 3 \text{이므로}$$

$$f(2) = 16 - 4 + 3 = 15$$

정답 15

18. 출제의도 : 수열의 합의 기호의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^5 (3a_k + 5) = 55 \text{에서}$$

$$3 \sum_{k=1}^5 a_k + 25 = 55$$

$$\sum_{k=1}^5 a_k = 10$$

$$\sum_{k=1}^5 (a_k + b_k) = 32 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 b_k = 32$$

따라서

$$\sum_{k=1}^5 b_k = - \sum_{k=1}^5 a_k + 32$$

$$= -10 + 32$$

$$= 22$$

정답 22

19. 출제의도 : 근의 조건이 주어진 방정식에서 미분을 이용하여 정수 k 를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

방정식

$$2x^3 - 6x^2 + k = 0 \quad \text{----} \textcircled{A}$$

에서

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + k$$

라 하면 방정식의 실근은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축이 만나는 점의 x 좌표이다.

한편,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 12x \\ &= 6x(x-2) \end{aligned}$$

이므로

$$f'(x) = 0$$

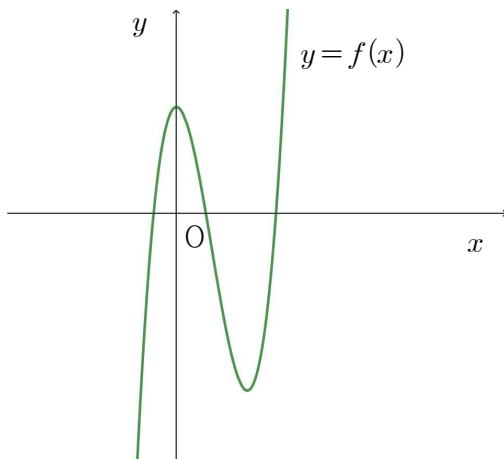
에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=2$$

그러므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	k	\searrow	$k-8$	\nearrow

이때, ㉠이 2개의 서로 다른 양의 실근을 갖기 위해서는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 양수이어야 하고 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 음수이어야 한다.

그러므로

$$k > 0 \text{ 이고 } k-8 < 0$$

이므로

$$0 < k < 8$$

따라서, 정수 k 는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7로 그 개수는 7이다.

정답 7

20. 출제의도 : 속도와 가속도를 이용하여 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$t \geq 2$ 일 때

$$v(t) = 3t^2 + 4t + C \text{ (C는 적분상수)}$$

이때 $v(2)=0$ 이므로

$$12 + 8 + C = 0 \text{에서 } C = -20$$

즉, $0 \leq t \leq 3$ 에서

$$v(t) = \begin{cases} 2t^3 - 8t & (0 \leq t \leq 2) \\ 3t^2 + 4t - 20 & (2 \leq t \leq 3) \end{cases}$$

따라서 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_0^3 |v(t)| dt \\ &= \int_0^2 |v(t)| dt + \int_2^3 |v(t)| dt \\ &= -\int_0^2 v(t) dt + \int_2^3 v(t) dt \\ &= -\int_0^2 (2t^3 - 8t) dt + \int_2^3 (3t^2 + 4t - 20) dt \\ &= -\left[\frac{1}{2}t^4 - 4t^2\right]_0^2 + [t^3 + 2t^2 - 20t]_2^3 \\ &= -(-8) + 9 \\ &= 17 \end{aligned}$$

정답 17

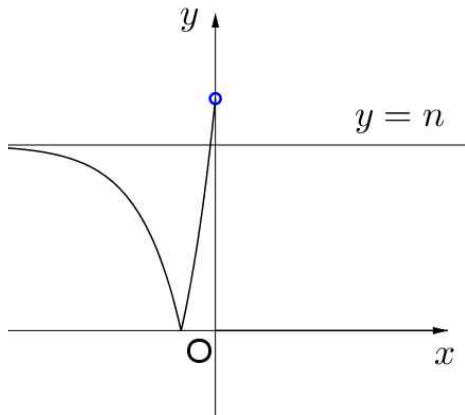
21. 출제의도 : 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 자연수의 값의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

