Ⅰ_1. 여러 가지 순열

[12확통01-01] 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.

✡ 합의 법칙과 곱의 법칙

☑ 시행(trial) : 어떤 실험, 관찰, 행위.

사건(event) : 시행의 결과로서 나타나는 현상.

$n(A)$: 사건 A가 일어나는 경우의 수

(1) 합의 법칙 : A 또는 B가 일어나는 경우의 수

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

☑ $A \cap B = \varnothing \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

(2) 곱의 법칙 : A와 B가 동시에 일어나는 경우의 수

$$n(A \cap B) = n(A) \times n(B)$$

☑ (동시에) = (잇달아) = (연속적으로)

✡ 집합과 경우의 수

(1) $n\left(A^C\right) = n(S) - n(A)$ (단, S는 전사건)

(2) $n(A-B) = n(A) - n(A\cap B) = n(A\cup B) - n(B)$

(3) $n\left(A^C\cap B^C\right) = n(S) - n(A\cup B)$

(4) $n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$

$-n(A\cap B) - n(B\cap C) - n(C\cap A) + n(A\cap B\cap C)$

☑ 모든 경우를 빠짐없이, 중복되지 않게 세어야 한다.

⇨ 사전식 배열법 or 수형도(樹型圖)

☑ n(적어도 ~) $=$ n(전체) $-$ n(반대인 경우)

☑ 정수 ⇨ 맨 앞자리(최고자리 숫자) 0이 올 수 없다.

✡ 경우의 수의 활용

(1) $ax+by+cz=k$의 꼴의 부정방정식의 해

⇨ 계수가 큰 항을 기준으로 각각 분류한다.

(2) 양의 약수의 개수

$N = a^p \times b^q \times c^r$ (단, a, b, c는 서로 다른 소수)

① 양의 약수의 개수 ⇨ $(p+1)(q+1)(r+1)$

② 양의 약수의 총합

⇨ $\dfrac{a^{p+1}-1}{a-1} \times \dfrac{b^{q+1}-1}{b-1} \times \dfrac{c^{r+1}-1}{c-1}$

③ $n(a,\ b$의 공약수$) = n(a,\ b$의 최대공약수의 약수$)$

✡ 순열과 조합

	중복 허용 ×	중복 허용 ○
순서 ○	순열 ${}_n\mathrm{P}_{\mathrm{r}}$	중복순열 ${}_n\Pi_r$
순서 ×	조합 ${}_n\mathrm{C}_{\mathrm{r}}$	중복조합 ${}_n\mathrm{H}_{\mathrm{r}}$

✡ 순열(Permutation) : 순서 ○ & 중복 ×

(1) 서로 다른 n개 중에서 서로 다른 r개를 선택하여 일렬로 나열하는 것 ⇨ (기호) ${}_n\mathrm{P}_r$

(2) 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 일렬로 배열하는 순열의 수 : ${}_n\mathrm{P}_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{개}}$

✡ 순열(Permutation) : 순서 ○ & 중복 ×

(3) 계승(factorial) : $n! = {}_n\mathrm{P}_n = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$

① $1! = 1$　② $2! = 2$　③ $3! = 6$

④ $4! = 24$　⑤ $5! = 120$　⑥ $6! = 720$

⑦ $7! = 5040$　⑧ $8! = 40320$　⑨ $9! = 362880$

⑩ $10! = 3628800 = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$

(4) 순열의 공식

$${}_n\mathrm{P}_r = \underbrace{n(n-1)\cdots(n-r+1)}_{r\text{개}}$$

① ${}_n\mathrm{P}_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

② $0! = 1$, ${}_n\mathrm{P}_0 = 1$

✡ 이웃할 때와 이웃하지 않을 때의 순열

⑴ 이웃하게 나열하는 순열의 수

⇨ (이웃하는 것들을 한 묶음으로 보고 나열)

$\times$ (묶음 안에서 나열)

⑵ 2명이 이웃하지 않게 나열하는 순열의 수

⇨ n(전체) $-$ n(2명이 이웃하여 나열)

⑶ 3명 이상이 이웃하지 않게 나열하는 순열의 수

⇨ n(이웃할 수 있는 것을 먼저 나열)

$\times$ (그 양끝과 사이사이에 나머지를 배열)

⑷ 같은 수를 교대로 나열하는 순열의 수

⇨ 각각을 일렬로 배열하여 곱한다.

1 원순열

⑴ 원순열의 뜻

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 순열을 '원순열'이라 한다. 원순열에서는 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.

⑵ 원순열의 수

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

☑ ① 회전하여 합동인 도형의 수 n으로 나눈다.

② 기준 1명을 제외시키고 나머지를 일렬로 배열한다.

