Ⅰ_2. 지수함수와 로그함수

[12수학Ⅰ01-06] 지수함수와 로그함수의 뜻을 안다.
[12수학Ⅰ01-07] 지수함수와 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다.
[12수학Ⅰ01-08] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

1 지수함수의 뜻

$a \neq 1$, $a > 0$일 때, 실수 a^x의 값을 대응시키는 함수

$$y = a^x$$

을 'a를 밑으로 하는 지수함수'라고 한다.

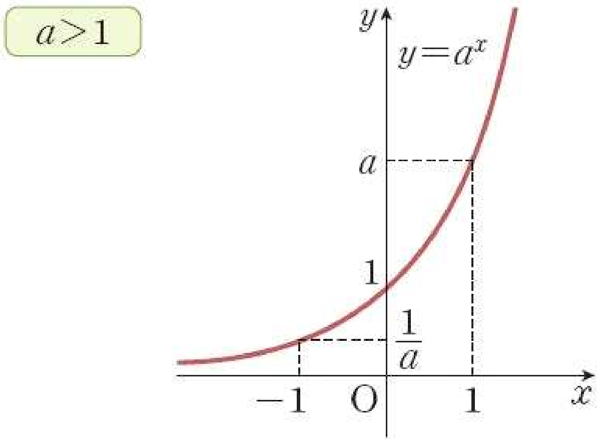
☑ ① 함수 $y = a^x$에서 x는 실수이므로 $a > 0$인 경우만 생각한다.

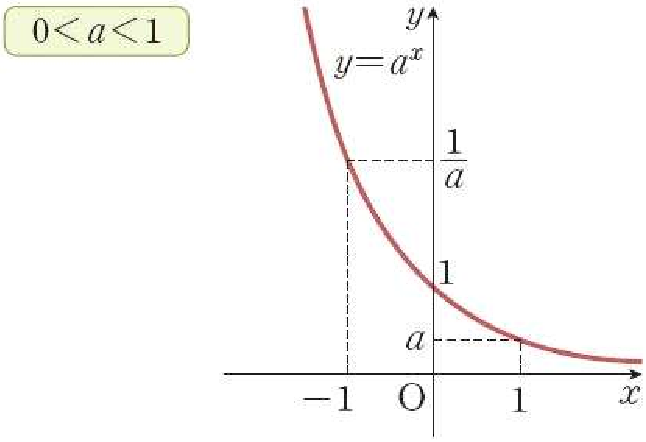
② $y = a^x$에서 $a = 1$이면 모든 실수 x에 대하여 $y = 1^x = 1$이므로 함수 $y = a^x$는 상수함수이다. 그러므로 지수함수 $y = a^x$에서는 $a > 0$이고 $a \neq 1$인 경우만을 생각한다.

② 지수함수 $y = a^x$ $(a \neq 1,\ a > 0)$의 그래프와 성질 ❶

(1) 지수함수 $y = a^x$ $(a \neq 1,\ a > 0)$의 그래프

밑 a의 값의 범위에 따라 다음과 같다.





☑ $a \neq 0$일 때, $a^0 = 1$, $a^1 = a$

$\Rightarrow$ 지나는 점 : $(0,\ 1)$, $(1,\ a)$

② 지수함수 $y = a^x$ $(a \neq 1,\ a > 0)$의 그래프와 성질 ❷

(2) 지수함수 $y = a^x$ $(a \neq 1,\ a > 0)$의 성질

① 정의역은 실수 전체의 집합이고,
치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

② $a > 1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0 < a < 1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 감소한다.

③ 그래프는 두 점 $(0,\ 1)$, $(1,\ a)$를 지나고,
점근선은 x축$(y = 0)$이다.

