정답 및 해설

수학 영역

정 답

1	②	2	④	3	③	4	⑤	5	②
6	⑤	7	④	8	③	9	①	10	②
11	⑤	12	①	13	②	14	③	15	①
16	③	17	①	18	④	19	③	20	⑤
21	④	22	10	23	16	24	4	25	8
26	13	27	50	28	24	29	96	30	28

해 설

1. [출제의도] 다항식 계산하기

$A-B=(x^2+5x+4)-(x^2+2)=5x+2$

2. [출제의도] 복소수 계산하기

$(2+i)+(2-3i)=(2+2)+\{1+(-3)\}i=4-2i$

3. [출제의도] 이차방정식 계산하기

이차방정식 $x^2-6x+a=0$의 판별식을
D라 하면 $D=36-4a=0$
따라서 $a=9$

4. [출제의도] 나머지정리 이해하기

$f(x)=x^3-x^2+3$이라 하면
$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는
$f(2)=8-4+3=7$

5. [출제의도] 도형의 평행이동 이해하기

직선 $2x+y+5=0$을 x축의 방향으로 2만큼,
y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의
방정식은 $2(x-2)+(y+1)+5=0$
$2x+y+2=0$
따라서 $a=2$

6. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-6$, $\alpha\beta=7$
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-6)^2-2\times7=22$

7. [출제의도] 인수분해 이해하기

조립제법을 활용하여 x^3+3x^2-x-3을
인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 3 & -1 & -3 \\ & & 1 & 4 & 3 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-1)(x^2+4x+3)=(x-1)(x+1)P(x)$
$(x-1)(x+1)(x+3)=(x-1)(x+1)P(x)$
$P(x)=x+3$
따라서 $P(1)=1+3=4$

8. [출제의도] 연립방정식 이해하기

$\begin{cases} x-y-1=0 & \cdots ㉠ \\ x^2-xy+2y=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $y=x-1$을 ㉡에 대입하면
$x^2-x(x-1)+2(x-1)=4$
$x+2x-2=4$
$\alpha=2$, $\beta=1$
따라서 $\alpha+\beta=2+1=3$

9. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기

기울기가 5인 직선의 y절편을 k라 하면
이차함수 $f(x)=x^2-3x+17$의 그래프와
직선 $y=5x+k$가 한 점에서 만난다.
이차방정식 $x^2-8x+17-k=0$의 판별식을
D라 하면 $D=64-4(17-k)=0$
따라서 직선의 y절편은 1

10. [출제의도] 복소수 이해하기

$\dfrac{2a}{1-i}+3i=2+bi$
$\dfrac{2a(1+i)}{(1-i)(1+i)}+3i=2+bi$
$a(1+i)+3i=2+bi$
$a+(a+3)i=2+bi$
$a=2$, $b=5$
따라서 $a+b=2+5=7$

11. [출제의도] 나머지정리 이해하기

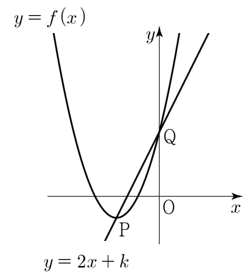
$f(x)=x^2+ax+b$라 하면 나머지정리에 의하여
$f(1)=1+a+b=6$ $\cdots$ ㉠
$f(3)=9+3a+b=6$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하면 $a=-4$, $b=9$
$f(x)=x^2-4x+9$
따라서 $f(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의
나머지는 $f(4)=16-16+9=9$

12. [출제의도] 선분의 내분을 활용하여 문제 해결하기

삼각형 BOC와 삼각형 OAC의 넓이의 비는
$2:1$이므로 $\overline{\mathrm{BO}}:\overline{\mathrm{OA}}=2:1$
점 O는 선분 BA를 $2:1$로 내분하는 점이다.
$0=\dfrac{a+6}{3}$, $a=-6$
$0=\dfrac{b+2}{3}$, $b=-2$
따라서 $a+b=(-6)+(-2)=-8$

