Ⅰ_1. 수열의 극한

[12미적01-01] 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고,
이를 판별할 수 있다.
[12미적01-02] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고,
이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.
[12미적01-03] 등비수열의 극한값을 구할 수 있다.

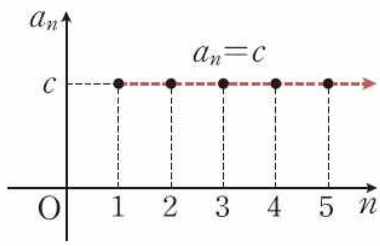
✡ 극한 $\begin{cases} \text{실극한} \Rightarrow \text{도착점} \\ \text{잠재적(가능적) 극한} \Rightarrow \text{지향점(점근선)} \end{cases}$

① 수열의 수렴 ❶

수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값이 일정한 수 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 '수렴한다'고 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha \text{ 또는 } n \to \infty \text{일 때 } a_n \to \alpha$$

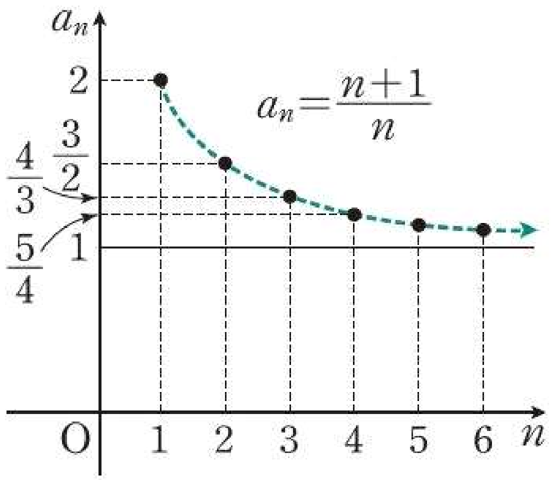
이때 α를 수열 $\{a_n\}$의 '극한값' 또는 '극한'이라고 한다.
특히 수열 $\{a_n\}$에서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = c$ (c는 상수)인 경우에도 수열 $\{a_n\}$은 c에 수렴한다고 하며, $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} c = c$와 같이 나타낸다.

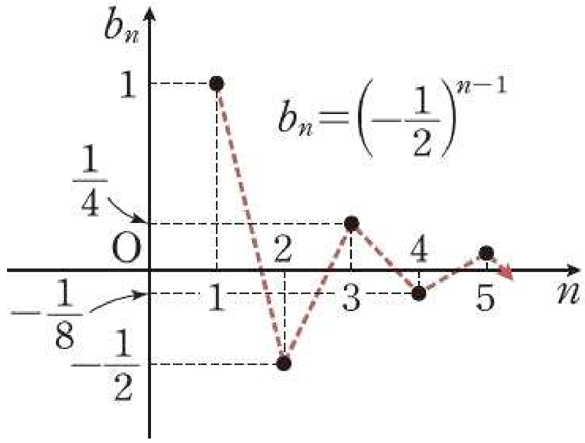


1 수열의 수렴 ❷

☑ $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$은 n의 값이 한없이 커질 때 a_n의 값이 α와 같거나 α에 한없이 가까워진다는 것이다.

예 $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim_{n \to \infty} 2 = 2$





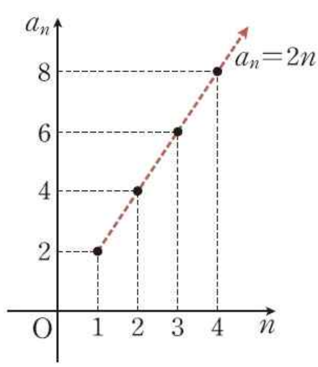
2 수열의 발산 ❶

수열 $\{a_n\}$이 수렴하지 않으면 수열 $\{a_n\}$은 '발산한다'고 하며, 수열 $\{a_n\}$이 발산하는 경우는 다음과 같다.

(1) 수열 $\{a_n\}$이 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 '양의 무한대로 발산한다'고 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty \text{ 또는 } n \to \infty \text{일 때 } a_n \to \infty$$

예 $\lim_{n \to \infty} n = \infty$, $\lim_{n \to \infty} n^2 = \infty$



2 수열의 발산 ❷

(2) 수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 '음의 무한대로 발산한다'고 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty \text{ 또는 } n \to \infty \text{일 때 } a_n \to -\infty$$

예 $\lim_{n \to \infty}(-n) = -\infty$, $\lim_{n \to \infty}(-n^2) = -\infty$

(3) 수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, 수열 $\{a_n\}$이 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으면 수열 $\{a_n\}$은 진동한다고 한다.