☑ 서로 다른 n개를 일렬로 배열하는 순열의 수는 $n!$이고, 이를 원형으로 배열하면 같은 것이 n가지씩 있으므로 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

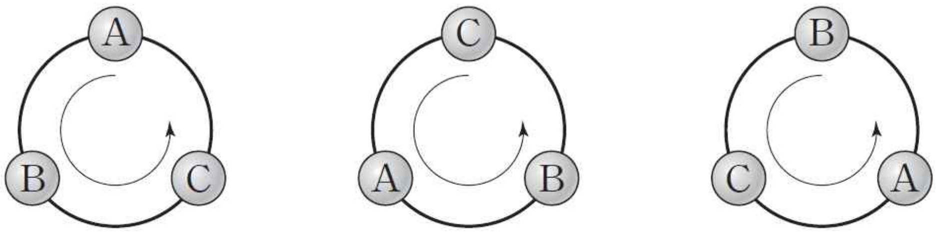
예 3개의 문자 A, B, C를 원형으로 배열하는 경우의 수를 구해 보자. 3개의 문자 A, B, C를 일렬로 나열하면

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

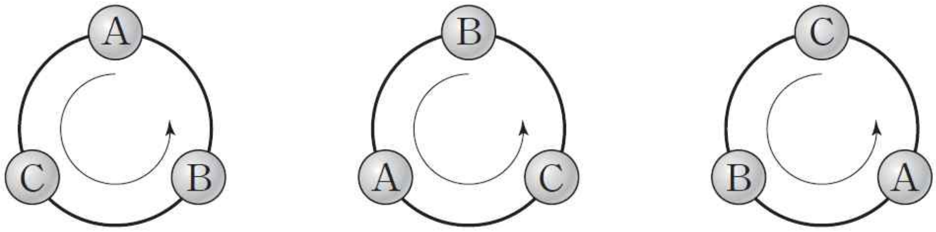
이고, 그 경우의 수는

$3!$

이때 ABC, CAB, BCA를 원형으로 배열한 후 회전하면 서로 일치하므로 같은 경우이다.



또 ACB, BAC, CBA를 원형으로 배열한 후 회전하면 서로 일치하므로 같은 경우이다.



이와 같이 3개의 문자 A, B, C를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!$이지만 이를 원형으로 배열하면 회전하여 같아지는 것이 3가지씩 있으므로 3개의 문자 A, B, C를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$$\frac{3!}{3} = (3-1)! = 2! = 2$$

(3) 서로 다른 n개에서 r $(0 < r \leq n)$개를 택하여 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$_nC_r \times \frac{r!}{r} = \frac{_nP_r}{r}$$

예 6명 중에서 4명을 택하여 택한 4명이 원형의 탁자에 일정한 간격으로 둘러앉는 경우의 수는

$$\frac{_6P_4}{4} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4} = 90$$

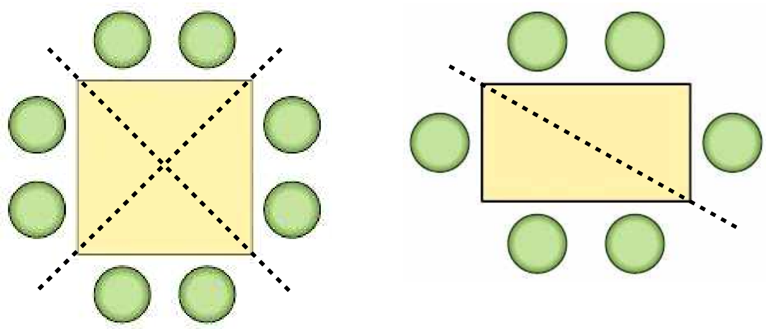
✡ 다각형의 순열

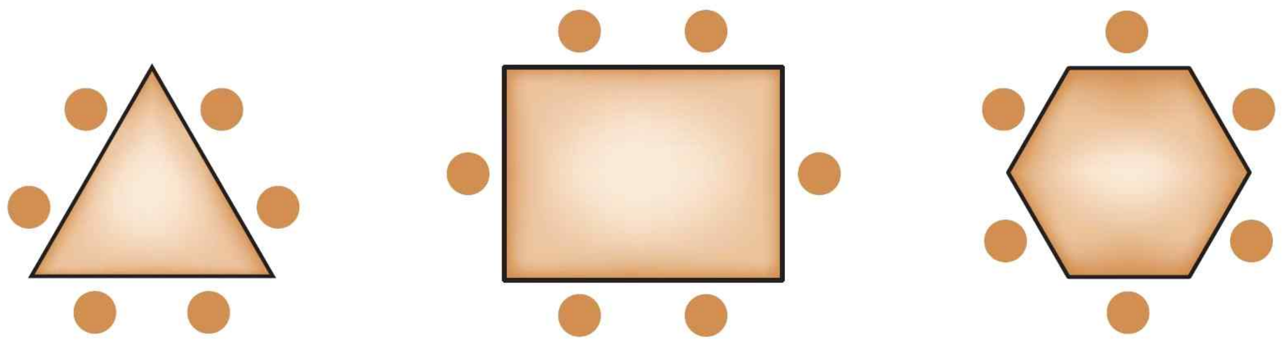
⇨ 회전하여 합동인 도형의 수로 나눈다.