13. [출제의도] 이차함수의 그래프 이해하기

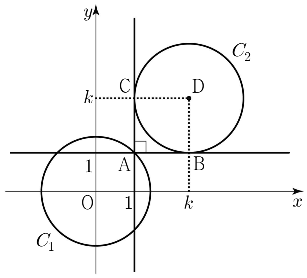
$f(x)=x^2+4x+3=(x+2)^2-1$
직선 $y=2x+k$가 점 $\mathrm{P}(-2,\ -1)$을 지나므로
$-1=2\times(-2)+k$, $k=3$
$x^2+4x+3=2x+3$
$x^2+2x=x(x+2)=0$
그러므로 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(0,\ 3)$
따라서 선분 PQ의 길이는
$\sqrt{\{0-(-2)\}^2+\{3-(-1)\}^2}=2\sqrt{5}$



14. [출제의도] 이차부등식을 활용하여 문제 해결하기

$x^2-(n+5)x+5n\le0$
$(x-n)(x-5)\le0$
(i) $n<5$일 때,
부등식의 해는 $n\le x\le5$
정수 x의 개수는 $6-n$이므로 $6-n=3$
$n=3$
(ii) $n=5$일 때,
$(x-5)^2\le0$의 해는 $x=5$
정수 x의 개수는 1이므로 성립하지 않는다.
(iii) $n>5$일 때,
부등식의 해는 $5\le x\le n$
정수 x의 개수는 $n-4$이므로 $n-4=3$
$n=7$
(i), (ii), (iii)에서
모든 자연수 n의 값의 합은 $3+7=10$

15. [출제의도] 도형의 평행이동을 활용하여 문제 해결하기



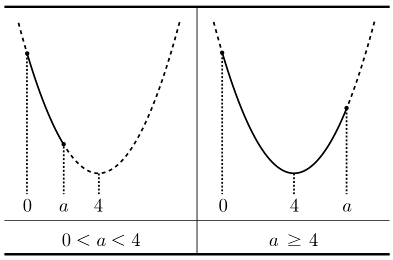
점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$에서 원 C_2에 그은 두 접선이
원 C_2와 만나는 점을 각각 B, C라 하고,
원 C_2의 중심을 $\mathrm{D}(k,\ k)$라 하자.
사각형 ABDC는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인
정사각형이다.
$k>2$이므로 $k=1+\sqrt{2}$

16. [출제의도] 점과 직선 사이의 거리를 활용하여 문제 해결하기

직선 AB의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x+3$
직선 AB를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한
직선 A′B의 방정식은 $y=2x-6$
점 C와 직선 A′B 사이의 거리는
점 C와 직선 AB 사이의 거리의 2배이다.
$\dfrac{|-k-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|-2k+6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\times2$
$0<k<3$이므로 $k+6=2(-2k+6)$
따라서 $k=\dfrac{6}{5}$

17. [출제의도] 이차함수의 최솟값 추론하기

$f(x)=x^2-8x+a+6=(x-4)^2+a-10$
a의 값에 따른 $y=f(x)$의 그래프의 개형은
다음과 같다.



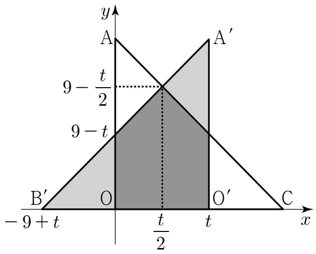
(i) $0<a<4$일 때,
최솟값은 $f(a)=a^2-7a+6=(a-1)(a-6)=0$
$a=1$ 또는 $a=6$
$0<a<4$이므로 $a=1$
(ii) $a\ge4$일 때,
최솟값은 $f(4)=a-10=0$
$a=10$
(i), (ii)에서 $f(x)$의 최솟값이 0이 되도록
하는 모든 a의 값의 합은 $1+10=11$

