• 수학 영역 •

정 답

1	②	2	①	3	④	4	①	5	⑤
6	③	7	④	8	②	9	④	10	③
11	②	12	①	13	⑤	14	③	15	⑤
16	④	17	②	18	③	19	⑤	20	①
21	⑤	22	9	23	7	24	20	25	15
26	10	27	12	28	24	29	11	30	6

해 설

1. [출제의도] 복소수 계산하기

$(-2+4i)-3i=-2+(4-3)i=-2+i$

2. [출제의도] 다항식 계산하기

$A-B=(3x^2+4x-2)-(x^2+x+3)$

$=2x^2+3x-5$

3. [출제의도] 인수정리 이해하기

$P(x)=x^3+ax-8$ 이라 하자.

$P(x)$ 가 $x-1$ 로 나누어떨어지므로 $P(1)=0$ 이다.

$P(1)=1+a-8=0$ 이다.

따라서 $a=7$ 이다.

4. [출제의도] 이차부등식 이해하기

주어진 해가 $2\le x\le 3$ 이고 x^2 의 계수가 1 이므로

이차부등식은 $(x-2)(x-3)\le 0$ 이다.

따라서 $x^2-5x+6\le 0$ 이므로 $a=-5$ 이다.

5. [출제의도] 항등식의 성질 이해하기

x 에 대한 항등식이므로 $x=-4$ 를 대입하면

$16-20+a=0$ 이므로 $a=4$ 이다.

$x^2+5x+4=(x+4)(x+1)$ 이므로 $b=1$ 이다.

따라서 $a+b=5$ 이다.

[다른 풀이]

$(x+4)(x+b)=x^2+(4+b)x+4b$ 이다.

$x^2+5x+a=x^2+(4+b)x+4b$ 의 양변의 계수를 비교하면 $5=4+b$, $a=4b$ 이다.

따라서 $b=1$, $a=4$ 이므로 $a+b=5$ 이다.

6. [출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식 계산하기

부등식 $|x-3|\le 2$ 를 풀면

$-2\le x-3\le 2$, $1\le x\le 5$ 이다.

부등식을 만족시키는 정수 x 의 값은

1, 2, 3, 4, 5 이다.

따라서 모든 정수 x 의 값의 합은

$1+2+3+4+5=15$ 이다.

7. [출제의도] 인수분해를 이용하여 도형 문제 해결하기

한 변의 길이가 $a+6$ 인 정사각형 모양의 색종이의 넓이는 $(a+6)^2$ 이다.

한 변의 길이가 a 인 정사각형 모양의 색종이를 오려 낸 후 남아 있는 ▣ 모양의 색종이의 넓이는

$(a+6)^2-a^2=(a+6+a)(a+6-a)=6(2a+6)$

$=12(a+3)$ 이다.

따라서 $k=12$ 이다.

8. [출제의도] 다항식의 곱셈 이해하기

$k=2019$ 라 하면

$2016\times2019\times2022=(k-3)k(k+3)=k^3-9k$

$=2019^3-9\times2019$ 이다.

따라서 $a=2019$ 이다.

9. [출제의도] 인수분해 계산하기

$x^2y+xy^2+x+y=xy(x+y)+(x+y)$

$=(x+y)(xy+1)$ 이다.

$x+y=2\sqrt{3}$, $xy=1$ 이므로

$x^2y+xy^2+x+y=2\sqrt{3}\times2=4\sqrt{3}$ 이다.

10. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계 이해하기

이차함수 $y=x^2+5x+2$ 의 그래프와

직선 $y=-x+k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면

이차방정식 $x^2+5x+2=-x+k$ 는 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+6x+2-k=0$ 의 판별식

$D>0$ 이어야 하므로

판별식 $D=6^2-4(2-k)=28+4k>0$ 에서

$k>-7$ 이다.

따라서 정수 k 의 최솟값은 -6 이다.

11. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 다항식의 나눗셈 문제 해결하기

다항식 x^3-x^2-ax+5 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)$, 나머지는 5 이므로

$x^3-x^2-ax+5=(x-2)Q(x)+5$ 이다.

나머지정리에 의해 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$8-4-2a+5=5$ 이므로 $a=2$ 이다.

