

수능특강 수학영역 수학 I

# 정답과 풀이

## 한눈에 보는 정답

▶▶ 수능특강 수학영역 수학 I

### 01 지수와 로그

유제

본문 5~13쪽

- 1 ②    2 ②    3 ②    4 ③    5 ②  
6 ②    7 ①    8 ②    9 4    10 ②

#### Level 1 기초 연습

본문 14쪽

- 1 ①    2 ④    3 ④    4 ④    5 ④

#### Level 2 기본 연습

본문 15~16쪽

- 1 ②    2 ④    3 ②    4 ①    5 ⑤  
6 8    7 ③    8 ②

#### Level 3 실력 완성

본문 17~18쪽

- 1 ③    2 ②    3 2    4 512    5 ⑤  
6 ③

### 02 지수함수와 로그함수

유제

본문 21~29쪽

- 1 ②    2 ⑤    3 ④    4 ⑤    5 6  
6 ④    7 ④    8 ③    9 ④    10 16

#### Level 1 기초 연습

본문 30쪽

- 1 ③    2 ③    3 ②    4 ②    5 ④

#### Level 2 기본 연습

본문 31~32쪽

- 1 ①    2 ④    3 5    4 ②    5 8  
6 ②    7 ④    8 ④

#### Level 3 실력 완성

본문 33~34쪽

- 1 ⑤    2 ①    3 ②    4 ②    5 ⑤  
6 ④

### 03 삼각함수

유제

본문 37~45쪽

- 1 ④    2 ③    3 ②    4 ①    5 ①  
6 ①    7 ④    8 ①    9 ②    10 ⑤

#### Level 1 기초 연습

본문 46~47쪽

- 1 ②    2 ④    3 ①    4 ④    5 ③  
6 ⑤    7 ④    8 ⑤

#### Level 2 기본 연습

본문 48~50쪽

- 1 ③    2 ⑤    3 ①    4 ①    5 ④  
6 9    7 31    8 30    9 ③    10 3  
11 ②    12 ①

#### Level 3 실력 완성

본문 51쪽

- 1 3    2 ⑤    3 ③

## 04 사인법칙과 코사인법칙

유제

본문 55~61쪽

- 1 ④    2 ①    3 7    4 45    5 8  
6 ②    7 ③    8 8

### Level 1 기초 연습

본문 62~63쪽

- 1 ①    2 ②    3 ②    4 ①    5 ③  
6 7    7 5    8 108

### Level 2 기본 연습

본문 64~66쪽

- 1 ②    2 ②    3 20    4 ③    5 550  
6 ②    7 ③    8 ④    9 ②

### Level 3 실력 완성

본문 67쪽

- 1 ④    2 ②    3 ③

## 05 등차수열과 등비수열

유제

본문 71~77쪽

- 1 ③    2 ⑤    3 ③    4 ④    5 ④  
6 100    7 ③    8 ⑤

### Level 1 기초 연습

본문 78~79쪽

- 1 ②    2 5    3 6    4 ④    5 ③  
6 ②    7 64    8 ①

### Level 2 기본 연습

본문 80~81쪽

- 1 ①    2 ②    3 ②    4 ②    5 ③  
6 8    7 75    8 ③

### Level 3 실력 완성

본문 82쪽

- 1 ②    2 21    3 ②

## 06 수열의 합과 수학적 귀납법

유제

본문 85~95쪽

- 1 ①    2 ③    3 ⑤    4 15    5 18  
6 ⑤    7 16    8 ②    9 ①    10 10  
11 ③

### Level 1 기초 연습

본문 96~97쪽

- 1 ②    2 ⑤    3 ③    4 890    5 22  
6 ①    7 ③    8 ③

### Level 2 기본 연습

본문 98~99쪽

- 1 ④    2 ②    3 ②    4 22    5 ⑤  
6 81    7 ②    8 8

### Level 3 실력 완성

본문 100~101쪽

- 1 825    2 ⑤    3 6    4 ④    5 56

## 정답과 풀이

### 01 지수와 로그

유제

본문 5~13쪽

1 ②	2 ②	3 ②	4 ③	5 ②
6 ②	7 ①	8 ②	9 4	10 ②

1  $\sqrt[3]{-27}$ 은 방정식  $x^3 = -27$ 의 실근이다.

한편, 이 방정식의 실근은 1개이므로

$$x = -3$$

$$\text{즉, } \sqrt[3]{-27} = -3$$

또  $\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{2^4}$ 이므로 이 수는 방정식  $x^4 = 2^4$ 의 실근 중 양수이다.

한편, 방정식  $x^4 = 2^4$ 의 실근은  $-2, 2$ 이므로

$$x = 2$$

$$\text{즉, } \sqrt[4]{(-2)^4} = 2$$

$$\text{따라서 } \sqrt[3]{-27} + \sqrt[4]{(-2)^4} = (-3) + 2 = -1$$

답 ②

2 24의 세제곱근 중 실수인 것이  $a$ 이므로

$$a = \sqrt[3]{24}$$

또 3의 여섯제곱근 중 실수인 것은  $\sqrt[6]{3}, -\sqrt[6]{3}$ 이므로 모든 실수인 근의 곱은

$$b = \sqrt[6]{3} \times (-\sqrt[6]{3})$$

$$= -\sqrt[6]{3^2}$$

$$= -\sqrt[3]{3}$$

따라서

$$\frac{a \times b}{\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{24} \times (-\sqrt[3]{3})}{\sqrt[3]{9}}$$