18. [출제의도] 두 직선의 위치 관계를 활용하여 추론하기

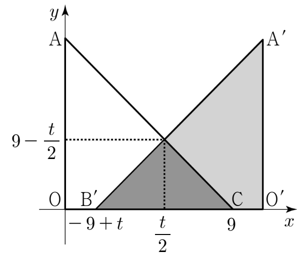
점 A$(a,\ 4)$는 직선 $l : y=\frac{1}{m}x+2$ 위의 점이므로 $a=\boxed{2m}$
직선 BH는 직선 l에 수직이므로
직선 BH의 방정식은 $y=-m(x-\boxed{2m})$
$\frac{1}{m}x+2=-m(x-2m)$
직선 l과 직선 BH가 만나는 점 H의 좌표는
$\mathrm{H}\left(\frac{2m^3-2m}{\boxed{m^2+1}},\ \frac{4m^2}{\boxed{m^2+1}}\right)$
선분 OH의 길이는
$\sqrt{\left(\frac{2m^3-2m}{\boxed{m^2+1}}\right)^2+\left(\frac{4m^2}{\boxed{m^2+1}}\right)^2}$
$=\frac{|2m|}{\boxed{m^2+1}}\sqrt{m^4+\boxed{2}\times m^2+1}$
$=|\boxed{2m}|$
이므로 선분 OH의 길이와 선분 OB의 길이가 서로 같다.
따라서 삼각형 OBH는 m의 값에 관계없이 이등변삼각형이다.
그러므로 $f(m)=2m$, $g(m)=m^2+1$, $k=2$
따라서 $f(2)\times g(2)=4\times5=20$

19. [출제의도] 점의 평행이동을 활용하여 문제 해결하기

(i) $0<t<9$일 때,



$S(t)=2\times\frac{1}{2}\times\left(9-t+9-\frac{t}{2}\right)\times\frac{t}{2}$
$=\frac{3}{4}t(12-t)=-\frac{3}{4}(t-6)^2+27$
따라서 $t=6$일 때, $S(t)$의 최댓값은 27
(ii) $9\le t<18$일 때,

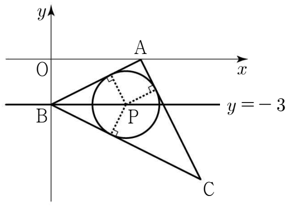


$S(t)=\frac{1}{2}\times(18-t)\times\left(9-\frac{t}{2}\right)=\frac{1}{4}(t-18)^2$
따라서 $t=9$일 때, $S(t)$의 최댓값은 $\frac{81}{4}$
(i), (ii)에서 $S(t)$의 최댓값은 27

20. [출제의도] 인수분해를 활용하여 추론하기

ㄱ. $P(\sqrt{n})=(\sqrt{n})^4+(\sqrt{n})^2-n^2-n=0$ (참)
ㄴ. $P(x)=(x^2-n)(x^2+n+1)$이므로
방정식 $P(x)=0$은 $x=\sqrt{n}$, $x=-\sqrt{n}$ 만을 실근으로 가진다.
따라서 실근의 개수는 2 (참)
ㄷ. 모든 정수 k에 대하여
$P(k)=(k^2-n)(k^2+n+1)$에서
$k^2+n+1>0$이고, $\mathrm{P}(k)\neq0$을 만족시키려면
$n\neq k^2$이어야 하므로 n은 완전제곱수가 아닌 정수이다.
그러므로 n의 값은 2, 3, 5, 6, 7, 8
따라서 모든 n의 값의 합은 31 (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제 해결하기



직선 AB를 l이라 하면 $l : y=\frac{1}{2}x-3$
직선 BC를 m이라 하면 $m : y=-\frac{1}{2}x-3$
직선 CA를 n이라 하면 $n : y=-2x+12$
삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심 P의 좌표를 P(a, b)라 하자. (단, $0<a<10$)
점 P와 직선 l 사이의 거리와
점 P와 직선 m 사이의 거리가 같으므로
$\frac{|a-2b-6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|a+2b+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}$
$|a-2b-6|=|a+2b+6|$
$a=0$ 또는 $b=-3$
$0<a<10$이므로 $b=-3$ ⋯ ㉠
또한 점 P와 직선 m 사이의 거리와
점 P와 직선 n 사이의 거리가 같으므로
$\frac{|a+2b+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2a+b-12|}{\sqrt{2^2+1^2}}$
㉠을 대입하면 $|a|=|2a-15|$
$a=15$ 또는 $a=5$
$0<a<10$이므로 $a=5$
그러므로 P$(5,\ -3)$
따라서 선분 OP의 길이는
$\sqrt{5^2+(-3)^2}=\sqrt{34}$

22. [출제의도] 다항식 계산하기

$(x+3)(x^2+2x+4)=x^3+5x^2+10x+12$
따라서 x의 계수는 10

23. [출제의도] 이차함수의 최댓값 이해하기

$f(x)=-x^2-4x+k=-(x+2)^2+k+4$
이차함수 $f(x)$의 최댓값은 $k+4=20$
따라서 $k=16$

24. [출제의도] 원의 방정식 계산하기

$x^2+y^2-2x+4y-11$
$=(x-1)^2+(y+2)^2-5-11=0$
원의 방정식은 $(x-1)^2+(y+2)^2=16$
따라서 원의 반지름의 길이는 4

