

01 여러 가지 순열

유제

본문 5~9쪽

1 ① 2 144 3 126 4 ③ 5 840
6 ⑤

Level 1 기초 연습

본문 10~11쪽

1 ② 2 ① 3 ⑤ 4 243 5 32
6 ③ 7 ④ 8 ④

Level 2 기본 연습

본문 12~13쪽

1 ② 2 ② 3 ④ 4 ① 5 ③
6 ② 7 ④ 8 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 14쪽

1 12 2 ④ 3 105

02 중복조합과 이항정리

유제

본문 17~23쪽

1 ⑤ 2 ② 3 ① 4 ② 5 ⑤
6 ② 7 ②

Level 1 기초 연습

본문 24~25쪽

1 ③ 2 ② 3 ① 4 ① 5 ③
6 ④ 7 ⑤ 8 ② 9 512 10 ③

Level 2 기본 연습

본문 26~27쪽

1 ④ 2 ③ 3 ⑤ 4 ⑤ 5 ①
6 ④ 7 511 8 ③

Level 3 실력 완성

본문 28쪽

1 ⑤ 2 445 3 ②

03 확률

유제

본문 31~37쪽

1 ④ 2 ① 3 ③ 4 ⑤ 5 19
6 11 7 ③ 8 ⑤

Level 1 기초 연습

본문 38쪽

1 ④ 2 ② 3 ⑤ 4 ④ 5 6



Level 2

기본 연습

본문 39~40쪽

- 1 ④ 2 ③ 3 11 4 61 5 13
6 ② 7 ③ 8 ③

Level 3

실력 완성

본문 41쪽

- 1 ② 2 ① 3 ⑤

04

조건부확률

유제

본문 45~51쪽

- 1 ③ 2 ④ 3 ③ 4 ④ 5 ①
6 ④ 7 254 8 ①

Level 1

기초 연습

본문 52쪽

- 1 ③ 2 ③ 3 ⑤ 4 ③ 5 ②

Level 2

기본 연습

본문 53~54쪽

- 1 ③ 2 ② 3 55 4 ⑤ 5 ③
6 ② 7 ② 8 ④

Level 3

실력 완성

본문 55쪽

- 1 ③ 2 ② 3 ④ 4 675

05

이산확률변수의 확률분포

유제

본문 59~67쪽

- 1 17 2 ② 3 ① 4 ④ 5 55
6 ④ 7 ③ 8 ⑤

Level 1

기초 연습

본문 68~69쪽

- 1 ⑤ 2 ④ 3 ① 4 ② 5 ①
6 ④ 7 ④ 8 56 9 ② 10 ①

Level 2

기본 연습

본문 70쪽

- 1 ③ 2 ① 3 93 4 ④

Level 3

실력 완성

본문 71쪽

- 1 ④ 2 17 3 ②



06 연속확률변수의 확률분포

유제

본문 75~81쪽

- 1 22 2 ④ 3 12 4 ③ 5 44
6 ② 7 ④ 8 196

Level 1

기초 연습

본문 82쪽

- 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ④ 5 ④

Level 2

기본 연습

본문 83~84쪽

- 1 ⑤ 2 ④ 3 ⑤ 4 ③ 5 ⑤
6 ②

Level 3

실력 완성

본문 85쪽

- 1 ② 2 ⑤ 3 67

07 통계적 추정

유제

본문 89~95쪽

- 1 10 2 18 3 ③ 4 102 5 18
6 81 7 ②

Level 1

기초 연습

본문 96쪽

- 1 ④ 2 ④ 3 ③ 4 ⑤ 5 ①

Level 2

기본 연습

본문 97~98쪽

- 1 ⑤ 2 ④ 3 ③ 4 ⑤ 5 36
6 ④ 7 ③ 8 844

Level 3

실력 완성

본문 99쪽

- 1 ② 2 ④ 3 ⑤



01

여러 가지 순열

유제

본문 5~9쪽

- 1 ① 2 144 3 126 4 ③ 5 840
6 ⑤

- 1 여학생 2명을 한 사람으로 생각하여 4명의 학생을 원형으로 나열하는 경우의 수는

$$(4-1)! = 3! = 6$$

이 각각에 대하여 여학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 2 = 12$$

답 ①

- 2 빨간 공 4개를 원형으로 나열하는 경우의 수는

$$(4-1)! = 3! = 6$$

이 각각에 대하여 빨간 공 4개의 사이사이에 파란 공 4개를 나열하는 경우의 수는

$$4! = 24$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 24 = 144$$

답 144

- 3 서로 다른 7개의 공을 서로 다른 2개의 주머니에 넣는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 중복을 허락하여 7개를 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_7 = 2^7 = 128$$

이때 빈 주머니가 없도록 하려면 7개의 공을 모두 한 개의 주머니에 넣는 2가지 경우는 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

$$128 - 2 = 126$$

답 126

- 4 6명의 학생이 떡볶이, 김밥, 라면 중에서 한 가지씩 주문하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 6개를 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_6 = 3^6 = 729$$

이때 6명의 학생이 김밥을 아무도 주문하지 않고 떡볶이, 라면 중에서만 한 가지씩 주문하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 중복을 허락하여 6개를 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_6 = 2^6 = 64$$

따라서 적어도 한 명은 김밥을 주문하는 경우의 수는

$$729 - 64 = 665$$

답 ③

- 5 A, B, C를 X, X, X로 놓고 7명을 일렬로 세운 후에 X의 자리에 앞에서부터 순서대로 A, B, C를 세우면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{3!} = 840$$

답 840

- 6 6개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!3!} = 60$$

이 중에서 숫자 2가 서로 이웃하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!} = 20$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$60 - 20 = 40$$

답 ⑤

다른 풀이

4개의 숫자 1, 3, 3, 3을 일렬로 나열한 후, 그 사이의 3개의 자리와 맨앞, 맨뒤를 포함한 5개의 자리 중 서로 다른 2개의 자리를 택하여 2를 넣으면 되므로 구하는 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{3!} \times {}_5C_2 = 4 \times 10 = 40$$

Level 1

기초 연습

본문 10~11쪽

- 1 ② 2 ① 3 ⑤ 4 243 5 32
6 ③ 7 ④ 8 ④

- 1 안쪽에 있는 3개의 영역에 칠할 색 3가지를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

이 각각에 대하여 택한 3가지 색을 안쪽에 있는 3개의 영역에 칠하는 경우의 수는 회전하여 일치하는 것을 고려하면 $(3-1)! = 2! = 2$

이 각각에 대하여 남은 3가지 색을 바깥쪽에 있는 3개의 영역에 칠하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$20 \times 2 \times 6 = 240$$

답 ②

- 2 5개의 문구를 원형으로 나열하는 경우의 수는

$$(5-1)! = 4! = 24$$

이 중에서 '한 번 더'와 '다음 기회에'가 이웃하는 경우의 수는

$$(4-1)! \times 2! = 3! \times 2! = 12$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 - 12 = 12$$

답 ①

다른 풀이

5개의 영역 중 한 영역에 '한 번 더'를 적은 후 이것과 이웃하지 않게 '다음 기회에'를 적는 경우의 수는

$$2$$

이 각각에 대하여 나머지 3개의 영역에 '1등', '2등', '3등'을 적는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$2 \times 6 = 12$$

- 3 6명의 학생이 원 모양의 탁자에 둘러앉은 경우의 수는

$$(6-1)! = 5! = 120$$

이 중에서 3학년 학생의 옆에 2학년 학생이 앉지 않는 경우를 생각해 보자.

이 경우 3학년 학생의 양 옆에 1학년 학생이 있어야 하므로 3학년 학생의 양 옆에 1학년 학생 2명을 택하여 앉히는 경우의 수는

$${}_3P_2 = 3 \times 2 = 6$$

이 각각에 대하여 3학년 학생과 양 옆에 앉은 1학년 학생으로 이루어진 3명의 학생을 한 명으로 생각하고 나머지 3명의 학생과 함께 원형으로 나열하는 경우의 수는

$$(4-1)! = 3! = 6$$

즉, 3학년 학생의 옆에 2학년 학생이 앉지 않는 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

따라서 구하는 경우의 수는

$$120 - 36 = 84$$

답 ⑤

- 4 서로 다른 5개의 스티커를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 5개를 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$$

답 243

- 5 일의 자리에 올 수 있는 수는 2, 4이므로 2가지

이 각각에 대하여 십의 자리와 백의 자리에 올 숫자를 택하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4에서 중복을 허락하여 2개를 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로

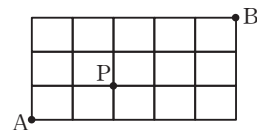
$${}_4\Pi_2 = 4^2 = 16$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$2 \times 16 = 32$$

답 32

- 6 그림과 같이 도로망을 연결하여 교차지점을 P라 하면 구하는 경우의 수는 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서 A지점에서 출발하여 P지점을 지나 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같다.





- (i) A지점에서 출발하여 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{8!}{5!3!}=56$$

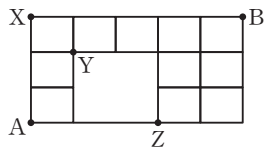
- (ii) A지점에서 출발하여 P지점을 지나 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times \frac{5!}{3!2!}=3 \times 10=30$$

- (i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$56-30=26$$

다른 풀이



그림과 같이 세 지점을 X, Y, Z라 하면 구하는 경우의 수는 다음 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

- (i) A → X → B로 가는 경우의 수는

$$1 \times 1=1$$

- (ii) A → Y → B로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times \frac{5!}{4!}=3 \times 5=15$$

- (iii) A → Z → B로 가는 경우의 수는

$$1 \times \frac{5!}{2!3!}=1 \times 10=10$$

- (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$1+15+10=26$$

- 7 일의 자리에는 숫자 1이 와야 하므로 나머지 네 자리에 0, 1, 2, 2를 나열하면 된다.

이때 0, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

이고, 이 중에서 숫자 0이 만의 자리에 오는 경우의 수는 나머지 세 자리에 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{3!}{2!}=3$$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$$12-3=9$$

답 ③

다른 풀이

일의 자리에는 숫자 1이 와야 하므로 다음 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

- (i) 만의 자리에 숫자 1이 오는 경우

나머지 세 자리에 0, 2, 2를 일렬로 나열하면 되므로 이 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}=3$$

- (ii) 만의 자리에 숫자 2가 오는 경우

나머지 세 자리에 0, 1, 2를 나열하면 되므로 이 경우의 수는

$$3!=6$$

- (i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$3+6=9$$

- 8 a, b 를 각각 A, A로 c, d 를 각각 C, C로 보고 A, A, C, C, e, f 를 일렬로 나열한 후 두 개의 A 중에서 왼쪽의 A 자리에 a 를, 오른쪽의 A 자리에 b 를 놓고, 두 개의 C 중에서 왼쪽의 C 자리에 c 를, 오른쪽의 C 자리에 d 를 놓으면 되므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!2!}=180$$

답 ④

Level 2 기본 연습

본문 12~13쪽

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 ② | 2 ② | 3 ④ | 4 ① | 5 ③ |
| 6 ② | 7 ④ | 8 ⑤ | | |

- 1 6과 서로소인 자연수는 1, 5, 7뿐이므로 6이 적힌 공을 한 자리에 놓고, 마주 보는 자리에 놓을 공을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1=3$$

이 각각에 대하여 2, 4, 8이 적힌 공은 서로 마주 보는 자리에 놓으면 안 되므로 서로 마주 보는 세 쌍의 자리에서 각각 한 자리씩 택하여 2, 4, 8이 적힌 공을 놓는 경우의 수는

$$2 \times 2 \times 2 \times 3!=48$$

답 ④



이 각각에 대하여 남은 3개의 자리에 남은 3개의 공을 놓는
경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 48 \times 6 = 864$$

답 ②

- 2** 1부터 7까지의 자연수 중에서 두 수의 합이 10보다 큰 경우는 4와 7, 5와 6, 5와 7, 6과 7의 네 가지가 있다. 즉, 가운데 있는 원에는 1, 2, 3 중에서 하나를 적어야 하므로 가운데 있는 원에 적을 수를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

이 각각에 대하여 세 자연수 5, 6, 7은 서로 이웃하지 않아야 하므로 정육각형의 꼭짓점에 중심이 있는 원 중에서 서로 이웃하지 않은 원 3개를 택하여 5, 6, 7을 적는 경우의 수는

$$(3-1)! = 2! = 2$$

이 각각에 대하여 자연수 4는 5와 6 사이에 적어야 하므로 나머지 두 자연수를 적는 경우의 수는

$$2! = 2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 2 \times 2 = 12$$

답 ②

- 3** A의 위치를 정하는 경우의 수는 회전하여 일치하는 것을 고려하면

$$2$$

이 각각에 대하여 A가 앉은 면의 반대쪽 면에 있는 두 개의 의자 중 한 개를 택하여 B가 앉아야 하므로 B의 위치를 정하는 경우의 수는

$$2$$

이 각각에 대하여 C와 D가 앉을 이웃한 두 면을 택하는 경우의 수는

$$4$$

이 각각에 대하여 C, D의 위치를 정하는 경우의 수는

$$2 \times 2 = 4$$

이 각각에 대하여 남은 4개의 의자에 남은 4명의 학생이 앉는 경우의 수는

$$4! = 24$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 24 = 1536$$

답 ④

- 4** $A \cap B$ 에 속할 두 원소를 택하는 경우의 수는

$${}_8C_2 = 28$$

이 각각에 대하여 나머지 6개의 원소를 각각 $A-B$ 또는 $B-A$ 중 하나에 넣으면 되고 이 경우의 수는 두 집합 $A-B$, $B-A$ 에서 중복을 허락하여 6개를 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_6 = 2^6 = 64$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$28 \times 64 = 1792$$

답 ①

- 5** 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$$

이고, 이 중에서 3의 배수인 경우는 다음과 같다.

(i) 각 자리의 숫자가 모두 같은 경우

111, 222, 333, 444, 555는 모두 3의 배수이므로 이 경우의 수는 5

(ii) 세 자리의 숫자 중 두 자리의 숫자가 같은 경우

세 자리의 숫자가 1, 1, 4 또는 2, 2, 5 또는 4, 4, 1 또는 5, 5, 2인 경우 3의 배수가 되므로 이 경우의 수는

$$4 \times \frac{3!}{2!} = 12$$

(iii) 세 자리의 숫자가 모두 다른 경우

세 자리의 숫자가 1, 2, 3 또는 1, 3, 5 또는 2, 3, 4

또는 3, 4, 5인 경우 3의 배수가 되므로 이 경우의 수는

$$4 \times 3! = 24$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 3의 배수의 개수는

$$5 + 12 + 24 = 41$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$125 - 41 = 84$$

답 ③



- 6 치역의 모든 원소의 합이 6인 경우는 치역이 {1, 2, 3} 또는 {2, 4}인 경우뿐이다.

(i) 치역이 {1, 2, 3}인 경우

1, 2, 3에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우에서 치역이 {1, 2}, {1, 3}, {2, 3} 또는 {1}, {2}, {3}인 경우를 제외하면 되므로 이 경우의 수는

$${}_3\Pi_4 - 3({}_2\Pi_4 - 2) - 3 = 81 - 3 \times 14 - 3 = 36$$

(ii) 치역이 {2, 4}인 경우

2, 4에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우에서 치역이 {2} 또는 {4}인 경우를 제외하면 되므로 이 경우의 수는

$${}_2\Pi_4 - 2 = 16 - 2 = 14$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 함수의 개수는

$$36 + 14 = 50$$

답 ②

다른 풀이

치역의 모든 원소의 합이 6인 경우는 치역이 {1, 2, 3} 또는 {2, 4}인 경우뿐이다.

(i) 치역이 {1, 2, 3}인 경우

정의역의 원소의 개수가 4이므로 1, 2, 3 중 하나는 그것을 함숫값으로 갖는 원소가 2개이어야 한다.

㉠ 1을 함숫값으로 갖는 원소가 2개인 경우

1, 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 이 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

㉡ 2를 함숫값으로 갖는 원소가 2개인 경우

1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 이 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

㉢ 3을 함숫값으로 갖는 원소가 2개인 경우

1, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 이 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

㉠~㉢에 의하여 이 경우의 수는

$$12 + 12 + 12 = 36$$

(ii) 치역이 {2, 4}인 경우

㉠ 2를 함숫값으로 갖는 원소가 1개, 4를 함숫값으로 갖는 원소가 3개인 경우

2, 4, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 이 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

㉡ 2를 함숫값으로 갖는 원소가 2개, 4를 함숫값으로 갖는 원소가 2개인 경우

2, 2, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 이 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!2!} = 6$$

㉢ 2를 함숫값으로 갖는 원소가 3개, 4를 함숫값으로 갖는 원소가 1개인 경우

2, 2, 2, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 이 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

㉠~㉢에 의하여 이 경우의 수는

$$4 + 6 + 4 = 14$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 함수의 개수는

$$36 + 14 = 50$$

- 7 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동하는 것을 a , x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하는 것을 b , y 축의 방향으로 1만큼 평행이동하는 것을 c , y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하는 것을 d 로 나타내자.

(i) a 가 3번, b 가 1번, c 가 1번인 경우

a, a, a, b, c 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!} = 20$$

이 중에서 3번 이동한 후에 점 (2, 1)에 도착하는 경우의 수는 a, a, c 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 a, b 를 일렬로 나열하는 경우의 수의 곱과 같으므로

$$\frac{3!}{2!} \times 2! = 6$$

따라서 이 경우의 수는

$$20 - 6 = 14$$

(ii) a 가 2번, c 가 2번, d 가 1번인 경우

a, a, c, c, d 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!2!} = 30$$

이 중에서 3번 이동한 후에 점 (2, 1)에 도착하는 경우의 수는 a, a, c 를 일렬로 나열하는 경우의 수와 c, d 를 일렬로 나열하는 경우의 수의 곱과 같으므로

$$\frac{3!}{2!} \times 2! = 6$$

따라서 이 경우의 수는
 $30 - 6 = 24$
 (i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는
 $14 + 24 = 38$

답 ④

8 a 와 b 를 1개 이상씩 택해야 하므로 c 는 2개 이하로 택해야 한다.

(i) c 를 택하지 않는 경우

a 와 b 에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_4 = 16$ 이고, 이 중에서 이웃하는 a 와 b 가 존재하지 않는 경우는 $aaaa$, $bbbb$ 의 2가지뿐이므로 이 경우의 수는

$$16 - 2 = 14$$

(ii) c 를 1개 택하는 경우

㉠ a 가 1개, b 가 2개인 경우 a, b, b, c 를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!} = 12$ 이고, 이 중에서 이웃하는 a 와 b 가 존재하지 않는 경우는 $acbb$, $bbca$ 의 2가지뿐이므로 이 경우의 수는

$$12 - 2 = 10$$

㉡ a 가 2개, b 가 1개인 경우도 ㉠과 마찬가지로 생각하면 이 경우의 수는 10

따라서 이 경우의 수는 $10 + 10 = 20$

(iii) c 를 2개 택하는 경우

a, b, c, c 를 a 와 b 가 이웃하도록 나열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times 2! = 6$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$14 + 20 + 6 = 40$$

답 ⑤

1 (i) $n = 2k - 1$ ($k = 3, 4, 5, \dots$)일 때

먼저 $(k-1)$ 개의 짝수 중에서 2를 한 부채꼴에 적은 후 남은 $(2k-2)$ 개의 부채꼴을 2를 적은 부채꼴과 이웃한 부채꼴부터 순서대로 2개씩 묶는다. 이렇게 묶은 $(k-1)$ 쌍의 부채꼴 중 한 쌍의 부채꼴에는 홀수만 적게 되는데, 이 한 쌍의 부채꼴을 택하는 경우의 수는

$${}_{k-1}C_1 = k - 1$$

이 각각에 대하여 나머지 $(k-2)$ 쌍의 부채꼴에 $(k-2)$ 개의 짝수를 서로 이웃하지 않도록 적는 경우의 수는 $(k-2)!$

이 각각에 대하여 남은 k 개의 홀수를 1과 $2k-1$ 이 이웃하지 않도록 적는 경우의 수는

$$k! - 2! \times (k-2)! = (k-2)!(k-2)(k+1)$$

이므로

$$f(2k-1)$$

$$= (k-1) \times (k-2)! \times (k-2)!(k-2)(k+1)$$

$$= (k-1)!(k-2)!(k-2)(k+1)$$

(ii) $n = 2k$ ($k = 3, 4, 5, \dots$)일 때

먼저 k 개의 짝수를 서로 이웃하지 않은 부채꼴에 적는 경우의 수는 회전하여 일치하는 것을 고려하면 $(k-1)!$

이 각각에 대하여 $2k$ 를 적은 부채꼴의 양 옆에는 1을 적을 수 없으므로 1을 적을 부채꼴을 택하는 경우의 수는 $k-2$

이 각각에 대하여 남은 $(k-1)$ 개의 홀수를 적는 경우의 수는

$$(k-1)!$$

이므로

$$f(2k) = (k-1)! \times (k-2) \times (k-1)!$$

$$= (k-1)!(k-1)!(k-2)$$

㉠ $\frac{f(n)}{f(n+1)}$ 에서 $n = 2k-1$ 인 경우

$$\begin{aligned} \frac{f(n)}{f(n+1)} &= \frac{f(2k-1)}{f(2k)} \\ &= \frac{(k-1)!(k-2)!(k-2)(k+1)}{(k-1)!(k-1)!(k-2)} \\ &= \frac{k+1}{k-1} \end{aligned}$$

이때 $\frac{k+1}{k-1} = \frac{1}{60}$ 을 만족시키는 자연수 k 는 존재하지 않는다.

㉡ $\frac{f(n)}{f(n+1)}$ 에서 $n = 2k$ 인 경우

Level 3

실력 완성

본문 14쪽

1 12

2 ④

3 105



$$\begin{aligned}\frac{f(n)}{f(n+1)} &= \frac{f(2k)}{f(2k+1)} \\ &= \frac{(k-1)!(k-1)!(k-2)}{k!(k-1)!(k-1)(k+2)} \\ &= \frac{k-2}{k(k-1)(k+2)}\end{aligned}$$

$$\text{이때 } \frac{k-2}{k(k-1)(k+2)} = \frac{1}{60} \text{에서}$$

$$k^3 + k^2 - 62k + 120 = 0$$

$$(k-6)(k^2 + 7k - 20) = 0$$

k 는 자연수이므로 $k=6$

따라서 구하는 자연수 n 의 값은

$$n = 2k = 12$$

답 12

- 2 (i) $f(1)=1, f(3)=3$ 또는 $f(1)=3, f(3)=1$ 인 경우
치역의 나머지 원소는 2, 4, 5 중 1개이어야 하므로 치역의 원소를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

이 각각에 대하여 2, 4, 5, 6, 7의 함수값을 정하는 경우의 수는 2, 4, 5, 6, 7의 함수값이 모두 1 또는 3이 되는 경우를 제외해야 하므로

$${}_3\Pi_5 - {}_2\Pi_5 = 243 - 32 = 211$$

따라서 이 경우의 수는

$$2 \times 3 \times 211 = 1266$$

- (ii) $f(1)=f(3)=2$ 인 경우

치역의 나머지 원소는 1, 3, 4, 5 중 2개이어야 하므로 치역의 원소를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

택한 두 원소를 a, b 라 할 때, 치역이 $\{2, a, b\}$ 가 되도록 2, 4, 5, 6, 7의 함수값을 정하는 경우의 수를 생각해 보자.