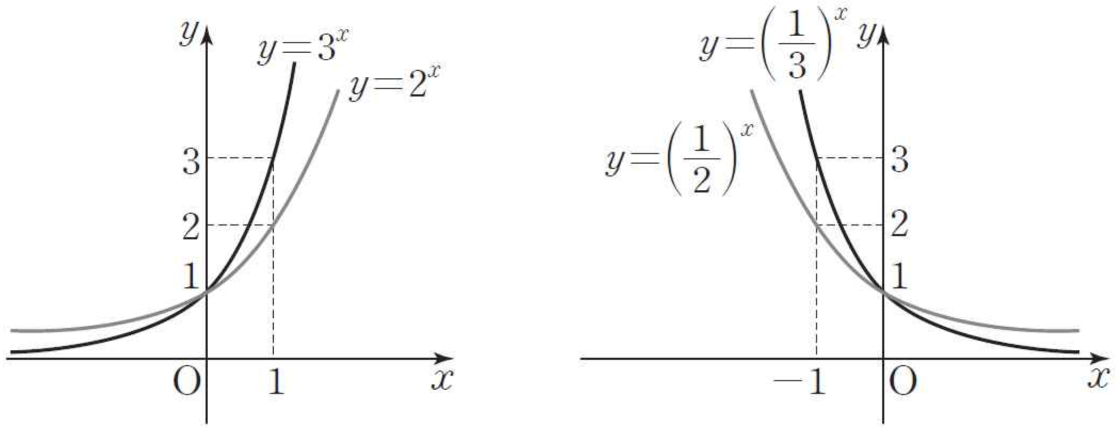
☑ 지수함수 $y = a^x$에서

① $a > 1$일 때, $x_1 < x_2$이면 $a^{x_1} < a^{x_2}$이다.

② $0 < a < 1$일 때, $x_1 < x_2$이면 $a^{x_1} > a^{x_2}$이다.

예 두 함수 $y=2^x$, $y=3^x$의 그래프와

두 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프는 그림과 같다.



☑ 두 함수 $y=2^x$, $y=3^x$에 대하여 다음이 성립한다.

① $x>0$일 때, $2^x<3^x$

② $x<0$일 때, $2^x>3^x$

✡ 지수함수의 성질

지수함수 $f(x)=a^x$ $(a\neq 1,\ a>0)$에 대하여

(1) $f(x+y)=f(x)\times f(y)$ (2) $f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$

(3) $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$ (4) $f\left(\frac{x}{n}\right)=\sqrt[n]{f(x)}$

(5) $f(nx)=\{f(x)\}^n$ (단, n은 자연수)

(6) $f(x+n)=a^n\times f(x)$

3 지수함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동 ❶

(1) 평행이동

지수함수 $y = a^{x}$ $(a \neq 1,\ a > 0)$의 그래프를
x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한
그래프를 나타내는 식은

$$y = a^{x-m} + n$$

(2) 대칭이동

지수함수 $y = a^{x}$ $(a \neq 1,\ a > 0)$의 그래프를

① x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식 : $y = -a^{x}$

② y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식 : $y = a^{-x}$

③ 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식 : $y = -a^{-x}$

3 지수함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동 ❷

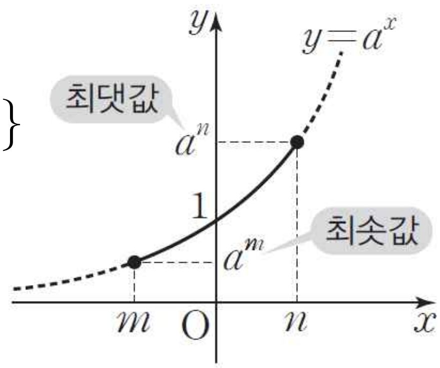
☑ $y = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{x} = a^{-x}$이므로 함수 $y = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{x}$의 그래프는
함수 $y = a^{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동 한 것이다.

예 함수 $y = -2^{x-1} + 2$의 그래프는 지수함수 $y = 2^{x}$의
그래프를 이용하여 다음과 같이 나타내어 그릴 수 있다.

$\boxed{y=2^{x}} \xRightarrow{x\text{축에 대하여 대칭이동}} \boxed{y=-2^{x}} \xRightarrow{x\text{축의 방향으로 1만큼, } y\text{축의 방향으로 2만큼 평행이동}} \boxed{y=-2^{x-1}+2}$

$\boxed{4}$ 지수함수의 최댓값과 최솟값 ❶

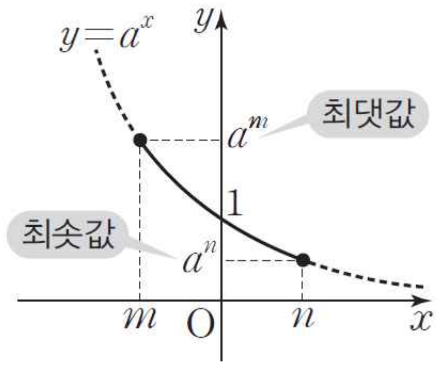
$m < n$일 때, 정의역이 $\{x \mid m \leq x \leq n\}$인 함수 $y = a^x$ $(a \neq 1,\ a > 0)$의 최댓값과 최솟값은 다음과 같다.