$$= -\sqrt[3]{\frac{24 \times 3}{9}}$$

$$= -\sqrt[3]{2^3}$$

$$= -2$$

답 ②

3  $\sqrt[3]{2 \times \sqrt{2}} \times 4^{-\frac{3}{4}}$

$$= (2 \times 2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} \times (2^2)^{-\frac{3}{4}}$$

$$= (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} \times (2^2)^{-\frac{3}{4}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2} + (-\frac{3}{2})}$$

$$= 2^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

답 ②

4  $\left(\frac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}} \times \frac{2^{\sqrt{3}}}{2}$

$$= \left(\frac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1}$$

$$= (2^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}$$

$$= 2^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$= 2^2$$

$$= 4$$

답 ③

다른 풀이

$$\left(\frac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}} \times \frac{2^{\sqrt{3}}}{2}$$

$$= \frac{2^3}{2^{\sqrt{3}}} \times \frac{2^{\sqrt{3}}}{2}$$

$$= \frac{2^3}{2}$$

$$= 2^2$$

$$= 4$$

5  $2^y = \sqrt{6}$ 에서

$$y = \log_2 \sqrt{6}$$

이고  $x = \log_2 3$ 이므로

$$x - 2y = \log_2 3 - 2 \log_2 \sqrt{6}$$

$$= \log_2 3 - \log_2 (\sqrt{6})^2$$

$$= \log_2 3 - \log_2 6$$

$$= \log_2 \frac{3}{6}$$

$$= \log_2 2^{-1}$$

$$= -1$$

답 ②

다른 풀이

$$x = \log_2 3 \text{에서}$$

$$2^x = 3$$

$$\text{이고 } 2^y = \sqrt{6} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} 2^x \div (2^y)^2 &= 3 \div (\sqrt{6})^2 \\ &= \frac{1}{2} \\ &= 2^{-1} \end{aligned}$$

따라서  $x - 2y = -1$

$$\begin{aligned} 6 \quad & (\log_2 \sqrt{2}) \times (\log_2 6) - \log_2 \sqrt{3} \\ &= (\log_2 2^{\frac{1}{2}}) \times \{\log_2 (2 \times 3)\} - \log_2 3^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2} \log_2 2\right) \times (\log_2 2 + \log_2 3) - \frac{1}{2} \log_2 3 \\ &= \frac{1}{2} \times (1 + \log_2 3) - \frac{1}{2} \log_2 3 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned} 7 \quad & \log_4 \frac{1}{3} \times \log_{\sqrt{3}} 8 \\ &= \log_{2^2} 3^{-1} \times \log_{3^{\frac{1}{2}}} 2^3 \\ &= \left(-\frac{1}{2} \log_2 3\right) \times \left(\frac{3}{\frac{1}{2}} \log_3 2\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2} \log_2 3\right) \times \left(6 \times \frac{\log_2 2}{\log_2 3}\right) \\ &= -3 \end{aligned}$$

답 ①

8 밑을 7로 나타내면

$$\begin{aligned} a &= \frac{\log_7 3}{\log_2 3} \\ &= \frac{\log_7 3}{\frac{\log_7 3}{\log_7 2}} \\ &= \log_7 2 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} 7^a &= 7^{\log_7 2} \\ &= 2^{\log_7 7} \\ &= 2^1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$7^a = 7^{\frac{\log_2 3}{\log_2 3}}$$

$$\begin{aligned} &= (7^{\log_2 3})^{\frac{1}{\log_2 3}} \\ &= (3^{\log_2 7})^{\frac{1}{\log_2 3}} \\ &= 3^{\frac{1}{\log_2 3}} \\ &= 3^{\log_3 2} \\ &= 2^{\log_3 3} \\ &= 2^1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 \quad & \log A = 3.6, \log B = 1.0020 \text{이고 } \log 2 = 0.3010 \text{이므로} \\ & \log \sqrt{AB} = \frac{1}{2} \log AB \\ &= \frac{1}{2} (\log A + \log B) \\ &= \frac{1}{2} \times (3.6 + 1.0020) \\ &= \frac{1}{2} \times 4.6020 \\ &= 2.3010 \\ &= 2 + 0.3010 \\ &= \log 10^2 + \log 2 \\ &= \log (2 \times 10^2) \end{aligned}$$

따라서  $\sqrt{AB} = 2 \times 10^2$ 이므로  $a = 2, n = 2$ 에서  
 $a + n = 2 + 2 = 4$

답 4

다른 풀이

$$\begin{aligned} \sqrt{AB} &= a \times 10^n \text{의 양변에 상용로그를 취하면} \\ \log \sqrt{AB} &= \log (a \times 10^n) \\ \frac{1}{2} (\log A + \log B) &= \log a + \log 10^n \\ \frac{1}{2} \times 4.6020 &= \log a + n \log 10 \\ 2 + 0.3010 &= \log a + n \\ n - 2 &= 0.3010 - \log a \end{aligned}$$

이때 좌변은 정수이고,  $0 \leq \log a < 1$ 이므로  
 $-1 < 0.3010 - \log a < 1$ 인 사실로부터  
 $\log a = 0.3010$ 에서  $a = 2, n = 2$ 를 얻는다.  
 따라서  $a + n = 4$

$$\begin{aligned} 10 \quad & \log (2^{\log_5 4}) \\ &= \log_5 4 \times \log 2 \\ &= \frac{\log 4}{\log 5} \times \log 2 \end{aligned}$$

## 정답과 풀이

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\log 2^2}{\log \frac{10}{2}} \times \log 2 \\
 &= \frac{2 \log 2}{\log 10 - \log 2} \times \log 2 \\
 &= \frac{2a^2}{1-a}
 \end{aligned}$$