먼저 2, 4, 5, 6, 7의 함수값을 2, a, b 중에서 택하는 경우의 수는

$${}_3\Pi_5 = 243$$

이 중에서

- ㉠ 치역이 $\{2, a\}$ 가 되는 경우의 수는

$${}_2\Pi_5 - 1 = 31$$

- ㉡ 치역이 $\{2, b\}$ 가 되는 경우의 수는

$${}_2\Pi_5 - 1 = 31$$

- ㉢ 치역이 $\{2\}$ 가 되는 경우의 수는

$${}_1\Pi_5 = 1$$

이므로 치역이 $\{2, a, b\}$ 가 되도록 2, 4, 5, 6, 7의 함수값을 정하는 경우의 수는

$$243 - (31 + 31 + 1) = 180$$

따라서 이 경우의 수는

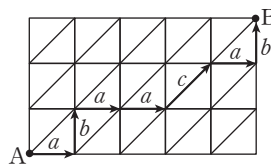
$$6 \times 180 = 1080$$

- (i), (ii)에 의하여 구하는 함수의 개수는

$$1266 + 1080 = 2346$$

답 ④

3



그림과 같이 오른쪽 방향의 도로를 따라 한 칸 가는 것을 a , 위쪽 방향의 도로를 따라 한 칸 가는 것을 b , 사선 방향의 도로를 따라 한 칸 가는 것을 c 로 나타내고 a 와 b 방향의 도로 한 칸의 길이를 1이라 하자.

이때 c 방향의 도로 한 칸의 길이는 $\sqrt{2}$ 이고, 최단 거리로 가려면 한 번 지난 교차점은 다시 지나지 않아야 하므로 A지점과 B지점 사이에 6개의 교차점을 지나려면 7칸을 움직여야 하며 c 방향의 이동은 홀수 번이어야 한다.

- (i) c 방향으로 1번 이동하는 경우

a 또는 b 방향으로 6번 이동해야 하므로 이동거리는 $6 + \sqrt{2}$

- (ii) c 방향으로 3번 이동하는 경우

a, b 또는 그 반대 방향으로 4번 이동해야 하므로 이동거리는 $4 + 3\sqrt{2}$

- (iii) c 또는 그 반대 방향으로 5번 이동하는 경우

a, b 또는 그 반대 방향으로 2번 이동해야 하므로 이동거리는 $2 + 5\sqrt{2}$

- (i), (ii), (iii)에서 이동거리가 최소인 경우는 (i)이고, 이때 a 방향으로 4번, b 방향으로 2번 이동해야 한다.

즉, A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 1개의 c 와 4개의 a , 2개의 b 를 일렬로 배열하는 순열의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{4!2!} = 105$$

답 105

02 중복조합과 이항정리

유제

본문 17~23쪽

- 1 ⑤ 2 ② 3 ① 4 ② 5 ⑤
6 ② 7 ②

- 1 무기명 투표이므로 12명이 네 요일 중 한 요일에 투표한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 12개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는

$${}_4H_{12} = {}_{4+12-1}C_{12} = {}_{15}C_{12} = {}_{15}C_3 = \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2 \times 1} = 455$$

답 ⑤

- 2 (i) 빨간 공을 택하지 않는 경우

노란 공, 파란 공, 검은 공 중에서 5개의 공을 택해야 하므로 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수를 구하면

$${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21 \quad \dots\dots ①$$

이때 노란 공, 파란 공, 검은 공이 각각 4개씩이므로 ①에서 같은 색의 공을 5개 택하는 3가지 경우는 제외해야 한다.

따라서 이 경우의 수는
 $21 - 3 = 18$

- (ii) 빨간 공을 1개 택하는 경우

노란 공, 파란 공, 검은 공 중에서 4개의 공을 택해야 하므로 이 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 이 경우의 수는

$${}_3H_4 = {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

- (iii) 빨간 공을 2개 택하는 경우

노란 공, 파란 공, 검은 공 중에서 3개의 공을 택해야 하므로 이 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 이 경우의 수는

$${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

- (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$18 + 15 + 10 = 43$$

답 ②

- 3 조건 (가)에 의하여 $f(3)$ 은 3의 배수이므로 다음 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

- (i) $f(3) = 3$ 인 경우

$f(1) \leq f(2) \leq 3$ 이므로 1, 2, 3에서 중복을 허락하여 2개를 택한 후 작은 수부터 크기순으로 $f(1)$, $f(2)$ 의 값으로 정하면 된다. 즉, $f(1)$, $f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_{3+2-1}C_2 = {}_4C_2 = 6$$

이 각각에 대하여 $3 \leq f(4) \leq f(5) \leq f(6)$ 이므로 3, 4, 5, 6에서 중복을 허락하여 3개를 택한 후 작은 수부터 크기순으로 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$ 의 값으로 정하면 된다. 즉, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = 20$$

따라서 이 경우의 수는

$$6 \times 20 = 120$$

- (ii) $f(3) = 6$ 인 경우

$f(1) \leq f(2) \leq 6$ 이므로 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 중복을 허락하여 2개를 택한 후 작은 수부터 크기순으로 $f(1)$, $f(2)$ 의 값으로 정하면 된다. 즉, $f(1)$, $f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_6H_2 = {}_{6+2-1}C_2 = {}_7C_2 = 21$$

이 각각에 대하여 $f(4) = f(5) = f(6) = 6$ 이어야 하므로 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1

따라서 이 경우의 수는

$$21 \times 1 = 21$$

- (i), (ii)에 의하여 구하는 함수의 개수는

$$120 + 21 = 141$$

답 ①

- 4 $\left(x^2 - \frac{3}{x}\right)^6$ 의 전개식의 일반항은

$$\begin{aligned} {}_6C_r (x^2)^{6-r} \left(-\frac{3}{x}\right)^r &= {}_6C_r \times x^{12-2r} \times \frac{(-3)^r}{x^r} \\ &= {}_6C_r \times (-3)^r \times x^{12-3r} \end{aligned}$$

이고, x^6 항은 $12 - 3r = 6$ 에서 $r = 2$ 일 때이다.

따라서 x^6 의 계수는

$${}_6C_2 \times (-3)^2 = 15 \times 9 = 135$$

답 ②



- 5 다항식 $(x+k)^8$ 의 전개식의 일반항은 ${}_8C_r x^{8-r} k^r$
 이고, x^7 항은 $r=1$ 일 때이므로 x^7 의 계수는 ${}_8C_1 k = 8k$
 주어진 조건에 의하여 $8k=24$ 이므로 $k=3$
 따라서 x^6 항은 $r=2$ 일 때이므로 구하는 x^6 의 계수는 ${}_8C_2 \times 3^2 = 28 \times 9 = 252$

답 ⑤

- 6 $N = {}_9C_2 + {}_9C_4 + {}_9C_6 + {}_9C_8$
 $= ({}_9C_0 + {}_9C_2 + {}_9C_4 + {}_9C_6 + {}_9C_8) - 1$
 $= 2^8 - 1$
 $= (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)$
 $= 3 \times 5 \times 17$
 따라서 N 의 양의 약수의 개수는 $2 \times 2 \times 2 = 8$

답 ②

- 7 $f(n) = {}_6H_n$ 이므로
 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6)$
 $= {}_6H_1 + {}_6H_2 + {}_6H_3 + {}_6H_4 + {}_6H_5 + {}_6H_6$
 $= {}_6C_1 + {}_7C_2 + {}_8C_3 + {}_9C_4 + {}_{10}C_5 + {}_{11}C_6$
 $= ({}_6C_0 + {}_6C_1) + {}_7C_2 + {}_8C_3 + {}_9C_4 + {}_{10}C_5 + {}_{11}C_6 - 1$
 $= ({}_7C_1 + {}_7C_2) + {}_8C_3 + {}_9C_4 + {}_{10}C_5 + {}_{11}C_6 - 1$
 $= ({}_8C_2 + {}_8C_3) + {}_9C_4 + {}_{10}C_5 + {}_{11}C_6 - 1$
 $= ({}_9C_3 + {}_9C_4) + {}_{10}C_5 + {}_{11}C_6 - 1$
 $= ({}_{10}C_4 + {}_{10}C_5) + {}_{11}C_6 - 1$
 $= ({}_{11}C_5 + {}_{11}C_6) - 1$
 $= {}_{12}C_6 - 1$
 $= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} - 1$
 $= 923$

답 ②

- 1 ${}_5H_3 = {}_{5+3-1}C_3 = {}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$
 ${}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$
 따라서 ${}_5H_3 + {}_5C_3 = 35 + 10 = 45$

답 ③

- 2 서로 다른 4개의 문자에서 중복을 허락하여 n 개를 택하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 n 개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
 ${}_4H_n = {}_{4+n-1}C_n = {}_{n+3}C_n = {}_{n+3}C_3$
 $= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$
 즉, $\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} = 120$ 이므로
 $(n+3)(n+2)(n+1) = 720 = 10 \times 9 \times 8$
 따라서 $n=7$

답 ②

- 3 같은 종류의 사탕 3개를 네 사람에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
 ${}_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = 20$
 이 각각에 대하여 같은 종류의 초콜릿 5개를 네 사람에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
 ${}_4H_5 = {}_{4+5-1}C_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = 56$
 따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $20 \times 56 = 1120$

답 ①

- 4 $4 \leq a \leq b \leq 6$ 을 만족시키는 두 자연수 a, b 는 4, 5, 6에서 중복을 허락하여 2개를 택한 후 작은 수부터 크기순으로 a, b 의 값으로 정하면 되므로 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는 ${}_3H_2 = {}_{3+2-1}C_2 = {}_4C_2 = 6$
 이 각각에 대하여 $6 \leq c \leq d \leq e \leq 10$ 을 만족시키는 세 자연수 c, d, e 는 6, 7, 8, 9, 10에서 중복을 허락하여 3개를 택한 후 작은 수부터 크기순으로 c, d, e 의 값으로 정하면 되므로 모든 순서쌍 (c, d, e) 의 개수는

Level 1

기초 연습

본문 24~25쪽

- | | | | | |
|-----|-----|-----|-------|------|
| 1 ③ | 2 ② | 3 ① | 4 ① | 5 ③ |
| 6 ④ | 7 ⑤ | 8 ② | 9 512 | 10 ③ |

$${}_5H_3 = {}_{5+3-1}C_3 = {}_7C_3 = 35$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$$6 \times 35 = 210$$

답 ①

- 5 방정식 $x+y+z=13$ 에서
 $x=x'+1, y=y'+1, z=z'+1$
 (x', y', z' 은 음이 아닌 정수)
 로 놓으면 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 방정식 $x'+y'+z'=10$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z' 의 모든 순서쌍 (x', y', z') 의 개수와 같다.
 따라서 구하는 순서쌍의 개수는 서로 다른 3개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$\begin{aligned} {}_3H_{10} &= {}_{3+10-1}C_{10} \\ &= {}_{12}C_{10} \\ &= {}_{12}C_2 \\ &= \frac{12 \times 11}{2 \times 1} \\ &= 66 \end{aligned}$$

답 ③

- 6 $\left(\frac{x}{4} + \frac{4}{x}\right)^8$ 의 전개식의 일반항은
- $${}_8C_r \left(\frac{x}{4}\right)^{8-r} \left(\frac{4}{x}\right)^r = {}_8C_r \times 4^{2r-8} \times x^{8-2r}$$
- 상수항은 $8-2r=0$, 즉 $r=4$ 일 때이므로
- $${}_8C_4 \times 4^0 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times 1 = 70$$
- x^2 항은 $8-2r=2$, 즉 $r=3$ 일 때이므로 x^2 의 계수는
- $${}_8C_3 \times 4^{-2} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{1}{16} = \frac{7}{2}$$
- 따라서 구하는 상수항과 x^2 의 계수의 곱은
- $$70 \times \frac{7}{2} = 245$$

답 ④

- 7 $(x+a)^6$ 의 전개식의 일반항은
- $${}_6C_r x^{6-r} a^r$$
- 상수항은 $6-r=0$, 즉 $r=6$ 일 때이므로
- $${}_6C_6 a^6 = a^6$$

x^3 항은 $6-r=3$, 즉 $r=3$ 일 때이므로 x^3 의 계수는

$${}_6C_3 a^3 = 20a^3$$

$a^6 + 20a^3 = 0$ 에서

$$a^3(20+a^3)=0$$

$a \neq 0$ 이므로 $a^3 = -20$

따라서 구하는 상수항은

$$a^6 = (a^3)^2 = (-20)^2 = 400$$

답 ⑤

- 8 $(2x^3+1)^n = (1+2x^3)^n$ 이므로 $(2x^3+1)^n$ 의 전개식의 일반항은
- $${}_nC_r (2x^3)^r = {}_nC_r \times 2^r \times x^{3r}$$
- x^3 항은 $r=1$ 일 때이므로 x^3 의 계수는
- $${}_nC_1 \times 2 = 2n$$
- 따라서
- $$(2x^3+1) + (2x^3+1)^2 + (2x^3+1)^3 + \cdots + (2x^3+1)^9$$
- 의 전개식에서 x^3 의 계수는
- $$2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + 2 \times 9$$
- $$= 2(1+2+3+\cdots+9)$$
- $$= 2 \times 45 = 90$$

답 ②

다른 풀이

$x \neq 0$ 일 때

$$\begin{aligned} &(2x^3+1) + (2x^3+1)^2 + (2x^3+1)^3 + \cdots + (2x^3+1)^9 \\ &= \frac{(2x^3+1)\{(2x^3+1)^9-1\}}{(2x^3+1)-1} = \frac{(2x^3+1)^{10}-(2x^3+1)}{2x^3} \end{aligned}$$

이므로 주어진 식의 전개식에서 x^3 의 계수는

$$\frac{1}{2}(2x^3+1)^{10}$$

의 전개식에서 x^6 의 계수와 같다.

따라서 구하는 x^3 의 계수는

$$\frac{1}{2} \times {}_{10}C_2 \times 2^2 = 90$$

- 9 집합 A 의 부분집합 중에서 원소의 개수가 k ($k=0, 1, 2, \dots, 10$)인 부분집합의 개수는 서로 다른 10개에서 k 개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_{10}C_k$
- 따라서 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수는
- $${}_{10}C_1 + {}_{10}C_3 + {}_{10}C_5 + {}_{10}C_7 + {}_{10}C_9 = 2^9 = 512$$

답 512



$$\begin{aligned}
 10 & {}_{10}C_3 + {}_{10}C_4 + {}_{10}C_5 + \cdots + {}_{10}C_{10} \\
 &= ({}_{10}C_0 + {}_{10}C_1 + {}_{10}C_2 + \cdots + {}_{10}C_{10}) - ({}_{10}C_0 + {}_{10}C_1 + {}_{10}C_2) \\
 &= 2^{10} - (1 + 10 + 45) \\
 &= 1024 - 56 \\
 &= 968
 \end{aligned}$$

답 ③

Level 2

기본 연습

본문 26~27쪽

- 1 ④ 2 ③ 3 ⑤ 4 ⑤ 5 ①
6 ④ 7 511 8 ③

- 1 (i) 파란 공을 상자 A에 3개, 상자 B에 1개 넣은 경우
상자 B에 넣을 나머지 공 2개는 흰 공, 검은 공 중에서
중복을 허락하여 2개를 택해야 하므로 그 경우의 수는
 ${}_2H_2 = {}_{2+2-1}C_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$
 이 각각에 대하여 상자 C에 흰 공 3개를 넣어야 하므로
 그 경우의 수는
 1
 따라서 이 경우의 수는
 $3 \times 1 = 3$
- (ii) 파란 공을 상자 A에 2개, 상자 B에 2개 넣은 경우
상자 A에 넣을 나머지 공 1개는 흰 공, 검은 공 중에서
택해야 하므로 그 경우의 수는
 2
 이 각각에 대하여 상자 B에 넣을 나머지 공 1개도 흰
공, 검은 공 중에서 택해야 하므로 그 경우의 수는
 2
 이 각각에 대하여 상자 C에 흰 공 2개를 넣고, 나머지
공 1개는 검은 공, 파란 공 중에서 택해야 하므로 그 경
우의 수는
 2
 따라서 이 경우의 수는
 $2 \times 2 \times 2 = 8$
- (iii) 파란 공을 상자 A에 1개, 상자 B에 3개 넣은 경우
상자 A에 넣을 나머지 공 2개는 흰 공, 검은 공 중에서
중복을 허락하여 2개를 택해야 하므로 그 경우의 수는

$${}_2H_2 = {}_{2+2-1}C_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

이 각각에 대하여 상자 C에 흰 공 1개를 넣고, 나머지
공 2개는 검은 공, 파란 공 중에서 중복을 허락하여 2개
를 택해야 하므로 그 경우의 수는

$${}_2H_2 = {}_{2+2-1}C_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

따라서 이 경우의 수는

$$3 \times 3 = 9$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$3 + 8 + 9 = 20$$

답 ④

- 2 세 사람이 받는 음료수의 개수에 따라 다음과 같은 경우로
나누어 생각할 수 있다.

(i) 세 사람이 음료수를 각각 1개씩 받는 경우

같은 종류의 빵 7개를 세 사람에게 남김없이 나누어 주
는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조
합의 수와 같으므로

$${}_3H_7 = {}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$$

(ii) 세 사람 중 두 사람만 음료수를 받는 경우

음료수를 받지 못하는 한 사람을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

이 각각에 대하여 나머지 두 사람에게 음료수 3개를 각
사람이 적어도 1개씩 받도록 나누어 주는 경우의 수는
먼저 두 사람에게 음료수를 1개씩 나누어 준 후 나머지
음료수를 받을 한 사람을 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_2C_1 = 2$$

이 각각에 대하여 음료수를 받지 못한 사람에게 먼저 빵
을 1개 나누어 주고 나머지 빵 6개를 세 사람에게 남김
없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 6개를
택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_6 = {}_{3+6-1}C_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$$

따라서 이 경우의 수는

$$3 \times 2 \times 28 = 168$$

(iii) 세 사람 중 한 사람만 음료수 3개를 받는 경우

음료수 3개를 받을 한 사람을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

이 각각에 대하여 음료수를 받지 못한 두 사람에게 먼저
빵을 1개씩 나누어 주고 나머지 빵 5개를 세 사람에게
남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5
개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$
 따라서 이 경우의 수는
 $3 \times 21 = 63$
 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는
 $36 + 168 + 63 = 267$

답 ③

3 함수 f 가 조건 (가)를 만족시키려면 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허락하여 5개를 택한 후 큰 수부터 크기순으로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 의 값으로 정하면 된다. 즉, 조건 (가)를 만족시키는 함수 f 의 개수는 서로 다른 5개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
 ${}_5H_5 = {}_{5+5-1}C_5 = {}_9C_5 = {}_9C_4 = 126$
 이 중에서 조건 (나)를 만족시키지 않는 함수는
 $f(1)=5, f(2)=4, f(3)=3, f(4)=2, f(5)=1$
 인 한 가지뿐이다.
 따라서 구하는 함수의 개수는
 $126 - 1 = 125$

답 ⑤

4 천의 자리의 수를 a , 백의 자리의 수를 b , 십의 자리의 수를 c , 일의 자리의 수를 d 라 하면
 $a+b+c+d=9$
 (a 는 자연수, b, c 는 음이 아닌 정수, d 는 홀수)
 이므로 $a=a'+1, d=2d'+1$ (a', d' 은 음이 아닌 정수)로 놓으면
 $a'+b+c+2d'=7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 따라서 조건을 만족시키는 자연수의 개수는 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b, c, d' 의 모든 순서쌍 (a', b, c, d')의 개수와 같다.
 (i) $d'=0$ 인 경우
 $a'+b+c=7$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b, c 의 모든 순서쌍 (a', b, c)의 개수는 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
 ${}_3H_7 = {}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$
 (ii) $d'=1$ 인 경우
 $a'+b+c=5$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b, c 의 모든 순서쌍 (a', b, c)의 개수는 서로 다른 3개에서 5

개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_5 = {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$$

(iii) $d'=2$ 인 경우

$a'+b+c=3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b, c 의 모든 순서쌍 (a', b, c)의 개수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

(iv) $d'=3$ 인 경우

$a'+b+c=1$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b, c 의 모든 순서쌍 (a', b, c)의 개수는 서로 다른 3개에서 1개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_1 = {}_{3+1-1}C_1 = {}_3C_1 = 3$$

(i)~(iv)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$36 + 21 + 10 + 3 = 70$$

답 ⑤

5 $(2x+k)^6$ 의 전개식의 일반항은
 ${}_6C_r (2x)^{6-r} k^r = {}_6C_r \times 2^{6-r} \times k^r \times x^{6-r}$
 x^2 항은 $r=4$ 일 때이므로 x^2 의 계수는
 ${}_6C_4 \times 2^2 \times k^4 = {}_6C_2 \times 4 \times k^4$
 x^4 항은 $r=2$ 일 때이므로 x^4 의 계수는
 ${}_6C_2 \times 2^4 \times k^2 = {}_6C_2 \times 16 \times k^2$
 이때 x^2 의 계수가 x^4 의 계수의 36배이므로
 ${}_6C_2 \times 4 \times k^4 = 36 \times {}_6C_2 \times 16 \times k^2$
 k 는 자연수이므로
 $k^2 = 144 = 12^2$
 에서 $k=12$

답 ①

6 $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^n$ 의 전개식의 일반항은
 ${}_nC_r (x^2)^{n-r} \left(\frac{2}{x}\right)^r = {}_nC_r \times 2^r \times x^{2n-3r}$
 이므로 상수항은 $2n=3r$, 즉 $r=\frac{2}{3}n$ 일 때이다.
 즉, n 이 3의 배수가 아닐 때 상수항은 0이고, n 이 3의 배수일 때 $n=3k$ (k 는 자연수)라 하면 $r=2k$ 이므로 상수항은
 ${}_{3k}C_{2k} \times 2^{2k}$
 따라서



$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{10} f(n) &= f(3) + f(6) + f(9) \\
 &= \sum_{k=1}^3 {}_{3k}C_{2k} \times 2^{2k} \\
 &= {}_3C_2 \times 2^2 + {}_6C_4 \times 2^4 + {}_9C_6 \times 2^6 \\
 &= {}_3C_1 \times 2^2 + {}_6C_2 \times 2^4 + {}_9C_3 \times 2^6 \\
 &= 3 \times 4 + 15 \times 16 + 84 \times 64 \\
 &= 5628
 \end{aligned}$$

답 ④

- 7 서로 다른 종류의 초콜릿 10개 중에서 r ($r=2, 4, 6, 8, 10$)개를 택하고 나머지 $(12-r)$ 개는 사탕을 택하면 된다. 따라서 구하는 경우의 수는

$$\begin{aligned}
 &{}_{10}C_2 + {}_{10}C_4 + {}_{10}C_6 + {}_{10}C_8 + {}_{10}C_{10} \\
 &= ({}_{10}C_0 + {}_{10}C_2 + {}_{10}C_4 + {}_{10}C_6 + {}_{10}C_8 + {}_{10}C_{10}) - 1 \\
 &= 2^9 - 1 \\
 &= 511
 \end{aligned}$$

답 511

$$\begin{aligned}
 8 \quad A &= {}_{10}C_{10} + {}_{11}C_{10} + {}_{12}C_{10} + \cdots + {}_{17}C_{10} \\
 &= ({}_{11}C_{11} + {}_{11}C_{10}) + {}_{12}C_{10} + \cdots + {}_{17}C_{10} \\
 &= ({}_{12}C_{11} + {}_{12}C_{10}) + {}_{13}C_{10} + \cdots + {}_{17}C_{10} \\
 &= ({}_{13}C_{11} + {}_{13}C_{10}) + {}_{14}C_{10} + \cdots + {}_{17}C_{10} \\
 &= ({}_{14}C_{11} + {}_{14}C_{10}) + {}_{15}C_{10} + {}_{16}C_{10} + {}_{17}C_{10} \\
 &= ({}_{15}C_{11} + {}_{15}C_{10}) + {}_{16}C_{10} + {}_{17}C_{10} \\
 &= ({}_{16}C_{11} + {}_{16}C_{10}) + {}_{17}C_{10} \\
 &= {}_{17}C_{11} + {}_{17}C_{10} \\
 &= {}_{18}C_{11} \\
 &= {}_{18}C_7 \\
 &= \frac{18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \\
 &= 2^4 \times 3^2 \times 13 \times 17
 \end{aligned}$$

따라서 A 의 모든 소인수는 2, 3, 13, 17이므로 구하는 합은 $2+3+13+17=35$

답 ③

다른 풀이

${}_{10}C_{10}$ 은 $(1+x)^{10}$ 의 전개식에서 x^{10} 의 계수이고,
 ${}_{11}C_{10}$ 은 $(1+x)^{11}$ 의 전개식에서 x^{10} 의 계수이고,
 ${}_{12}C_{10}$ 은 $(1+x)^{12}$ 의 전개식에서 x^{10} 의 계수이고,
 \vdots

${}_{17}C_{10}$ 은 $(1+x)^{17}$ 의 전개식에서 x^{10} 의 계수이므로
 ${}_{10}C_{10} + {}_{11}C_{10} + {}_{12}C_{10} + \cdots + {}_{17}C_{10}$ 의 값은
 $(1+x)^{10} + (1+x)^{11} + (1+x)^{12} + \cdots + (1+x)^{17}$ 의 전개식에서 x^{10} 의 계수이다.