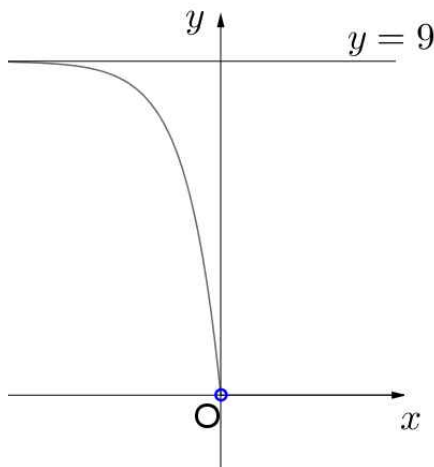
함수 $y = 3^{x+2} - n$ 의 그래프는 함수 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 $-n$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

함수 $y = |3^{x+2} - n|$ 의 그래프는 점 $(0, |9 - n|)$ 을 지나고 점근선의 방정식은 $y = n$ 이다.

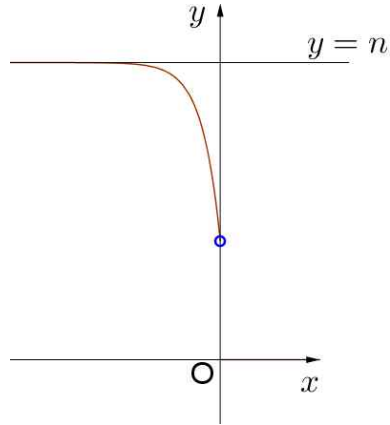
$x < 0$ 일 때, 자연수 n 의 값에 따른 함수 $y = |3^{x+2} - n|$ 의 그래프는 다음과 같다.
 $1 \leq n < 9$ 일 때,



$n = 9$ 일 때,



$n > 9$ 일 때,

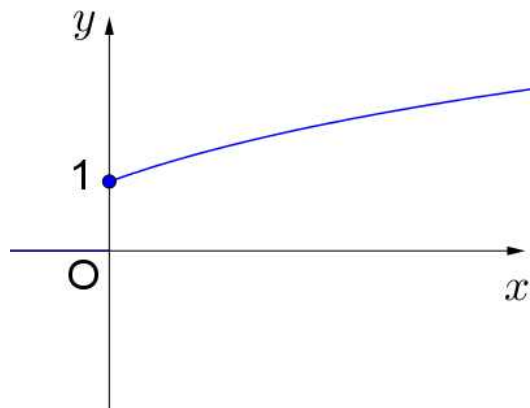


또, 함수 $y = \log_2(x+4) - n$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 $-n$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

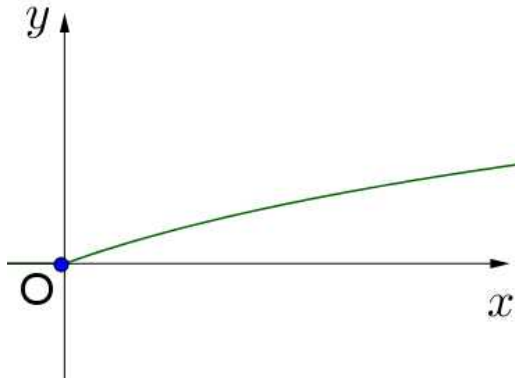
함수 $y = |\log_2(x+4) - n|$ 의 그래프는 점 $(0, |2 - n|)$ 을 지나고 점근선의 방정식은 $x = -4$ 이다.

$x \geq 0$ 일 때, 자연수 n 의 값에 따른 함수 $y = |\log_2(x+4) - n|$ 의 그래프는 다음과 같다.