답 ②

### Level 1 기초 연습

본문 14쪽

1 ①      2 ④      3 ④      4 ④      5 ④

1  $2^{-1} \times 3^0 \div \frac{1}{4^{-1}}$

$$\begin{aligned}
 &= 2^{-1} \times 1 \div (4^{-1})^{-1} \\
 &= 2^{-1} \div 4^1 \\
 &= 2^{-1} \div 2^2 \\
 &= 2^{(-1)-2} \\
 &= 2^{-3} \\
 &= \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

답 ①

2  $\sqrt[3]{(-2)^{-2}} \times 2^{\frac{5}{3}}$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt[3]{\frac{1}{(-2)^2}} \times 2^{\frac{5}{3}} \\
 &= \sqrt[3]{\frac{1}{2^2}} \times 2^{\frac{5}{3}} \\
 &= \sqrt[3]{2^{-2}} \times 2^{\frac{5}{3}} \\
 &= 2^{-\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{5}{3}} \\
 &= 2^{(-\frac{2}{3})+\frac{5}{3}} \\
 &= 2^1 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

답 ④

3  $\sqrt{8}=2^{\frac{3}{2}}$ 의 세제곱근은 방정식  $x^3=2^{\frac{3}{2}}$ 의 근이다.  
이 방정식을 풀면

$$\begin{aligned}
 x^3 - (2^{\frac{1}{2}})^3 &= 0 \\
 (x - 2^{\frac{1}{2}}) \{x^2 + 2^{\frac{1}{2}}x + (2^{\frac{1}{2}})^2\} &= 0 \\
 x - \sqrt{2} &= 0 \text{ 또는 } x^2 + \sqrt{2}x + 2 = 0 \\
 \text{이때 방정식 } x^2 + \sqrt{2}x + 2 &= 0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}
 \end{aligned}$$

$$D = (\sqrt{2})^2 - 4 \times 2 < 0$$

따라서 두 허수는 이차방정식  $x^2 + \sqrt{2}x + 2 = 0$ 의 근이므로 모든 허근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 2이다.

답 ④

4  $\log_2 7 - \log_2 \frac{7}{8}$

$$\begin{aligned}
 &= \log_2 \left( 7 \div \frac{7}{8} \right) \\
 &= \log_2 \left( 7 \times \frac{8}{7} \right) \\
 &= \log_2 2^3 \\
 &= 3 \log_2 2 \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

답 ④

5  $\log_{\sqrt{2}} 12 - \frac{1}{\log_9 2}$

$$\begin{aligned}
 &= \log_{2^{\frac{1}{2}}} 12 - \log_2 9 \\
 &= \frac{1}{2} \log_2 12 - \log_2 3^2 \\
 &= 2 \log_2 12 - 2 \log_2 3 \\
 &= 2 \log_2 \frac{12}{3} \\
 &= 2 \log_2 2^2 \\
 &= 4 \log_2 2 \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

답 ④

### Level 2 기본 연습

본문 15~16쪽

1 ②      2 ④      3 ②      4 ①      5 ⑤  
6 8      7 ③      8 ②

1  $a^{-1} \times (-b)^{-1} = 2$ 에서

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{a} \times \frac{1}{-b} &= 2 \\
 ab &= -\frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉠ \\
 \text{또 } a^{-1} + b^{-1} &= 3 \text{에서} \\
 \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= 3 \\
 \frac{a+b}{ab} &= 3
 \end{aligned}$$

㉠을 대입하면

$$a+b=-\frac{3}{2}$$

따라서

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (a+b)^2 - 2ab \\ &= \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{13}{4} \end{aligned}$$

답 ②

2  $\sqrt[3]{-8}$ 은 방정식  $x^3=-8$ 의 근 중 실수인 것이므로

$$\sqrt[3]{-8}=-2$$

그러므로 집합  $B$ 는

$$B=\{-2\}$$

이때  $B \subset A$ 이고 집합  $A$ 의 원소는 방정식  $x^4=a$ 의 근이므로

$$(-2)^4=a$$

$$a=16$$

방정식  $x^4=16$ 을 풀면

$$(x^2-4)(x^2+4)=0$$

$$x=2 \text{ 또는 } x=-2 \text{ 또는 } x=2i \text{ 또는 } x=-2i$$

따라서  $A-B=\{2, 2i, -2i\}$ 이므로 집합  $A-B$ 의 모든 원소의 곱은

$$2 \times 2i \times (-2i) = -8i^2 = 8$$

답 ④

3  $\sqrt[3]{a+1}$ 은 방정식  $x^3=a+1$ 의 실근이므로

$$(\sqrt[3]{a+1})^3=a+1$$

또

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[4]{a^6}}{\sqrt[4]{|a|} \times \sqrt[4]{|a|}} &= \frac{\sqrt[4]{|a|^6}}{\sqrt[4]{|a|} \times \sqrt[4]{|a|}} \\ &= \frac{|a|^{\frac{3}{2}}}{|a|^{\frac{1}{4}} \times |a|^{\frac{1}{4}}} \\ &= |a|^{\frac{3}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} \\ &= |a| \end{aligned}$$

$$\text{그러므로 } \frac{\sqrt[4]{a^6}}{\sqrt[4]{|a|} \times \sqrt[4]{|a|}} \times (\sqrt[3]{a+1})^3 = a-3 \text{에서}$$

$$|a| \times (a+1) = a-3$$

(i)  $a > 0$ 일 때

$$a^2+a=a-3$$

$$a^2=-3$$

이 식을 만족시키는 실수  $a$ 는 존재하지 않는다.