(1) 정사각형 ⇨ $\frac{n!}{4}$

(2) 직사각형 ⇨ $\frac{n!}{2}$

(3) 정삼각형 ⇨ $\frac{n!}{3}$





2 중복순열

(1) 중복순열의 뜻

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택해 일렬로 나열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 '중복순열'이라 하고, 이 중복순열의 수를 기호로

$${}_{n}\Pi_{r}$$

과 같이 나타낸다.

☑ ${}_{n}\Pi_{r}$의 Π는 곱을 뜻하는 Product의 첫 글자 P에 해당하는 그리스 문자로 '파이'라고 읽는다.

(2) 중복순열의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는

$${}_{n}\Pi_{r} = n^{r}$$

☑ 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 택해 일렬로 나열할 때, 첫 번째, 두 번째, 세 번째, $\cdots$, r번째 자리에 올 수 있는 것은 각각 n가지씩이다.

나열 순서	첫 번째	두 번째	세 번째	$\cdots$	r 번째
	↓	↓	↓		↓
경우의 수	n	n	n	$\cdots$	n

따라서 중복순열의 수 ${}_{n}\Pi_{r}$은 곱의 법칙에 의하여

$${}_{n}\Pi_{r} = \underbrace{n \times n \times n \times \cdots \times n}_{r\text{개}} = n^{r}$$

☑ 순열의 수 ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$에서는 $0 \leq r \leq n$이어야 하지만 중복순열의 수 ${}_{n}\Pi_{r}$에서는 중복을 허락하므로 $r > n$이어도 된다.

예 ${}_{2}\Pi_{5} = 2^{5} = 32$

$\boxed{\text{예}}$ 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수를 구해 보자.
첫 번째, 두 번째, 세 번째, 네 번째 자리에 올 수 있는 문자는 각각 a, b, c의 3가지이다.

첫 번째 자리	두 번째 자리	세 번째 자리	네 번째 자리
a, b, c	a, b, c	a, b, c	a, b, c
↓	↓	↓	↓
3가지	3가지	3가지	3가지

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$$

이고, 이것은 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같다. 즉, ${}_3\Pi_4 = 3^4$

✡ 중복순열의 예 ❶

⇨ 중복 가능한 것이 n

(1) 중복을 허용하여 1, 2, 3[중복 가능]을 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리 수 ⇨ ${}_3\Pi_5 = 3^5$

(2) 0과 1[중복 가능]에서 8개를 뽑아 만들 수 있는 이진법의 수 ⇨ ${}_2\Pi_8 = 2^8$

(3) 3명의 후보자[중복 가능]에게 5명의 유권자가 기명투표하는 방법의 수 ⇨ ${}_3\Pi_5 = 3^5$

(4) 3개의 우체통[중복 가능]에 5통의 편지를 넣는 방법의 수

⇨ ${}_3\Pi_5 = 3^5$

✡ 중복순열의 예 ❷

⇨ 중복 가능한 것이 n

(5) 5명의 학생을 3개 반[중복 가능]으로 편성하는 방법의 수

⇨ ${}_3\Pi_5 = 3^5$

(6) 5개의 원소를 $A \subset B \subset U$[중복 가능]에 배정한 두 집합 $(A,\ B)$의 순서쌍의 수 ⇨ ${}_3\Pi_5 = 3^5$

(7) $n(X) = 5,\ n(Y) = 3$[중복 가능]일 때,

집합 X에서 Y로의 함수의 개수 ⇨ ${}_3\Pi_5 = 3^5$

3 같은 것이 있는 순열

(1) 같은 것이 있는 순열의 뜻

같은 것이 포함되어 있는 n개를 일렬로 나열하는 것을 '같은 것이 있는 순열'이라고 한다.

(2) 같은 것이 있는 순열의 수

n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, 이들 모두를 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{n!}{p! \times q! \times \cdots \times r!} \quad (\text{단, } p + q + \cdots + r = n)$$

☑ 5개의 문자 $a,\ a,\ a,\ b,\ b$를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구해 보자. 5개의 문자 $a,\ a,\ a,\ b,\ b$에서 3개의 a를 구별하여 각각 $a_1,\ a_2,\ a_3$이라 하고, 2개의 b를 구별하여 각각

b_1, b_2라 하면 5개의 문자 a_1, a_2, a_3, b_1, b_2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$${}_5\mathrm{P}_5 = 5!$$

그런데 $5!$가지 중에서 다음과 같은 $3! \times 2!$가지의 서로 다른 경우는 번호를 이용한 구별이 없다면 모두 $aaabb$와 같다.