한편, $x \neq 0$ 일 때

$$\begin{aligned}
 &(1+x)^{10} + (1+x)^{11} + (1+x)^{12} + \cdots + (1+x)^{17} \\
 &= \frac{(1+x)^{10} \{(1+x)^8 - 1\}}{(1+x) - 1} \\
 &= \frac{(1+x)^{18} - (1+x)^{10}}{x}
 \end{aligned}$$

이므로 A 의 값은 $(1+x)^{18}$ 의 전개식에서 x^{11} 의 계수인 ${}_{18}C_{11}$ 과 같다.

이때

$$\begin{aligned}
 A &= {}_{18}C_{11} = {}_{18}C_7 \\
 &= \frac{18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \\
 &= 2^4 \times 3^2 \times 13 \times 17
 \end{aligned}$$

이므로 A 의 모든 소인수는 2, 3, 13, 17이다.

따라서 구하는 합은

$$2 + 3 + 13 + 17 = 35$$

Level 3 실력 완성

본문 28쪽

1 ⑤ 2 445 3 ②

- 1 조건 (나)에 의하여 a 가 홀수이므로

$$a = 2a' + 1 \quad (a' \text{은 음이 아닌 정수}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

로 놓을 수 있고, 조건 (다)에 의하여 $c \geq d$ 이므로

$$c = d + c' \quad (c' \text{은 음이 아닌 정수}) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

로 놓을 수 있다.

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 조건 (가)의 $a+b+c+d=8$ 에 대입하면

$$(2a' + 1) + b + (d + c') + d = 8$$

$$2a' + b + c' + 2d = 7$$

즉, $2(a' + d) + b + c' = 7$ (a', b, c', d 는 음이 아닌 정수)

(i) $a' + d = 0$ 인 경우

$a' + d = 0$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', d 의 순서쌍 (a', d)는 (0, 0)뿐이므로 그 개수는 1이고, 이 각각에 대하여 $b + c' = 7$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c' 의 모든 순서쌍 (b, c')의 개수는

$${}_2H_7 = {}_{2+7-1}C_7 = {}_8C_7 = {}_8C_1 = 8$$



따라서 이 경우의 수는

$$1 \times 8 = 8$$

(ii) $a' + d = 1$ 인 경우

$a' + d = 1$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', d 의 모든 순서쌍 (a', d) 의 개수는

$${}_2H_1 = {}_{2+1-1}C_1 = {}_2C_1 = 2$$

이 각각에 대하여 $b + c' = 5$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c' 의 모든 순서쌍 (b, c') 의 개수는

$${}_2H_5 = {}_{2+5-1}C_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

따라서 이 경우의 수는

$$2 \times 6 = 12$$

(iii) $a' + d = 2$ 인 경우

$a' + d = 2$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', d 의 모든 순서쌍 (a', d) 의 개수는

$${}_2H_2 = {}_{2+2-1}C_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

이 각각에 대하여 $b + c' = 3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c' 의 모든 순서쌍 (b, c') 의 개수는

$${}_2H_3 = {}_{2+3-1}C_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

따라서 이 경우의 수는

$$3 \times 4 = 12$$

(iv) $a' + d = 3$ 인 경우

$a' + d = 3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', d 의 모든 순서쌍 (a', d) 의 개수는

$${}_2H_3 = {}_{2+3-1}C_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

이 각각에 대하여 $b + c' = 1$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c' 의 모든 순서쌍 (b, c') 의 개수는

$${}_2H_1 = {}_{2+1-1}C_1 = {}_2C_1 = 2$$

따라서 이 경우의 수는

$$4 \times 2 = 8$$

(i)~(iv)에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는

$$8 + 12 + 12 + 8 = 40$$

☐ ⑤

2 조건 (가)에 의하여 ab 는 24의 약수이고, $c + d + e + f \geq 4$ 이므로 $ab=1, ab=2, ab=3, ab=4, ab=6$ 인 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $ab=1$ 인 경우

(a, b) 는 $(1, 1)$ 의 한 가지

이 각각에 대하여 $c + d + e + f = 24$ 이고 조건 (나)를 만족시키려면 c, d, e, f 가 모두 짝수이어야 한다.

$$c=2c'+2, d=2d'+2, e=2e'+2, f=2f'+2$$

(c', d', e', f' 은 음이 아닌 정수)

로 놓으면

$$c' + d' + e' + f' = 8$$

이를 만족시키는 모든 순서쌍 (c', d', e', f') 의 개수는 서로 다른 4개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_8 = {}_{4+8-1}C_8 = {}_{11}C_8 = {}_{11}C_3 = 165$$

따라서 이 경우의 수는

$$1 \times 165 = 165$$

(ii) $ab=2$ 인 경우

(a, b) 는 $(1, 2), (2, 1)$ 의 두 가지

이 각각에 대하여 $c + d + e + f = 12$ 이고 조건 (나)를 만족시키려면 c, d, e, f 가 모두 짝수이거나 c, d, e, f 중 에서 2개는 짝수, 2개는 홀수이어야 한다.

① c, d, e, f 가 모두 짝수인 경우

$$c=2c'+2, d=2d'+2, e=2e'+2, f=2f'+2$$

(c', d', e', f' 은 음이 아닌 정수)

로 놓으면

$$c' + d' + e' + f' = 2$$

이를 만족시키는 모든 순서쌍 (c', d', e', f') 의 개수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_2 = {}_{4+2-1}C_2 = {}_5C_2 = 10$$

② c, d, e, f 중에서 2개는 짝수, 2개는 홀수인 경우

c, d, e, f 중에서 짝수가 될 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$

이 각각에 대하여 짝수 2개를 $2p+2, 2q+2$, 홀수 2개를 $2r+1, 2s+1$ (p, q, r, s 는 음이 아닌 정수)

로 놓으면

$$p + q + r + s = 3$$

이를 만족시키는 모든 순서쌍 (p, q, r, s) 의 개수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하는 중복조합의 수인

$${}_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = 20$$

이므로 이 경우의 수는 $6 \times 20 = 120$

따라서 이 경우의 수는

$$2 \times (10 + 120) = 260$$

(iii) $ab=3$ 인 경우

(a, b) 는 $(1, 3), (3, 1)$ 의 두 가지

이 각각에 대하여 $c + d + e + f = 8$ 이고 조건 (나)를 만족시키려면 c, d, e, f 가 모두 짝수이어야 하므로

(c, d, e, f) 가 $(2, 2, 2, 2)$ 인 경우뿐이다.



따라서 이 경우의 수는

$$2 \times 1 = 2$$

(iv) $ab=4$ 인 경우

(a, b) 는 $(1, 4), (2, 2), (4, 1)$ 의 세 가지

이 각각에 대하여 $c+d+e+f=6$ 이고 조건 (나)를 만족시키려면 c, d, e, f 중에서 2개는 짝수, 2개는 홀수이어야 한다. 그 경우의 수는 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{2!2!} = 6$$

따라서 이 경우의 수는

$$3 \times 6 = 18$$

(v) $ab=6$ 인 경우

$c+d+e+f=4$ 인 경우는 (c, d, e, f) 가 $(1, 1, 1, 1)$ 인 경우뿐이므로 조건 (나)를 만족시킬 수 없다.

(i)~(v)에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는

$$165 + 260 + 2 + 18 = 445$$

답 445

3 x 와 y , y 와 z , z 와 x 가 각각 한 번씩만 서로 이웃하면 나열된 문자열을 같은 문자가 연속하여 나열되는 네 개의 구역으로 나눌 수 있다.

예를 들어 조건을 만족시키는 문자열 $xyyyzxxxx$ 에서 네 개의 구역을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

xx	yyy	z	$xxxx$
------	-------	-----	--------

이때 각 구역에 나열하는 문자의 종류를 그림으로 나타내면 다음과 같은 6가지 경우가 있다.

x	y	z	x
x	z	y	x
y	z	x	y
y	x	z	y
z	x	y	z
z	y	x	z

이 각각에 대하여 각 구역에는 해당 문자를 적어도 한 개 나열해야 하고 각 구역에 나열한 문자의 개수의 총합은 10이 되어야 하므로 각 구역에 나열하는 문자의 개수를 첫 번째 구역부터 차례로 a, b, c, d 라 하면

$$a+b+c+d=10 \quad (a, b, c, d \text{는 자연수})$$

이고,

$$a=a'+1, b=b'+1, c=c'+1, d=d'+1$$

(a', b', c', d' 은 음이 아닌 정수)

로 놓으면

$$a'+b'+c'+d'=6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d' 의 모든 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는 서로 다른 4개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_6 = {}_{4+6-1}C_6 = {}_9C_6 = {}_9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$$6 \times 84 = 504$$

답 ②

03 확률

유제

본문 31~37쪽

- 1 ④ 2 ① 3 ③ 4 ⑤ 5 19
6 11 7 ③ 8 ⑤

- 1 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
 $A = \{x | x \text{는 } 8 \text{의 약수}\} = \{1, 2, 4\}$
 $B = \{2, 4, 7\}$
 사건 A 와 배반인 사건은 사건 A^c 의 부분집합이고, 사건 B 와 배반인 사건은 사건 B^c 의 부분집합이다.
 사건 C 는 두 사건 A, B 와 모두 배반사건이므로
 사건 $A^c \cap B^c$ 의 부분집합이다.
 이때 $A^c = \{3, 5, 6, 7\}$, $B^c = \{1, 3, 5, 6\}$ 이므로
 $A^c \cap B^c = \{3, 5, 6\}$
 사건 $A^c \cap B^c$ 의 부분집합 중 모든 원소의 합이 최대인 사건 C 는
 $C = \{3, 5, 6\}$
 일 때이다.
 따라서 사건 C 의 모든 원소의 합의 최댓값은
 $3 + 5 + 6 = 14$

답 ④

- 2 두 주사위 P, Q 를 동시에 한 번 던져 나온 눈의 수가 각각 a, b 이므로 표본공간을 S 라 하면
 $S = \{(a, b) | a, b \text{는 } 6 \text{ 이하의 자연수}\}$
 $A = \{(a, b) | a + b = 8, a, b \text{는 } 6 \text{ 이하의 자연수}\}$
 $= \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$
 $B = \{(a, b) | |a - b| > 3, a, b \text{는 } 6 \text{ 이하의 자연수}\}$
 사건 C 는 두 사건 A^c, B 와 모두 배반이므로
 $C \cap A^c = \emptyset$ 에서 사건 C 는 사건 A 의 부분집합이고
 $C \cap B = \emptyset$ 에서 사건 C 는 사건 B^c 의 부분집합이다.
 따라서 사건 C 는 사건 $A \cap B^c$ 의 공집합이 아닌 부분집합이다.
 $B^c = \{(a, b) | |a - b| \leq 3, a, b \text{는 } 6 \text{ 이하의 자연수}\}$
 이므로
 $A \cap B^c = \{(3, 5), (4, 4), (5, 3)\}$

따라서 구하는 사건 C 의 개수는
 $2^3 - 1 = 7$

답 ①

- 3 8명 중에서 5명을 뽑는 경우의 수는

$${}_8C_5 = {}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

4쌍의 부부 중 뽑힌 5명에 포함될 두 쌍의 부부를 정하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

이 각각에 대하여 남은 4명 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{6 \times 4}{56} = \frac{3}{7}$$

답 ③

- 4 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적힌 5장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 5!

홀수 1, 3, 5가 적힌 세 장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 3!

이 각각에 대하여 나열된 세 장의 카드 사이의 두 곳과 양 끝의 네 곳 중 두 곳을 선택하여 짝수 2, 4가 적힌 카드를 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_2$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{3! \times {}_4P_2}{5!} = \frac{3}{5}$$

답 ⑤

- 5 1, 2, 2, 3, 3, 3의 6개의 숫자를 모두 사용하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수의 개수는

$$\frac{6!}{2!3!} = 60$$

이 여섯 자리의 자연수가 4의 배수인 경우는 다음과 같다.

(i) 십의 자리와 일의 자리의 수가 각각 1, 2인 사건을 A 라 하면 나머지 네 자리에 2, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!} = 4$ 이므로



$$P(A) = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$$

- (ii) 십의 자리와 일의 자리의 수가 각각 3, 2인 사건을 B 라 하면 나머지 네 자리에 1, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!} = 12$ 이므로

$$P(B) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

- (i), (ii)에서 두 사건 A 와 B 는 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \\ = \frac{1}{15} + \frac{1}{5} = \frac{4}{15}$$

따라서 $p = 15$, $q = 4$ 이므로

$$p + q = 15 + 4 = 19$$

답 19

- 6 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 집합 $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 으로의 함수의 개수는

$${}_6\Pi_4 = 6^4$$

- (i) $f(1) = 2$ 인 사건을 A 라 하면

$$P(A) = \frac{{}_6\Pi_3}{{}_6\Pi_4} = \frac{6^3}{6^4} = \frac{1}{6}$$

- (ii) $f(2) = 3$ 인 사건을 B 라 하면

$$P(B) = \frac{{}_6\Pi_3}{{}_6\Pi_4} = \frac{6^3}{6^4} = \frac{1}{6}$$

- (iii) $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ 인 사건은 $A \cap B$ 이므로

$$P(A \cap B) = \frac{{}_6\Pi_2}{{}_6\Pi_4} = \frac{6^2}{6^4} = \frac{1}{36}$$

- (i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

따라서 $p = \frac{11}{36}$ 이므로 $36p = 11$

답 11

- 7 꺼낸 카드에 적힌 두 수의 합은 2, 3, 4, 5, 6이다. 꺼낸 카드에 적힌 두 수의 합이 4 이하일 사건을 A 라 하면 사건 A 의 여사건 A^c 은 꺼낸 카드에 적힌 두 수의 합이 5 또는 6인 사건이다. 상자 속의 9장의 카드에서 2장의 카드를 택하는 경우의 수는

$${}_9C_2 = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36$$

꺼낸 카드에 적힌 두 수의 합이 5 또는 6이려면 2, 3이 적힌 카드를 한 장씩 꺼내거나 3이 적힌 카드 2장을 꺼내야 하므로 이 경우의 수는

$${}_2C_1 \times {}_3C_1 + {}_3C_2 = 6 + 3 = 9$$

따라서 $P(A^c) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ 이므로 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) \\ = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

답 ③

- 8 서로 다른 6개의 필기구를 2개씩 같은 종류의 필통 3개에 나누어 넣는 경우의 수는

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 1 \times \frac{1}{6} = 15$$

2개의 볼펜이 동일한 필통에 있도록 6개의 필기구를 세 개의 필통에 나누어 넣는 경우의 수는

$${}_2C_2 \times \left({}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} \right) = 1 \times \left(\frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 1 \times \frac{1}{2} \right) = 3$$

이므로 2개의 볼펜을 동일한 필통에 넣을 확률은

$$\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

따라서 2개의 볼펜을 동일한 필통에 넣지 않을 확률은 여사건의 확률에 의하여

$$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

답 ⑤

Level 1 기초 연습

본문 38쪽

1 ④

2 ②

3 ⑤

4 ④

5 6

- 1 두 사건 A , B 에 대하여 두 사건 $A \cap B^c$ 과 B 는 서로 배반사건이고 그 합집합은 $A \cup B$ 이므로

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(B)$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{6} + P(B)$$

$$\text{따라서 } P(B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$$

답 ④



- 2 세 학생 A, B, C를 포함한 5명의 학생을 각각 4개의 반에 배정하는 경우의 수는

$${}_4\Pi_5=4^5$$

세 학생 A, B, C를 모두 서로 다른 반에 배정하는 경우의 수는

$${}_4P_3 \times {}_4\Pi_2 = {}_4P_3 \times 4^2$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{{}_4P_3 \times 4^2}{4^5} = \frac{4 \times 3 \times 2}{4 \times 4 \times 4} = \frac{3}{8}$$

답 ②

- 3 서로 다른 두 주사위 A, B를 동시에 한 번 던져 나올 수 있는 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

$a^2 > 5(b+1) \geq 5 \times (1+1) = 10$ 이므로 $a \geq 4$ 이어야 한다.

따라서 $a^2 > 5(b+1)$ 을 만족시키는 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 다음과 같다.

(i) $a=4$ 일 때, $4^2 > 5(b+1)$

$$b+1 < \frac{16}{5} = 3.2$$

즉, $b < 2.2$ 에서

$$b=1 \text{ 또는 } b=2$$

(ii) $a=5$ 일 때, $5^2 > 5(b+1)$

$$b+1 < 5$$

즉, $b < 4$ 에서

$$b=1 \text{ 또는 } b=2 \text{ 또는 } b=3$$

(iii) $a=6$ 일 때, $6^2 > 5(b+1)$

$$b+1 < \frac{36}{5} = 7.2$$

즉, $b < 6.2$ 에서

$$b=1 \text{ 또는 } b=2 \text{ 또는 } b=3 \text{ 또는 } b=4 \text{ 또는 } b=5 \text{ 또는 } b=6$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는 $2+3+6=11$

따라서 구하는 확률은 $\frac{11}{36}$

답 ⑤

- 4 12개의 공 중에서 4개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

$${}_{12}C_4 = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$$

꺼낸 공의 색의 종류의 수가 2인 경우는 다음과 같다.

- (i) 같은 색의 공 3개와 나머지 다른 색의 공이 1개가 나오는 사건을 A라 하면

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{{}_3P_2 \times ({}_4C_3 \times {}_4C_1)}{{}_{12}C_4} \\ &= \frac{3 \times 2 \times (4 \times 4)}{495} = \frac{32}{165} \end{aligned}$$

- (ii) 같은 색의 공이 2개씩 2종류가 나오는 사건을 B라 하면

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{{}_3C_2 \times ({}_4C_2 \times {}_4C_2)}{{}_{12}C_4} \\ &= \frac{3 \times (6 \times 6)}{495} = \frac{12}{55} \end{aligned}$$

- (i), (ii)에서 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{32}{165} + \frac{12}{55} = \frac{68}{165} \end{aligned}$$

답 ④

- 5 10개의 공 중에서 파란 공이 x 개 있다고 하자.

3개의 공을 동시에 꺼낼 때 노란 공을 적어도 1개 꺼낼 확률이 $\frac{5}{6}$ 이므로 여사건의 확률에 의하여 꺼낸 3개의 공이 모두 파란 공일 확률은

$$1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{{}_xC_3}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{6} \quad (x \geq 3) \text{에서}$$

$${}_xC_3 = \frac{1}{6} \times {}_{10}C_3$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

$$x(x-1)(x-2) = 6 \times 5 \times 4$$

따라서 $x=6$ 이므로 주머니 속에 들어 있는 파란 공의 개수는 6이다.

답 6

Level 2

기본 연습

본문 39~40쪽

1 ④

2 ③

3 11

4 61

5 13

6 ②

7 ③

8 ③



- 1 서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 한 번 던져서 나오는 경우의 수는

$$6 \times 6 \times 6 = 6^3$$

나온 눈의 수의 최댓값과 최솟값의 합이 5인 경우는 다음과 같다.

- (i) 눈의 수의 최솟값이 1, 최댓값이 4인 사건을 A 라 하면
나온 눈의 수가 각각

$$(1, 1, 4), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (1, 4, 4)$$

일 때이고 이들을 나열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} + 3! + 3! + \frac{3!}{2!} = 3 + 6 + 6 + 3 = 18$$

이므로

$$P(A) = \frac{18}{6^3} = \frac{1}{12}$$

- (ii) 눈의 수의 최솟값이 2, 최댓값이 3인 사건을 B 라 하면
나온 눈의 수가 각각

$$(2, 2, 3), (2, 3, 3)$$

일 때이고 이들을 나열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} = 3 + 3 = 6$$

이므로

$$P(B) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$$

- (i), (ii)에서 두 사건 A 와 B 는 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \\ = \frac{1}{12} + \frac{1}{36} = \frac{1}{9}$$

답 ④

- 2 8명의 학생을 4명씩 두 모둠으로 나누는 경우의 수는

$${}_8C_4 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times 1 \times \frac{1}{2} = 35$$

1부터 8까지의 자연수에는 홀수 4개와 짝수 4개가 있다.