(ii)  $a < 0$ 일 때

$$-a^2-a=a-3$$

$$a^2+2a-3=0$$

$$(a-1)(a+3)=0$$

이때  $a < 0$ 이므로

$$a=-3$$

(i), (ii)에서 구하는  $a$ 의 값은  $-3$ 이다.

답 ②

4

$$\begin{aligned} \frac{15\sqrt[5]{8} \times \sqrt[3]{9^{-1}}}{\sqrt[6]{3^{-1}}} &= \frac{2^{\frac{3}{5}} \times 3^{-\frac{2}{3}}}{3^{-\frac{1}{6}}} \\ &= 2^{\frac{3}{5}} \times 3^{-\frac{2}{3} - (-\frac{1}{6})} \\ &= 2^{\frac{3}{5}} \times 3^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

이 수가 어떤 유리수의  $n$ 제곱근이 되려면  $\left(2^{\frac{1}{5}} \times 3^{-\frac{1}{2}}\right)^n$ 이 유리수이어야 한다.

$\left(2^{\frac{1}{5}} \times 3^{-\frac{1}{2}}\right)^n = \frac{q}{p}$  ( $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수)라 하면

$$\frac{2^{\frac{n}{5}}}{3^{\frac{n}{2}}} = \frac{q}{p}$$

$$\frac{2^{2n}}{3^{5n}} = \frac{q^{10}}{p^{10}}$$

$p^{10}=3^{5n}r$ ,  $q^{10}=2^{2n}r$  ( $r$ 는 자연수)에서  $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수이므로  $r=1$ 이다.

즉,  $p=3^k$ ,  $q=2^l$  ( $k, l$ 은 자연수)에서

$$3^{10k}=3^{5n}, 2^{10l}=2^{2n} \text{이므로 } n=2k, n=5l$$

그러므로  $n$ 은 2의 배수이면서 5의 배수, 즉 10의 배수이고,

역으로  $n$ 이 10의 배수이면  $\left(2^{\frac{1}{5}} \times 3^{-\frac{1}{2}}\right)^n$ 은 유리수가 된다.

따라서 구하는  $n$ 은 10, 20, ..., 100이고 그 개수는 10이다.

답 ①

5

$\log_2 a + \log_2 b = 1$ 에서

$$\log_2 ab = 1$$

$$ab=2$$

또  $\log_2 (a+b) = \frac{5}{2}$ 에서

$$a+b=2^{\frac{5}{2}}$$

따라서

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (a+b)^2 - 2ab \\ &= (2^{\frac{5}{2}})^2 - 2 \times 2 \\ &= 2^5 - 4 \\ &= 32 - 4 \\ &= 28 \end{aligned}$$

답 ⑤

## 정답과 풀이

- 6  $\log_a bc = 3$ 에서  
 $\log_a b + \log_a c = 3$   
 이때  $\log_a b - \log_a c = 1$ 이므로 두 식을 연립하여 풀면  
 $\log_a b = 2, \log_a c = 1$   
 즉,  $b = a^2, c = a$   
 이 식을  $\log_a \frac{b+c}{3} = 1$ 에 대입하면  
 $\log_a \frac{a^2+a}{3} = 1$   
 $\frac{a^2+a}{3} = a$   
 $a^2 - 2a = 0$   
 $a(a-2) = 0$   
 $a > 0$ 이므로  
 $a = 2$   
 따라서  $a = 2, b = 2^2 = 4, c = 2$ 이므로  
 $a + b + c = 2 + 4 + 2 = 8$

답 8

- 7  $\log_a 2 \times \log_2 (2a+3) = \log_2 a \times \log_a 4$ 에서  
 $\log_a 2 \times \frac{\log_a (2a+3)}{\log_a 2} = \frac{1}{\log_a 2} \times \log_a 2^2$   
 $\log_a (2a+3) = 2$   
 $2a+3 = a^2$   
 $a^2 - 2a - 3 = 0$   
 $(a+1)(a-3) = 0$   
 이때  $a > 0$ 이고  $a \neq 1$ 이므로  
 $a = 3$

답 ③

- 8  $b^{\log_5 a} = 4$ 에서  
 $a^{\log_5 b} = 4$   
 이때  $p = \log_2 a$ 에서  $a = 2^p$ 이므로  
 $(2^p)^{\log_5 b} = 4$   
 또  $b = 3^q$ 에서  $q = \log_3 b$ 이므로  
 $(2^p)^q = 4$   
 $2^{pq} = 2^2$   
 따라서  $pq = 2$

### 다른 풀이

$b^{\log_5 a} = 4$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면  
 $\log_3 b^{\log_5 a} = \log_3 4$   
 $\log_3 a \times \log_3 b = \log_3 4$

답 ②

$\log_3 a \times q = \log_3 4$   
 이때 밑을 2로 바꾸면  
 $\frac{\log_2 a}{\log_2 3} \times q = \frac{\log_2 2^2}{\log_2 3}$   
 한편,  $\log_2 a = p$ 이므로  
 $pq = 2 \log_2 2 = 2$

### Level 3 실력 완성

본문 17~18쪽

- 1 ③      2 ②      3 2      4 512      5 ⑤  
 6 ③

- 1 조건 (가)에서  $\sqrt[n]{a} < 0$ 이므로  $n$ 은 홀수이고  $a$ 는 음수이다.  
 한편,  $n$ 이 홀수이므로 조건 (나)에서  
 $\sqrt[n]{(-1)^n \times \sqrt[n+1]{(n+a)^{n+1}}} = -|n+a| = -3$   
 즉,  $|n+a| = 3$   
 (i)  $n+a = 3$ 일 때  
 $n$ 은 3, 5, 7이고  $a < 0$ 이므로 구하는 순서쌍  $(n, a)$ 는  
 $(5, -2), (7, -4)$   
 (ii)  $n+a = -3$ 일 때  
 $n$ 은 3, 5, 7이고  $a < 0$ 이므로 구하는 순서쌍  $(n, a)$ 는  
 $(3, -6), (5, -8), (7, -10)$   
 (i), (ii)에서 구하는 모든 순서쌍  $(n, a)$ 의 개수는  
 $2+3=5$