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -1 & -2 & 5 \\ & & 2 & 2 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & \boxed{5} \end{array}$$

$x^3-x^2-2x+5=(x-2)(x^2+x)+5$ 이다.

따라서 $Q(x)=x^2+x$ 이므로

$Q(a)=Q(2)=4+2=6$ 이다.

12. [출제의도] 다항식의 곱셈공식을 이용하여 문제 해결하기

$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ 이므로

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$ 이다.

$x-y=3$, $x^3-y^3=18$ 을 대입하면

$18=27+9xy$ 이므로 $xy=-1$ 이다.

따라서 $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=3^2-2=7$ 이다.

[다른 풀이]

$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$=(x-y)\{(x-y)^2+3xy\}$ 이다.

$x-y=3$, $x^3-y^3=18$ 을 대입하면

$18=3\times(9+3xy)$ 이므로 $xy=-1$ 이다.

따라서 $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=3^2-2=7$ 이다.

13. [출제의도] 복소수의 연산을 이용하여 문제 해결하기

$\alpha=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$ 이고

$\beta=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$ 이다.

따라서

$(1-2\alpha)(1-2\beta)=(1+2i)(1-2i)=1-4i^2=5$

이다.

14. [출제의도] 다항식을 이용하여 통합 교과적 문제 해결하기

망원경 A 의 구경을 D_1, 집광력을 F_1,

망원경 B 의 구경을 D_2, 집광력을 F_2 라 하자.

$D_1=40$, $D_2=x$ 이므로

$F_1=kD_1^2=1600k$ 이고

$F_2=kD_2^2=kx^2$ 이다.

망원경 A 의 집광력 F_1 은 망원경 B 의 집광력 F_2 의 2 배이므로 $F_1=2F_2$ 이다.

$1600k=2kx^2$ 이므로 $x^2=800$ 이다.

따라서 $x>0$ 이므로 $x=20\sqrt{2}$ 이다.

15. [출제의도] 연립일차부등식을 이용하여 문제 해결하기

부등식을 각각 풀면 $x>1$ 이고 $x<\frac{a+1}{3}$ 이다.

연립부등식의 해가 존재해야 하므로

연립부등식의 해는 $1<x<\frac{a+1}{3}$ 이어야 한다.

연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x 의 값의 합이 9 가 되어야 하므로 정수 x 의 값은 2, 3, 4 이다.

$4<\frac{a+1}{3}\le 5$ 가 되어야 하므로 $11<a\le 14$ 이다.

따라서 자연수 a 의 최댓값은 14 이다.

16. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 문제 해결하기

근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-1$ 이다.

따라서

$\beta P(\alpha)+\alpha P(\beta)$

$=\beta(2\alpha^2-3\alpha)+\alpha(2\beta^2-3\beta)$

$=2\alpha\beta(\alpha+\beta)-6\alpha\beta$

$=2\times(-1)\times(-1)-6\times(-1)=8$ 이다.

17. [출제의도] 인수분해를 이용하여 문제 해결하기

$x^2-x=X$ 라 두자.

$(x^2-x)(x^2-x+3)+k(x^2-x)+8$

$=(x^2-x+a)(x^2-x+b)$ 에서

$X(X+3)+kX+8=(X+a)(X+b)$

$X^2+(k+3)X+8=X^2+(a+b)X+ab$ 이다.

양변의 계수를 비교하면

$k+3=a+b$, $ab=8$ 이다.

a, $b\,(a<b)$ 가 자연수이므로

$a=1$, $b=8$ 또는 $a=2$, $b=4$ 이다.

$k=a+b-3$ 이므로 $k=6$ 또는 $k=3$ 이다.

따라서 모든 상수 k 의 값의 합은 9 이다.

18. [출제의도] 연립이차방정식을 이용하여 도형 문제 추론하기

$\overline{\mathrm{AB}}=a$, $\overline{\mathrm{EF}}=b$ 이고 $\overline{\mathrm{AF}}=5$, $\overline{\mathrm{EB}}=1$ 이므로

$a+b=6$, $a=6-b$ ⋯ ①

이다.

직사각형 EBCI 의 넓이는 a, 정사각형 EFGH 의 넓이는 b^2 이므로

$a=\frac{1}{4}b^2$ ⋯ ②

이다.