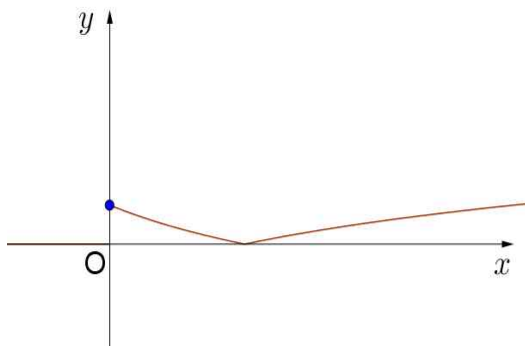
$n = 1$ 일 때,



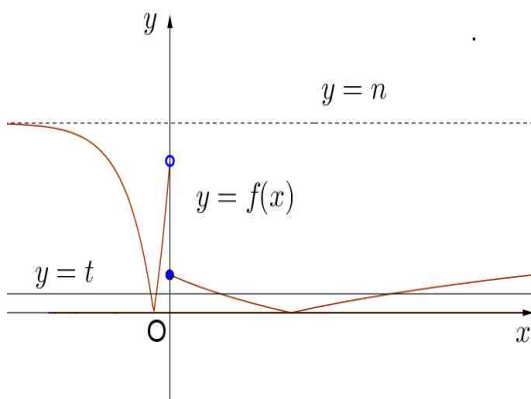
$n=2$ 일 때,



$n > 2$ 일 때,



x 에 대한 방정식 $f(x)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수 $g(t)$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 만나는 점의 개수와 같다.



함수 $g(t)$ 의 최댓값이 4이므로 $9-n > 0$ 이고 $2-n < 0$ 이어야 한다.
즉, $2 < n < 9$ 이다.

따라서 자연수 n 의 값은

3, 4, 5, 6, 7, 8

이고, 그 합은

$$3+4+5+6+7+8=33$$

이다.

정답 33

22. 출제의도 : 평균값의 정리와 접선의 방정식을 이용하여 함수 $f(x)$ 를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

최고차항의 계수가 1이고 $f(0) = -3$ 이므로

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3$$

이라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

조건 (가)에서

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(g(x))$$

이므로 $x \neq 1$ 일 때,

$$f'(g(x)) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \quad \text{----} \textcircled{7}$$

이때, 두 점 $(1, f(1))$, $(x, f(x))$ 를 지나는 직선의 기울기가 $f'(g(x))$ 이고

조건(나)에서 $g(x) \geq \frac{5}{2}$ 이므로 두 점

$(1, f(1))$, $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$ 를 지나는 직선은

점 $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$ 에서 접하는 직선이다.

그러므로 직선

$$y - f\left(\frac{5}{2}\right) = f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

는 점 $(1, f(1))$ 을 지난다,

즉,

$$1 + a + b - 3 - \left\{ \left(\frac{5}{2}\right)^3 + a\left(\frac{5}{2}\right)^2 + b\left(\frac{5}{2}\right) - 3 \right\}$$

$$= \left\{ 3 \times \left(\frac{5}{2} \right)^2 + 5a + b \right\} \left(1 - \frac{5}{2} \right)$$

이 식을 정리하면

$$-\frac{117}{8} - \frac{21}{4}a - \frac{3}{2}b = \left(\frac{75}{4} + 5a + b \right) \left(-\frac{3}{2} \right)$$

$$\frac{9}{4}a = -\frac{108}{8}$$

$$a = -6$$

그러므로

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + bx - 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + b$$

한편, ㉠에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

이때, $g(x)$ 는 연속함수이므로 $g(1) = k$ 라 하면 좌변은

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(g(x))$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \{ 3\{g(x)\}^2 - 12g(x) + b \}$$

$$= 3k^2 - 12k + b \quad \text{-----㉡}$$

또, 우변은

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= f'(1)$$

$$= 3 - 12 + b$$

$$= b - 9 \quad \text{-----㉢}$$

㉡과 ㉢으로부터

$$3k^2 - 12k + b = b - 9$$

$$3k^2 - 12k + 9 = 0$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$

$$(k-1)(k-3) = 0$$

$$k = 1 \text{ 또는 } k = 3$$

즉,

$$g(1) = 1 \text{ 또는 } g(1) = 3$$

이때, $g(1) = 1$ 은 $g(x)$ 가 최솟값 $\frac{5}{2}$ 를 갖는다는 것에 모순이다.

그러므로

$$g(1) = 3$$

한편, 조건 (다)에서 $f(g(1)) = 6$ 이므로

$$f(3) = 6$$

$$27 - 54 + 3b - 3 = 6$$

$$3b = 36$$

$$b = 12$$

따라서,

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 3$$

이므로

$$f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 12 \times 4 - 3 = 13$$

정답 13

[다른 풀이 1]

두 점 $(1, f(1)), \left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right) \right)$ 를 지나는 직선

$$y - f\left(\frac{5}{2}\right) = f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

는 점 $\left(\frac{5}{2}, f\left(\frac{5}{2}\right) \right)$ 에서 접하는 직선이다.