각 모둠에 속한 네 학생의 번호의 합이 모두 짝수인 경우는 다음과 같다.

- (i) 각 모둠에 번호가 홀수인 학생이 2명, 번호가 짝수인 학생이 2명이 있는 경우
이 경우의 수는

$$({}_4C_2 \times {}_4C_2) \times ({}_2C_2 \times {}_2C_2) \times \frac{1}{2!} \\ = \left(\frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \right) \times (1 \times 1) \times \frac{1}{2} = 18$$

- (ii) 번호가 홀수인 학생이 4명인 모둠과 번호가 짝수인 학생이 4명인 모둠이 있는 경우
이 경우의 수는 1

- (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{18+1}{35} = \frac{19}{35}$$

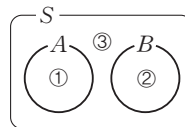
답 ③

- 3 표본공간 S 의 공집합이 아닌 부분집합의 개수는

$$2^4 - 1 = 15$$

이므로 두 사건 A, B 를 정하는 경우의 수는

$${}_{15}\Pi_2 = 15^2$$



그림과 같이 $A \cap B = \emptyset$ 일 때 ①은 집합 A , ②는 집합 B , ③은 집합 $(A \cup B)^c$ 을 나타낸다고 하자.

두 사건 A 와 B 가 서로 배반사건, 즉 $A \cap B = \emptyset$ 이 되도록 두 사건 A, B 를 정하려면 네 수 1, 2, 3, 4가 각각 ①, ②, ③의 세 집합 중 어느 한 집합에 속하면 된다.

이때 네 수가 ① 또는 ③에만 속하면 $B = \emptyset$ 이고 네 수가 ② 또는 ③에만 속하면 $A = \emptyset$ 이므로 제외해야 한다.

따라서 $A = \emptyset$ 또는 $B = \emptyset$ 이 되는 경우의 수는

$${}_2\Pi_4 + {}_2\Pi_4 - 1 = 16 + 16 - 1 = 31$$

공집합이 아닌 두 사건 A 와 B 가 서로 배반사건인 경우의 수는

$${}_3\Pi_4 - 31 = 3^4 - 31 = 50$$

이므로 구하는 확률은

$$\frac{50}{15^2} = \frac{2}{9}$$

따라서 $p=9, q=2$ 이므로

$$p+q=9+2=11$$

답 11

- 4 서로 다른 4개의 공 중에서 중복을 허락하여 차례로 3개의 공을 꺼내는 경우의 수는

$${}_4\Pi_3 = 4^3$$

두 직선 $ax+by+1=0, cx+ay+1=0$ 이 오직 한 점에서 만나려면 두 직선의 기울기가 서로 달라야 하므로

$$-\frac{a}{b} \neq -\frac{c}{a} \text{ 이어야 한다.}$$

$\frac{a}{b} \neq \frac{c}{a}$, 즉 $a^2 \neq bc$ 인 사건을 A 라 하면 사건 A 의 여사건 A^c 은 $a^2 = bc$ 를 만족시키는 사건이다.

이때 $a^2=bc$ 를 만족시키는 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 는 다음과 같다.

(i) $a=1$ 일 때

(1, 1, 1)로 개수는 1

(ii) $a=2$ 일 때

(2, 1, 4), (2, 2, 2), (2, 4, 1)로 개수는 3

(iii) $a=3$ 일 때

(3, 3, 3)으로 개수는 1

(iv) $a=4$ 일 때

(4, 4, 4)로 개수는 1

(i)~(iv)에 의하여 $a^2=bc$ 를 만족시키는 a, b, c 의 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$1+3+1+1=6$$

이므로

$$P(A^c) = \frac{6}{4^3} = \frac{3}{32}$$

한편, 두 직선 $ax+by+1=0, cx+ay+1=0$ 이 오직 한 점에서 만날 확률은 $P(A)$ 이므로

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - \frac{3}{32} = \frac{29}{32}$$

따라서 $p=32, q=29$ 이므로

$$p+q=32+29=61$$

답 61

5 5개의 숫자를 모두 사용하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!2!} = 30$$

이때 0이 만의 자리에 있도록 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!2!} = 6$$

이므로 5개의 숫자를 모두 사용하여 만든 다섯 자리의 자연수의 개수는

$$30-6=24$$

다섯 자리의 자연수가 짝수인 경우는 다음과 같다.

(i) 일의 자리가 0인 사건을 A 라 하면

$$1, 1, 2, 2 \text{를 나열하는 경우의 수가 } \frac{4!}{2!2!} = 6$$

이므로

$$P(A) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

(ii) 일의 자리가 2인 사건을 B 라 하면

$$0, 1, 1, 2 \text{를 나열하는 경우의 수가 } \frac{4!}{2!} = 12 \text{이고 } 0 \text{이}$$

만의 자리에 있도록 일렬로 나열하는 경우의 수가

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

이므로

$$P(B) = \frac{12-3}{24} = \frac{3}{8}$$

(i), (ii)에서 두 사건 A 와 B 는 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

따라서 $p=8, q=5$ 이므로

$$p+q=8+5=13$$

답 13

6 집합 $U = \{1, 2, 3\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합의 개수는

$$2^3 - 1 = 7$$

이므로 서로 다른 두 부분집합 A, B 를 정하는 경우의 수는

$${}_7P_2 = 7 \times 6 = 42$$

공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 의 원소의 개수를 각각 a, b 라 하면 $A \subset B$ 이고 $A \neq B$ 이므로 $1 \leq a < b \leq 3$ 이어야 한다.

(i) $a=1, b=2$ 인 경우

집합 U 의 원소 1, 2, 3 중 1개를 택해 집합 A 의 원소로 하고 남은 2개의 원소 중 1개를 택해 집합 $B-A$ 의 원소로 하는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_2C_1 = 6$$

(ii) $a=1, b=3$ 인 경우

집합 U 의 원소 1, 2, 3 중 1개를 택해 집합 A 의 원소로 하고 $B=U$ 로 하는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times 1 = 3$$

(iii) $a=2, b=3$ 인 경우

집합 U 의 원소 1, 2, 3 중 2개를 택해 집합 A 의 원소로 하고 $B=U$ 로 하는 경우의 수는

$${}_3C_2 \times 1 = 3$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{6+3+3}{42} = \frac{2}{7}$$

답 ②

7 동아리 6팀의 공연 순서를 정하는 경우의 수는 6!

공연 순서가 춤 동아리 2팀의 공연 사이에 적어도 2팀의 노래 동아리가 공연하는 순서로 정해지는 사건을 A 라 하면 사건 A 의 여사건 A^c 은 공연 순서가 춤 동아리 2팀이 이웃하여 공연하거나 춤 동아리 2팀의 공연 사이에 노래 동아리 1



팀이 공연하는 순서로 정해지는 사건이다.

- (i) 공연 순서가 춤 동아리 2팀이 이웃하여 공연하는 순서로 정해지는 경우

춤 동아리 2팀을 묶어서 1팀으로 생각하여 5팀이 공연 순서를 정하는 경우의 수는 5!

이 각각에 대하여 춤 동아리 2팀의 공연 순서를 바꾸는 경우의 수가 2!

따라서 구하는 경우의 수는

$$5! \times 2!$$

- (ii) 공연 순서가 춤 동아리 2팀의 공연 사이에 노래 동아리 1팀이 공연하는 순서로 정해지는 경우

춤 동아리 2팀의 공연 사이에 공연할 노래 동아리 1팀을 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

선택한 노래 동아리 1팀과 춤 동아리 2팀을 묶어서 1팀으로 생각하여 4팀의 공연 순서를 정하는 경우의 수는 4!

이 각각에 대하여 춤 동아리 2팀의 공연 순서를 바꾸는 경우의 수가 2!

따라서 구하는 경우의 수는

$$4 \times 4! \times 2! = 8 \times 4!$$

- (i), (ii)에서

$$\begin{aligned} P(A^c) &= \frac{2 \times 5! + 8 \times 4!}{6!} = \frac{(10+8) \times 4!}{6!} \\ &= \frac{18}{6 \times 5} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

답 ③

- 8 6명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는 6!

- (i) 2학년 학생 사이에 1학년 학생을 1명만 세우는 사건을 A 라 하자.

2명의 2학년 학생 사이에 1학년 학생 1명을 세우는 경우의 수는

$${}_4C_1 \times 2!$$

이 각각에 대하여 세 명을 한 묶음으로 보고 나머지 세 명의 1학년 학생과 함께 세우는 경우의 수는 4!이므로

$$P(A) = \frac{{}_4C_1 \times 2! \times 4!}{6!} = \frac{4}{15}$$

- (ii) 6명의 양쪽 끝에 모두 1학년 학생을 세우는 사건을 B 라 하자.

4명의 1학년 학생 중 2명의 학생을 양쪽 끝에 세우는 경

우의 수는 ${}_4P_2$

이 각각에 대하여 나머지 1학년 학생 2명과 2학년 학생 2명을 세우는 경우의 수는 4!이므로

$$P(B) = \frac{{}_4P_2 \times 4!}{6!} = \frac{2}{5}$$

- (iii) 사건 $A \cap B$ 는 2학년 학생 사이에 1학년 학생을 1명만 세우고 6명의 양쪽 끝에 모두 1학년 학생 2명을 세우는 사건이다.

2명의 2학년 학생 사이에 1학년 학생 1명을 세우는 경우의 수는 ${}_4C_1 \times 2!$

이 각각에 대하여 남은 3명의 1학년 학생 중 2명의 학생을 양쪽 끝에 세우는 경우의 수는 ${}_3P_2$

이 각각에 대하여 2명의 2학년 학생과 그 사이의 1학년 학생 1명을 한 묶음으로 보고 나머지 1명의 1학년 학생과 함께 세우는 경우의 수가 2!이므로

$$P(A \cap B) = \frac{{}_4C_1 \times 2! \times {}_3P_2 \times 2!}{6!} = \frac{2}{15}$$

- (i), (ii), (iii)에서 확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{4}{15} + \frac{2}{5} - \frac{2}{15} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 4쪽

1 ②

2 ①

3 ⑤

- 1 $f(1)=a, f(2)=b, f(3)=c$ 라 하면

$$f(1)+f(2)+f(3)=7 \text{에서}$$

$$a+b+c=7 \quad (a, b, c \text{는 } 1 \text{ 이상 } 4 \text{ 이하의 자연수})$$

를 만족시킨다.

$$a=a'+1, b=b'+1, c=c'+1 \text{로 놓으면}$$

$$a'+b'+c'=4 \quad (a', b', c' \text{은 음이 아닌 } 3 \text{ 이하의 정수})$$

이 방정식을 만족시키는 모든 순서쌍 (a', b', c') 의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 4개를 뽑는 조합의 수에서 순서쌍 (a', b', c') 이 $(4, 0, 0), (0, 4, 0), (0, 0, 4)$ 인 경우의 수 3을 빼야 하므로

$${}_3H_4 - 3 = {}_{3+4-1}C_4 - 3$$

$$= {}_6C_4 - 3 = {}_6C_2 - 3$$

$$= \frac{6 \times 5}{2 \times 1} - 3 = 12$$

이때 $f(4)$ 의 값은 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 함수 f 의 개수

는 $12 \times 4 = 48$

한편, $a+b+c=7$ 인 함수 f 중에서 치역의 원소의 개수가 2인 경우는 다음과 같다.

(i) a, b, c 의 값이 1, 3, 3이고 $f(4)$ 가 1 또는 3인 경우

1, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수가 $\frac{3!}{2!}$

이 각각에 대하여 $f(4)$ 가 1 또는 3이므로

구하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times 2 = 6$$

(ii) a, b, c 의 값이 2, 2, 3이고 $f(4)$ 가 2 또는 3인 경우

2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수가 $\frac{3!}{2!}$

이 각각에 대하여 $f(4)$ 가 2 또는 3이므로

구하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times 2 = 6$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{6+6}{48} = \frac{1}{4}$$

②

2 서로 다른 8개의 문자와 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 8!

(i) 문자 A와 숫자 1을 이웃하여 나열하지 않는 경우

문자 A의 양쪽 옆에 숫자 1을 제외한 숫자를 나열하고, 숫자 1의 양쪽 옆에 문자 A를 제외한 문자를 나열해야 한다.

문자 A의 양쪽 옆에 숫자 1을 제외한 숫자를 나열하는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$

이 각각에 대하여 숫자 1의 양쪽 옆에 문자 A를 제외한 문자를 나열하는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$

이 각각에 대하여 이들 각각을 한 묶음씩 두 묶음으로 생각하고 나머지 숫자 1개, 문자 1개와 함께 일렬로 나열하는 경우의 수는 4!

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 6 \times 4! = 36 \times 4!$$

(ii) 문자 A와 숫자 1을 이웃하여 나열하는 경우

문자 A의 양쪽 옆에 1과 세 숫자 2, 3, 4 중 하나의 숫자를 나열하고, 숫자 1의 양쪽 옆에 A와 세 문자 B, C, D 중 하나의 문자를 나열해야 한다.

문자 A에 이웃하여 숫자 1을 나열하는 경우의 수는 2!

이 각각에 대하여 문자 A와 숫자 1을 한 묶음으로 생각하여 양쪽 옆에 숫자 1개, 문자 1개를 나열하는 경우의

수는 ${}_3C_1 \times {}_3C_1 = 9$

이 각각에 대하여 다시 이들을 한 묶음으로 생각하고 나머지 숫자 2개, 문자 2개와 함께 일렬로 나열하는 경우의 수는 5!

따라서 구하는 경우의 수는

$$2! \times 9 \times 5! = 90 \times 4!$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{36 \times 4! + 90 \times 4!}{8!} = \frac{(36+90) \times 4!}{8!} = \frac{126}{8 \times 7 \times 6 \times 5} = \frac{3}{40}$$

①

3 갑과 을이 서로 다른 세 주머니에서 공을 각각 한 개씩 꺼내는 경우의 수는

$$5^3 \times 4^3$$

$a_i \neq b_i$ 인 i ($i=1, 2, 3$)이 존재하는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^c 은 $a_i \neq b_i$ 인 i 가 존재하지 않는 사건이다.

즉, $a_1=b_1, a_2=b_2, a_3=b_3$ 인 사건이다.

서로 다른 세 주머니에는 1, 2, 3, 4, 5가 적힌 공이 1개씩 있으므로 갑과 을이 꺼낸 3개의 공에 적힌 숫자를 크기순으로 배열했을 때 사건 A^c 이 일어나려면 갑이 꺼낸 3개의 공에 적힌 숫자는 서로 달라야 한다.

1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자에서 갑이 꺼낸 3개의 공에 적힌 서로 다른 숫자를 정하는 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

(i) 이 10가지 경우 중에서 갑이 서로 다른 세 주머니에서 1, 2, 3이 적힌 공을 꺼냈다고 가정할 때, 꺼내는 순서를 정하는 경우의 수는 3!

(ii) (i)에서 갑이 1, 2, 3이 적힌 공을 차례로 꺼냈다고 할 때 을도 서로 다른 세 주머니에서 1, 2, 3이 적힌 공을 꺼내려면 차례로 2, 3, 1이 적힌 공을 꺼내거나 3, 1, 2가 적힌 공을 꺼내야 한다.

(i), (ii)에서 갑과 을이 모두 1, 2, 3이 적힌 공을 꺼내는 경우의 수는

$$3! \times 2 = 12$$

따라서

$$P(A^c) = \frac{10 \times 12}{5^3 \times 4^3} = \frac{3}{5^2 \times 2^3} = \frac{3}{200}$$

이므로 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{3}{200} = \frac{197}{200}$$

⑤



04 조건부확률

유제

본문 45~51쪽

- 1 ③ 2 ④ 3 ③ 4 ④ 5 ①
6 ④ 7 254 8 ①

- 1 $a+b$ 가 4의 배수인 사건을 A , ab 가 4의 배수인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

한 개의 주사위를 2번 던져서 나오는 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

$a+b$ 가 4의 배수인 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 3), (2, 2), (3, 1), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (6, 6)$

의 9개이므로

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$a+b$ 가 4의 배수이고 ab 도 4의 배수인 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$(2, 2), (2, 6), (4, 4), (6, 2), (6, 6)$

의 5개이므로

$$P(A \cap B) = \frac{5}{36}$$

$$\text{따라서 } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{1}{4}} = \frac{5}{9}$$

답 ③

- 2 남학생 12명 중에서 배우팀에 속한 남학생이 8명이므로 스태프팀에 속한 남학생은 4명이다. 또 여학생 8명 중에서 스태프팀에 속한 여학생이 5명이므로 배우팀에 속한 여학생은 3명이다.

이것을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위 : 명)

	스타프팀	배우팀
남학생	4	8
여학생	5	3

이 동아리 학생 20명 중에서 임의로 한 명을 뽑았을 때 스태프팀에 속한 학생인 사건을 A , 남학생인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

$$P(A) = \frac{9}{20}, P(A \cap B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

이므로

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{9}{20}} = \frac{4}{9}$$

답 ④

다른 풀이

남학생 12명 중에서 배우팀에 속한 남학생이 8명이므로 스태프팀에 속한 남학생은 4명이다. 또 여학생 8명 중에서 스태프팀에 속한 여학생이 5명이므로 배우팀에 속한 여학생은 3명이다.

이것을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위 : 명)

	스타프팀	배우팀
남학생	4	8
여학생	5	3

이 동아리 학생 20명 중에서 임의로 한 명을 뽑았을 때 스태프팀에 속한 학생인 사건을 A , 남학생인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

$$n(A) = 9, n(A \cap B) = 4 \text{ 이므로}$$

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{4}{9}$$

- 3 게임을 한 번 할 때 점수를 5점 이상 얻는 경우는 다음과 같다.

- (i) 주사위를 처음 던질 때 나온 눈의 수가 4 이하인 경우

처음 던져서 나온 주사위의 눈의 수가 3 또는 4일 때 6점 또는 8점, 즉 5 이상의 점수를 얻게 되므로 이 확률은

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- (ii) 주사위를 처음 던질 때 나온 눈의 수가 5 이상인 경우

두 번째로 던져서 나온 주사위의 눈의 수가 5 이상일 때 5 이상의 점수를 얻게 되므로 이 확률은

$$\frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$$

- (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

답 ③



- 4 $10a+b$ 가 짝수인 사건을 A , $10b+a$ 가 짝수인 사건을 B 라 하자.

사건 A 는 $b=2$ 인 사건이므로 $a=2$ 일 때와 $a \neq 2$ 인 경우를 생각하면

$$P(A) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$$

사건 B 는 $a=2$ 인 사건이므로

$$P(B) = \frac{3}{6} \times 1 = \frac{1}{2}$$

사건 $A \cap B$ 는 $a=2, b=2$ 인 사건이므로

$$P(A \cap B) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

따라서 확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

답 ④

다른 풀이

$10a+b$ 가 짝수이거나 $10b+a$ 가 짝수인 사건을 A 라 하면 A 의 여사건 A^c 은 $10a+b$ 와 $10b+a$ 가 모두 홀수인 사건이다.

$10a+b$ 와 $10b+a$ 가 모두 홀수이려면 a, b 가 모두 홀수이어야 하므로

$$P(A^c) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\text{따라서 } P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

- 5 한 개의 주사위를 한 번 던져서 소수의 눈이 나오는 사건을 A 라 하고, 한 개의 동전을 한 번 던져서 앞면이 나오는 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(A \cap B)$ 이다.

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}$$

이때 두 사건 A 와 B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

답 ①

- 6 두 사건 A 와 B 가 서로 독립이므로 두 사건 A^c 과 B 도 서로 독립이다.

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B) = \frac{1}{4} \quad \dots\dots ㉠$$

$$P(A^c|B) - P(B|A^c) = \frac{5}{12} \text{에서}$$

$$P(A^c) - P(B) = \frac{5}{12}$$

$$P(A^c) = \frac{5}{12} + P(B) \text{를 ㉠에 대입하면}$$

$$\left\{ \frac{5}{12} + P(B) \right\} P(B) = \frac{1}{4}$$

$$12\{P(B)\}^2 + 5P(B) - 3 = 0$$

$$\{3P(B) - 1\} \{4P(B) + 3\} = 0$$

$$P(B) > 0 \text{이므로 } P(B) = \frac{1}{3}$$

답 ④

- 7 한 개의 주사위를 한 번 던져서 3의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$ 이고 3의 약수가 아닌 눈이 나올 확률은 $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

주사위를 5번 던져서 3의 약수의 눈이 나온 횟수를 a 라 하면 3의 약수가 아닌 눈이 나온 횟수는 $5-a$ 이다.

이때 이동시킨 점 P 의 좌표는 $3a - 2(5-a) = 5a - 10$ 이므로 점 P 의 좌표가 5보다 크려면

$$5a - 10 > 5$$

$$5a > 15, a > 3$$

따라서 $a=4$ 또는 $a=5$

(i) $a=4$ 일 확률은

$${}_5C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{10}{243}$$

(ii) $a=5$ 일 확률은

$${}_5C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{10}{243} + \frac{1}{243} = \frac{11}{243}$$

따라서 $p=243, q=11$ 이므로

$$p+q=243+11=254$$

답 254

- 8 한 번의 시행에서 홀수가 적혀 있는 공을 꺼낼 확률은 $\frac{3}{5}$ 이고 짝수가 적혀 있는 공을 꺼낼 확률은 $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ 이다.

꺼낸 공에 적혀 있는 네 수의 합이 홀수인 경우는 다음과 같다.

(i) 네 수 중 하나가 홀수인 경우

이때의 확률은

$${}_4C_1 \left(\frac{3}{5}\right)^1 \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{96}{625}$$

(ii) 네 수 중 세 개가 홀수인 경우

이때의 확률은

$${}_4C_3 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{216}{625}$$



(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{96}{625} + \frac{216}{625} = \frac{312}{625}$$

답 ①

Level 1

기초 연습

본문 52쪽

1 ③

2 ③

3 ⑤

4 ③

5 ②

1 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3}$ 에서

$$P(A) = 3P(A \cap B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$P(B) = 2P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{에서}$$

$$\frac{2}{3} = 3P(A \cap B) + 2P(A \cap B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{2}{3} = 4P(A \cap B)$$

$$\text{따라서 } P(A \cap B) = \frac{1}{6} \text{이므로}$$

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) \\ = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

답 ③

2 이 고등학교 2학년 학생 중에서 임의로 선택한 한 명이 10월을 선택한 학생인 사건을 A , 남학생인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

이 고등학교 2학년 전체 학생 수는 250이고

10월을 선택한 학생 수는 $70 + 50 = 120$ 이므로

$$P(A) = \frac{120}{250} = \frac{12}{25}$$

10월을 선택한 남학생 수는 70이므로

$$P(A \cap B) = \frac{70}{250} = \frac{7}{25}$$

$$\text{따라서 } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{25}}{\frac{12}{25}} = \frac{7}{12}$$

답 ③

3 9개의 공이 들어 있는 주머니에는 짝수 2, 4, 6, 8이 적혀 있는 공 4개, 3의 배수 3, 6, 9가 적혀 있는 공 3개가 들어 있다.