예 수열 $\{(-1)^n\}$은 -1, 1이 한없이 반복되므로 진동하는 수열이다.

✡ 수열의 극한에 대한 기초 성질

(1) $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} a_{n \pm 1} = \alpha$

(2) $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} a_{2n} = \lim_{n \to \infty} a_{2n-1} = \alpha$

(3) $\lim_{n \to \infty} a_{2n} \neq \lim_{n \to \infty} a_{2n-1} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n$은 발산

[대우] $\lim_{n \to \infty} a_n$이 수렴 $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_{2n} = \lim_{n \to \infty} a_{2n-1}$

(4) $\lim_{n \to \infty} a_n = \pm\infty \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{k}{a_n} = 0$ (단, k는 상수)

(5) $k > 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^k} = 0$

$\boxed{3}$ 수열의 극한에 대한 기본 성질 ❶

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \to \infty} b_n = \beta$

(α, β는 상수)일 때,

(1) $\lim_{n \to \infty} k a_n = k \lim_{n \to \infty} a_n = k\alpha$ (단, k는 상수)

(2) $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n = \alpha + \beta$

(3) $\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n - \lim_{n \to \infty} b_n = \alpha + \beta$

(4) $\lim_{n \to \infty} a_n b_n = \lim_{n \to \infty} a_n \times \lim_{n \to \infty} b_n = \alpha\beta$

$\boxed{3}$ 수열의 극한에 대한 기본 성질 ❷

(5) $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \to \infty} a_n}{\lim_{n \to \infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$

(단, 모든 자연수 n에 대하여 $b_n \neq 0$, $\beta \neq 0$)

예 (1) $\lim_{n \to \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} 2 + \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$

(2) $\lim_{n \to \infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} 3 - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 3 - 0 = 3$

(3) $\lim_{n \to \infty} \frac{3}{n} = 3 \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 3 \times 0 = 0$

$\boxed{3}$ 수열의 극한에 대한 기본 성질 ❸

(4) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \right) = 0 \times 0 = 0$

(5) $\lim_{n \to \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{\frac{3}{n} - 1} = \frac{\lim_{n \to \infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right)}{\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3}{n} - 1 \right)} = \frac{2+0}{0-1} = -2$

$\boxed{4}$ 수열의 극한값의 계산 ❶

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 일반항 a_n, b_n이 각각 n에 대한 일차 이상의 다항식일 때,

(1) $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$의 값은 다음과 같이 구할 수 있다.

(단, 모든 자연수 n에 대하여 $b_n \neq 0$)

① $(a_n$의 차수$) = (b_n$의 차수$) = p$ (p는 자연수)이면

$\frac{a_n}{b_n}$의 분모와 분자를 n^p으로 각각 나눈 후 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 구한다.

② $(a_n$ 의 차수$) > (b_n$ 의 차수$)$이면

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty \text{ 또는 } \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty$$

③ $(a_n$ 의 차수$) < (b_n$ 의 차수$)$이면 $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

예 $$\lim_{n \to \infty} \frac{5n+2}{3n-1} = \lim_{n \to \infty} \frac{5+\frac{2}{n}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \to \infty}\left(5+\frac{2}{n}\right)}{\lim_{n \to \infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{n \to \infty} 5 + \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n}}{\lim_{n \to \infty} 3 - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}} = \frac{5+0}{3-0} = \frac{5}{3}$$

4 수열의 극한값의 계산 ❷

(2) $\lim_{n \to \infty}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)$의 값은 다음과 같이 구할 수 있다.

(단, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$)

① $(a_n$ 의 차수$) = (b_n$ 의 차수$)$이면

$\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n} = \frac{a_n - b_n}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}}$으로 변형하여 구한다.

② $(a_n$ 의 차수$) \neq (b_n$ 의 차수$)$이면

$\lim_{n \to \infty}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right) = \infty$ 또는

$\lim_{n \to \infty}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right) = -\infty$

4 수열의 극한값의 계산 ❸

예 $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{3}{2}$$

✡ $\frac{\infty}{\infty}$의 꼴 ⇒ 차수 & 밑을 비교

(1) 분수식 ⇒ 분모의 최고차항으로 분모·분자를 나눈다.

① (분모의 차수) $=$ (분자의 차수)

⇔ (극한값) $=$ (최고차항의 계수) $\neq 0$

② (분모의 차수) $>$ (분자의 차수) ⇔ (극한값) $= 0$

③ (분모의 차수) $<$ (분자의 차수)

⇔ (극한값) $= \infty$ 또는 $-\infty$

(2) 무리식 ⇒ 근호 밖의 최고차항으로 나눈다.