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x) - \left\{ f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right) \right\}$$

$$= (x-1)\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \quad \text{-----㉣}$$

이다.

조건 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} f'(g(x))$$

이고 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$f'(1) = f'(g(1))$$

이다.

㉣의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) - f'\left(\frac{5}{2}\right) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 2(x-1)\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

$$= 3\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) \text{ ----- } \textcircled{D}$$

이고 $g(1) = k \left(k \geq \frac{5}{2}\right)$ 라 하면

$$f'(1) = f'(k)$$

이므로 \textcircled{D} 에서

$$f'(1) - f'\left(\frac{5}{2}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

이고

$$f'(k) - f'\left(\frac{5}{2}\right) = 3\left(k - \frac{3}{2}\right)\left(k - \frac{5}{2}\right)$$

에서

$$3\left(k - \frac{3}{2}\right)\left(k - \frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

이므로

$$k = 3$$

따라서

$$f'(1) = f'(3) = \alpha \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3(x-1)(x-3) + \alpha$$

$$= 3x^2 - 12x + 9 + \alpha$$

양변을 x 에 대하여 부정적분하면

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + (9 + \alpha)x + C$$

(단, C 는 적분상수)

조건 (다)에서 $f(0) = -3$, $f(3) = 6$ 이므로

$$C = -3, \alpha = 3$$

그러므로

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 3$$

따라서

$$f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 12 \times 4 - 3 = 13$$

[다른 풀이 2]

조건 (다)에서 $f(0) = -3$ 이므로 두 상수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3$$

한편, 조건 (가)에서

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(g(x))$$

이므로

$$f(x) - f(1)$$

$$= (x^3 + ax^2 + bx - 3) - (1 + a + b - 3)$$

$$= x^3 - 1 + a(x^2 - 1) + b(x - 1)$$

$$= (x-1)\{x^2 + x + 1 + a(x+1) + b\}$$

$$= (x-1)\{x^2 + (a+1)x + a + b + 1\}$$

즉,

$$f'(g(x)) = x^2 + (a+1)x + a + b + 1 \text{ ----- } \textcircled{E}$$

그리고

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \text{이고}$$

$g(x) = y$ 라 하면

$$3y^2 + 2ay + b = x^2 + (a+1)x + a + b + 1$$

따라서 y 에 대하여 정리하면

$$3y^2 + 2ay - \{x^2 + (a+1)x + a + 1\} = 0$$

이고 y 에 대하여 풀면

$$y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 3\{x^2 + (a+1)x + a + 1\}}}{3}$$

이고 근호 안을 정리하면

$$\begin{aligned} D/4 &= 3\left\{x^2 + (a+1)x + \frac{1}{3}a^2 + a + 1\right\} \\ &= 3\left\{\left(x + \frac{a+1}{2}\right)^2 + \frac{(a+3)^2}{12}\right\} \end{aligned}$$

따라서

$$g(x) = \frac{-a \pm \sqrt{3\left\{\left(x + \frac{a+1}{2}\right)^2 + \frac{(a+3)^2}{12}\right\}}}{3}$$

즉,

$y = g(x)$ 의 그래프는 $y = \pm k\sqrt{x^2 + l}$ (k, l 은 상수)의 그래프를 평행이동한 그래프이다.

이때 함수 $g(x)$ 가 최솟값을 가지므로

$$g(x) = \frac{-a + \sqrt{3\left\{\left(x + \frac{a+1}{2}\right)^2 + \frac{(a+3)^2}{12}\right\}}}{3}$$

이고, $g(x)$ 는 $x = -\frac{a+1}{2}$ 에서 최솟값

$$\frac{-a + \sqrt{\frac{(a+3)^2}{4}}}{3} = \frac{-a + \frac{|a+3|}{2}}{3} \text{을 가진}$$

다.

따라서

(i) $a \geq -3$ 인 경우

$$\frac{-a + \frac{|a+3|}{2}}{3} = \frac{-a + \frac{a+3}{2}}{3} = \frac{-a+3}{6} = \frac{5}{2}$$

에서 $a = -12$ 인데 $a \geq -3$ 을 만족하지 않는다.