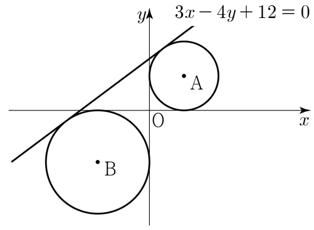
25. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기

이차함수 $f(x)=x^2-2x+k$의 그래프와
직선 $y=3x+1$이 만나지 않으므로 이차방정식
$x^2-5x+k-1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=25-4k+4<0$
$k>\frac{29}{4}$
따라서 자연수 k의 최솟값은 8

26. [출제의도] 연립부등식 이해하기

$x^2-x-56\le0$에서 $(x+7)(x-8)\le0$
$-7\le x\le8$ ⋯ ㉠
$2x^2-3x-2>0$에서 $(x-2)(2x+1)>0$
$x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>2$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡을 연립하면
$-7\le x<-\frac{1}{2}$ 또는 $2<x\le8$
주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는
-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1,
3, 4, 5, 6, 7, 8
따라서 정수 x의 개수는 13

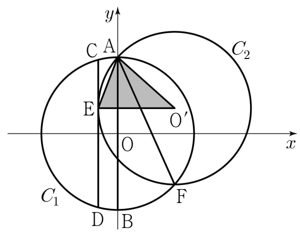
27. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제 해결하기



원의 중심을 $(a,\ a)$라 하면
점 $(a,\ a)$와 직선 $3x-4y+12=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이 $|a|$와 같으므로
$\frac{|3a-4a+12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=|a|$
$|-a+12|=5|a|$
양변을 제곱하여 정리하면
$a^2+a-6=0$
$a=-3$ 또는 $a=2$
제1사분면 위의 점을 A, 제3사분면 위의 점을 B라 하면 A$(2,\ 2)$, B$(-3,\ -3)$
따라서 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\{2-(-3)\}^2+\{2-(-3)\}^2=50$

28. [출제의도] 원의 방정식을 활용하여 문제 해결하기

점 O를 중심으로 하는 원을 C_1,
점 O′을 중심으로 하는 원을 C_2라 하자.



직선 CD는 원 C_2의 접선이므로 직선 CD와 직선 EO′은 서로 수직이다.
O′$(a,\ b)$에 대하여 삼각형 AEO′의 넓이는
$\frac{1}{2}\times6\times(6-b)=12$
$b=2$
따라서 원 C_2의 방정식은
$(x-a)^2+(y-2)^2=36$
원 C_2는 점 A$(0,\ 6)$을 지나므로
$a^2+16=36$
$a^2=20$
따라서 $a^2+b^2=24$

29. [출제의도] 직선의 방정식을 활용하여 문제 해결하기

직선 AC의 기울기는

$\dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2}=-1-\sqrt{2}$

직선 AC와 직선 BD는 서로 수직이므로

직선 BD의 기울기는 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$

직선 BD의 방정식은

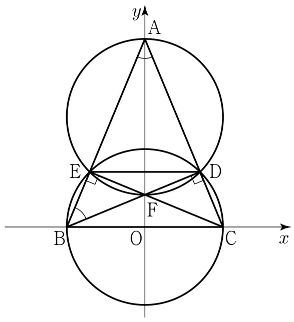
$y=(\sqrt{2}-1)(x+2)$

점 F의 좌표는 $\mathrm{F}(0,\ -2+2\sqrt{2})$

따라서 선분 AF의 길이는 4

사각형 AEFD는 지름이 $\overline{\mathrm{AF}}$인 원에 내접하고, 사각형 BCDE는 지름이 $\overline{\mathrm{BC}}$인 원에 내접한다. 두 원의 지름의 길이가 같으므로 호 ED에 대한 원주각의 크기가 같다.

그러므로 $\angle\mathrm{EAD}=\angle\mathrm{DBE}$



삼각형 ABD는 직각이등변삼각형이므로 삼각형 BFE도 직각이등변삼각형이다.