(1) $a > 1$일 때,

$x = m$에서 최솟값 a^m

$x = n$에서 최댓값 a^n을 갖는다.



(2) $0 < a < 1$일 때,

$x = m$에서 최댓값 a^m

$x = n$에서 최솟값 a^n을 갖는다.

$\boxed{4}$ 지수함수의 최댓값과 최솟값 ❷

예 정의역이 $\{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$인 함수 $y = 2^x$의 최댓값과 최솟값은 다음과 같다.

밑 2가 1보다 크므로

$x = -1$에서 최솟값 $2^{-1} = \dfrac{1}{2}$을 갖고,

$x = 2$에서 최댓값 $2^2 = 4$를 갖는다.

5 로그함수의 뜻

지수함수 $y=a^{x}$ $(a \neq 1,\ a>0)$의 역함수 $y=\log_{a}x$를 'a를 밑으로 하는 로그함수'라고 한다.

☑ 지수함수 $y=a^{x}$ $(a \neq 1,\ a>0)$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다. 이때 로그의 정의로부터 다음이 성립한다.

$$y=a^{x} \Leftrightarrow x=\log_{a}y$$

위의 $x=\log_{a}y$에서 x와 y를 서로 바꾸면

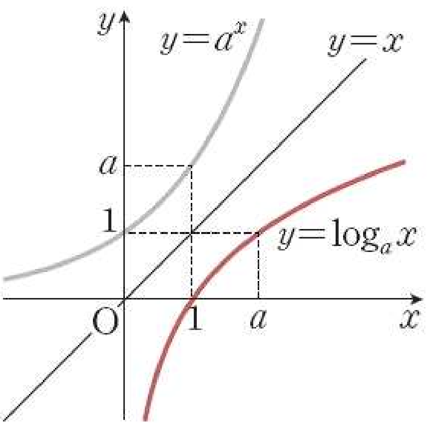
$y=\log_{a}x$이므로 지수함수 $y=a^{x}$ $(a \neq 1,\ a>0)$의 역함수는 $y=\log_{a}x$이다.

6 로그함수 $y=\log_{a}x$ $(a \neq 1,\ a>0)$의 그래프와 성질

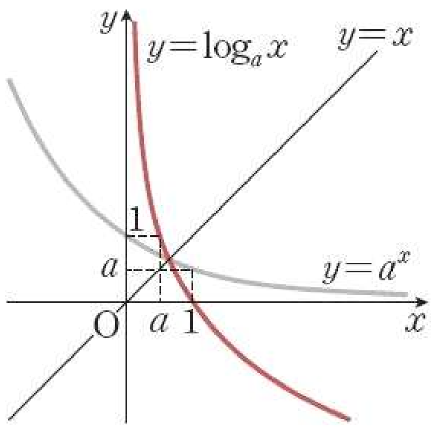
(1) 로그함수 $y=\log_{a}x$ $(a \neq 1,\ a>0)$의 그래프

밑 a의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

$a>1$



$0<a<1$



☑ $a \neq 1,\ a>0$일 때, $\log_{a}1=0$, $\log_{a}a=1$

$\Rightarrow$ 지나는 점 : $(1,\ 0)$, $(a,\ 1)$

6 로그함수 $y = \log_a x$ $(a \neq 1,\ a > 0)$의 그래프와 성질

(2) 로그함수 $y = \log_a x$ $(a \neq 1,\ a > 0)$의 성질

① 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고,
치역은 실수 전체의 집합이다.

② $a > 1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0 < a < 1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

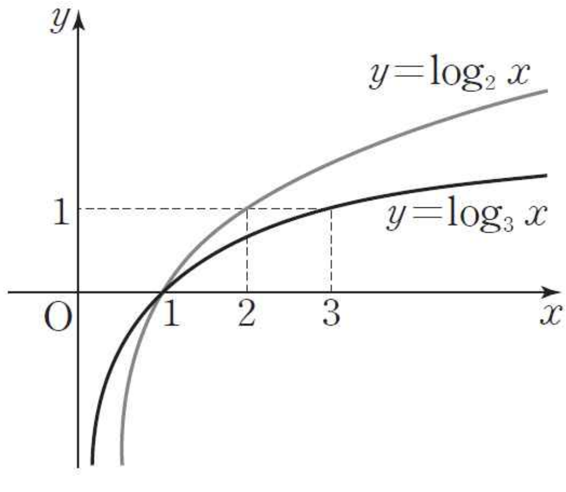
③ 그래프는 두 점 $(1,\ 0)$, $(a,\ 1)$을 지나고,
점근선은 y축$(x = 0)$이다.