①을 ②에 대입하면

$6-b=\frac{1}{4}b^2$ 이므로 $b^2+4b-24=0$ 이다.

그러므로 $b=-2\pm2\sqrt{7}$ 이다.

한편, ①과 $a<b$ 에 의해서 $6-b<b$ 이므로

$b>3$ 이다.

따라서 $b=-2+2\sqrt{7}$ 이다.

19. [출제의도] 사차방정식의 근 추론하기

(1) $a=1$ 인 경우

주어진 방정식은 $(x^2+x+1)^2=0$ 이다.

이 때, 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 근은

$x=\frac{-1\pm\sqrt{\boxed{3}}\,i}{2}$ (단, $i=\sqrt{-1}$)이므로

방정식 $(x^2+x+1)^2=0$ 의 서로 다른 허근의 개수는 2 이다.

(2) $a\ne1$ 인 경우

방정식 $x^2+ax+a=0$ 의 근은

$x=\dfrac{-a\pm\sqrt{\boxed{a(a-4)}}}{2}$ 이다.

(ⅰ) $\boxed{a(a-4)}<0$ 일 때, 방정식 $x^2+x+a=0$ 은 실근을 가져야 하므로 실수 a 의 값의 범위는

$$0<a\le\frac{1}{4}$$

이다.

(ⅱ) $\boxed{a(a-4)}\ge0$ 일 때, 방정식 $x^2+x+a=0$ 은 허근을 가져야 하므로 실수 a 의 값의 범위는

$$a\ge\boxed{4}$$

이다.

따라서 (1)과 (2)에 의하여

방정식 $(x^2+ax+a)(x^2+x+a)=0$ 의 근 중 서로 다른 허근의 개수가 2 이기 위한 실수 a 의 값의 범위는

$$0<a\le\frac{1}{4}\ \text{또는}\ a=1\ \text{또는}\ a\ge\boxed{4}$$

이다.

따라서 $p=3$, $f(a)=a(a-4)$, $q=4$ 이므로

$p+q+f(5)=3+4+5=12$ 이다.

20. [출제의도] 도형의 넓이와 이차함수의 최대, 최소 문제 해결하기

사각형 OABC 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(1+2)\times1=\frac{3}{2}$ 이다.

두 점 O, B 를 지나는 직선의 방정식은 $y=2x$ 이다.

직선 $y=k$ 와 선분 OB 의 교점 E 는 두 직선 $y=k$, $y=2x$ 의 교점이다.

그러므로 점 E 의 좌표는 $\left(\frac{k}{2},k\right)$ 이다.

$S_1=\frac{1}{2}\times\frac{k}{2}\times k=\frac{k^2}{4}$,

$S_3=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{k}{2}\right)\times(2-k)=\frac{(2-k)^2}{4}$ 이므로

$S_1-S_3=\frac{k^2}{4}-\frac{(2-k)^2}{4}=k-1$

이다.

$S_1+S_2=k$ 이므로 $S_2=k-\frac{k^2}{4}$

$S_3+S_4=\frac{3}{2}-k$ 이므로

$S_4=\left(\frac{3}{2}-k\right)-\frac{(2-k)^2}{4}=\frac{2-k^2}{4}$ 이다.

그러므로 $S_2-S_4=\left(k-\frac{k^2}{4}\right)-\frac{2-k^2}{4}=k-\frac{1}{2}$ 이다.

따라서

$(S_1-S_3)^2+(S_2-S_4)^2=(k-1)^2+\left(k-\frac{1}{2}\right)^2$

$=2k^2-3k+\frac{5}{4}$

$=2\left(k-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{8}\ (0<k<1)$ 이므로

$(S_1-S_3)^2+(S_2-S_4)^2$ 은

$k=\frac{3}{4}$ 일 때, 최솟값 $\frac{1}{8}$ 을 갖는다.

[다른 풀이]

사각형 OABC 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(1+2)\times1=\frac{3}{2}$ 이다.