답 ③

- 2 함수  $y = x^3$ 의 그래프와 직선  $y = \sqrt{2}$ 가 만나는 점의  $x$ 좌표  
 는 방정식  $x^3 = \sqrt{2}$ 의 실근이다.  
 $x = \sqrt[3]{\sqrt{2}} = (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}}$   
 그러므로  $A(2^{\frac{1}{6}}, 2^{\frac{1}{2}})$   
 한편, 선분 OA를 지름으로 하는 원이  $x$ 축과 만나는 점이  
 H이므로  
 $\angle OHA = 90^\circ$   
 그러므로  $H(2^{\frac{1}{6}}, 0)$   
 따라서 삼각형 AOH의 넓이는  
 $\frac{1}{2} \times 2^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{(-1) + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{3}}$

답 ②



3  $\overline{AB} = \sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}}, \overline{BC} = \sqrt[4]{12} = (2^2 \times 3)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}},$

$\angle ABC = 90^\circ$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{CA} &= \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} \\ &= \sqrt{(3^{\frac{1}{4}})^2 + (2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}})^2} \\ &= \sqrt{3^{\frac{1}{2}} + 2 \times 3^{\frac{1}{2}}} \\ &= \sqrt{3 \times 3^{\frac{1}{2}}} \\ &= (3^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}} \\ &= 3^{\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

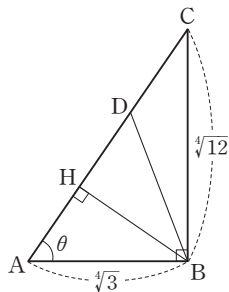
$\angle CAB = \theta$ 라 하면

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} \\ &= \frac{3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{3}{4}}} \\ &= 3^{\frac{1}{4} - \frac{3}{4}} \\ &= 3^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

또

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} \\ &= \frac{2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{3}{4}}} \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4} - \frac{3}{4}} \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

한편, 삼각형 ABD가  $\overline{AB} = \overline{BD}$ 인 이등변삼각형이므로 점 B에서 선분 DA에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 DA의 중점이다.



그러므로

$$\begin{aligned}\overline{AH} &= \overline{AB} \cos \theta \\ &= 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}} \\ &= 3^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} \\ &= 3^{-\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

또

$$\begin{aligned}\overline{BH} &= \overline{AB} \sin \theta \\ &= 3^{\frac{1}{4}} \times (2^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}}) \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABD의 넓이 S는

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \times \overline{DA} \times \overline{BH} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\overline{AH} \times \overline{BH} \\ &= \overline{AH} \times \overline{BH} \\ &= 3^{-\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{4}} \\ &= 3^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

이므로

$$3 \times S^2 = 3 \times \frac{2}{3} = 2$$

답 2

4  $\log_4 M + \log_4 (2 \log_2 M) = \log_4 \{M \times (2 \log_2 M)\}$

의 값이 자연수가 되어야 하므로 이 자연수를  $n$ 이라 하면

$$\log_4 \{M \times (2 \log_2 M)\} = n$$

$$2M \times \log_2 M = 4^n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때  $M$ 이 2 이상의 자연수이므로  $\log_2 M$ 은 유리수이어야

한다. 즉,  $\log_2 M = \frac{q}{p}$  ( $p$ 와  $q$ 는 서로소인 자연수)

로그의 정의에 의해

$M = 2^{\frac{q}{p}}$ 이고 이 값은 2 이상의 자연수이어야 하므로  $p=1$ , 즉  $M = 2^q$ 이다.

그러므로  $\textcircled{1}$ 에서

$$2^{q+1} \times q = 4^n \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때  $q = 2^l$  ( $l$ 은 0 이상의 정수) 꼴이어야 하므로  $l$ 의 값에 0 이상의 정수를 차례로 대입하면  $\textcircled{2}$ 은

$$q = 2^0 \text{일 때, } 2^{1+1} \times 1 = 4^1$$

$$q = 2^1 \text{일 때, } 2^{2+1} \times 2^1 = 2^4 = 4^2$$

$$q = 2^2 \text{일 때, } 2^{4+1} \times 2^2 = 2^7$$

$$q = 2^3 \text{일 때, } 2^{8+1} \times 2^3 = 2^{12} = 4^6$$

$\vdots$

따라서  $M$ 의 값은  $2^1, 2^2, 2^8, \dots$ 이므로

$$a_1 \times a_3 = 2 \times 2^8 = 2 \times 256 = 512$$

답 512

참고

$\textcircled{2}$ 에서  $2^{q+1} \times q = 4^n$ 이고  $q = 2^l$ 이므로

## 정답과 풀이

$$2^{2^l+1+l}=2^{2n}$$

$$2^l+1+l=2n$$

그러므로  $l$ 은 0 또는 홀수이다.