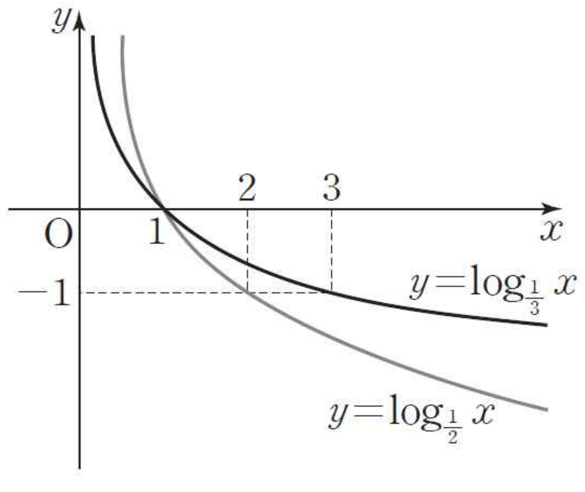
☑ 로그함수 $y = \log_a x$에서

① $a > 1$일 때, $x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$

② $0 < a < 1$일 때, $x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$

예 두 함수 $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$의 그래프와
두 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$의 그래프는 그림과 같다.





☑ 두 함수 $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$에 대하여 다음이 성립한다.

① $x > 1$일 때, $\log_2 > \log_3 x$

② $0 < x < 1$일 때, $\log_2 < \log_3 x$

✡ 로그함수의 성질

로그함수 $f(x)=\log_a x$ ($a \neq 1$, $a>0$, $x>0$)에 대하여

(1) $f(xy)=f(x)+f(y)$

(2) $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$

(3) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$

(4) $f\left(x^n\right)=nf(x)$ (단, n은 실수)

(5) $f(\sqrt[n]{x})=\dfrac{1}{n}f(x)$

(6) $f\left(a^n x\right)=f(x)+n$

7 로그함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동 ❶

(1) 평행이동

로그함수 $y=\log_a x$ ($a \neq 1$, $a>0$)의 그래프를

x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한

그래프를 나타내는 식은

$$y=\log_a(x-m)+n$$

☑ 로그함수 $y=\log_a(x-m)+n$의 그래프는

항상 점 $(m+1, n)$을 지나고,

점근선은 직선 $x=m$이다.

7 로그함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동 ❷

(2) 대칭이동

로그함수 $y = \log_a x$ $(a \neq 1,\ a > 0)$의 그래프를

(1) x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식 : $y = -\log_a x$

(2) y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식 : $y = \log_a(-x)$

(3) 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식 : $y = -\log_a(-x)$

☑ $y = \log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$이므로 함수 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$의 그래프는

함수 $y = \log_a x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것.

7 로그함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동 ❸

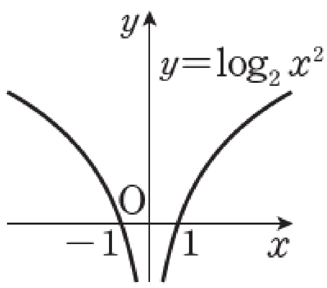
예 함수 $y = -\log_2(x-1)+2$의 그래프는

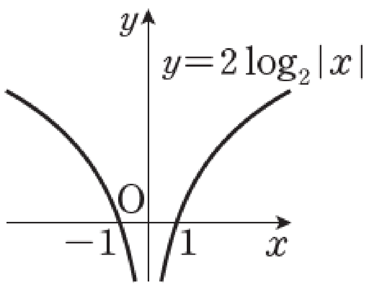
함수 $y = \log_2 x$의 그래프를 이용하여

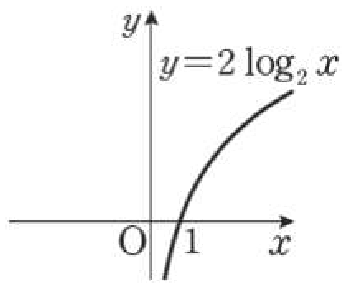
다음과 같이 나타내어 그릴 수 있다.