$S_1+S_2=k$ ⋯ ①

이므로 $S_3+S_4=\frac{3}{2}-k$

$S_2+S_3=1$ ⋯ ②

이므로 $S_1+S_4=\frac{1}{2}$ ⋯ ③

①과 ②에서 $S_1-S_3=k-1$ 이고,

①과 ③에서 $S_2-S_4=k-\frac{1}{2}$ 이다.

그러므로

$(S_1-S_3)^2+(S_2-S_4)^2=(k-1)^2+\left(k-\frac{1}{2}\right)^2$

$=2k^2-3k+\frac{5}{4}$

$=2\left(k-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{8}\ (0<k<1)$ 이다.

따라서 $(S_1-S_3)^2+(S_2-S_4)^2$ 은

$k=\frac{3}{4}$ 일 때, 최솟값 $\frac{1}{8}$ 을 갖는다.

21. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계 추론하기

ㄱ. $a=1$ 이므로

$f(x)=(x-1)^2-1=x^2-2x$,

$g(x)=-(x-2)^2+4+b=-x^2+4x+b$ 이다.

(가)에서 $x^2-2x=-x^2+4x+b$, $2x^2-6x-b=0$ 이다.

(나)에서 $\beta=\alpha+2$ 이므로

이차방정식 $2x^2-6x-b=0$ 은 두 근 α, $\alpha+2$ 를 갖는다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+(\alpha+2)=3$, $\alpha(\alpha+2)=-\frac{b}{2}$ 이다.

$\alpha+(\alpha+2)=3$ 에서 $\alpha=\frac{1}{2}$ 이고

$\alpha(\alpha+2)=-\frac{b}{2}$ 에서 $-\frac{b}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}$ 이다.

따라서 $b=-\frac{5}{2}$ 이다. (참)

ㄴ. $f(x)=(x-a)^2-a^2$ 이므로

$f(x)$ 의 최솟값은 $f(a)=-a^2$ 이다.

$g(x)=-(x-2a)^2+4a^2+b$ 이므로

$g(x)$ 의 최댓값은 $g(2a)=4a^2+b$ 이다.

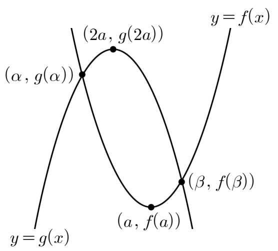
(가)에 의해 $f(\alpha)=g(\alpha)$, $f(\beta)=g(\beta)$ 이므로

두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다.

두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나므로 $g(2a)>f(a)$ 이다.

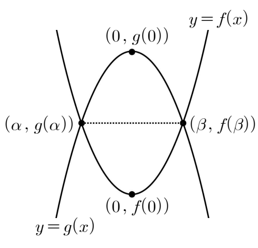
따라서 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 $a<0$, $a=0$, $a>0$ 인 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다. (다음 그림은 a 의 부호에 따른 예이다.)

(ⅰ) $a<0$ 인 경우



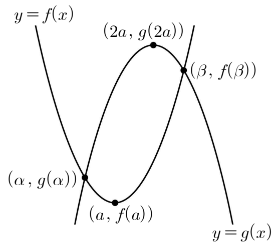
$f(\beta)-g(\alpha)=f(\beta)-f(\alpha)<g(2a)-f(a)$ 이다.

(ⅱ) $a=0$ 인 경우



$f(\beta)-g(\alpha)=f(\beta)-f(\alpha)<g(2a)-f(a)$ 이다.

(ⅲ) $a>0$ 인 경우



$f(\beta)-g(\alpha)=f(\beta)-f(\alpha)\le g(2a)-f(a)$ 이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 주어진 부등식은 성립한다. (참)

ㄷ. $g(\beta)=f(\alpha)+5a^2+b$ 에서 $g(\beta)=f(\beta)$ 이므로

$f(\beta)-f(\alpha)=5a^2+b$ 이다.

$g(2a)-f(a)=4a^2+b-(-a^2)=5a^2+b$ 이므로

$f(\beta)-f(\alpha)=g(2a)-f(a)$ ⋯ ①

이다.

①을 만족하기 위해서는 두 이차함수의 그래프의 교점은 두 이차함수의 그래프의 꼭짓점이어야 한다.

(ⅰ) $a<0$ 인 경우

ㄴ의 (ⅰ)에 의해 ①을 만족하지 않는다.