(i) 처음 꺼낸 공이 2, 4, 8이 적혀 있는 공 중 하나일 때 주머니에는 3의 배수 3, 6, 9가 적혀 있는 공 3개가 남아 있으므로 이 확률은

$$\frac{3}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$$

(ii) 처음 꺼낸 공이 6이 적혀 있는 공일 때 주머니에는 3의 배수 3, 9가 적혀 있는 공 2개가 남아 있으므로 이 확률은

$$\frac{1}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{36}$$

(i), (ii)에서 확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{36} = \frac{11}{72}$$

답 ⑤

4 상자에서 처음 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 A , 두 번째 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 B 라 하자.

(i) 두 사건 A 와 B 가 서로 독립이므로 두 사건 A^c 과 B^c 도 서로 독립이다. 따라서 두 번 모두 검은 공이 나올 확률은

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$$

이므로

$$p_1 = 1 - \frac{9}{64} = \frac{55}{64}$$

(ii) 두 사건 A 와 B 가 서로 독립이므로 두 사건 A 와 B^c 이 서로 독립이고 두 사건 A^c 과 B 도 서로 독립이다.

따라서

$$p_2 = P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) \\ = P(A)P(B^c) + P(A^c)P(B) \\ = \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{32}$$

(i), (ii)에 의하여

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{15}{32}}{\frac{55}{64}} = \frac{6}{11}$$

답 ③

5 네 개의 동전을 동시에 한 번 던질 때 앞면이 나온 동전의 개수가 뒷면이 나온 동전의 개수보다 많은 경우는 다음과 같다.

(i) 앞면이 나온 동전이 3개, 뒷면이 나온 동전이 1개인 경우 이때의 확률은

$${}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

(ii) 앞면이 나온 동전이 4개인 경우 이때의 확률은

$${}_4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

답 ②

Level 2 기본 연습

본문 53~54쪽

- 1 ③ 2 ② 3 55 4 ⑤ 5 ③
6 ② 7 ② 8 ④

1 이 학교 전체 학생 중에서 임의로 뽑은 한 학생이 생활복 A 디자인을 선택한 학생인 사건을 A, 여학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

이 학교 전체 학생 중 60%가 남학생이므로

$$P(B^c) = 0.6$$

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - 0.6 = 0.4$$

남학생 중 60%가 생활복 A 디자인을 선택하였으므로

$$P(A|B^c) = 0.6$$

여학생 중 70%가 생활복 A 디자인을 선택하였으므로

$$P(A|B) = 0.7$$

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

$$= 0.4 \times 0.7 = 0.28$$

$$P(A \cap B^c) = P(B^c)P(A|B^c)$$

$$= 0.6 \times 0.6 = 0.36$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

$$= 0.28 + 0.36 = 0.64$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.28}{0.64} = \frac{7}{16}$$

답 ③

참고

	여학생 (B)	남학생 (B ^c)	계
A 디자인 선택 (A)	0.28	0.36	0.64
B 디자인 선택 (A ^c)	0.12	0.24	0.36
계	0.4	0.6	1

2 시행의 결과로 나올 수 있는 표본공간을 S라 하면

$$S = \{x | x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}, n(S) = 10$$

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, n(A) = 5$$

$$A^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}, n(A^c) = 5$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 에서
두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$n(S) = 10, n(A \cup B) = 7, n(A) = 5 \text{이므로}$$

$$\frac{7}{10} = \frac{5}{10} + \frac{n(B)}{10} - \frac{5}{10} \times \frac{n(B)}{10}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{n(B)}{20}, n(B) = 4$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{에서}$$

$$\frac{n(A \cap B)}{10} = \frac{5}{10} \times \frac{4}{10} \text{이므로}$$

$$n(A \cap B) = 2$$

이때 $n(B) = 4$ 이고 $n(A \cap B) = 2$ 를 만족시키는 사건 B는
사건 A의 원소와 사건 A^c의 원소를 각각 2개씩 포함하여야
한다.

따라서 구하는 사건 B의 개수는

$${}_5C_2 \times {}_5C_2 = 10 \times 10 = 100$$

답 ②



- 3 처음 꺼낸 공이 1이 적혀 있는 공인 사건을 A , 주머니에서 다시 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수의 곱이 홀수인 사건을 B 라 하자.

(i) 처음 꺼낸 공이 1이 적혀 있는 공일 확률은

$$P(A) = \frac{4}{7}$$

1이 적혀 있는 공을 1개 추가하여 주머니에 넣으면 주머니에는 1이 적혀 있는 공 5개와 2가 적혀 있는 공 3개가 들어 있게 된다. 이때 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수의 곱이 홀수이려면 1이 적혀 있는 공 3개를 동시에 꺼내야 하므로 이 확률은

$$P(B|A) = \frac{{}_5C_3}{{}_8C_3} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{4}{7} \times \frac{5}{28} = \frac{5}{49}$$

(ii) 처음 꺼낸 공이 2가 적혀 있는 공일 확률은

$$P(A^c) = \frac{3}{7}$$

2가 적혀 있는 공을 2개 추가하여 주머니에 넣으면 주머니에는 1이 적혀 있는 공 4개와 2가 적혀 있는 공 5개가 들어 있게 된다. 이때 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수의 곱이 홀수이려면 1이 적혀 있는 공 3개를 동시에 꺼내야 하므로 이 확률은

$$P(B|A^c) = \frac{{}_4C_3}{{}_9C_3} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$$

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B|A^c) \\ &= \frac{3}{7} \times \frac{1}{21} = \frac{1}{49} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= \frac{5}{49} + \frac{1}{49} = \frac{6}{49} \end{aligned}$$

따라서 $p=49$, $q=6$ 이므로

$$p+q=49+6=55$$

답 55

- 4 꺼낸 4개의 공 중에서 흰 공이 3개인 사건을 A , 주머니 B 에서 흰 공 2개를 꺼내는 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

꺼낸 4개의 공 중에서 흰 공이 3개인 경우는 다음 두 가지가 있다.

- (i) 주머니 A 에서 흰 공 2개, 주머니 B 에서 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내는 경우
이때의 확률은

$$\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} \times \frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{1}{15} \times \frac{6}{10} = \frac{1}{25}$$

- (ii) 주머니 A 에서 흰 공 1개, 검은 공 1개, 주머니 B 에서 흰 공 2개를 꺼내는 경우

이때의 확률은

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{8}{15} \times \frac{3}{10} = \frac{4}{25}$$

(i), (ii)에서

$$P(A) = \frac{1}{25} + \frac{4}{25} = \frac{1}{5}$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{25}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{1}{5}} = \frac{4}{5}$$

답 ⑤

- 5 점 P 가 원점을 출발하여 점 $(1, 2)$ 를 지나기 위해서는 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 이동시켜야 하므로 세 번째까지 던져서 나온 주사위의 눈의 수가 2 이하가 한 번, 3 이상이 두 번 나와야 한다.

이 경우의 확률은

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

이 각각에 대하여 점 $(1, 2)$ 에서 점 $(3, 3)$ 으로 이동시키려면 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 이동시켜야 하므로 네 번째에서 여섯 번째까지 던져서 나온 주사위의 눈의 수가 2 이하가 두 번, 3 이상이 한 번 나와야 한다.

이 경우의 확률은

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{4}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{8}{81}$$

답 ③

- 6 8명의 학생이 8개의 의자에 앉는 경우의 수는 8! A 와 B 가 같은 줄에 앉는 사건을 A , A 와 C 가 같은 줄에서 서로 이웃하여 앉는 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

A 와 B 가 같은 줄에 앉을 확률은

A , B 가 같이 앉을 줄을 선택하는 경우의 수가 2,

선택한 줄에서 A, B가 앉는 경우의 수가 ${}_4P_2$,
나머지 6명의 학생이 남아 있는 6개의 의자에 앉는 경우의
수가 $6!$ 이므로

$$P(A) = \frac{2 \times {}_4P_2 \times 6!}{8!} = \frac{3}{7}$$

A와 B가 같은 줄에 앉고 A와 C가 같은 줄에서 서로 이웃
하여 앉을 확률은 A, B, C가 같이 앉을 줄을 선택하는 경
우의 수가 2, 선택한 줄에서 A와 C를 한 묶음으로 생각하
여 B와 한 줄에 앉는 경우의 수가 ${}_3P_2$, A와 C가 서로 바꾸
어 앉는 경우의 수가 $2!$, 나머지 5명의 학생이 남아 있는 5
개의 의자에 앉는 경우의 수는 $5!$ 이므로

$$P(A \cap B) = \frac{2 \times {}_3P_2 \times 2! \times 5!}{8!} = \frac{1}{14}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{14}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{6}$$

답 ②

7 갑이 꺼낸 공에 적혀 있는 두 수의 합이 짝수이므로 구하는
경우는 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

(i) 갑이 꺼낸 공에 적혀 있는 두 수가 모두 짝수인 경우

갑이 모두 짝수가 적혀 있는 공을 꺼내고, 을은 모두 짝
수가 적혀 있거나 모두 홀수가 적혀 있는 공을 꺼내는 경
우이고 이 확률은

$$\begin{aligned} & \frac{2}{4} \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \right) \\ &= \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{7}{60} \end{aligned}$$

(ii) 갑이 꺼낸 공에 적혀 있는 두 수가 모두 홀수인 경우

갑이 모두 홀수가 적혀 있는 공을 꺼내고, 을은 모두 짝
수가 적혀 있거나 모두 홀수가 적혀 있는 공을 꺼내는 경
우이고 이 확률은

$$\begin{aligned} & \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \right) \\ &= \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{3}{20} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{7}{60} + \frac{3}{20} = \frac{16}{60} = \frac{4}{15}$$

답 ②

8 8번의 시행을 할 때, $x_4=0$ 인 사건을 A, $x_8>0$ 인 사건을
B라 하면 구하는 확률은 $P(A \cap B)$ 이다.

이때 $x_4=0$ 이고 $x_8>0$ 인 경우는 다음과 같다.

(i) $x_4=0$ 이고 $x_8=2$ 인 경우

4번째 시행까지 앞면이 2번, 뒷면이 2번 나온 후 다음 4
번의 시행에서 앞면이 3번, 뒷면이 1번 나와야 하므로
이 경우의 확률은

$$\begin{aligned} & \left\{ {}_4C_2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right\} \times \left\{ {}_4C_3 \left(\frac{1}{2} \right)^3 \left(\frac{1}{2} \right)^1 \right\} \\ &= \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{32} \end{aligned}$$

(ii) $x_4=0$ 이고 $x_8=4$ 인 경우

4번째 시행까지 앞면이 2번, 뒷면이 2번 나온 후 다음 4
번의 시행에서 앞면이 4번 나와야 하므로 이 경우의 확
률은

$$\begin{aligned} & \left\{ {}_4C_2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right\} \times \left\{ {}_4C_4 \left(\frac{1}{2} \right)^4 \right\} \\ &= \frac{3}{8} \times \frac{1}{16} = \frac{3}{128} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(A \cap B) = \frac{3}{32} + \frac{3}{128} = \frac{15}{128}$$

답 ④

Level 3 실력 완성

본문 55쪽

1 ③ 2 ② 3 ④ 4 675

1 6개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3을 모두 사용하여 만든 여섯 자
리의 자연수의 개수는

$$\frac{6!}{2!3!} = 60$$

여섯 자리의 자연수 N의 백의 자리의 수가 3인 사건을 A,
천의 자리의 수와 십의 자리의 수 중 적어도 하나는 2인 사
건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

(i) 백의 자리의 수가 3인 자연수 N의 개수는 3을 백의 자
리에 놓고 1, 2, 2, 3, 3을 나머지 다섯 자리에 일렬로
나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{2!2!} = 30$$

(ii) 백의 자리의 수가 3이고 천의 자리의 수와 십의 자리의
수가 모두 2가 아닌 자연수 N의 개수는 3을 백의 자리



에 놓고 2, 2를 천의 자리와 십의 자리가 아닌 세 자리 중 두 자리를 택하여 배열한 후 1, 3, 3을 남은 세 자리에 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3C_2 \times \frac{3!}{2!} = 9$$

(i), (ii)에서 백의 자리의 수는 3이고 천의 자리의 수와 십의 자리의 수 중 적어도 하나는 2인 자연수 N 의 개수는 $30 - 9 = 21$

$$\text{이므로 } P(A) = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}, P(A \cap B) = \frac{21}{60} = \frac{7}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{20}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{10}$$

답 ③

2 세 개의 주사위를 동시에 한 번 던져서 나온 세 개의 눈의 수를 4로 나눈 나머지를 각각 a, b, c 라 하자.

㉠ 4로 나눈 나머지가 0일 때,

주사위의 눈의 수가 4이므로

$$a=0, b=0, c=0 \text{ 일 확률은 각각 } \frac{1}{6} \text{ 이다.}$$

㉡ 4로 나눈 나머지가 1일 때,

주사위의 눈의 수가 1 또는 5이므로

$$a=1, b=1, c=1 \text{ 일 확률은 각각 } \frac{1}{3} \text{ 이다.}$$

㉢ 4로 나눈 나머지가 2일 때,

주사위의 눈의 수가 2 또는 6이므로

$$a=2, b=2, c=2 \text{ 일 확률은 각각 } \frac{1}{3} \text{ 이다.}$$

㉣ 4로 나눈 나머지가 3일 때,

주사위의 눈의 수가 3이므로

$$a=3, b=3, c=3 \text{ 일 확률은 각각 } \frac{1}{6} \text{ 이다.}$$

세 개의 주사위를 던져서 나온 모든 눈의 수의 합을 4로 나눈 나머지가 2일 확률은 $a+b+c=2$ 또는 $a+b+c=6$ 일 확률과 같다.

(i) a, b, c 가 2, 0, 0일 확률은

$$\frac{3!}{2!} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

(ii) a, b, c 가 1, 1, 0일 확률은

$$\frac{3!}{2!} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

(iii) a, b, c 가 1, 2, 3일 확률은

$$3! \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$$

(iv) a, b, c 가 2, 2, 2일 확률은

$$1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

(v) a, b, c 가 3, 3, 0일 확률은

$$\frac{3!}{2!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{72}$$

(i)~(v)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{72} = \frac{53}{216}$$

답 ②

3 소수가 나오는 사건이 A 이므로

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

$$P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

20보다 작은 자연수 n 에 대하여 n 이하의 수가 나오는 사건이 B_n 이므로

$$B_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

$$P(B_n) = \frac{n}{20}$$

20보다 작은 자연수 n 에 대하여 두 사건 A 와 B_n 이 서로 독립이라면

$$P(A \cap B_n) = P(A)P(B_n) \text{ 이어야 한다.}$$

$$n(A \cap B_n) = k \text{ 라 하면}$$

$$\frac{k}{20} = \frac{2}{5} \times \frac{n}{20}$$

이므로

$$k = \frac{2}{5}n$$

..... ㉠

이때 k 는 자연수이므로 n 은 5의 배수이다.

(i) $n=5$ 일 때

$$A \cap B_n = \{2, 3, 5\}$$

에서 $k=3$ 이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $n=10$ 일 때

$$A \cap B_n = \{2, 3, 5, 7\}$$

에서 $k=4$ 이므로 ㉠을 만족시킨다.

(iii) $n=15$ 일 때

$$A \cap B_n = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$$

에서 $k=6$ 이므로 ㉠을 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서 두 사건 A 와 B_n 이 서로 독립이 되도록 하는 n 의 값은 10, 15이므로 구하는 모든 n 의 값의 합은 $10+15=25$

답 ④

4 남편과 아내들이 숫자를 부여받은 모든 경우마다 부부끼리 부여받은 숫자와 적은 숫자가 일치할 확률은 같은 정도로 기대되므로 남편과 아내들이 숫자를 부여받은 어떤 한 경우를 생각하여 확률을 구하면 된다.

이때 어느 한 쌍의 부부 중 남편이 부여받은 숫자와 아내가 적은 숫자가 일치할 확률과 아내가 부여받은 숫자와 남편이 적은 숫자가 일치할 확률은 각각 $\frac{1}{4}$ 이므로 한 쌍의 부부가 상품을 받을 확률은

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

이고 상품을 받지 못할 확률은

$$1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

한편, 각 쌍의 부부가 상품을 받는 사건은 서로 독립이므로 네 쌍의 부부 중 두 쌍의 부부가 상품을 받을 확률은

$${}_4C_2 \left(\frac{1}{16} \right)^2 \left(\frac{15}{16} \right)^2 = 6 \times \frac{1}{2^8} \times \frac{225}{2^8} = \frac{675}{2^{15}}$$

따라서 $a=675$

답 675

QR코드 앱을 사용해 추가 정보를 확인하세요.



수능특강 사용설명서

수능특강 지문 · 자료 분석 능력을
단번에 올리는 [수능특강 사용설명서]



05

이산확률변수의 확률분포

유제

본문 59~67쪽

- 1 17 2 ② 3 ① 4 ④ 5 55
6 ④ 7 ③ 8 ⑤

1 $P(X=x) = \frac{x}{10}$ ($x=1, 2, 3, 4$)이므로

$$P(X=a) + P(X=b) = \frac{a}{10} + \frac{b}{10} = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$a+b=5$$

두 수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$

이므로 a^2+b^2 의 값은 17 또는 13이다.

따라서 a^2+b^2 의 최댓값은 17

답 17

2 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 한 번 던질 때, 나온 두 눈의 수의 곱이 홀수이려면 두 눈의 수가 모두 홀수이어야 하므로

두 눈의 수의 곱이 홀수일 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

두 눈의 수의 곱이 짝수일 확률은

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

3번의 게임을 할 때 두 눈의 수의 곱이 홀수인 횟수를 x , 짝수인 횟수를 y 라 하면

$$x+y=3 \quad \dots\dots ㉠$$

이고, 이때 얻은 점수의 합이 5이려면

$$2x+y=5 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$x=2, y=1$$

따라서 $X=5$ 이려면 3번의 게임에서 나온 두 눈의 수의 곱이 홀수인 경우가 2번, 짝수인 경우가 1번이어야 하므로

$$P(X=5) = {}_3C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{64}$$

답 ②

$$\begin{aligned} 3 \quad & P\left(X=\frac{1}{2}\right) + P\left(X=\frac{1}{2^2}\right) + P\left(X=\frac{1}{2^3}\right) + P\left(X=\frac{1}{2^4}\right) \\ & + P\left(X=\frac{1}{2^5}\right) \end{aligned}$$

$$= 2a + 2^2a + 2^3a + 2^4a + 2^5a$$

$$= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5)a$$

$$= 62a$$

$$\text{이므로 } 62a=1 \text{에서 } a=\frac{1}{62}$$

$$P(X=x_i) = \frac{a}{x_i} \left(x_i = \frac{1}{2^i}, i=1, 2, 3, 4, 5\right) \text{라 하면}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 x_i P(X=x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^5 \left(x_i \times \frac{a}{x_i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^5 a$$

$$= 5a = \frac{5}{62}$$

답 ①

4 확률변수 X 가 갖는 값은 0, 1, 2이고,

$X=0$ 일 때

세 주머니 A, B, C에서 각각 검은 공을 꺼내야 하므로

$$P(X=0) = \frac{4}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{8}$$

$X=1$ 일 때

(i) 주머니 A에서 검은 공, 주머니 B에서 흰 공, 주머니 C에서 검은 공을 꺼내는 경우

$$\frac{4}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{8}$$

(ii) 주머니 A에서 검은 공, 주머니 B에서 검은 공, 주머니 C에서 흰 공을 꺼내는 경우

$$\frac{4}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{8}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } P(X=1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

$X=2$ 일 때

주머니 A에서 검은 공, 주머니 B에서 흰 공, 주머니 C에서 흰 공을 꺼내야 하므로

$$P(X=2) = \frac{4}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{8}$$

따라서

$$E(X) = 0 \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$

답 ④



5 $4a^2 + 5b^2 = 41$ 이므로

$$\begin{aligned} E(X^2) &= a^2 \times \frac{2}{3} + b^2 \times \frac{1}{6} + (2b)^2 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{3}a^2 + \frac{5}{6}b^2 \\ &= \frac{1}{6}(4a^2 + 5b^2) \\ &= \frac{41}{6} \end{aligned}$$

$$E(X) = \frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= \frac{41}{6} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \frac{41}{6} - \frac{9}{4} = \frac{55}{12} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } 12V(X) = 12 \times \frac{55}{12} = 55$$

답 55

6 $E(X) = (-5) \times \frac{1}{5} + 0 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{5} + 10 \times \frac{1}{10}$
 $= 1$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= (-5)^2 \times \frac{1}{5} + 0^2 \times \frac{1}{2} + 5^2 \times \frac{1}{5} + 10^2 \times \frac{1}{10} \\ &= 20 \end{aligned}$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 20 - 1^2 = 19$$

$$E(aX + 2b) = aE(X) + 2b = 10 \text{이므로}$$

$$a + 2b = 10$$

..... ㉠

$$V(aX + b) = a^2 V(X) = 76 \text{이므로}$$

$$19a^2 = 76, \text{ 즉 } a^2 = 4$$

$$a > 0 \text{이므로 } a = 2$$

$$a = 2 \text{를 ㉠에 대입하면 } 2 + 2b = 10, b = 4$$

$$\text{따라서 } a + b = 6$$

답 ④

7 확률변수 X 가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로

$$V(X) = n \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2n}{9}$$

$$V(5X + 1) = 100 \text{에서}$$

$$25V(X) = 100, \text{ 즉 } V(X) = 4 \text{이므로}$$

$$\frac{2n}{9} = 4$$

$$\text{따라서 } n = 18$$

답 ③

8 두 개의 주사위를 동시에 한 번 던져서 나온 눈의 수를 순서쌍으로 나타낼 때, 나온 눈의 수의 합이 4의 배수인 경우는 다음과 같다.