$$\boxed{y=\log_2 x} \xrightarrow[\text{대칭이동}]{x\text{축에 대하여}} \boxed{y=-\log_2 x} \xrightarrow[y\text{축의 방향으로 2만큼 평행이동}]{x\text{축의 방향으로 1만큼,}} \boxed{y=-\log_2(x-1)+2}$$

☑







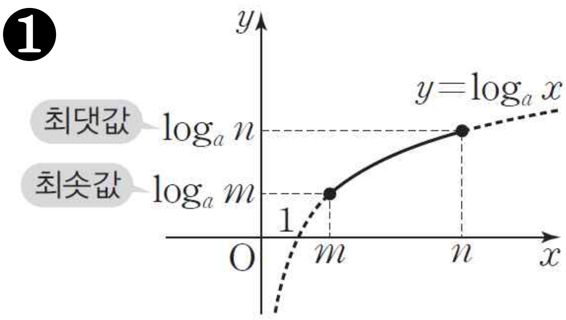
8 로그함수의 최댓값과 최솟값 ❶

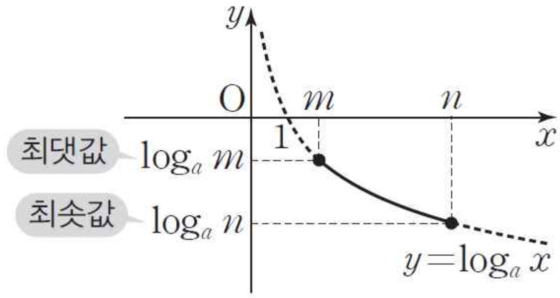
$0 < m < n$일 때, 정의역이

$\{x \mid m \le x \le n\}$인 함수

$y = \log_a x$ $(a \ne 1, a > 0)$의

최댓값과 최솟값은 다음과 같다.





(1) $a > 1$일 때,

$x = m$에서 최솟값 $\log_a m$,

$x = n$에서 최댓값 $\log_a n$을 갖는다.

(2) $0 < a < 1$일 때,

$x = m$에서 최댓값 $\log_a m$,

$x = n$에서 최솟값 $\log_a n$을 갖는다.

8 로그함수의 최댓값과 최솟값 ❷

예 정의역이 $\{x \mid 1 \le x \le 2\}$인

함수 $y = \log_2 x$의 최댓값과 최솟값은 다음과 같다.

밑 2가 1보다 크므로

$x = 1$에서 최솟값 $\log_2 1 = 0$을 갖고,

$x = 2$에서 최댓값 $\log_2 2 = 1$을 갖는다.

9 지수함수의 활용

(1) 지수에 미지수를 포함한 방정식의 풀이

$a \neq 1$, $a > 0$일 때,

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

☑ 지수함수 $y = a^{x}$ $(a \neq 1, a > 0)$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 다음 식이 성립한다.

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

이를 이용하여 지수에 미지수를 포함한 방정식을 푼다.

✡ 지수에 미지수를 포함한 방정식

$a \neq 1$, $a > 0$, $b \neq 1$, $b > 0$일 때,

(1) $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$ 또는 $a = 1$

(2) $a^{f(x)} = b^{f(x)} \Rightarrow a = b$ 또는 $f(x) = 0$

(3) ① $f\left(a^{x}\right) = 0 \Rightarrow a^{x} = t$ (단, $t > 0$)로 치환

② $a^{x} + a^{-x} = t$로 치환 $\Rightarrow t \geq 2$

(4) $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Rightarrow$ 양변에 밑이 같은 로그를 취한다.

(5) $a\left(p^{x}\right)^{2} + b\left(p^{x}\right) + c = 0$의 두 근 α, β

$\Leftrightarrow at^{2} + bt + c = 0$의 두 근 p^{α}, p^{β}

9 지수함수의 활용

(2) 지수에 미지수를 포함한 부등식의 풀이

① $a>1$일 때, $a^{f(x)}<a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x)$

② $0<a<1$일 때, $a^{f(x)}<a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x)$

☑ 지수함수 $y=a^x$ $(a \neq 1,\ a>0)$은

① $a>1$일 때, $a^{x_1}<a^{x_2} \Leftrightarrow x_1<x_2$

② $0<a<1$일 때, $a^{x_1}<a^{x_2} \Leftrightarrow x_1>x_2$

이를 이용하여 지수에 미지수를 포함한 부등식을 푼다.