### 5 조건 (가)에서

$$(\log_4 ab)^2 - \left(\log_4 \frac{a}{b}\right)^2 = 8 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} & (\log_4 a + \log_4 b)^2 - (\log_4 a - \log_4 b)^2 \\ &= \{(\log_4 a)^2 + 2 \log_4 a \times \log_4 b + (\log_4 b)^2\} \\ & \quad - \{(\log_4 a)^2 - 2 \log_4 a \times \log_4 b + (\log_4 b)^2\} \\ &= 4 \log_4 a \times \log_4 b = 8 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \log_4 a \times \log_4 b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 조건 (나)에서  $\log_4 b$ 가 자연수이므로

$$\log_4 b = n \text{ (} n \text{은 자연수)라 하면 } \textcircled{1} \text{은}$$

$$n \times \log_4 a = 2$$

$$\log_4 a = \frac{2}{n}$$

$$a = 4^{\frac{2}{n}} = 2^{\frac{4}{n}}$$

이때  $a$ 와  $n$ 이 자연수이어야 하므로  $n$ 은 4의 양의 약수이다.

그러므로 순서쌍  $(n, a)$ 는

$$(1, 16), (2, 4), (4, 2)$$

각각에 대하여 순서쌍  $(b, a)$ 는

$$(4, 16), (16, 4), (256, 2)$$

따라서  $a+b$ 의 최댓값은

$$2+256=258$$

답 ⑤

### 6 조건 (가)에서 $\log_a b = \log_b c$ 이므로

$$\log_a b = \log_b c = p \text{로 놓으면}$$

$$b = a^p, c = b^p$$

$$c = b^p \text{에 } b \text{ 대신 } a^p \text{을 대입하면}$$

$$c = (a^p)^p = a^{p^2}$$

한편, 조건 (나)에서  $b \times c = a^2$ 이므로

$$a^p \times a^{p^2} = a^2$$

$$a^{p^2+p-2} = 1$$

이때  $a \neq 1$ 이므로

$$p^2+p-2=0$$

$$(p+2)(p-1)=0$$

$$p=1 \text{ 또는 } p=-2$$

$p=1$ 이면  $a=b=c$ 가 되어 조건을 만족시키지 못하므로

$$p=-2$$

$$\text{즉, } b = a^{-2}, c = a^4$$

따라서

$$\log_a \frac{c}{b} = \log_a \frac{a^4}{a^{-2}} = \log_a a^6 = 6 \log_a a = 6$$

답 ③

## 만점마무리 봉투모의고사 RED EDITION

실전 연습이 불안한 수험생이라면!

단 한 번의 수능을 위한

2회분 모의고사 긴급 처방

## 02 지수함수와 로그함수

유제

본문 21~29쪽

1 ②	2 ⑤	3 ④	4 ⑤	5 6
6 ④	7 ④	8 ③	9 ④	10 16

- 1 지수함수  $y = \left(\frac{n}{15} + \frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프와 직선  $y = -x + 2$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면

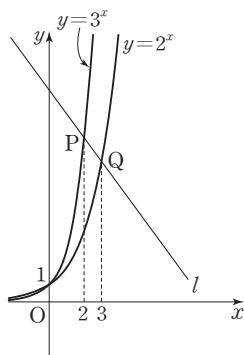
$$\frac{n}{15} + \frac{1}{2} < 1$$

$$n < \frac{15}{2}$$

이때  $n$ 이 자연수이므로  $n$ 의 최댓값은 7, 최솟값은 1이다.  
따라서 자연수  $n$ 의 최댓값과 최솟값의 합은 8이다.

답 ②

- 2 두 함수  $y = 2^x$ ,  $y = 3^x$ 의 그래프는 그림과 같다. 기울기가 음수이고  $y$ 절편이 1보다 큰 직선  $l$ 이 두 함수  $y = 3^x$ ,  $y = 2^x$ 의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.



따라서 P(2, 3<sup>2</sup>), Q(3, 2<sup>3</sup>)이므로 직선  $l$ 의 방정식은

$$y = \frac{8-9}{3-2}(x-2) + 9$$

즉,  $y = -x + 11$ 이므로 직선  $l$ 의  $y$ 절편은 11이다.

답 ⑤

- 3 함수  $y = 2^x$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 1만큼,  $y$ 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은
- $$y = 2^{x-1} + 2$$

함수  $y = 2^{x-1} + 2$ 의 그래프가 점 (2,  $a$ )를 지나므로  
 $a = 2^{2-1} + 2 = 2 + 2 = 4$

답 ④

- 4 함수  $y = a^x + 1$ 의 그래프는 함수  $y = a^x$ 의 그래프를  $y$ 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

(i)  $a > 1$ 일 때

함수  $y = a^x$ 의 그래프는  $x$ 의 값이 증가하면  $y$ 의 값도 증가한다.

그러므로 함수  $y = a^x + 1$ 은  $x = 2$ 에서 최댓값  $\frac{5}{4}$ 를 가져야 한다.

$$\text{즉, } a^2 + 1 = \frac{5}{4} \text{에서}$$

$$a^2 = \frac{1}{4}$$

이때  $a > 1$ 이므로 조건을 만족시키는  $a$ 의 값은 없다.

(ii)  $0 < a < 1$ 일 때

함수  $y = a^x$ 의 그래프는  $x$ 의 값이 증가하면  $y$ 의 값은 감소한다.

그러므로 함수  $y = a^x + 1$ 은  $x = 1$ 에서 최댓값  $\frac{5}{4}$ 를 가져야 한다.

$$\text{즉, } a + 1 = \frac{5}{4} \text{에서}$$

$$a = \frac{1}{4}$$

이것은 조건을 만족시킨다.