(1, 3), (2, 2), (2, 6), (3, 1), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (6, 6)

두 개의 주사위를 동시에 한 번 던져서 나온 눈의 수의 합이 4의 배수일 확률은

$$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(160, \frac{1}{4}\right)$ 을 따르므로

$$V(X) = 160 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 30$$

답 ⑤

Level 1

기초 연습

본문 68~69쪽

1 ⑤	2 ④	3 ①	4 ②	5 ①
6 ④	7 ④	8 56	9 ②	10 ①

1 흰 공 3개, 검은 공 6개가 들어 있는 주머니에서 임의로 7개의 공을 동시에 꺼낼 때 나오는 검은 공의 개수는 4, 5, 6이므로 확률변수 X 가 갖는 값은 4, 5, 6이다.

$$P(X \leq 5) = P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$= 1 - P(X = 6)$$

$$= 1 - \frac{{}_3C_1 \times {}_6C_6}{{}_9C_7}$$

$$= 1 - \frac{{}_3C_1 \times {}_6C_6}{{}_9C_2}$$

$$= 1 - \frac{3}{36} = \frac{11}{12}$$

답 ⑤

2 확률변수 X 가 갖는 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$$a + \frac{1}{4} + b = 1 \text{에서}$$

$$a + b = \frac{3}{4} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$E(X) = 4 \text{이므로}$$

$$E(X) = 2 \times a + 4 \times \frac{1}{4} + 8 \times b = 4 \text{에서}$$

$$2a + 8b = 3 \quad \dots\dots \text{㉡}$$



㉠, ㉡에서

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } a - b = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

답 ④

3 확률변수 X 가 갖는 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$$a + b + c = 1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$E(X) = 0 \text{이므로}$$

$$E(X) = -2a + 2c = 0 \text{에서}$$

$$a = c \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$V(X) = 3 \text{이므로}$$

$$V(X) = (-2 - 0)^2 \times a + (2 - 0)^2 \times c = 3 \text{에서}$$

$$a + c = \frac{3}{4} \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢에서

$$a = \frac{3}{8}, b = \frac{1}{4}, c = \frac{3}{8}$$

$$\text{따라서 } a + 2b + 3c = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} + \frac{9}{8} = 2$$

답 ①

4 확률변수 X 가 갖는 값은 0, 1, 2이다.

$X=0$ 일 때, 검은 공을 2개 꺼낸 경우이므로

$$P(X=0) = \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$$

$X=1$ 일 때, 검은 공 1개, 흰 공 1개를 꺼낸 경우이므로

$$P(X=1) = \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} = \frac{3}{5}$$

$X=2$ 일 때, 흰 공을 2개 꺼낸 경우이므로

$$P(X=2) = \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$$

따라서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$$

답 ②

5 확률변수 X 가 갖는 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$$\sum_{i=1}^4 ki = 1 \text{에서 } 10k = 1, \text{ 즉 } k = \frac{1}{10}$$

확률변수 X 의 확률질량함수가

$$P(X=i) = \frac{1}{10}i \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

이므로

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^4 \left(i \times \frac{1}{10}i \right) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^4 i^2 \\ &= \frac{1}{10} \times \frac{4 \times 5 \times 9}{6} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{i=1}^4 \left(i^2 \times \frac{1}{10}i \right) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^4 i^3 \\ &= \frac{1}{10} \times \left(\frac{4 \times 5}{2} \right)^2 = 10 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 10 - 3^2 = 1$$

답 ①

6 확률변수 X 가 갖는 값은 2, 3이다.

(i) $X=2$ 일 때

1이 적혀 있는 카드 2장을 뽑는 1가지 경우이므로

$$P(X=2) = \frac{1}{{}_3C_2} = \frac{1}{3}$$

(ii) $X=3$ 일 때

1, 2가 적혀 있는 카드를 뽑는 2가지 경우이므로

$$P(X=3) = \frac{2}{{}_3C_2} = \frac{2}{3}$$

(i), (ii)에 의하여 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$E(X^2) = 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{2}{3} = \frac{22}{3}$$

$$\text{따라서 } V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{22}{3} - \left(\frac{8}{3} \right)^2 = \frac{2}{9}$$

답 ④

7 $V(X_2) = V\left(\frac{2X_1+1}{3}\right)$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^2 V(X_1)$$

$$= \frac{4}{9} V(X_1)$$

$$V(X_2)=28 \text{이므로}$$

$$\frac{4}{9}V(X_1)=28 \text{에서}$$

$$V(X_1)=28 \times \frac{9}{4}=63$$

답 ④

8 $E(2X+3)=15$ 에서

$$2E(X)+3=15 \text{이므로}$$

$$E(X)=6$$

$V\left(\frac{1}{2}X+1\right)=5$ 에서

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 V(X)=\frac{1}{4}V(X)=5 \text{이므로}$$

$$V(X)=20$$

따라서 $E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=20+6^2=56$

답 56

9 확률변수 X 가 이항분포 $B(n, p)$ 를 따르므로

확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, n)$$

$P(X=0)=P(X=n)$ 이므로

$${}_nC_0 p^0 (1-p)^n = {}_nC_n p^n (1-p)^0 \text{에서}$$

$$(1-p)^n = p^n$$

n 은 자연수이고 $p \geq 0, 1-p \geq 0$ 이므로 $1-p=p$ 에서

$$p=\frac{1}{2}$$

따라서 $V(X)=n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}=30$ 이므로

$$n=120$$

답 ②

10 1회의 시행에서 소수가 적혀 있는 카드를 택할 확률은 $\frac{3}{5}$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(25, \frac{3}{5}\right)$ 을 따르므로

$$E(X)=25 \times \frac{3}{5}=15$$

$$V(X)=25 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5}=6$$

따라서 $E(X)+V(X)=15+6=21$

답 ①

Level 2

기본 연습

본문 70쪽

1 ③ 2 ① 3 93 4 ④

1 6장의 카드를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!2!}=60 \text{이고,}$$

확률변수 X 가 갖는 값은 2, 3, 4, 5이다.

(i) $X=2$ 일 때

양 끝에 1, 1을 나열하고 중간에 1, 2, 2, 3을 나열하는

경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$ 이므로

$$P(X=2)=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$$

(ii) $X=3$ 일 때

양 끝에 1, 2를 나열하고 중간에 1, 1, 2, 3을 나열하는

경우의 수는 $2 \times \frac{4!}{2!}=24$ 이므로

$$P(X=3)=\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$$

(iii) $X=4$ 일 때

양 끝에 1, 3을 나열하고 중간에 1, 1, 2, 2를 나열하는

경우의 수는 $2 \times \frac{4!}{2!2!}=12$

또 양 끝에 2, 2를 나열하고 중간에 1, 1, 1, 3을 나열하

는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$ 이므로

$$P(X=4)=\frac{12+4}{60}=\frac{4}{15}$$

(iv) $X=5$ 일 때

양 끝에 2, 3을 나열하고 중간에 1, 1, 1, 2를 나열하는

경우의 수는 $2 \times \frac{4!}{3!}=8$ 이므로

$$P(X=5)=\frac{8}{60}=\frac{2}{15}$$

(i)~(iv)에 의하여 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	1

따라서

$$E(X)=2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{2}{5} + 4 \times \frac{4}{15} + 5 \times \frac{2}{15} = \frac{10}{3}$$

답 ③



다른 풀이

1이 적혀 있는 3장의 카드를 다른 것으로 보고, 2가 적혀 있는 2장의 카드를 다른 것으로 보았을 때, 6장의 카드를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는 $6!$ 이다.

(i) $X=2$ 일 때

양 끝에 1, 1을 나열하는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$ 이고
중간에 1, 2, 2, 3을 나열하는 경우의 수는 $4!$ 이므로

$$P(X=2) = \frac{6 \times 4!}{6!} = \frac{1}{5}$$

(ii) $X=3$ 일 때

양 끝에 1, 2를 나열하는 경우의 수는 $3 \times 2 \times 2! = 12$ 이고, 중간에 1, 1, 2, 3을 나열하는 경우의 수는 $4!$ 이므로

$$P(X=3) = \frac{12 \times 4!}{6!} = \frac{2}{5}$$

(iii) $X=4$ 일 때

양 끝에 1, 3을 나열하는 경우의 수는 $3 \times 2! = 6$ 이고, 중간에 1, 1, 2, 2를 나열하는 경우의 수는 $4!$ 이므로

$$\frac{6 \times 4!}{6!} = \frac{1}{5}$$

양 끝에 2, 2를 나열하는 경우의 수는 $2! = 2$ 이고
중간에 1, 1, 1, 3을 나열하는 경우의 수는 $4!$ 이므로

$$\frac{2 \times 4!}{6!} = \frac{1}{15}$$

$$\text{따라서 } P(X=4) = \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{4}{15}$$

(iv) $X=5$ 일 때

양 끝에 2, 3을 나열하는 경우의 수는 $2 \times 2! = 4$ 이고, 중간에 1, 1, 1, 2를 나열하는 경우의 수는 $4!$ 이므로

$$P(X=5) = \frac{4 \times 4!}{6!} = \frac{2}{15}$$

(i)~(iv)에 의하여 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	1

따라서

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{2}{5} + 4 \times \frac{4}{15} + 5 \times \frac{2}{15} = \frac{10}{3}$$

- 2** 확률변수 X 가 갖는 값은 1, 2, 3, 4, 5이고, 세 주머니 중에서 임의로 한 주머니를 택할 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다.

(i) $X=1$ 일 때

주머니 A 또는 C를 택하여 1이 적혀 있는 공을 꺼내는 경우이므로

$$P(X=1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$$

(ii) $X=2$ 일 때

주머니 A 또는 B를 택하여 2가 적혀 있는 공을 꺼내는 경우이므로

$$P(X=2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

(iii) $X=3$ 일 때

주머니 A 또는 B를 택하여 3이 적혀 있는 공을 꺼내는 경우이므로

$$P(X=3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

(iv) $X=4$ 일 때

주머니 B를 택하여 4가 적혀 있는 공을 꺼내는 경우이므로

$$P(X=4) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

(v) $X=5$ 일 때

주머니 C를 택하여 5가 적혀 있는 공을 꺼내는 경우이므로

$$P(X=5) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

(i)~(v)에 의하여 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	계
$P(X=x)$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X) = 1 \times \frac{5}{18} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + 5 \times \frac{1}{6} = \frac{8}{3}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 1^2 \times \frac{5}{18} + 2^2 \times \frac{2}{9} + 3^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} + 5^2 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{82}{9} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= \frac{82}{9} - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = 2 \end{aligned}$$

답 ①

- 3** 주머니에 들어 있는 모든 공의 개수는

$$k + (k-1) + (k-2) + \cdots + 2 + 1 = \sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$$

이고, $X=i$ 인 공의 개수는 $k-i+1$ 이므로

$$P(X=i) = \frac{k-i+1}{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{2(k+1-i)}{k(k+1)}$$

따라서

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^k \{i \times P(X=i)\} \\ &= \sum_{i=1}^k \left\{ i \times \frac{2(k+1-i)}{k(k+1)} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{2(k+1)i - 2i^2}{k(k+1)} \\ &= \frac{2}{k} \sum_{i=1}^k i - \frac{2}{k(k+1)} \sum_{i=1}^k i^2 \\ &= \frac{2}{k} \times \frac{k(k+1)}{2} - \frac{2}{k(k+1)} \times \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\ &= k+1 - \frac{2k+1}{3} \\ &= \frac{k+2}{3} \end{aligned}$$

$$E(3X+5) = 100 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} E(3X+5) &= 3E(X) + 5 \\ &= 3 \times \frac{k+2}{3} + 5 \\ &= k+7 = 100 \end{aligned}$$

이므로 $k=93$

답 93

- 4 한 개의 주사위를 270번 던질 때 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X 라 하자.

한 개의 주사위를 한 번 던져 3의 배수의 눈이 나올 확률은

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(270, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 270 \times \frac{1}{3} = 90$$

3의 배수의 눈이 X 번 나오면 3의 배수가 아닌 눈은 $(270-X)$ 번 나오므로 총 점수는

$$3X + (270-X) = 2X + 270$$

따라서 얻을 수 있는 총 점수의 기댓값은

$$\begin{aligned} E(2X+270) &= 2E(X) + 270 \\ &= 2 \times 90 + 270 \\ &= 450 \end{aligned}$$

답 ④

Level 3 실력 완성

본문 거쪽

1 ④ 2 17 3 ②

- 1 $P(X=i)=p_i$, $P(Y=2i-1)=q_i$ ($i=1, 2, 3, 4, 5$)라 하면

$$P(Y=2i-1) = a \times P(X=i) + a^0 \text{이므로}$$

$$q_i = ap_i + a$$

$$\sum_{i=1}^5 p_i = 1 \text{이므로}$$

$$\sum_{i=1}^5 q_i = \sum_{i=1}^5 (ap_i + a)$$

$$= a \sum_{i=1}^5 p_i + \sum_{i=1}^5 a$$

$$= a + 5a = 6a$$

$$\sum_{i=1}^5 q_i = 1 \text{이므로 } 6a = 1 \text{에서 } a = \frac{1}{6}$$

$$\text{따라서 } P(Y=2i-1) = q_i = \frac{1}{6}p_i + \frac{1}{6}$$

한편,

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 ip_i, E(Y) = \sum_{i=1}^5 (2i-1)q_i \text{이므로}$$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^5 (2i-1)q_i$$

$$= \sum_{i=1}^5 (2i-1) \left(\frac{1}{6}p_i + \frac{1}{6} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^5 (2ip_i + 2i - p_i - 1)$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^5 ip_i + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^5 i - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^5 p_i - \frac{1}{6} \times 5$$

$$= \frac{1}{3} E(X) + \frac{1}{3} \times \frac{5 \times 6}{2} - \frac{1}{6} \times 1 - \frac{5}{6}$$

$$= \frac{1}{3} E(X) + 4$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{10}{3} + 4 = \frac{46}{9}$$

따라서

$$E(9Y+5) = 9E(Y) + 5$$

$$= 9 \times \frac{46}{9} + 5 = 51$$

답 ④

참고

$P(X=i)=p_i$, $P(Y=2i-1)=q_i$ ($i=1, 2, 3, 4, 5$)라 하면

$P(Y=2i-1) = a \times P(X=i) + a$ ($i=1, 2, 3, 4, 5$)이므로 두 확률변수 X, Y 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.



X	1	2	3	4	5	계
$P(X=i)$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	1

Y	1	3	5	7	9	계
$P(Y=2i-1)$	ap_1+a	ap_2+a	ap_3+a	ap_4+a	ap_5+a	1

따라서

$$\sum_{i=1}^5 p_i = 1, \sum_{i=1}^5 (ap_i + a) = 1 \text{ 이고}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^5 ip_i, E(Y) = \sum_{i=1}^5 (2i-1)(ap_i + a)$$

임을 알 수 있다.

- 2** 자연수 1, 2, 3, 4를 한 번씩 사용하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 집합을 S 라 하면 $n(S) = 4! = 24$ 이고, X 가 갖는 값은 0, 1, 2, 3이다.

$m \in S$ 인 자연수 m 의 각 자리의 숫자를 거꾸로 나열하여 만든 자연수를 m' 이라 하면 $m' \in S$ 이고, 임의의 자연수 m 에 대하여 m' 이 반드시 하나 존재한다.

이때 자연수 m 에 대하여 $a_i > a_{i+1}$ ($i=1, 2, 3$)을 만족시키는 a_i 의 개수가 k ($k=0, 1, 2, 3$)이면 자연수 m' 에 대하여 $a_i > a_{i+1}$ 을 만족시키는 a_i 의 개수는 $3-k$ 이다.

따라서 $P(X=k) = P(X=3-k)$ ($k=0, 1, 2, 3$)이다.

한편, $X=0$ 일 때, 택해진 수는 1234인 경우뿐이므로

$$P(X=0) = \frac{1}{24} \text{ 이고,}$$

$$P(X=3) = P(X=3-3) = P(X=0) = \frac{1}{24}$$

또, $P(X=1) = P(X=3-1) = P(X=2)$ 이고

$$\begin{aligned} P(X=1) + P(X=2) &= 1 - \{P(X=0) + P(X=3)\} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{24}\right) \\ &= \frac{11}{12} \end{aligned}$$

이므로 $P(X=1) = P(X=2) = \frac{11}{24}$ 이다.

따라서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{24}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{24} + 1 \times \frac{11}{24} + 2 \times \frac{11}{24} + 3 \times \frac{1}{24} = \frac{3}{2}$$

$V(X)$

$$= E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= \left(0^2 \times \frac{1}{24} + 1^2 \times \frac{11}{24} + 2^2 \times \frac{11}{24} + 3^2 \times \frac{1}{24}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= \frac{5}{12}$$

따라서 $p=12, q=5$ 이므로 $p+q=12+5=17$

답 17

다른 풀이

확률변수 X 가 갖는 값은 0, 1, 2, 3이고, 각각의 값에 대응하는 확률은 다음과 같다.

(i) $X=0$ 일 때

1234의 1개이므로

$$P(X=0) = \frac{1}{24}$$

(ii) $X=1$ 일 때

$a_1 > a_2, a_2 < a_3 < a_4$ 인 경우

2134, 3124, 4123

$a_1 < a_2, a_2 > a_3, a_3 < a_4$ 인 경우

1324, 2314, 1423, 2413, 3412

$a_1 < a_2 < a_3, a_3 > a_4$ 인 경우

1243, 1342, 2341

따라서 모두 11개이므로

$$P(X=1) = \frac{11}{24}$$

(iii) $X=2$ 일 때

$a_1 > a_2 > a_3, a_3 < a_4$ 인 경우

3214, 4213, 4312

$a_1 > a_2, a_2 < a_3, a_3 > a_4$ 인 경우

2143, 3142, 3241, 4132, 4231

$a_1 < a_2, a_2 > a_3 > a_4$ 인 경우

1432, 2431, 3421

따라서 모두 11개이므로

$$P(X=2) = \frac{11}{24}$$

(iv) $X=3$ 일 때

4321의 1개이므로

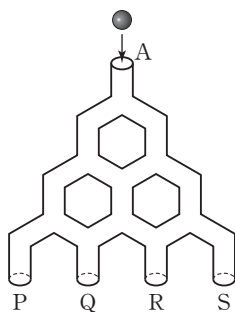
$$P(X=3) = \frac{1}{24}$$

따라서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{24}$	1

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 0 \times \frac{1}{24} + 1 \times \frac{11}{24} + 2 \times \frac{11}{24} + 3 \times \frac{1}{24} = \frac{3}{2} \\
 V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\
 &= \left(0^2 \times \frac{1}{24} + 1^2 \times \frac{11}{24} + 2^2 \times \frac{11}{24} + 3^2 \times \frac{1}{24} \right) - \left(\frac{3}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{5}{12} \\
 \text{따라서 } p &= 12, q = 5 \text{이므로 } p+q = 12+5 = 17
 \end{aligned}$$

3



입구에 투입된 하나의 공이 P, Q, R, S 중의 한 출구로 나올 확률은 각각

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3, 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3, 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

즉, $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$ 이다.

이때 확률변수 X 가 갖는 값은 1, 2, 3이다.

(i) $X=1$ 일 때

공이 세 번 모두 P, Q, R, S 중 한 출구로 나오는 경우이므로

$$P(X=1) = \left(\frac{1}{8}\right)^3 + \left(\frac{3}{8}\right)^3 + \left(\frac{3}{8}\right)^3 + \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{7}{64}$$

(ii) $X=3$ 일 때

공이 다음과 같이 서로 다른 세 출구로 한 번씩 나오는 경우이다.

P-Q-R, P-Q-S, P-R-S, Q-R-S

세 출구 P-Q-R로 공이 한 번씩 나오는 경우를 시행 순서에 따라 순서쌍으로 나타내면

(P, Q, R), (P, R, Q), (Q, P, R), (Q, R, P),

(R, P, Q), (R, Q, P)

이므로 그 경우의 수는 $3!$ 이다.

따라서 세 출구 P-Q-R로 공이 한 번씩 나올 확률은

$$3! \times \left(\frac{1}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{8}\right) = \frac{54}{8^3}$$

마찬가지 방법으로 생각하면

세 출구 P-Q-S로 공이 한 번씩 나올 확률은

$$3! \times \left(\frac{1}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{8}\right) = \frac{18}{8^3}$$

세 출구 P-R-S로 공이 한 번씩 나올 확률은

$$3! \times \left(\frac{1}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{8}\right) = \frac{18}{8^3}$$

세 출구 Q-R-S로 공이 한 번씩 나올 확률은

$$3! \times \left(\frac{3}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{8}\right) = \frac{54}{8^3}$$

$$\text{따라서 } P(X=3) = \frac{54}{8^3} + \frac{18}{8^3} + \frac{18}{8^3} + \frac{54}{8^3} = \frac{9}{32}$$

(iii) $X=2$ 일 때

$$P(X=2) = 1 - \{P(X=1) + P(X=3)\}$$

$$= 1 - \left(\frac{7}{64} + \frac{9}{32}\right) = \frac{39}{64}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	계
$P(X=x)$	$\frac{7}{64}$	$\frac{39}{64}$	$\frac{9}{32}$	1

$$E(X) = 1 \times \frac{7}{64} + 2 \times \frac{39}{64} + 3 \times \frac{9}{32} = \frac{139}{64}$$

답 ②

참고

$P(X=2)$ 의 값을 구해 보자.

P-P-S와 같이 두 번은 P로, 한 번은 S로 나오는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$ 이므로 세 번 중 같은 출구로 두 번, 다른 출구로 한 번 나올 때 그 출구와 확률은 다음과 같다.

P-P-S, S-S-P일 때

$$3 \times \left(\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8}\right) \times 2 = \frac{6}{8^3}$$

P-P-Q, P-P-R, S-S-Q, S-S-R일 때

$$3 \times \left(\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{3}{8}\right) \times 4 = \frac{36}{8^3}$$

Q-Q-P, Q-Q-S, R-R-P, R-R-S일 때

$$3 \times \left(\frac{3}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{8}\right) \times 4 = \frac{108}{8^3}$$

Q-Q-R, R-R-Q일 때

$$3 \times \left(\frac{3}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{8}\right) \times 2 = \frac{162}{8^3}$$

$$\text{따라서 } P(X=2) = \frac{6}{8^3} + \frac{36}{8^3} + \frac{108}{8^3} + \frac{162}{8^3} = \frac{39}{64}$$



06

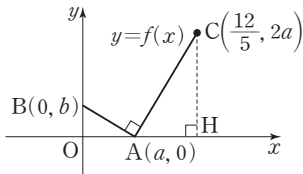
연속확률변수의 확률분포

유제

본문 75~81쪽

- 1 22 2 ④ 3 12 4 ③ 5 44
6 ② 7 ④ 8 196

1



점 C에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면 원점 O에 대하여 $\angle OAB = \angle HCA$ 이므로

두 직각삼각형 OAB, HCA는 서로 닮음이다.

또 $\overline{OA} = a$, $\overline{HC} = 2a$ 이므로

두 삼각형 OAB, HCA의 닮음비는 1 : 2이다.

따라서 $\overline{AH} = 2\overline{OB} = 2b$ 이므로

$\overline{OA} + \overline{AH} = \frac{12}{5}$ 에서

$$a + 2b = \frac{12}{5} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$f(x)$ 가 확률밀도함수이므로 $0 \leq x \leq \frac{12}{5}$ 에서 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 사이의 넓이는 1이다.