예 ① $3^{2x}=3^{x+1} \Leftrightarrow 2x=x+1$이므로 $x=1$

② $3^{2x}>3^{x+1} \Leftrightarrow 2x>x+1$이므로 $x>1$

✡ 지수에 미지수를 포함한 부등식

(1) $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} a>1 & \Rightarrow f(x)>g(x) \\ 0<a<1 & \Rightarrow f(x)<g(x) \end{cases}$

(2) $f\left(a^x\right)>0 \Rightarrow a^x=t$ (단, $t>0$)로 치환

(3) $a^{f(x)}>b^{g(x)} \Rightarrow$ 양변에 로그를 취한다.

(4) $a^x>a^y$에서 $x,\ y$의 대소는

① $a>1 \Rightarrow x>y$ (부등호 방향 그대로)

② $0<a<1 \Rightarrow x<y$ (부등호 방향 반대로)

✡ 지수와 밑에 미지수가 있는 부등식

밑의 범위를 ① (밑) > 1, ② $0 <$ (밑) < 1, ③ (밑) $= 1$ 의 세 가지 경우로 나누어 푼다.

예 $x^{2x+1} > x^{x+3}$

① $x > 1$: $2x + 1 > x + 3$, $x > 2$ $\therefore$ $x > 2$

② $0 < x < 1$: $2x + 1 < x + 3$, $x < 2$ $\therefore$ $0 < x < 1$

③ $x = 1$: $1^3 > 1^4$ $\therefore$ 모순

$\therefore$ 주어진 부등식의 해 : $0 < x < 1$ 또는 $x > 2$

10 로그함수의 활용

(1) 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식의 풀이

$a \neq 1$, $a > 0$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$일 때,

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) > 0$$

☑ 로그함수 $y = \log_a x$ ($a \neq 1$, $a > 0$)은 양의 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 다음 식이 성립한다.

$$\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

(단, $a \neq 1$, $a > 0$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$)

이를 이용하여 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식을 푼다.

✡ 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식

$a \neq 1$, $a > 0$일 때,

(1) $\log_a f(x) = k \Rightarrow f(x) = a^k$, $f(x) > 0$

(2) $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) > 0$

(3) $f(\log_a x) = 0 \Rightarrow \log_a x = t$ 로 치환

(4) $x^{\log_a x} = f(x) \Rightarrow$ 양변에 밑이 a인 로그를 취한다.

(5) $a(\log_p x)^2 + b(\log_p x) + c = 0$의 두 근 α, β

$\Leftrightarrow at^2 + bt + c = 0$의 두 근 $\log_p \alpha$, $\log_p \beta$

☑ $\log_p x$에서 $p > 0$, $p \neq 1$, $x > 0$를 반드시 따져야 한다.

(2) 로그의 진수에 미지수를 포함한 부등식의 풀이

$f(x) > 0$, $g(x) > 0$인 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

① $a > 1$일 때,

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x)$$

② $0 < a < 1$일 때,

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0$$

☑ 로그함수 $y = \log_a x$ $(a \neq 1,\ a > 0)$은

① $a > 1$일 때, $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow 0 < x_1 < x_2$

② $0 < a < 1$일 때, $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2 > 0$

예 ① $\log_2(x+1) = \log_2 2 \Leftrightarrow x + 1 = 2$이므로 $x = 1$

② $\log_2(x+1) > \log_2 2 \Leftrightarrow x + 1 > 2$이므로 $x > 1$

✡ 로그의 진수에 미지수가 있는 부등식

$a \neq 1$, $a > 0$일 때,

(1) $\log_a f(x) > k$ ① $a > 1 \Rightarrow f(x) > a^k$

② $0 < a < 1 \Rightarrow 0 < f(x) < a^k$

(2) $\log_a f(x) > \log_a g(x)$

① $a > 1 \Rightarrow f(x) > g(x) > 0$

② $0 < a < 1 \Rightarrow 0 < f(x) < g(x)$

(3) $\log_a x$가 반복 사용 $\Rightarrow$ $\log_a x = t$ 로 치환

(4) 지수에 미지수가 있을 때 $\Rightarrow$ 양변에 로그를 취한다.

(5) 밑에 미지수가 있을 때 $\Rightarrow$ ① $a > 1$, ② $0 < a < 1$