따라서 함수  $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x + 1$ 의 최솟값은  $x = 2$ 일 때

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1 = \frac{17}{16}$$

답 ⑤

- 5 두 함수  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ 는 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선  $y = x$ 에 대하여 대칭이다. 한편, 두 함수  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ 의 그래프가  $x$ 좌표가 1보다 작은 점에서 만나므로

$$0 < a < 1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\text{이때 } 4\left\{f(1) + g\left(\frac{1}{a}\right)\right\}^2 = 1 \text{이므로}$$

## 정답과 풀이

$$4\left(a^1 + \log_a \frac{1}{a}\right)^2 = 1$$

$$(a-1)^2 = \frac{1}{4}$$

$$a-1 = \frac{1}{2} \text{ 또는 } a-1 = -\frac{1}{2}$$

$$a = \frac{3}{2} \text{ 또는 } a = \frac{1}{2}$$

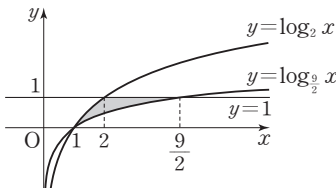
따라서 ㉠에서  $a = \frac{1}{2}$ 이므로

$$12a = 6$$

답 6

- 6 함수  $y = \log_2 x$ 의 그래프와 직선  $y=1$ 이 만나는 점의 좌표는 (2, 1), 함수  $y = \log_{\frac{9}{2}} x$ 의 그래프와 직선  $y=1$ 이 만나는 점의 좌표는  $(\frac{9}{2}, 1)$ 이다.

또 두 함수  $y = \log_2 x$ ,  $y = \log_{\frac{9}{2}} x$ 의 그래프가 만나는 점의 좌표는 (1, 0)이므로 그림과 같다.



따라서 그림에서 색칠한 부분(경계선 포함)에 포함된 점 중  $x$ 좌표와  $y$ 좌표가 모두 정수인 점은

(1, 0), (2, 1), (3, 1), (4, 1)

이고 그 개수는 4이다.

답 ④

- 7 함수  $y = \log_a x$ 의 그래프 위에 점 A(3, 1)이 있으므로  $1 = \log_a 3$ 에서  $a = 3$   
이때 함수  $y = \log_3 (x+1) + 2$ 의 그래프는 함수  $y = \log_3 x$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 -1만큼,  $y$ 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때  $\frac{2}{-1} = -2$ 이므로 이 값은 주어진 직선의 기울기와 같다.

그러므로 점 A를 지나고 기울기가 -2인 직선이 함수  $y = \log_3 (x+1) + 2$ 의 그래프와 만나는 점 B의 좌표는  $(3+(-1), 1+2)$ , 즉 (2, 3)

따라서  $a+b+c = 3+2+3 = 8$

답 ④

- 8 (i)  $a > 1$ 일 때

$2 \leq x \leq 3$ 에서  $\log_a x > 0$ 이므로  $M < 0$ 일 수 없다.

- (ii)  $0 < a < 1$ 일 때

$2 \leq x \leq 3$ 에서  $\log_a x < 0$ 이므로  $M < 0$ 이다.

이때 최댓값  $M$ 은  $x=2$ 일 때,  $M = \log_a 2$

최솟값  $m$ 은  $x=3$ 일 때,  $m = \log_a 3$

그러므로  $M - m = 1$ 에서

$$\log_a 2 - \log_a 3 = 1$$

$$\log_a \frac{2}{3} = 1$$

따라서  $a = \frac{2}{3}$

답 ③

- 9 부등식  $\left(\frac{1}{9}\right)^x < \frac{3^{10-3x}}{\sqrt{27}}$ 에서

$$\left(\frac{1}{3^2}\right)^x < \frac{3^{10-3x}}{3^{\frac{3}{2}}}$$

$$3^{-2x} < 3^{\frac{17}{2}-3x}$$

이때 밑 3이 1보다 크므로

$$-2x < \frac{17}{2} - 3x$$

$$x < \frac{17}{2}$$

따라서 자연수  $x$ 는 1, 2, 3, ..., 8이고 그 개수는 8이다.

답 ④

- 10 부등식  $\log_2 (x+10) < 6 \log_4 3$  ( $x > -10$ )에서

$$\log_2 (x+10) < 6 \log_{2^2} 3$$

$$\log_2 (x+10) < 3 \log_2 3$$

$$\log_2 (x+10) < \log_2 3^3$$

이때 밑 2가 1보다 크므로

$$x+10 < 3^3$$

$$x < 17$$

따라서 자연수  $x$ 는 1, 2, 3, ..., 16이고 그 개수는 16이다.

답 16

### Level 1 기초 연습

본문 30쪽

1 ③

2 ③

3 ②

4 ②

5 ④

1  $3f(2)=7a-2$ 에서  
 $3a^2=7a-2$   
 $3a^2-7a+2=0$   
 $(3a-1)(a-2)=0$   
 $a=\frac{1}{3}$  또는  $a=2$

한편,  $b>0$ 일 때  $f(b)>1$ 이므로 함수  $y=f(x)$ 는  $x$ 의 값이 증가하면  $y$ 의 값도 증가한다.