$\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{FE}}$이므로 $l=2\overline{\mathrm{AB}}$

$\overline{\mathrm{AB}}^2=\{0-(-2)\}^2+\{(2+2\sqrt{2})-0\}^2$

$=16+8\sqrt{2}$

$l^2=4\overline{\mathrm{AB}}^2=64+32\sqrt{2}$

$a=64$, $b=32$

따라서 $a+b=96$

(다른 풀이)

선분 AD의 길이를 a,

선분 FD의 길이를 b라 하자.

사각형 AEFD의 둘레의 길이는 $l=2(a+b)$

삼각형 AFD가 직각삼각형이고,

선분 AF의 길이가 4이므로 $a^2+b^2=16$

직선 BD의 방정식은

$y=(\sqrt{2}-1)(x+2)$ ⋯ ㉠

직선 AC의 방정식은

$y=(-1-\sqrt{2})(x-2)$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$

점 D의 좌표는 $\mathrm{D}(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$

삼각형 AFD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}ab=\dfrac{1}{2}\times4\times\sqrt{2}$

$ab=4\sqrt{2}$

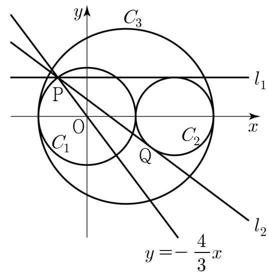
$l^2=4(a^2+2ab+b^2)$

$=4(16+8\sqrt{2})=64+32\sqrt{2}$

$a=64$, $b=32$

따라서 $a+b=96$

30. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제 해결하기



점 P의 좌표를 구하기 위해 직선의 방정식

$y=-\dfrac{4}{3}x$와 원 C_1의 방정식 $x^2+y^2=a^2$을

연립하면 $x^2=\left(\dfrac{3}{5}a\right)^2$

점 P는 제2사분면 위의 점이므로

$\mathrm{P}\left(-\dfrac{3}{5}a,\ \dfrac{4}{5}a\right)$

직선 l_1과 원 C_2가 만나는 점의 y좌표는

점 P의 y좌표와 같으므로 $b-a=\dfrac{4}{5}a$

$b=\dfrac{9}{5}a$

점 P에서 원 C_2에 그은 두 접선의 길이가 같으므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\dfrac{9}{5}a-\left(-\dfrac{3}{5}a\right)=\dfrac{12}{5}a$

직선 l_2의 기울기를 m이라 할 때,

직선 l_2의 방정식은 $y=m\left(x+\dfrac{3}{5}a\right)+\dfrac{4}{5}a$

$5mx-5y+(3m+4)a=0$

원 C_2의 중심 $\left(\dfrac{9}{5}a,\ 0\right)$과 직선 l_2 사이의 거리는

원 C_2의 반지름의 길이와 같다.

$\dfrac{\left|5m\times\dfrac{9}{5}a+(3m+4)a\right|}{\sqrt{(5m)^2+(-5)^2}}=\dfrac{4}{5}a$

$|12m+4|=4\sqrt{m^2+1}$

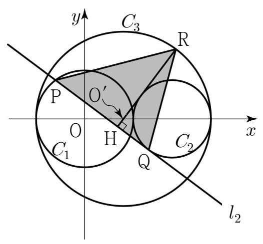
$|3m+1|=\sqrt{m^2+1}$

$9m^2+6m+1=m^2+1$

$m(4m+3)=0$

$m\neq0$이므로 $m=-\dfrac{3}{4}$

따라서 직선 l_2의 방정식은 $15x+20y-7a=0$



원 C_3의 중심을 O′이라 하자.

점 $\mathrm{O'}\left(\dfrac{4}{5}a,\ 0\right)$과 직선 l_2 사이의 거리는

$\dfrac{\left|15\times\dfrac{4}{5}a-7a\right|}{\sqrt{15^2+20^2}}=\dfrac{5a}{25}=\dfrac{1}{5}a$

점 R에서 직선 l_2에 내린 수선의 발을 H라 하면, 직선 RH가 점 O′을 지날 때 삼각형 PQR의 넓이가 최대이다.

그러므로 삼각형 PQR의 넓이의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{12}{5}a\times\left(\dfrac{1}{5}a+\dfrac{9}{5}a\right)=\dfrac{12}{5}a^2=240$

$a=10$, $b=\dfrac{9}{5}\times10=18$

따라서 $a+b=28$