(ⅱ) $a=0$ 인 경우

ㄴ의 (ⅱ)에 의해 ①을 만족하지 않는다.

(ⅲ) $a>0$ 인 경우

$a>0$ 이므로 $a<2a$ 가 된다.

$\alpha=a$, $\beta=2a$ 이므로

$\beta-\alpha=2a-a=2$ 이고 $a=2$ 이다.

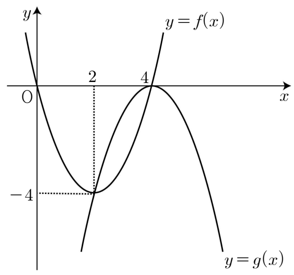
따라서

$f(x)=(x-2)^2-4$, $g(x)=-(x-4)^2+b+16$

이다.

이차함수 $g(x)$ 의 그래프가 이차함수 $f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점 $(2,\ -4)$ 를 지나야 하므로

$-4=-(-2)^2+b+16$ 이고 $b=-16$ 이다.



따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 $b=-16$ 이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ은 모두 참이다.

[다른 풀이]

ㄱ. 방정식 $f(x)=g(x)$ 에서

$2x^2-6ax-b=0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$\alpha+\beta=3a$ 이고 $\alpha\beta=-\frac{b}{2}$ 이다.

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ 이므로

$2^2=(3a)^2-4\times\left(-\frac{b}{2}\right)$, $9a^2+2b=4$ ⋯ ①

$a=1$ 을 ①에 대입하면 $9+2b=4$, $b=-\frac{5}{2}$ 이다.

(참)

ㄴ. $f(x)=(x-a)^2-a^2$ 이므로

$f(x)$ 의 최솟값은 $f(a)=-a^2$ 이다.

$g(x)=-(x-2a)^2+4a^2+b$ 이므로

$g(x)$ 의 최댓값은 $g(2a)=4a^2+b$ 이다.

따라서 $f(x)\ge-a^2=f(a)$ ⋯ ①

이고 $g(x)\le4a^2+b=g(2a)$ ⋯ ②

이다.
①에서 $-f(\alpha)\le -f(a)$
②에서 $g(\beta)\le g(2a)$ 이다.
그러므로
$f(\beta)-g(\alpha)=g(\beta)-f(\alpha)\le g(2a)-f(a)$
이다. (참)
ㄷ. $g(\beta)=f(\alpha)+5a^2+b$ 에서
$g(\beta)-f(\alpha)=5a^2+b$ 이다.
ㄴ에 의해
$g(\beta)-f(\alpha)=f(\beta)-g(\alpha)\le g(2a)-f(a)=5a^2+b$
이므로 $\beta=2a$ 이고 $\alpha=a$ 이다.
(나)에서 $\beta=\alpha+2$ 이므로 $2a=a+2$, $a=2$ 이다.
ㄱ에서 $\alpha\beta=-\frac{b}{2}$ 이므로 $b=-4a^2$ 이다.
따라서 $b=-16$ 이다. (참)

22. [출제의도] 다항식 계산하기

$(x+3)^3=x^3+9x^2+27x+27$ 이므로
x^2 의 계수는 9 이다.

23. [출제의도] 이차방정식의 판별식 이해하기

이차방정식 $x^2-2x+a-6=0$ 이 중근을 가지므로
판별식 $D=(-2)^2-4(a-6)=0$ 이다.
따라서 $a=7$ 이다.

24. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기

근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=k$, $\alpha\beta=4$ 이다.
따라서 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{k}{4}=5$ 이므로 $k=20$ 이다.

25. [출제의도] 연립이차방정식 이해하기

$x=y+5$ 이므로 $(y+5)^2-2y^2=50$ 이다.
$y^2-10y+25=0$, $(y-5)^2=0$ 이므로
$y=5$ 이고 $x=10$ 이다.
따라서 $\alpha=10$, $\beta=5$ 이므로 $\alpha+\beta=15$ 이다.