(3) $x\to-\infty$ ⇒ $x=-t$ (단, $t>0$)로 치환하여 계산

✡ $\infty - \infty$**의 꼴**

(1) 다항식 $\Rightarrow$ 최고차항으로 묶는다.

(2) 무리식 $\Rightarrow$ 근호가 있는 쪽을 유리화

✡ ∞**에 대한 계산**

(1) $k + \infty = \infty$, $k - \infty = -\infty$, $\dfrac{k}{\infty} = \dfrac{k}{-\infty} = 0$

(2) $k > 0 \Rightarrow$ $k \times \infty = \infty$, $k \times (-\infty) = -\infty$

$$\frac{\infty}{k} = \infty,\ \frac{-\infty}{k} = -\infty$$

(3) ① $a > 1 \Rightarrow a^{\infty} = \infty$, ② $0 < a < 1 \Rightarrow a^{\infty} = 0$

5 수열의 극한의 대소 관계 ❶

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \beta$

(α, β는 상수)일 때,

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면 $\alpha \le \beta$이다.

(2) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$을 만족시키고 $\alpha = \beta$이면 $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = \alpha$이다.

예 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$\dfrac{2n+1}{n+2} \le c_n \le \dfrac{2n+3}{n+1}$을 만족시키면

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n+1}{n+2} = 2$, $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n+3}{n+1} = 2$이므로 $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = 2$

$\boxed{5}$ 수열의 극한의 대소 관계 ❷

☑ (1)에서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < b_n$이지만

$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n$인 경우도 있다. $a_n = \frac{2}{n}$, $b_n = 3$이면

모든 자연수 n에 대하여 $a_n < b_n$이지만

$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} = 0$, $\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \frac{3}{n} = 0$이므로

$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n$이다.

$\boxed{5}$ 수열의 극한의 대소 관계 ❸

(2)에서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < c_n < b_n$인 경우에도

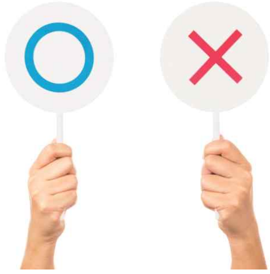
$\alpha = \beta$이면 $\lim_{n \to \infty} c_n = \alpha$이다. $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{3}{n}$, $c_n = \frac{2}{n}$

이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < c_n < b_n$이고

$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0$이므로 $\lim_{n \to \infty} c_n = 0$이다.

$\boxed{6}$ 수열의 극한 ○, × 문제 ❶

① $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha \Leftrightarrow \lim_{m \to \infty} a_m = \alpha$ (∵ 극한값의 유일성)



② $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha \not\Leftarrow\!\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_{2n} = \alpha$

$(\not\Leftarrow)$ [반례] $a_n = (-1)^n$

(대우) $\lim_{n \to \infty} a_{2n}$이 발산 $\Rightarrow$ $\lim_{n \to \infty} a_n$이 발산

③ $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha \not\Leftarrow\!\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_{2n-1} = \alpha$

④ $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha \not\Leftarrow\!\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_{kn} = \alpha$ (단, k는 자연수)

$\boxed{6}$ 수열의 극한 ○, × 문제 ❷

⑤ $\lim_{n \to \infty} a_n$이 수렴 $\not\Leftarrow\!\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_{2n} = \lim_{n \to \infty} a_{2n-1}$

$(\not\Leftarrow)$ $\lim_{n \to \infty} a_{2n} = \lim_{n \to \infty} a_{2n-1} = \alpha$이면 성립 (∵ ∞)

⑥ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 0$

$$\not\Leftarrow\!\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n$$

$(\Rightarrow)$ Let $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \to \infty} b_n = \beta$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta = 0 \quad \therefore \ \alpha = \beta$$

$(\not\Leftarrow)$ [반례] $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = \infty$

$\boxed{6}$ 수열의 극한 ○, × 문제 ❸

⑦ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \;\not\Longleftarrow\!\!\Longrightarrow\; \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$

($\Rightarrow$) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

($\not\Leftarrow$) [반례] $a_n = b_n = n$

⑧ $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0 \;\not\Longleftarrow\!\!\Longrightarrow\; \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$

($\Rightarrow$) $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\{a_n - (a_n - b_n)\} = \alpha$

⑩ $\{a_n + b_n\},\ \{a_n - b_n\}$이 수렴 $\not\Longleftarrow\!\!\Longrightarrow$ $\{b_n\}$이 수렴