(ii) $a < -3$ 인 경우

$$\frac{-a + \frac{|a+3|}{2}}{3} = \frac{-a - \frac{a+3}{2}}{3} = \frac{-3a-3}{6} = \frac{5}{2}$$

에서 $a = -6$

(i).(ii)에 의해 $a = -6$

그러므로

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + bx - 3 \quad \text{----}\textcircled{A}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + b \quad \text{----}\textcircled{B}$$

한편, \textcircled{B} 에서 $f'(x)$ 와 $g(x)$ 가 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$f'(g(1)) = f'(1)$$

이때, $g(1) = k$ 라 하면 \textcircled{B} 으로부터

$$3k^2 - 12k + b = -9 + b$$

$$3k^2 - 12k + 9 = 0$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$

$$(k-1)(k-3) = 0$$

$$k = 1 \text{ 또는 } k = 3$$

즉,

$$g(1) = 1 \text{ 또는 } g(1) = 3$$

이때, $g(1) = 1$ 은 $g(x)$ 가 최솟값 $\frac{5}{2}$ 를 갖

는다는 것에 모순이다.

그러므로

$$g(1) = 3$$

한편, 조건 (다)에서 $f(g(1)) = 6$ 이므로

$$f(3) = 6$$

이것을 \textcircled{A} 에 대입하면

$$27 - 54 + 3b = 9$$

$$3b = 36$$

$$b = 12$$

따라서,

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 3$$

이므로

$$f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 12 \times 4 - 3 = 13$$

■ [선택: 미적분]

23. ④ 24. ③ 25. ⑤ 26. ④ 27. ②
28. ② 29. 26 30. 31

23. 출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+4}-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \ln(x+1) \times \frac{1}{\sqrt{x+4}-2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{x}{\sqrt{x+4}-2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(x+1)}{x} \right. \\ & \quad \left. \times \frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(x+1)}{x} \times (\sqrt{x+4}+2) \right\} \\ &= 1 \times (2+2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

정답 ④

24. 출제의도 : 급수와 정적분의 관계를 이용하여 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{3k}{n}} \\ &= \int_0^1 \sqrt{1+3x} dx \\ &= \left[\frac{2}{9} (1+3x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{9} (8-1) \end{aligned}$$

$$= \frac{14}{9}$$

정답 ③

25. 출제의도 : 등비수열이 포함된 식의 극한값을 이용하여 수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_n = ar^{n-1}$ 이다.

이때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 1}{3^n + 2^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \times \frac{r^{n-1}}{4^n} + \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}}$$

이고 극한값이 3으로 존재하므로

$$r = 4$$

따라서,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 1}{3^n + 2^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{a}{4} + 0}{0 + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{a}{2} = 3$$

에서 $a = 6$ 이므로

$$a_2 = 6 \times 4 = 24$$

정답 ⑤

26. 출제의도 : 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ 인 실수 t 에 대하여 직선 $x=t$ 를 포함하고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$ 라 하면 $S(t) = (\sqrt{\sec^2 t + \tan t})^2 = \sec^2 t + \tan t$ 이므로 구하는 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 t + \tan t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sec^2 x + \frac{\sin x}{\cos x} \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left\{ \sec^2 x - \frac{(\cos x)'}{\cos x} \right\} dx \\ &= [\tan x - \ln |\cos x|]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \tan \frac{\pi}{3} - \ln \cos \frac{\pi}{3} \\ &= \sqrt{3} - \ln \frac{1}{2} = \sqrt{3} + \ln 2 \end{aligned}$$

정답 ④

27. 출제의도 : 무한히 반복되는 도형에서 넓이의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{OC_1} = 3t$, $\overline{OD_1} = 4t$ ($t > 0$)라 하면

$\overline{OP_1} = 5t$ 이므로

$5t = 1$ 에서 $t = \frac{1}{5}$

따라서, $\overline{OC_1} = \frac{3}{5}$ 에서 $\overline{A_1C_1} = \frac{2}{5}$ 이고

$\overline{C_1P_1} = \overline{OD_1} = \frac{4}{5}$

이므로

$$\overline{A_1P_1} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

이때 삼각형 $P_1Q_1A_1$ 은 직각이등변삼각형

이므로

$$\overline{A_1Q_1} = \overline{P_1Q_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

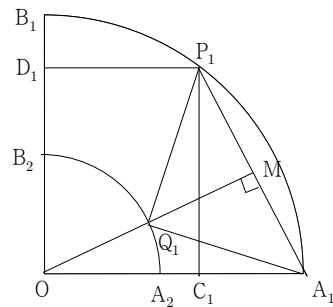
따라서

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \right)^2 = \frac{1}{5}$$

또한, 선분 A_1P_1 의 중점을 M 이라 하면

$$\overline{A_1P_1} \perp \overline{Q_1M}, \overline{A_1P_1} \perp \overline{OM}$$

이므로 세 점 O, Q_1, M 은 한 직선 위에 있다.