26. [출제의도] 삼차방정식의 근 이해하기

$f(x)=x^3-x^2+kx-k$ 라 하면
$f(1)=1-1+k-k=0$ 이므로
$x-1$ 은 $f(x)$ 의 인수이다.
조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -1 & k & -k \\ & & 1 & 0 & k \\ \hline & 1 & 0 & k & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+k)$ 이다.
$(x-1)(x^2+k)=0$ 에서 실근 $\alpha=1$ 이고 허근 $3i$ 는
$x^2+k=0$ 의 근이다.
$(3i)^2+k=0$ 이므로 $k=9$ 이다.
따라서 $k+\alpha=9+1=10$ 이다.
[다른 풀이]
$x^3-x^2+kx-k=0$ 의 허근이 $3i$ 이므로
$(3i)^3-(3i)^2+3ki-k=0$,
$(9-k)+(3k-27)i=0$ 이다.
$9-k=0$, $3k-27=0$ 이므로 $k=9$ 이다.
방정식 $x^3-x^2+9x-9=0$ 을 인수분해하면
$x^2(x-1)+9(x-1)=0$, $(x^2+9)(x-1)=0$
이므로 방정식의 실근은 1 이다.
따라서 $\alpha=1$ 이므로 $k+\alpha=9+1=10$ 이다.

27. [출제의도] 복소수의 성질을 이용하여 문제 해결하기

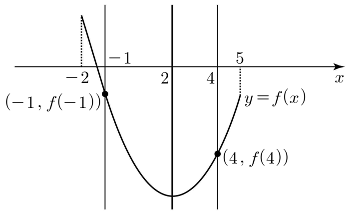
$\bar{z}=\frac{z^2}{4i}$ 에서 $4i\bar{z}=z^2$ 이다.
$z=a+2i$ 이면 $\bar{z}=a-2i$ 이므로
$4i\bar{z}=z^2$ 에 대입하면
$4i(a-2i)=(a+2i)^2$, $4ai+8=a^2+4ai-4$ 이다.
따라서 $a^2-12=0$ 이므로 $a^2=12$ 이다.

28. [출제의도] 인수정리를 이용하여 다항식 추론하기

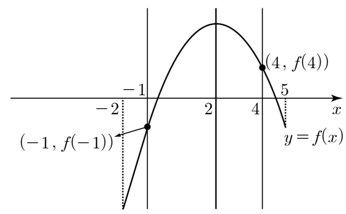
(가)에서 $Q(x)=-2P(x)$ 이므로
$P(x)Q(x)=-2\{P(x)\}^2$ 이다.
(나)에 의해
$-2\{P(x)\}^2$ 을 x^2-3x+2 로 나누었을 때의
몫을 $A(x)$ 라 하면
$-2\{P(x)\}^2=(x^2-3x+2)A(x)$ 이고
$\{P(x)\}^2=(x-1)(x-2)\left\{-\frac{1}{2}A(x)\right\}$ 이다.
$P(x)$ 는 이차다항식이고
$\{P(x)\}^2$ 이 $x-1$ 과 $x-2$ 를 인수로 가지므로
$P(x)$ 도 $x-1$ 과 $x-2$ 를 인수로 가진다.
그러므로 $P(x)=a(x-1)(x-2)$,
$Q(x)=-2a(x-1)(x-2)$ ($a\ne 0$ 인 실수)라 하자.
$P(0)=2a=-4$ 에서 $a=-2$ 이므로
$P(x)=-2(x-1)(x-2)$, $Q(x)=4(x-1)(x-2)$
이다.
따라서 $Q(4)=4\times 3\times 2=24$ 이다.

29. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소 추론하기

$f(0)=f(4)$ 이므로 이차함수 $f(x)$ 의 대칭축은
$x=2$ 이다.
$f(x)=a(x-2)^2+b$ (a, b 는 상수, $a\ne 0$)이라 하자.
이차함수 $f(x)$ 의 대칭축이 $x=2$ 이므로
$f(-1)\ne f(4)$ 이다.
따라서 $f(-1)+|f(4)|=0$ 에서
$f(-1)=f(4)=0$ 은 성립하지 않으므로
$f(-1)=-|f(4)|<0$ 이고 $|f(-1)|=|f(4)|$ … ①
이다.
(ⅰ) $a>0$ 인 경우



$f(4)<f(-1)<0$ 이 되어 ①을 만족시키지 않는다.
(ⅱ) $a<0$ 인 경우



①에서 $f(-1)<0$ 이므로 $f(4)>0$ 이다.
그러므로 $f(-1)+|f(4)|=0$ 에서
$f(-1)+f(4)=13a+2b=0$ … ②
이다.
$a<0$ 이므로 $-2\le x\le 5$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은
$f(-2)=16a+b=-19$ … ③
이다.
②와 ③을 연립하면 $a=-2$, $b=13$ 이다.
따라서 $f(x)=-2(x-2)^2+13$ 이므로
$f(3)=11$ 이다.