$a_1a_2a_3b_1b_2$	$a_1a_2a_3b_2b_1$
$a_1a_3a_2b_1b_2$	$a_1a_3a_2b_2b_1$
$a_2a_1a_3b_1b_2$	$a_2a_1a_3b_2b_1$
$a_2a_3a_1b_1b_2$	$a_2a_3a_1b_2b_1$
$a_3a_1a_2b_1b_2$	$a_3a_1a_2b_2b_1$
$a_3a_2a_1b_1b_2$	$a_3a_2a_1b_2b_1$

3! (rows), 2! (columns) $\Rightarrow$ $\boxed{aaabb}$

이와 같이 생각하면 5개의 문자 a, a, a, b, b를 일렬로 나열하는 순열의 수는

$$\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

☑ a, a, a, b, b, c, c를 일렬로 배열하는 방법의 수

$\square\ \boxed{a}\ \boxed{a}\ \square\ \boxed{a}\ \square\ \square$ $\quad a\ :\ {}_7\mathrm{C}_3 = \dfrac{7!}{3! \times 4!}$

$\square\ \boxed{a}\ \boxed{a}\ \boxed{b}\ \boxed{a}\ \square\ \boxed{b}$ $\quad b\ :\ {}_4\mathrm{C}_2 = \dfrac{4!}{2! \times 2!}$

$\boxed{c}\ \boxed{a}\ \boxed{a}\ \boxed{b}\ \boxed{a}\ \boxed{c}\ \boxed{b}$ $\quad c\ :\ {}_2\mathrm{C}_2 = \dfrac{2!}{2!}$

$$\therefore\ {}_7\mathrm{C}_3 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_2 = \frac{7!}{3! \times 2! \times 2!} = 7 \times 5 \times 3 \times 2 = 210$$

(3) 최단 거리로 가는 경우의 수

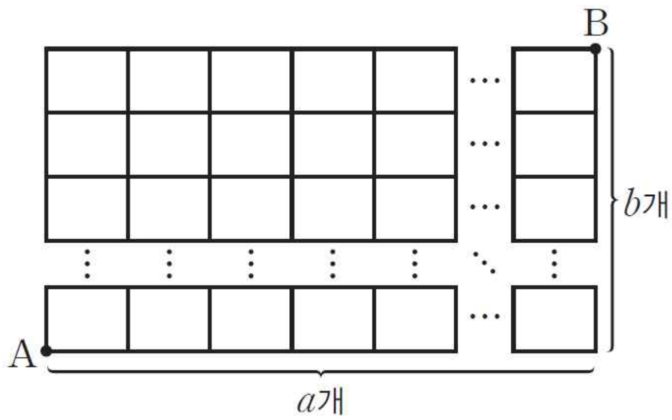
직사각형 모양으로 연결된 도로망에서 도로를 따라 두 지점 사이를 최단 거리로 가는 경우의 수는 가로 방향으로 한 칸 움직이는 이동과 세로 방향으로 한 칸 움직이는 이동을 필요한 횟수만큼 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 같은 것이 있는 순열의 수를 이용할 수 있다.

(3) 서로 다른 n개 중에서 r개의 순서가 일정할 때,

이들 n개를 모두 일렬로 배열하는 순열의 수 : $\dfrac{n!}{r!}$

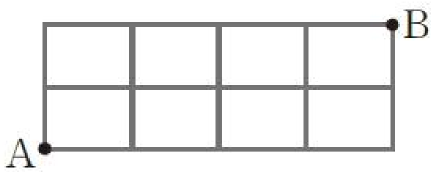
(4) $\begin{array}{l}\text{순서가 일정}\\ \text{크기가 고정}\end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll}\text{일부만} & \Rightarrow \text{같은 문자로 치환}\\ \text{전체} & \Rightarrow \text{조합}\end{array}\right.$

그림과 같이 가로 방향의 칸의 수가 a, 세로 방향의 칸의 수가 b일 때, 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는



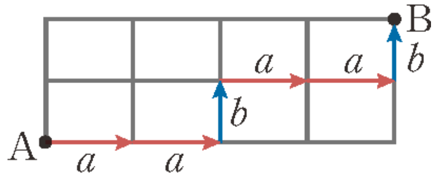
$$\frac{(a+b)!}{a! \times b!}$$

예 오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. A지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구해 보자.



1 Let 오른쪽 한 칸 : a, 위쪽 한 칸 : b

⇒ 4개의 a와 2개의 b를 일렬로 나열



∴ 경우의 수 : $\dfrac{6!}{4!\times 2!}=15$

2 직접 ⇒