이때,

$$\overline{OM} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\overline{Q_1M} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

이므로

$$\overline{OQ_1} = \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

따라서 두 도형(부채꼴) OA_1B_1, OA_2B_2

의 닮음비는 $1 : \frac{1}{\sqrt{5}}$ 이므로 넓이의 비

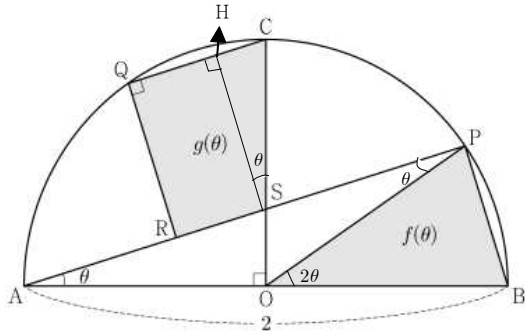
는 $1 : \frac{1}{5}$ 이다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

정답 ②

28. 출제의도 : 도형과 관련된 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$\angle OAP = \angle OPA = \theta$ 이므로

$\angle BOP = 2\theta$

따라서

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

또한, $\overline{OA} = 1$ 에서 $\overline{OS} = \tan \theta$ 이므로

$$\overline{CS} = 1 - \tan \theta$$

이때, $\angle BOP = \angle COQ = 2\theta$ 이고 삼각형 OCQ는 이등변삼각형이므로

$$\angle SCQ = \frac{\pi}{2} - \theta$$

또한, $\angle CSR = \theta + \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\angle QRS = \frac{\pi}{2}$$

따라서 점 S에서 변 CQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\angle CSH = \theta$$

이므로

$$\overline{SH} = \overline{RQ} = (1 - \tan \theta) \cos \theta$$

$$\overline{CH} = (1 - \tan \theta) \sin \theta$$

이고

$$\overline{CQ} = \overline{BP} = 2 \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \overline{RS} &= \overline{QH} = \overline{CQ} - \overline{CH} \\ &= 2 \sin \theta - (\sin \theta - \sin \theta \tan \theta) \end{aligned}$$

$$= \sin \theta + \sin \theta \tan \theta$$

따라서

$$g(\theta)$$

$$= \frac{1}{2} \times (\overline{CQ} + \overline{RS}) \times \overline{QR}$$

$$= \frac{1}{2} \times (2 \sin \theta + \sin \theta + \sin \theta \tan \theta)$$

$$\times (1 - \tan \theta) \cos \theta$$

$$= \frac{1}{2} \times (3 \sin \theta + \sin \theta \tan \theta) (1 - \tan \theta) \cos \theta$$

이므로

$$3f(\theta) - 2g(\theta)$$

$$= \frac{3}{2} \sin 2\theta - (3 \sin \theta + \sin \theta \tan \theta) (1 - \tan \theta) \cos \theta$$

$$= 3 \sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos \theta (3 + \tan \theta) (1 - \tan \theta)$$

$$= \sin \theta \cos \theta \tan \theta (\tan \theta + 2)$$

따라서

$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{3f(\theta) - 2g(\theta)}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sin \theta \cos \theta \tan \theta (\tan \theta + 2)}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \frac{\sin \theta}{\theta} \times \frac{\tan \theta}{\theta} \times \cos \theta \times (\tan \theta + 2) \right\}$$

$$= 1 \times 1 \times 1 \times 2 = 2$$

정답 ②

29. 출제의도 : 여러 가지 조건을 만족시키는 함수를 구한 후 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + 6}{e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ae^{2x} + be^x + c + 6}{e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(ae^x + b + \frac{c+6}{e^x} \right) = 1$$