30. [출제의도] 이차부등식을 이용하여 문제 해결하기

$\beta-\alpha$ 가 자연수가 되기 위해서는 α, β 가 모두 정수이거나 α, β 가 각각 정수가 아닌 실수이어야 한다.
$\alpha\le x\le\beta$ 인 정수 x 의 개수가 3 이 되기 위해서
α, β 가 모두 정수인 경우에는 $\beta-\alpha=2$,
α, β 가 각각 정수가 아닌 실수인 경우에는
$\beta-\alpha=3$ 이어야 한다.
(1) $\frac{1}{2}a^2-a>\frac{3}{2}a$ 인 경우
$a^2-5a>0$ 이므로 $a<0$ 또는 $a>5$ 이다.
이차부등식 $(2x-a^2+2a)(2x-3a)\le 0$ 의 해는
$\frac{3}{2}a\le x\le\frac{1}{2}a^2-a$ 이다.
(ⅰ) α, β 가 모두 정수인 경우
$\beta-\alpha=\left(\frac{1}{2}a^2-a\right)-\frac{3}{2}a=\frac{1}{2}a^2-\frac{5}{2}a=2$ 이므로
$a^2-5a-4=0$ 에서 $a=\frac{5\pm\sqrt{41}}{2}$ 이다.
$a=\frac{5\pm\sqrt{41}}{2}$ 이면 β 와 α 가 각각 정수가
아니므로 구하고자 하는 a 는 없다.
(ⅱ) α, β 가 각각 정수가 아닌 실수인 경우
$\beta-\alpha=\left(\frac{1}{2}a^2-a\right)-\frac{3}{2}a=\frac{1}{2}a^2-\frac{5}{2}a=3$ 이므로
$a^2-5a-6=0$ 에서 $a=-1$ 또는 $a=6$ 이다.
$a=-1$ 이면 β 와 α 가 각각 정수가 아닌 실수이다.
$a=6$ 이면 β 와 α 가 모두 정수이므로 조건을
만족하지 않는다.
따라서 $a=-1$ 이다.
(2) $\frac{1}{2}a^2-a<\frac{3}{2}a$ 인 경우
$a^2-5a<0$ 이므로 $0<a<5$ 이다.
이차부등식 $(2x-a^2+2a)(2x-3a)\le 0$ 의 해는
$\frac{1}{2}a^2-a\le x\le\frac{3}{2}a$ 이다.
(ⅰ) α, β 가 모두 정수인 경우
$\beta-\alpha=\frac{3}{2}a-\left(\frac{1}{2}a^2-a\right)=-\frac{1}{2}a^2+\frac{5}{2}a=2$
이므로
$a^2-5a+4=0$ 에서 $a=1$ 또는 $a=4$ 이다.
$a=1$ 이면 β 와 α 가 각각 정수가 아니므로
조건을 만족하지 않는다.
$a=4$ 이면 β 와 α 가 모두 정수이다.
따라서 $a=4$ 이다.
(ⅱ) α, β 가 각각 정수가 아닌 실수인 경우
$\beta-\alpha=\frac{3}{2}a-\left(\frac{1}{2}a^2-a\right)=-\frac{1}{2}a^2+\frac{5}{2}a=3$
이므로
$a^2-5a+6=0$ 에서 $a=2$ 또는 $a=3$ 이다.
$a=2$ 이면 β 와 α 가 모두 정수이므로 조건을
만족하지 않는다.
$a=3$ 이면 β 와 α 가 각각 정수가 아닌 실수이다.
따라서 $a=3$ 이다.
그러므로 (1), (2)에 의해 조건을 만족시키는
모든 실수 a 의 값의 합은 $-1+4+3=6$ 이다.