($\Rightarrow$) $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\{(a_n + b_n) - (a_n - b_n)\}$

$\boxed{6}$ 수열의 극한 ○, × 문제 ❹

⑪ $\{a_n\},\ \{a_nb_n\}$이 수렴 $\not\longleftrightarrow$ $\{b_n\}$이 수렴

($\not\Rightarrow$) [반례] $a_n = \frac{1}{n},\ b_n = n$

⑫ $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \;\not\Longleftarrow\!\!\Longrightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_nb_n = 0$

($\Rightarrow$) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha \times 0 = 0$

⑬ $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = 0 \;\not\longleftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 또는 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

($\not\Rightarrow$) [반례] $\{a_n\}$: $1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots$

$\{b_n\}$: $0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \cdots$

($\not\Leftarrow$) [반례] $a_n = \frac{1}{n},\ b_n = n^2$

6 수열의 극한 ○, × 문제 ❺

⑭ $\lim_{n \to \infty} a_n b_n = \alpha \not\leftrightarrow \lim_{n \to \infty} a_n$ 또는 $\lim_{n \to \infty} b_n$이 수렴

($\not\rightarrow$) [반례] $a_n = (-1)^n,\ b_n = (-1)^n$

($\not\leftarrow$) [반례] $a_n = \frac{1}{n},\ b_n = n^2$

(대우) $\lim_{n \to \infty} a_n$ & $\lim_{n \to \infty} b_n$ 발산 $\not\leftrightarrow$ $\lim_{n \to \infty} a_n b_n$ 발산

⑮ $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty,\ \lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = \alpha \not\Longleftarrow\!\!\Longrightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$

($\Rightarrow$) $a_n - b_n \overset{\text{def}}{=} c_n \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{c_n}{a_n}\right) = 1$

6 수열의 극한 ○, × 문제 ❻

⑯ $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n \to \infty} b_n = \beta \not\leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n}$이 수렴$(a_n \neq 0)$

($\not\rightarrow$) [반례] $a_n = \frac{1}{n}$ ($\not\leftarrow$) [반례] $a_n = n,\ b_n = 1$

⑰ $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha \neq 0,\ \lim_{n \to \infty} b_n = \beta \not\Longleftarrow\!\!\Longrightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n}$이 수렴

($\Rightarrow$) $\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{\beta}{\alpha}$ (단, $a_n \neq 0$)

$\boxed{6}$ 수열의 극한 ○, × 문제 ❼

⑱ $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$

$\not\leftarrow\!\!\not\rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = 1$ $\quad(\not\rightarrow)$ [반례] $a_n = \frac{2}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$

⑲ $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = 1$

$\not\Leftarrow\!\!\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ $\quad(\Rightarrow)$ $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = 1 = \frac{\beta}{\alpha}$

$\boxed{6}$ 수열의 극한 ○, × 문제 ❽

⑳ $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta \neq 0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = 1$

$\not\Leftarrow\!\!\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$ $\quad(\Rightarrow)$ $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = 1 = \frac{\beta}{\alpha}$

㉑ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta \neq 0$ $\not\leftarrow\!\!\not\rightarrow$ $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \infty$

$(\not\rightarrow)$ [반례] $\beta < 0$

㉒ $a_n < b_n < c_n$, $\lim_{n\to\infty}(c_n - a_n) = 0$ $\not\leftarrow\!\!\not\rightarrow$ $\{b_n\}$이 수렴

$(\not\rightarrow)$ [반례] $a_n = n - \frac{1}{n}$, $b_n = n$, $c_n = n + \frac{1}{n}$

$\boxed{6}$ 수열의 극한 ○, × 문제 ❾

㉓ $a_n < b_n$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \not\Leftarrow\!\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

(⇒) $a_n < b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$

㉔ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴, $a_n < b_n \quad \Leftarrow\!\not\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$

(대우) $\lim_{n\to\infty} a_n \ge \lim_{n\to\infty} b_n \quad \Leftarrow\!\not\Rightarrow \quad a_n \ge b_n$

($\not\rightarrow$) [반례] $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, $b_n = 1 + \dfrac{1}{n}$

$\boxed{7}$ 등비수열의 극한 ❶

등비수열 $\{r^n\}$의 수렴과 발산은 공비 r의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

(1) $r > 1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ (발산)

(2) $r = 1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = 1$ (수렴)

(3) $-1 < r < 1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ (수렴)

(4) $r \le -1$일 때, 수열 $\{r^n\}$은 진동한다. (발산)

☑ ① 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴 $\Rightarrow -1 < r \le 1$

② 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$이 수렴 $\Rightarrow a = 0$ 또는 $-1 < r \le 1$