따라서, $b=1$, $c=-6$ 이므로

$$f(x) = ae^{2x} + e^x - 6$$

조건 (나)에서

$$f(\ln 2) = ae^{2\ln 2} + e^{\ln 2} - 6 = 4a + 2 - 6 = 0$$

$$a = 1$$

$$\text{즉, } f(x) = e^{2x} + e^x - 6$$

이때 $f(k) = 14$ 라 하면

$$f(k) = e^{2k} + e^k - 6 = 14$$

에서

$$e^{2k} + e^k - 20 = (e^k + 5)(e^k - 4) = 0$$

이므로

$$e^k = 4$$

$$\text{즉, } k = \ln 4$$

따라서 $f(\ln 2) = 0$, $f(\ln 4) = 14$ 이므로

$$g(0) = \ln 2, \quad g(14) = \ln 4$$

따라서, $\int_0^{14} g(x)dx$ 에서 $g(x) = t$ 로 놓으

$$\text{면 } g'(x) = \frac{dt}{dx} \text{ 이고}$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f'(t)}$$

이므로

$$\int_0^{14} g(x)dx$$

$$= \int_{\ln 2}^{\ln 4} tf'(t)dt$$

$$= [tf(t)]_{\ln 2}^{\ln 4} - \int_{\ln 2}^{\ln 4} f(t)dt$$

$$= 14\ln 4 - \int_{\ln 2}^{\ln 4} (e^{2t} + e^t - 6)dt$$

$$= 14\ln 4 - \left[\frac{1}{2}e^{2t} + e^t - 6t \right]_{\ln 2}^{\ln 4}$$

$$= 28\ln 2 - (8 - 6\ln 2)$$

$$= 34\ln 2 - 8$$

따라서 $p = -8$, $q = 34$ 이므로

$$p + q = 26$$

30. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구한 후 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a > 0$, b, c, d 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

이므로

$$f(3) = 27a + 9b + 3c + d = \frac{1}{2} \cdots \textcircled{A}$$

$$f'(3) = 27a + 6b + c = 0 \cdots \textcircled{B}$$

조건 (가)에서

$$h(0) = g(f(0)) = g(d) = e^{\sin \pi d} - 1 = 0$$

$$e^{\sin \pi d} = 1, \quad \sin \pi d = 0$$

이므로 d 는 정수이다.

또한,

$$g'(x) = e^{\sin \pi x} \times \pi \cos \pi x$$

$$h'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

이므로

$$h'(0) = g'(f(0)) \times f'(0)$$

$$= g'(d) \times c$$

$$= e^{\sin \pi d} \times \pi \cos \pi d \times c$$

$$= \pi \cos \pi d \times c = 0$$

그런데, $\cos \pi d \neq 0$ 이므로 $c = 0$

따라서, \textcircled{A} , \textcircled{B} 에서

$$27a + 9b + d = \frac{1}{2} \cdots \textcircled{C}, \quad 9a + 2b = 0 \cdots \textcircled{D}$$

이고 $a > 0$ 이므로 $b < 0$ 이고

$\textcircled{C} - 3 \times \textcircled{D}$ 에서

$$3b + d = \frac{1}{2}$$

따라서 $d > 0$ 이므로 d 는 자연수이다.

또한, $f'(0) = c = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극댓값이 $f(0) = d$, $x = 3$ 에서

극솟값이 $\frac{1}{2}$ 이다.

정답 26

즉, $0 < x < 3$ 에서 $f(3) < f(x) < f(0)$

이므로

$$\frac{1}{2} < f(x) < d$$

$$\frac{\pi}{2} < \pi f(x) < \pi d$$

그런데 조건 (나)에 의하여 열린구간 $(0,3)$ 에서 방정식

$$h(x) = g(f(x)) = e^{\sin \pi f(x)} - 1 = 1$$

즉,

$$e^{\sin \pi f(x)} = 2, \quad \sin \pi f(x) = \ln 2 (0 < \ln 2 < 1)$$

의 서로 다른 실근의 개수가 7이기

위해서는 함수 $y = \sin \pi t$ 의 주기는

2이므로

$$d = 8$$

㉠, ㉡에서

$$a = \frac{5}{9}, \quad b = -\frac{5}{2}$$

이므로

$$f(x) = \frac{5}{9}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 8$$

따라서

$$f(2) = \frac{40}{9} - 10 + 8 = \frac{22}{9}$$

즉, $p = 9, q = 22$ 이므로

$$p + q = 31$$

정답 31