두 삼각형 OAB, HCA의 넓이의 비는 1 : 4이므로

삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{5}$ 이다.

$$\text{즉, } \frac{1}{2}ab = \frac{1}{5}, ab = \frac{2}{5} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦에서 $a = \frac{12}{5} - 2b$ 이므로 ⑧에 대입하면

$$\left(\frac{12}{5} - 2b\right)b = \frac{2}{5}$$

$$5b^2 - 6b + 1 = 0$$

$$(5b-1)(b-1) = 0$$

$$b = \frac{1}{5} \text{ 또는 } b = 1$$

$$b = \frac{1}{5} \text{ 이면 } \textcircled{8} \text{에서 } a = 2$$

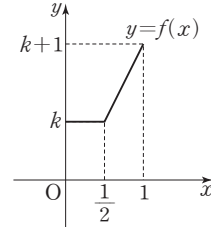
$$b = 1 \text{ 이면 } \textcircled{8} \text{에서 } a = \frac{2}{5}$$

$$a > b \text{ 이므로 } a = 2, b = \frac{1}{5}$$

$$\text{따라서 } 10(a+b) = 10\left(2 + \frac{1}{5}\right) = 22$$

답 22

2 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$f(x)$ 가 확률밀도함수이므로 $0 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 사이의 넓이가 1이다. 즉,

$$\frac{1}{2} \times k + \frac{1}{2} \times (k + k + 1) \times \frac{1}{2} = 1$$

$$k + \frac{1}{4} = 1, k = \frac{3}{4}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} & (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ 2x - \frac{1}{4} & (\frac{1}{2} \leq x \leq 1) \end{cases}$$

이므로

$$f(k) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}, f(1) = \frac{7}{4}$$

따라서

$$\begin{aligned} P(k \leq X \leq 1) &= P\left(\frac{3}{4} \leq X \leq 1\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{4} + \frac{7}{4}\right) \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

답 ④

3 확률변수 X 의 확률밀도함수를 $f(x)$ 라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이다.

조건 (가)에서

$$P(X \leq m-6) = P(X \geq 2m-3) \text{ 이므로 } \frac{(m-6) + (2m-3)}{2} = m \text{ 이다.}$$

$$\text{즉, } m = 9$$

조건 (나)에서

$$P(X \geq 3) = P(X \leq m + 2\sigma) \text{ 이므로}$$

$$\frac{3+(m+2\sigma)}{2}=m$$

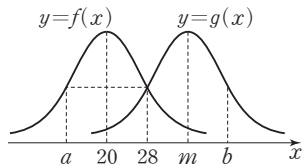
$$3+9+2\sigma=2\times 9$$

$$\sigma=3$$

$$\text{따라서 } m+\sigma=9+3=12$$

답 12

4



$$P(a \leq X \leq 28) = 0.84 > 0.5 \text{ 이므로}$$

$$a < 20 \text{ 이고,}$$

$$f(a) = f(28) \text{ 이므로}$$

$$\frac{a+28}{2} = 20 \text{ 에서 } a = 12$$

두 확률변수 X, Y 의 표준편차가 같고, $m \neq 20$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 평행이동하면 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 겹쳐질 수 있다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=20$ 에 대하여 대칭이고, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이므로

$$f(28) = g(28) \text{ 에서}$$

$$\frac{20+m}{2} = 28, m = 36$$

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq 28) &= P(12 \leq X \leq 28) \\ &= 2P(20 \leq X \leq 28) \\ &= 0.84 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } P(20 \leq X \leq 28) = 0.42$$

$$P(Y \geq b) = 0.08 \text{ 이고,}$$

$$P(X \geq 28) = 0.08 \text{ 이므로}$$

$$28 - 20 = b - 36 \text{ 에서}$$

$$b = 44$$

$$\text{따라서 } a+b = 12+44 = 56$$

답 ③

5

$Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(X \geq 48) = P\left(Z \geq \frac{48-m}{\sigma}\right) = 0.0228 \text{ 에서}$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{48-m}{\sigma}\right) = 0.5 - 0.0228 = 0.4772$$

이므로 표준정규분포표에서

$$\frac{48-m}{\sigma} = 2$$

$$\text{즉, } m+2\sigma = 48 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$P(42 \leq X \leq 48) = P\left(\frac{42-m}{\sigma} \leq Z \leq 2\right) = 0.2857$$

이고, $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$0 < \frac{42-m}{\sigma} < 2 \text{ 이고,}$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{42-m}{\sigma}\right) + P\left(\frac{42-m}{\sigma} \leq Z \leq 2\right) = 0.4772$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{42-m}{\sigma}\right) = 0.4772 - 0.2857 = 0.1915$$

따라서 표준정규분포표에서

$$\frac{42-m}{\sigma} = 0.5$$

$$\text{즉, } m+0.5\sigma = 42 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$m = 40, \sigma = 4$$

$$\text{따라서 } m+\sigma = 40+4 = 44$$

답 44

6

이 공장에서 생산하는 전구 한 개의 수명을 확률변수 X 라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(1000, 50^2)$ 을 따르고,

$Z = \frac{X-1000}{50}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\text{이때 } P(X \geq a) = 0.9861$$

$$\text{에서 } P\left(Z \geq \frac{a-1000}{50}\right) = 0.9861 \text{ 이므로}$$

$$P\left(\frac{a-1000}{50} \leq Z \leq 0\right) = 0.9861 - 0.5 = 0.4861$$

따라서

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{1000-a}{50}\right) = 0.4861$$

이므로 표준정규분포표에서

$$\frac{1000-a}{50} = 2.2$$

$$a = 890$$

답 ②



- 7 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 짝수의 눈이 적어도 한 개 나올 확률은

$$1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(192, \frac{3}{4}\right)$ 을 따르고,

$$E(X) = 192 \times \frac{3}{4} = 144$$

$$V(X) = 192 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 36$$

이때 192는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(144, 6^2)$ 을 따르고, $Z = \frac{X-144}{6}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.
따라서

$$\begin{aligned} P(X \leq 156) &= P\left(Z \leq \frac{156-144}{6}\right) \\ &= P(Z \leq 2) \\ &= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 + 0.4772 \\ &= 0.9772 \end{aligned}$$

답 ④

8 $E(X) = n \times \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$

$$V(X) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$$

이때 n 은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N\left(\frac{n}{2}, \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^2\right)$ 을 따르고, $Z = \frac{X - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} P(X \geq 105) &= P\left(Z \geq \frac{105 - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}\right) \\ &= 0.1587 \end{aligned}$$

이므로

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{105 - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}}\right) = 0.5 - 0.1587 = 0.3413$$

따라서 표준정규분포표에 의하여

$$\frac{105 - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} = 1$$

$$n + \sqrt{n} - 210 = 0$$

$$\sqrt{n} = x \text{로 놓으면}$$

$$x^2 + x - 210 = 0, (x+15)(x-14) = 0$$

$$x \geq 10 \text{이므로 } x = 14$$

$$\text{즉, } \sqrt{n} = 14 \text{이므로 } n = 196$$

답 196

Level 1

기초 연습

본문 82쪽

1 ②

2 ③

3 ④

4 ④

5 ④

- 1 $f(x)$ 가 확률밀도함수이므로 $0 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 사이의 넓이가 1이다. 즉,

$$\frac{1}{2}k + k + \frac{3}{2}k + 2k = 1$$

$$5k = 1$$

$$\text{따라서 } k = \frac{1}{5}$$

답 ②

- 2 확률변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르므로 X 의 확률밀도함수를 $f(x)$ 라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이다.

$$P(X \geq 4) = 0.68 \text{이므로}$$

$$P(X \leq 4) = 1 - 0.68 = 0.32 \text{이고,}$$

$$P(4 \leq X \leq m) = 0.5 - 0.32 = 0.18 \text{이다.}$$

$$P(X \leq 4) = P(X \geq 10) \text{이므로}$$

$$\frac{4+10}{2} = m, \text{ 즉 } m = 7$$

따라서

$$P(|X - m| \leq 3) = P(|X - 7| \leq 3)$$

$$= P(4 \leq X \leq 10)$$

$$= 2P(4 \leq X \leq 7)$$

$$= 2 \times 0.18$$

$$= 0.36$$

답 ③



- 3 $Z_1 = \frac{X-2m}{m}$ 으로 놓으면 확률변수 Z_1 은 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(m \leq X \leq 16) = P\left(\frac{m-2m}{m} \leq Z_1 \leq \frac{16-2m}{m}\right) \\ = P\left(-1 \leq Z_1 \leq \frac{16-2m}{m}\right)$$

$$P(-2 \leq Z \leq 1) = P(-1 \leq Z \leq 2) \text{이므로}$$

$$\frac{16-2m}{m} = 2$$

$$\text{따라서 } m=4$$

답 ④

- 4 $Z = \frac{X-60}{2}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로
- $$P(57 \leq X \leq 58) + P(63 \leq X \leq 64) \\ = P\left(\frac{57-60}{2} \leq Z \leq \frac{58-60}{2}\right) \\ + P\left(\frac{63-60}{2} \leq Z \leq \frac{64-60}{2}\right) \\ = P(-1.5 \leq Z \leq -1) + P(1.5 \leq Z \leq 2) \\ = P(1 \leq Z \leq 1.5) + P(1.5 \leq Z \leq 2) \\ = P(1 \leq Z \leq 2) \\ = P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ = 0.4772 - 0.3413 \\ = 0.1359$$

답 ④

- 5 $E(X) = 400 \times \frac{1}{2} = 200$
- $$V(X) = 400 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 100$$
- 이때 400은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(200, 10^2)$ 을 따르고, $Z = \frac{X-200}{10}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.
- 따라서
- $$P(200 \leq X \leq 215) \\ = P\left(\frac{200-200}{10} \leq Z \leq \frac{215-200}{10}\right)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ = 0.4332$$

답 ④

Level 2

기본 연습

본문 83~84쪽

- 1 ⑤ 2 ④ 3 ⑤ 4 ③ 5 ⑤
6 ②

- 1 $P(0 \leq X \leq a) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) \times a = \frac{1}{4}a$ 이므로

$$\frac{1}{4}a = \frac{5}{8} \text{에서 } a = \frac{5}{2}$$

$$P(a \leq X \leq b) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} \text{이고,}$$

$$P(a \leq X \leq b) = (b-a) \times \frac{1}{6} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{6}(b-a) = \frac{3}{8} \text{에서}$$

$$b-a = \frac{9}{4}$$

$$b = \frac{5}{2} + \frac{9}{4} = \frac{19}{4}$$

$$\text{따라서 } a+b = \frac{5}{2} + \frac{19}{4} = \frac{29}{4}$$

답 ⑤

- 2 $f(x)$ 가 확률밀도함수이므로 $0 \leq x \leq 5a$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 사이의 넓이가 1이다. 즉,

$$\frac{1}{2} \times 2a \times b + \frac{1}{2} \times 3a \times 2b = 1$$

$$4ab = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a+3b=2 \text{이므로 } a=2-3b \text{이고,}$$

$$\textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$4(2-3b)b = 1$$

$$12b^2 - 8b + 1 = 0, (2b-1)(6b-1) = 0$$

$$b = \frac{1}{2} \text{ 또는 } b = \frac{1}{6}$$

$$b = \frac{1}{2} \text{이면 } \textcircled{1} \text{에서 } a = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{1}{6} \text{이면 } \textcircled{1} \text{에서 } a = \frac{3}{2}$$



$$a \neq b \text{이므로 } a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{6}$$

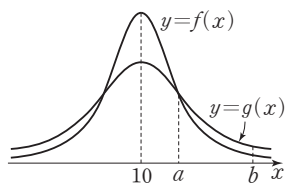
$$\text{따라서 } ab = \frac{1}{4} \text{이고}$$

$$0 \leq x \leq \frac{3}{2} \text{에서 } f(x) = \frac{b}{a}x = \frac{1}{9}x \text{이므로}$$

$$f(ab) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{36}$$

답 ④

- 3 $\sigma_1 < \sigma_2$ 이고, $f(a) = g(a)$ 이므로
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. $x > a$ 일 때, $f(x) < g(x)$ 이므로

$$f(b) < g(b) \text{ (참)}$$

ㄴ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=10$ 에 대하여 대칭
이고, 종 모양의 곡선이므로

$$P(10 \leq X \leq a) = P(a \leq X \leq b) \text{이면}$$

$$a - 10 < b - a \text{이다.}$$

$$\text{즉, } 2a < b + 10 \text{ (참)}$$

ㄷ. $P(X \geq 10) = 0.5$ 이므로

$$P(10 \leq X \leq a) + P(a \leq X \leq b) < 0.5 \text{이다.}$$

$$P(10 \leq X \leq a) = P(a \leq X \leq b) \text{이므로}$$

$$2P(10 \leq X \leq a) < 0.5$$

$$\text{즉, } P(10 \leq X \leq a) < 0.25 \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } P(10 \leq Y \leq a) < P(10 \leq X \leq a) < 0.25 \text{이므로}$$

$$P(10 \leq Y \leq c) = 0.25 \text{이면 } a < c \text{이다. (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

- 4 $Z_1 = \frac{X-m}{\sigma}$, $Z_2 = \frac{Y-11}{2}$ 로 놓으면 두 확률변수 Z_1 , Z_2
는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(X \geq 15) = P\left(Z_1 \geq \frac{15-m}{\sigma}\right),$$

$$P(Y \leq 15) = P\left(Z_2 \leq \frac{15-11}{2}\right) = P(Z_2 \leq 2)$$

이므로 조건 (가)에서

$$\frac{15-m}{\sigma} = -2$$

$$\text{즉, } m - 2\sigma = 15 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$P(12 \leq X \leq 2m-12)$$

$$= P\left(\frac{12-m}{\sigma} \leq Z_1 \leq \frac{2m-12-m}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(-\frac{m-12}{\sigma} \leq Z_1 \leq \frac{m-12}{\sigma}\right)$$

$$= 2P\left(0 \leq Z_1 \leq \frac{m-12}{\sigma}\right)$$

이고

$$2P(11 \leq Y \leq 17)$$

$$= 2P\left(\frac{11-11}{2} \leq Z_2 \leq \frac{17-11}{2}\right)$$

$$= 2P(0 \leq Z_2 \leq 3)$$

이므로 조건 (나)에서

$$\frac{m-12}{\sigma} = 3$$

$$\text{즉, } m - 3\sigma = 12 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면 $m = 21$, $\sigma = 3$

$$\text{따라서 } m + \sigma = 21 + 3 = 24$$

답 ③

- 5 A 과수원에서 재배한 사과 한 개의 무게를 확률변수 X 라
하고, B 과수원에서 재배한 사과 한 개의 무게를 확률변수
 Y 라 하자.

확률변수 X 는 정규분포 $N(m, 5^2)$ 을 따르고,

$$Z_1 = \frac{X-m}{5} \text{으로 놓으면 확률변수 } Z_1 \text{은 표준정규분포}$$

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(X \geq 320) = 0.0548 \text{에서}$$

$$P\left(Z_1 \geq \frac{320-m}{5}\right) = 0.0548$$

$$P\left(0 \leq Z_1 \leq \frac{320-m}{5}\right) = 0.5 - 0.0548 = 0.4452$$

표준정규분포표에 의하여

$$\frac{320-m}{5} = 1.6 \text{이므로 } m = 312$$

확률변수 Y 는 정규분포 $N(316, 4^2)$ 을 따르고,

$$Z_2 = \frac{Y-316}{4} \text{으로 놓으면 확률변수 } Z_2 \text{는 표준정규분포}$$

$N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned} P(Y \geq 320) &= P\left(Z_2 \geq \frac{320-316}{4}\right) \\ &= P(Z_2 \geq 1) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z_2 \leq 1) \\ &= 0.5 - 0.3413 \\ &= 0.1587 \end{aligned}$$

답 ⑤

6 $H = 10 - \frac{m-70}{\sigma} = 9.5$ 에서
 $m = 70 + 0.5\sigma$ 이다.
 확률변수 X 는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르므로
 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포
 $N(0, 1)$ 을 따른다.
 따라서 구하는 확률은
 $P(|X-70| \geq 2\sigma)$
 $= P(X \leq 70-2\sigma) + P(X \geq 70+2\sigma)$
 $= P\left(Z \leq \frac{70-2\sigma-m}{\sigma}\right) + P\left(Z \geq \frac{70+2\sigma-m}{\sigma}\right)$
 $= P\left(Z \leq \frac{70-2\sigma-70-0.5\sigma}{\sigma}\right)$
 $\quad + P\left(Z \geq \frac{70+2\sigma-70-0.5\sigma}{\sigma}\right)$
 $= P(Z \leq -2.5) + P(Z \geq 1.5)$
 $= \{0.5 - P(0 \leq Z \leq 2.5)\} + \{0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.5)\}$
 $= 1 - 0.4938 - 0.4332$
 $= 0.0730$

답 ②

Level 3 실력 완성

본문 85쪽

1 ② 2 ⑤ 3 67

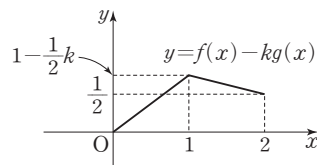
1 $f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x < 1) \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & (0 \leq x < 1) \\ 1 - \frac{1}{2}x & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

이므로

$$f(x) - kg(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{2}k\right)x & (0 \leq x < 1) \\ \left(\frac{3}{2} - k\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}k\right)x & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

$0 < k < 1$ 이므로 함수 $y = f(x) - kg(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x) - kg(x)$ 가 확률변수 X 의 확률밀도함수이므로
 $0 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y = f(x) - kg(x)$ 의 그래프와 x 축 사
 이의 넓이는 1이다. 즉,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times 1 \times \left(1 - \frac{1}{2}k\right) + \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}\right) \times 1 &= 1 \\ \frac{5}{4} - \frac{1}{2}k &= 1, \quad k = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) - kg\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(1 - \frac{1}{2}k\right) \times \frac{1}{2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} P(0 \leq X \leq k) &= P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} \\ &= \frac{3}{32} \end{aligned}$$

답 ②

다른 풀이

$0 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축 사이의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times 1 = \frac{5}{4}$

이고, $0 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 x 축 사이의
 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

이므로 $0 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y = f(x) - kg(x)$ 의 그래프와
 x 축 사이의 넓이는

$$\frac{5}{4} - \frac{1}{2}k$$



이다.

함수 $y=f(x)-kg(x)$ 가 확률밀도함수이므로

$$\frac{5}{4}-\frac{1}{2}k=1 \text{에서 } k=\frac{1}{2}$$

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 사이의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

이고, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 x 축 사이의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

이므로 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 에서 함수 $y=f(x)-\frac{1}{2}g(x)$ 의 그래프와 x 축 사이의 넓이는

$$\frac{1}{8}-\frac{1}{2} \times \frac{1}{16} = \frac{3}{32}$$

$$\text{즉, } P(0 \leq X \leq k) = P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{32}$$

2 확률변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르므로

$m=35$ 이면

$$P(32 \leq X \leq 35) = P(35 \leq X \leq 38) \text{이고,}$$

$m > 35$ 이면

$$P(32 \leq X \leq 35) < P(35 \leq X \leq 38) \text{이다.}$$

따라서 조건 (가)에 의하여 $m < 35$ 이다.

$m=32$ 이면

$$P(29 \leq X \leq 32) = P(32 \leq X \leq 35) \text{이고,}$$

$m < 32$ 이면

$$P(29 \leq X \leq 32) > P(32 \leq X \leq 35) \text{이므로}$$

조건 (나)에 의하여 $m > 32$ 이다.

즉, $32 < m < 35$ 이고, m 은 자연수이므로

$m=33$ 또는 $m=34$ 이다.

(i) $m=33$ 인 경우

$$Z_1 = \frac{X-33}{\sigma} \text{으로 놓으면 확률변수 } Z_1 \text{은 표준정규분포}$$

$N(0, 1)$ 을 따르고,

$$P(33 \leq X \leq 35) = P\left(0 \leq Z_1 \leq \frac{2}{\sigma}\right) \text{이다.}$$

$$\sigma=1 \text{이면 } P(33 \leq X \leq 35) = P(0 \leq Z_1 \leq 2)$$

이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

$$\sigma=2 \text{ 이면 } P(33 \leq X \leq 35) = P(0 \leq Z_1 \leq 1)$$

이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

$$\sigma \geq 3 \text{ 이면 } \frac{2}{\sigma} < 1$$

이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ii) $m=34$ 인 경우

$$Z_2 = \frac{X-34}{\sigma} \text{로 놓으면 확률변수 } Z_2 \text{는 표준정규분포}$$

$N(0, 1)$ 을 따르고,

$$P(33 \leq X \leq 35) = P\left(-\frac{1}{\sigma} \leq Z_2 \leq \frac{1}{\sigma}\right) \text{이다.}$$

$\sigma=1$ 이면

$$P(33 \leq X \leq 35) = P(-1 \leq Z_2 \leq 1)$$

$$= 2P(0 \leq Z_2 \leq 1)$$

$$> P(0 \leq Z_2 \leq 2)$$

이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

$\sigma=2$ 이면 표준정규분포표에서

$$P(33 \leq X \leq 35) = P(-0.5 \leq Z_2 \leq 0.5)$$

$$= 2P(0 \leq Z_2 \leq 0.5)$$

$$= 2 \times 0.1915$$

$$= 0.3830$$

$$P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$$

$$P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$$

이므로 조건 (다)를 만족시킨다.

$$\sigma \geq 3 \text{ 이면 } \frac{1}{\sigma} \leq \frac{1}{3} \text{이고,}$$

$$P(33 \leq X \leq 35) = 2P\left(0 \leq Z_2 \leq \frac{1}{\sigma}\right)$$

$$\leq 2P\left(0 \leq Z_2 \leq \frac{1}{3}\right)$$

$$< 2P(0 \leq Z_2 \leq 0.4)$$

$$= 2 \times 0.1554$$

$$= 0.3108$$

$$< P(0 \leq Z_2 \leq 1)$$

이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $m=34$, $\sigma=2$ 이다.

따라서 확률변수 X 는 정규분포 $N(34, 2^2)$ 을 따르고,

$$\text{확률변수 } Z_2 = \frac{X-34}{2} \text{는 표준정규분포 } N(0, 1) \text{을 따르}$$

므로

$$P(30 \leq X \leq 34) = P(-2 \leq Z_2 \leq 0)$$

$$= P(0 \leq Z_2 \leq 2)$$

$$= 0.4772$$



- 3 A대학의 수학과에 입학 원서를 낸 학생 한 명의 대학수학능력시험 수학 점수를 확률변수 X 라 하면
확률변수 X 는 정규분포 $N(76, 8^2)$ 을 따르고,

$Z = \frac{X-76}{8}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

입학 원서를 낸 학생이 1000명이고, n 명을 선발하였으며
대학수학능력시험 수학 점수가 88점인 학생이 합격하였으
므로

$$P(X \geq 88) \leq \frac{n}{1000}$$

이다.

$$\begin{aligned} P(X \geq 88) &= P\left(Z \geq \frac{88-76}{8}\right) \\ &= P(Z \geq 1.5) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.4332 \\ &= 0.0668 \end{aligned}$$

이므로

$$0.0668 \leq \frac{n}{1000} \text{에서}$$

$$n \geq 66.8$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 67이다.