$\boxed{7}$ 등비수열의 극한 ❷

☑(1) $r > 1$일 때, $r = 1 + h\ (h > 0)$으로 놓으면

모든 자연수 n에 대하여 $r^n = (1+h)^n \geq 1 + nh$

이때 $\lim_{n \to \infty}(1+nh) = \infty$이므로 $\lim_{n \to \infty} r^n = \infty$

(2) $r = 1$일 때, 수열 $\{r^n\}$의 모든 항이 1이므로 $\lim_{n \to \infty} r^n = 1$

(3) $-1 < r < 1$일 때,

㉠ $r = 0$이면 수열 $\{r^n\}$의 모든 항이 0이므로 $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$

㉡ $r \neq 0$이면 $\dfrac{1}{|r|} > 1$이므로 (1)에 의하여

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{|r^n|} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{|r|}\right)^n = \infty$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} |r^n| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\dfrac{1}{|r^n|}} = 0$$ 이므로 $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$

(4) $r \leq -1$일 때,

㉠ $r = -1$이면 수열 $\{r^n\}$은 $-1, 1, -1, 1, \cdots$ 이므로 진동한다.

㉡ $r < -1$이면 $|r| > 1$이므로 (1)에 의하여

$\lim_{n \to \infty} |r^n| = \lim_{n \to \infty} (|r|)^n = \infty$이고, n의 값이 한없이 커질 때 r^n의 값의 부호가 교대로 바뀌므로

수열 $\{r^n\}$은 진동한다.

☑ ① $h>0$일 때, 모든 자연수 n에 대하여

$(1+h)^n \geq 1+nh$임은 수학적 귀납법으로 보일 수 있다.

② 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n}=\infty$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$이다.

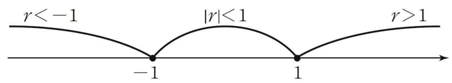
③ $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$이다.

④ 등비수열 $\{r^n\}$이 수렴 $\Leftrightarrow -1<r\leq 1$

⑤ r^n을 포함한 수열의 극한의 r의 값의 범위를

$|r|>1,\ |r|<1,\ r=1,\ r=-1$

인 경우로 나누어 구하면 편리하다.



7 등비수열의 극한 ❸

예 ① 수열 $\{2^n\}$은 공비가 2인 등비수열이고 $2>1$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}2^n=\infty$

② $\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$은 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이고 $-1<\dfrac{1}{2}<1$

이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$

③ 수열 $\{(-2)^n\}$은 공비가 -2인 등비수열이고

$-2<-1$이므로 수열 $\{(-2)^n\}$은 진동한다.

$\boxed{8}$ 등비수열의 극한 ○, × 문제 ❶

① 등비수열 $\{a_n\}$이 수렴 $\not\Leftarrow\Rightarrow$ $\{{a_n}^2\}$이 수렴

(대우) 등비수열 $\{{a_n}^2\}$이 발산 $\not\Leftarrow\Rightarrow$ $\{a_n\}$이 발산

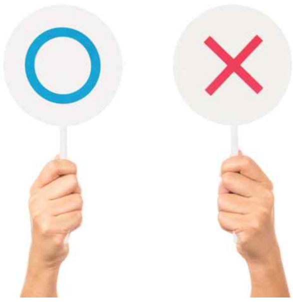
$(\Rightarrow)$ $-1 < r \le 1 \not\Leftarrow\Rightarrow 0 \le r^2 \le 1$

$(\not\Leftarrow)$ [반례] $a_n = (-1)^n$

② 수열 $\{r^n\}$이 수렴 $\Leftarrow\not\Rightarrow$ $\{r^n + (-r)^n\}$이 수렴

$(\not\Rightarrow)$ [반례] $r = 1$ $(\because\ -1 < r \le 1 \Leftrightarrow -1 \le -r < 1)$

$(\Leftarrow)$ $-1 < r < 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} r^n = 0$



$\boxed{8}$ 등비수열의 극한 ○, × 문제 ❷

③ 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴 $\not\Leftarrow\Rightarrow$ $\{a_n b_n\}$이 수렴

(대우) 등비수열 $\{a_n b_n\}$이 발산 $\not\Leftarrow\Rightarrow$ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 발산

$(\Rightarrow)$ Let $a_n = a{r_1}^{n-1}$, $b_n = a{r_2}^{n-1}$

$-1 < r_1 \le 1,\ -1 < r_2 \le 1 \Rightarrow -1 < r_1 r_2 \le 1$

$(\not\Leftarrow)$ [반례] $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $b_n = 2^n$