답 67

QR코드 앱을 사용해 추가 정보를 확인하세요.



EBS 수능기출의 미래

EBS 수능기출을 제대로 풀면
수능을 보는 눈이 열린다.



07

통계적 추정

유제

본문 89~95쪽

1 10 2 18 3 ③ 4 102 5 18
6 81 7 ②

- 1 모집단에서 임의추출한 크기가 3인 표본을 (X_1, X_2, X_3) 이라 할 때,

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} = 3 \text{에서}$$

$X_1 + X_2 + X_3 = 9$ 이고,
 $9 = 0 + 2 + 7 = 2 + 2 + 5$ 이다.

- (i) $9 = 0 + 2 + 7$ 인 경우 (X_1, X_2, X_3) 은
 $(0, 2, 7), (0, 7, 2), (2, 0, 7),$
 $(2, 7, 0), (7, 0, 2), (7, 2, 0)$
의 6가지

- (ii) $9 = 2 + 2 + 5$ 인 경우 (X_1, X_2, X_3) 은
 $(2, 2, 5), (2, 5, 2), (5, 2, 2)$
의 3가지

따라서

$$\begin{aligned} P(\bar{X} = 3) &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \times b \times 6 + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times a \times 3 \\ &= \frac{1}{4}b + \frac{1}{12}a \\ &= \frac{5}{48} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } a + 3b = \frac{5}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

확률변수 X 의 확률분포를 나타낸 표에서 모든 확률의 합은 1이므로

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + a + b = 1$$

$$a + b = \frac{7}{12} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } 120ab = 120 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = 10$$

답 10

$$2 \quad E(X) = E(\bar{X}) = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$-a + 2c = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

표본의 크기가 3이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{3} \text{에서}$$

$$V(X) = 3V(\bar{X}) = 3 \times \frac{7}{20} = \frac{21}{20}$$

따라서

$$V(X) = (-1)^2 \times a + 0 \times b + 2^2 \times c - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{20}$$

$$\text{에서 } a + 4c = \frac{13}{10} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = \frac{1}{10}, c = \frac{3}{10}$$

$$a + b + c = 1 \text{이므로 } b = \frac{3}{5}$$

따라서

$$\begin{aligned} 1000abc &= 1000 \times \frac{1}{10} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{10} \\ &= 18 \end{aligned}$$

답 18

$$\begin{aligned} 3 \quad V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= 25 - 3^2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

이고

$$E(\bar{X}) = E(X) = 3,$$

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n} = \frac{16}{n} \text{이므로}$$

$$V(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - \{E(\bar{X})\}^2 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} E(\bar{X}^2) &= V(\bar{X}) + \{E(\bar{X})\}^2 \\ &= \frac{16}{n} + 9 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{16}{n} + 9 \geq 11 \text{에서}$$

$$\frac{16}{n} \geq 2, n \leq 8$$

이므로 2 이상의 자연수 n 은

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

이고, 그 개수는 7이다.

답 ③



- 4 이 떡집에서 판매하는 백설기 한 개의 무게를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(m, 2^2)$ 을 따른다.

이 떡집에서 판매하는 백설기 중에서 임의로 추출한 16개의 무게의 표본평균을 \bar{X} 라 하면

$$E(\bar{X}) = m, \sigma(\bar{X}) = \frac{2}{\sqrt{16}} = \frac{1}{2}$$

이므로 확률변수 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(m, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{1}{2}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르고,

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \leq 101) &= P\left(Z \leq \frac{101 - m}{\frac{1}{2}}\right) \\ &= P(Z \leq 202 - 2m) \\ &= 0.0228 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} P(Z \leq 202 - 2m) &= P(Z \geq 2m - 202) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2m - 202) \\ &= 0.0228 \end{aligned}$$

에서

$$P(0 \leq Z \leq 2m - 202) = 0.4772$$

따라서 표준정규분포표에서

$$2m - 202 = 2 \text{ 이므로}$$

$$m = 102$$

답 102

- 5 모집단의 확률변수 X 는 정규분포 $N(40, \sigma^2)$ 을 따른다. 이 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 \bar{X} 에 대하여

$$E(\bar{X}) = 40, \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{4}} = \frac{\sigma}{2}$$

이므로 확률변수 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(40, \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$$Z_1 = \frac{X - 40}{\sigma}, Z_2 = \frac{\bar{X} - 40}{\frac{\sigma}{2}} \text{으로 놓으면}$$

두 확률변수 Z_1, Z_2 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

임의의 양수 k 에 대하여

$$P(X \geq 40 + k) = P(\bar{X} \leq 40 - k\sigma) \text{이고,}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 40 + k) &= P\left(Z_1 \geq \frac{40 + k - 40}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z_1 \geq \frac{k}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \leq 40 - k\sigma) &= P\left(Z_2 \leq \frac{40 - k\sigma - 40}{\frac{\sigma}{2}}\right) \\ &= P(Z_2 \leq -2k) \\ &= P(Z_2 \geq 2k) \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \frac{k}{\sigma} = 2k$$

k 는 임의의 양수이므로 $\sigma = \frac{1}{2}$

$P(X \leq a) = P(\bar{X} \geq 42)$ 에서

$$P(X \leq a) = P\left(Z_1 \leq \frac{a - 40}{\frac{1}{2}}\right) = P(Z_1 \leq 2a - 80),$$

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \geq 42) &= P\left(Z_2 \geq \frac{42 - 40}{\frac{1}{4}}\right) = P(Z_2 \geq 8) \\ &= P(Z_2 \leq -8) \end{aligned}$$

이므로 $2a - 80 = -8, a = 36$

$$\text{따라서 } a\sigma = 36 \times \frac{1}{2} = 18$$

답 18

- 6 표본평균이 \bar{x} , 모표준편차가 $\sigma = 3$, 표본의 크기가 n 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{3}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{3}{\sqrt{n}}$$

$$b - a = 2 \times 2.58 \times \frac{3}{\sqrt{n}} = 1.72 \text{이므로}$$

$$\sqrt{n} = \frac{2 \times 2.58 \times 3}{1.72} = 9$$

따라서 $n = 81$

답 81

- 7 표본평균이 $\bar{x} = 80$, 모표준편차가 $\sigma = 5$, 표본의 크기가 $n = 100$ 이므로

모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$80 - 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{100}} \leq m \leq 80 + 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{100}}$$



$$80 - 0.98 \leq m \leq 80 + 0.98$$

$$79.02 \leq m \leq 80.98$$

따라서 $79 + \alpha = 79.02$, $79 + \beta = 80.98$ 에서

$$\alpha = 0.02, \beta = 1.98 \text{이므로}$$

$$2\alpha + \beta = 0.04 + 1.98 = 2.02$$

답 ②

Level 1

기초 연습

본문 96쪽

1 ④

2 ④

3 ③

4 ⑤

5 ①

- 1 확률변수 \bar{X} 가 갖는 값은 0, 1, 2, 3, 4이므로

$$P(\bar{X} < 2) = P(\bar{X} = 0) + P(\bar{X} = 1)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{4}{9}$$

답 ④

- 2 $V(\bar{X}) = \frac{2^2}{n} = \frac{1}{2}$ 이므로

$$n = 8$$

따라서 $E(\bar{X}) = m = 2n$ 에서

$$m = 2 \times 8 = 16$$

답 ④

- 3 $E(\bar{X}) = 20$, $\sigma(\bar{X}) = \frac{3}{\sqrt{n}}$ 이므로

확률변수 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(20, \left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$$Z_1 = \frac{\bar{X} - 20}{\frac{3}{\sqrt{n}}} \text{으로 놓으면 확률변수 } Z_1 \text{은 표준정규분포}$$

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$Z = 2\bar{X} - 40 = \frac{\bar{X} - 20}{\frac{1}{2}} \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{\sqrt{n}}, \sqrt{n} = 6$$

따라서 $n = 36$

답 ③

- 4 $E(\bar{X}) = 50$, $\sigma(\bar{X}) = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$ 이므로

확률변수 \bar{X} 는 정규분포 $N(50, 1)$ 을 따르고,

$Z = \bar{X} - 50$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

이때 $P(\bar{X} \leq a) = P(Z \leq a - 50) = 0.9987$ 이므로

$$0.5 + P(0 \leq Z \leq a - 50) = 0.9987 \text{에서}$$

$$P(0 \leq Z \leq a - 50) = 0.4987$$

따라서 $a - 50 = 3$ 이므로

$$a = 53$$

답 ⑤

- 5 표본평균이 \bar{x} , 모표준편차가 $\sigma = 4$, 표본의 크기가 $n = 256$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{4}{\sqrt{256}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{4}{\sqrt{256}}$$

$$\bar{x} - 0.645 \leq m \leq \bar{x} + 0.645$$

따라서

$$b - a = (\bar{x} + 0.645) - (\bar{x} - 0.645) = 1.29$$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 97~98쪽

1 ⑤

2 ④

3 ③

4 ⑤

5 36

6 ④

7 ③

8 844

- 1 확률변수 X 가 갖는 값이 2, 4, a 이므로
표본평균 \bar{X} 가 갖는 값은

$$\frac{2+2}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{2+a}{2}, \frac{4+4}{2}, \frac{4+a}{2}, \frac{a+a}{2}$$

즉, 2, 3, $\frac{2+a}{2}$, 4, $\frac{4+a}{2}$, a 이다.

$a > 5$ 이므로 $\frac{2+a}{2} < \frac{4+a}{2} < a$ 이고,

표본평균 \bar{X} 가 갖는 값이 2, 3, 4, 5, b , a 이므로

$$\frac{2+a}{2}=5, \frac{4+a}{2}=b$$

즉, $a=8$, $b=6$ 이다.

$$P(\bar{X}=2)=P(X=2) \times P(X=2)=\frac{1}{64} \text{에서}$$

$$P(X=2)=\frac{1}{8}$$

$$P(\bar{X}=3)=P(X=2) \times P(X=4) \times 2=\frac{5}{32} \text{에서}$$

$$\frac{1}{8} \times P(X=4) \times 2=\frac{5}{32}$$

$$P(X=4)=\frac{5}{8}$$

$$\text{따라서 } ab \times P(X=4)=8 \times 6 \times \frac{5}{8}=30$$

답 ⑤

2 $P(\bar{X}=1)=a \times a=a^2$

$$P(\bar{X}=2)=a \times b \times 2 + b \times b=2ab+b^2$$

$$P(\bar{X}=3)=b \times b=b^2 \text{이므로}$$

$$P(\bar{X}=1)+P(\bar{X}=2)+P(\bar{X}=3)=\frac{17}{25} \text{에서}$$

$$a^2+2ab+b^2=\frac{17}{25}$$

$$(a+b)^2+b^2=\frac{17}{25}$$

$$a+b=1-b \text{이므로}$$

$$(1-b)^2+b^2=\frac{17}{25}$$

$$b^2-b+\frac{4}{25}=0, 25b^2-25b+4=0$$

$$(5b-1)(5b-4)=0$$

$$b=\frac{1}{5} \text{ 또는 } b=\frac{4}{5}$$

$$b=\frac{4}{5} \text{이면 } a=1-2b=-\frac{3}{5} \text{이 되어 모순이다.}$$

$$\text{따라서 } b=\frac{1}{5} \text{이고, } a=1-2b=\frac{3}{5} \text{이므로}$$

$$a^2+b^2=\frac{9}{25}+\frac{1}{25}=\frac{2}{5}$$

답 ④

3 모든 확률의 합은 1이므로

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+a+b=1$$

에서

$$a+b=\frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$E(2\bar{X}+3)=2E(\bar{X})+3=13 \text{에서}$$

$$E(\bar{X})=5$$

따라서 $E(X)=E(\bar{X})=5$ 이므로

$$3 \times \frac{1}{12} + 4 \times \frac{1}{4} + 5a + 6b = 5$$

$$5a + 6b = \frac{15}{4} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a=\frac{1}{4}, b=\frac{5}{12}$$

$$V(X)=3^2 \times \frac{1}{12} + 4^2 \times \frac{1}{4} + 5^2 \times \frac{1}{4} + 6^2 \times \frac{5}{12} - 5^2$$

$$=1$$

이고, 표본의 크기가 4이므로

$$V(2\bar{X}+3)=4V(\bar{X})$$

$$=4 \times \frac{V(X)}{4}$$

$$=V(X)$$

$$=1$$

답 ③

4 모든 확률의 합은 1이므로

$$\frac{1}{6}+a+b=1 \text{에서}$$

$$a+b=\frac{5}{6} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$E(3\bar{X}-9)=3E(\bar{X})-9=3E(X)-9$$

$$E(9-3X)=9-3E(X) \text{이므로}$$

$$E(3\bar{X}-9)=E(9-3X) \text{에서}$$

$$3E(X)-9=9-3E(X)$$

$$6E(X)=18, E(X)=3$$

$$\text{따라서 } E(X)=0 \times \frac{1}{6} + 2a + 6b = 3$$

$$2a + 6b = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{3}$$



$$V(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{2} + 6^2 \times \frac{1}{3} - 3^2 = 5$$

이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n} = \frac{1}{3} \text{에서}$$

$$\frac{5}{n} = \frac{1}{3}$$

따라서 $n=15$

답 ⑤

5 $E(\bar{X})=240, \sigma(\bar{X})=\frac{15}{\sqrt{n}}$ 이므로

확률변수 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(240, \left(\frac{15}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따르고,

$$Z = \frac{\bar{X} - 240}{\frac{15}{\sqrt{n}}} \text{으로 놓으면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포}$$

$N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \leq 245) &= P\left(Z \leq \frac{245 - 240}{\frac{15}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{3}\right) \\ &= 0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{3}\right) \end{aligned}$$

이므로 $P(\bar{X} \leq 245) \geq 0.9772$ 에서

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{3}\right) \geq 0.4772$$

표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{3} \geq 2, \sqrt{n} \geq 6$$

따라서 $n \geq 36$ 이므로 n 의 최솟값은 36이다.

답 36

6 $E(\bar{X})=58, \sigma(\bar{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{16}}=\frac{\sigma}{4}$ 이므로

확률변수 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(58, \left(\frac{\sigma}{4}\right)^2\right)$ 을 따르고,

$$E(\bar{Y})=m, \sigma(\bar{Y})=\frac{\sigma+2}{\sqrt{25}}=\frac{\sigma+2}{5} \text{이므로}$$

확률변수 \bar{Y} 는 정규분포 $N\left(m, \left(\frac{\sigma+2}{5}\right)^2\right)$ 을 따른다.

두 확률변수 \bar{X}, \bar{Y} 의 확률밀도함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 직선 $x=60$ 에 대하여 서로 대칭이므로

$$\frac{58+m}{2}=60 \text{이고, } \sigma(\bar{X})=\sigma(\bar{Y}) \text{이다.}$$

$$\frac{58+m}{2}=60 \text{에서 } m=62 \text{이고,}$$

$$\sigma(\bar{X})=\sigma(\bar{Y}) \text{에서 } \frac{\sigma}{4}=\frac{\sigma+2}{5}$$

$$5\sigma=4\sigma+8, \sigma=8$$

따라서 확률변수 \bar{X} 는 정규분포 $N(58, 2^2)$ 을 따르고, 확률변수 \bar{Y} 는 정규분포 $N(62, 2^2)$ 을 따른다.

$$Z_1 = \frac{\bar{X} - 58}{2}, Z_2 = \frac{\bar{Y} - 62}{2} \text{로 놓으면 두 확률변수 } Z_1,$$

Z_2 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \geq 60) + P(\bar{Y} \leq 60) &= P\left(Z_1 \geq \frac{60-58}{2}\right) + P\left(Z_2 \leq \frac{60-62}{2}\right) \\ &= P(Z_1 \geq 1) + P(Z_2 \leq -1) \\ &= 2P(Z_1 \geq 1) \\ &= 2\{0.5 - P(0 \leq Z_1 \leq 1)\} \\ &= 2(0.5 - 0.3413) \\ &= 0.3174 \end{aligned}$$

답 ④

7 $E(\bar{X})=m, \sigma(\bar{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이므로

확률변수 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ 을 따르고,

$$Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \text{으로 놓으면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포}$$

$N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \leq m+3) &= P\left(Z \leq \frac{m+3-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{3\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\ &= 0.9332 \end{aligned}$$

이므로

$$0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{3\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0.9332$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{3\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0.4332$$

$$\text{즉, } \frac{3\sqrt{n}}{\sigma} = 1.5 \text{이므로}$$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3}{1.5} = 2$$

따라서 표본평균이 $\bar{x} = 36$, 모표준편차가 σ , 표본의 크기가 n 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$36 - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq 36 + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$36 - 1.96 \times 2 \leq m \leq 36 + 1.96 \times 2$$

$$32.08 \leq m \leq 39.92$$

답 ③

- 8 표본평균이 \bar{x} , 모표준편차가 σ , 표본의 크기가 64일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{64}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{64}} \text{이므로}$$

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{\sigma}{8} = 6.71 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\bar{x} + 2.58 \times \frac{\sigma}{8} = 9.29 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 변끼리 더하면

$$2\bar{x} = 16, \bar{x} = 8$$

$\bar{x} = 8$ 을 ㉡에 대입하면

$$2.58 \times \frac{\sigma}{8} = 1.29, \sigma = 4$$

표본평균이 $\bar{x} + 1 = 9$, 모표준편차가 4, 표본의 크기가 196일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$9 - 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{196}} \leq m \leq 9 + 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{196}}$$

$$9 - 1.96 \times \frac{4}{14} \leq m \leq 9 + 1.96 \times \frac{4}{14}$$

$$8.44 \leq m \leq 9.56$$

따라서 $a = 8.44$ 이므로

$$100a = 844$$

답 844

Level 3 실력 완성

본문 99쪽

1 ②

2 ④

3 ⑤

- 1 $P(X=1)=a$, $P(X=3)=b$, $P(X=5)=c$ 라 하고, 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	계
$P(X=x)$	a	b	c	1

$$P(\bar{X}=2) = a \times b \times 2 = \frac{1}{16} \text{이므로}$$

$$2ab = \frac{1}{16} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$E(\bar{X}) = 4 \text{에서 } E(X) = 4 \text{이므로}$$

$$a + 3b + 5c = 4$$

$$c = 1 - a - b \text{이므로}$$

$$a + 3b + 5(1 - a - b) = 4$$

$$4a + 2b = 1$$

$$2b = 1 - 4a \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$a(1 - 4a) = \frac{1}{16}$$

$$4a^2 - a + \frac{1}{16} = 0$$

$$64a^2 - 16a + 1 = 0$$

$$(8a - 1)^2 = 0$$

$$a = \frac{1}{8}$$

$$\text{㉡에서 } b = \frac{1}{4}$$

$$c = 1 - a - b = \frac{5}{8}$$

따라서

$$P(\bar{X}=3) = a \times c \times 2 + b \times b$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{5}{8} \times 2 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{7}{32}$$

이므로

$$P(X=3) - P(\bar{X}=3) = \frac{1}{4} - \frac{7}{32}$$

$$= \frac{1}{32}$$

답 ②



2. \neg . 모든 확률의 합은 1이므로

$$\frac{1}{4} + a + b = 1 \text{에서 } a + b = \frac{3}{4}$$

따라서

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \times \frac{1}{4} + 4a + 6b \\ &= \frac{1}{2} + 4a + 6\left(\frac{3}{4} - a\right) \\ &= 5 - 2a \end{aligned}$$

이므로

$$a = \frac{1}{4} \text{이면}$$

$$E(\bar{X}) = E(X) = \frac{9}{2} > 4 \text{ (거짓)}$$

$$\neg. V(X) = 2^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times a + 6^2 \times b - (5 - 2a)^2$$

$$= 1 + 16a + 36\left(\frac{3}{4} - a\right) - (5 - 2a)^2$$

$$= 3 - 4a^2 \leq 3$$

따라서 $n=3$ 이면

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{3} \leq 1 \text{ (참)}$$

$\neg. n=2$ 이면 확률변수 \bar{X} 가 갖는 값은 2, 3, 4, 5, 6이고,

$$P(\bar{X}=2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$P(\bar{X}=3) = \frac{1}{4} \times a \times 2 = \frac{1}{2}a$$

$$P(\bar{X}=4) = \frac{1}{4} \times b \times 2 + a \times a$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - a\right) + a^2$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}a + a^2$$

이므로

$$P(\bar{X} \leq 4) = P(\bar{X}=2) + P(\bar{X}=3) + P(\bar{X}=4)$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{2}a + \frac{3}{8} - \frac{1}{2}a + a^2$$

$$= \frac{7}{16} + a^2$$

따라서 $a \leq \frac{1}{4}$ 이면

$$P(\bar{X} \leq 4) \leq \frac{7}{16} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 \neg , \neg 이다.

답 ④

3. $E(\bar{X}) = m, \sigma(\bar{X}) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$ 이므로

확률변수 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(m, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$$Z_1 = \frac{X-m}{1}, Z_2 = \frac{\bar{X}-m}{\frac{1}{2}} \text{으로 놓으면 두 확률변수 } Z_1,$$

Z_2 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르고,

$$f(k) = P(-m \leq Z_1 \leq k+1),$$

$$g(k) = P(-2m \leq Z_2 \leq 2k) \text{이다.}$$

$\neg. m=1$ 일 때,

$$f(1) = P(-1 \leq Z_1 \leq 2)$$

$$g(1) = P(-2 \leq Z_2 \leq 2) \text{이므로}$$

$$f(1) < g(1) \text{ (참)}$$

$\neg. m > 0$ 일 때,

$$f(m) = P(-m \leq Z_1 \leq m+1) > 2P(0 \leq Z_1 \leq m)$$

$$g(m) = P(-2m \leq Z_2 \leq 2m) = 2P(0 \leq Z_2 \leq 2m)$$

이고, $2P(0 \leq Z_1 \leq m) > P(0 \leq Z_2 \leq 2m)$ 이므로

$$2f(m) > 2 \times 2P(0 \leq Z_1 \leq m)$$

$$> 2P(0 \leq Z_2 \leq 2m)$$

$$= g(m) \text{ (참)}$$

$\neg. f(k) = g(k)$ 에서

$$P(-m \leq Z_1 \leq k+1) = P(-2m \leq Z_2 \leq 2k)$$

(i) $m=0$ 이면

$$P(0 \leq Z_1 \leq k+1) = P(0 \leq Z_2 \leq 2k) \text{에서}$$

$$k+1 = 2k, k=1$$

(ii) $m > 0$ 이면

$$P(-m \leq Z_1 \leq k+1) = P(-2m \leq Z_2 \leq 2k) \text{이고}$$

$$-2m < -m < 0 \text{이므로}$$

$$0 < 2k < k+1 \text{이다.}$$

$$\text{즉, } k < 1$$

(i), (ii)에 의하여 $k \leq 1$ (참)

이상에서 옳은 것은 \neg , \neg , \neg 이다.

답 ⑤