즉,  $a=2$

따라서  $f(1)+f(-1)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

답 ③

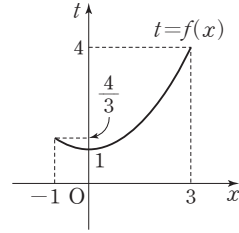
2 함수  $y=-2^{x-1}+3$ 의 그래프는 함수  $y=-2^x$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 1만큼,  $y$ 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.  
 한편, 함수  $y=-2^x$ 의 그래프는 함수  $y=2^x$ 의 그래프를  $x$ 축에 대하여 대칭이동한 것이다.  
 그러므로 함수  $y=-2^x$ 의 그래프의 점근선과의 거리가 1인 함수  $y=-2^x$ 의 그래프 위의 점은  $(0, -1)$ 이다.  
 따라서 구하는 점 A는 점  $(0, -1)$ 을  $x$ 축의 방향으로 1만큼,  $y$ 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로  
 $A(0+1, (-1)+3)$ , 즉  $A(1, 2)$   
 따라서  $a=1, b=2$ 이므로  
 $a+b=1+2=3$

답 ③

3  $y=\sqrt[3]{4} \times 2^{x-1}+3$   
 $=2^{\frac{2}{3}} \times 2^{x-1}+3$   
 $=2^{x-\frac{1}{3}}+3$   
 그러므로 함수  $y=\sqrt[3]{4} \times 2^{x-1}+3$ 의 그래프는 함수  $y=2^x$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로  $\frac{1}{3}$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.  
 따라서  $a=2, m=\frac{1}{3}, n=3$ 이므로  
 $a \times m \times n=2 \times \frac{1}{3} \times 3=2$

답 ②

4 함수  $(g \circ f)(x)$ 에서  $f(x)=t$ 로 놓으면  $-1 \leq x \leq 3$ 일 때,  
 $1 \leq t \leq 4$



따라서 함수  $y=g(t)$ 는  $t$ 의 값이 증가할 때  $y$ 의 값도 증가하는 함수이므로  $t=1$ 일 때 최솟값  $\log_2 1=0$ 을 갖고,  $t=4$ 일 때 최댓값  $\log_2 4=\log_2 2^2=2$ 를 갖는다.

그러므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$2+0=2$

답 ②

5  $2^{x-5} < 3^{\log_3 16}$ 에서  
 $2^{x-5} < 16^{\log_3 3}$   
 $2^{x-5} < 2^4$   
 이때 밑 2가 1보다 크므로  
 $x-5 < 4$   
 $x < 9$   
 따라서 자연수  $x$ 는 1, 2, 3, ..., 8이고 그 개수는 8이다.

답 ④

## Level 2 기본 연습

본문 31~32쪽

- |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 ① | 2 ④ | 3 5 | 4 ② | 5 8 |
| 6 ② | 7 ④ | 8 ④ |     |     |

1  $y=a^x \times \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2a}{5}\right)^x$ 에서 함수  $y=a^x \times \left(\frac{2}{5}\right)^x$ 의 그래프는 점  $(0, 1)$ 을 지나므로 원  $(x-1)^2+y^2=1$ 과 만나지 않기 위해서는  $x$ 의 값이 커짐에 따라  $y$ 의 값이 커져야 한다.

즉,  $\frac{2a}{5} > 1$ 이어야 하므로

$a > \frac{5}{2}$  ..... ㉠

또  $y=\frac{9^x \times a^{2x}}{100^x} = \left\{\left(\frac{3a}{10}\right)^2\right\}^x$ 에서 함수  $y=\frac{9^x \times a^{2x}}{100^x}$ 의 그래프도 점  $(0, 1)$ 을 지나므로 원  $(x-1)^2+y^2=1$ 과 만나기 위해서는  $x$ 의 값이 커짐에 따라  $y$ 의 값은 작아져야 한다.

즉,  $0 < \left(\frac{3a}{10}\right)^2 < 1$ 이어야 하므로

## 정답과 풀이

$$0 < \frac{3a}{10} < 1 \text{에서}$$

$$0 < a < \frac{10}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

㉓과 ㉔에서  $\frac{5}{2} < a < \frac{10}{3}$ 이므로 구하는 자연수  $a$ 는 3이고 그 개수는 1이다.

답 ①

2 (i)  $a > 2$ 일 때

$P(1, a)$ ,  $Q(-1, \frac{1}{2})$ 이고 선분 PQ의 중점의  $y$ 좌표가

$$\frac{7}{4} \text{이므로}$$

$$\frac{a + \frac{1}{2}}{2} = \frac{7}{4}$$

$$a + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$a = 3$$

(ii)  $0 < a < 1$ ,  $1 < a < 2$ 일 때

$P(1, 2)$ ,  $Q(-1, \frac{1}{a})$ 이고 선분 PQ의 중점의  $y$ 좌표가

$$\frac{7}{4} \text{이므로}$$

$$\frac{2 + \frac{1}{a}}{2} = \frac{7}{4}$$

$$2 + \frac{1}{a} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{3}{2}$$

$$a = \frac{2}{3}$$

따라서 모든  $a$ 의 값의 합은

$$3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$$

답 ④

3 점  $A(2a - \frac{3}{4}, 2)$ 가 로그함수  $y = \log_a x$  ( $a > \frac{3}{8}$ ,  $a \neq 1$ )

의 그래프 위에 있으므로

$$2 = \log_a (2a - \frac{3}{4})$$

$$a^2 = 2a - \frac{3}{4}$$

$$4a^2 - 8a + 3 = 0$$

$$(2a - 1)(2a - 3) = 0$$

$$a = \frac{1}{2} \text{ 또는 } a = \frac{3}{2}$$

한편, 직선 AB의 기울기가 음수이므로 함수  $y = \log_a x$ 의 그래프는  $x$ 의 값이 증가하면  $y$ 의 값은 감소해야 한다.

즉,  $\frac{3}{2} < a < 1$ 이어야 하므로

$$a = \frac{1}{2}$$

따라서  $10a = 5$

답 5

4 함수  $y = -a^{x-1} + 2$ 가  $x = 3$ 에서 함수값  $\frac{7}{2}(1 - a)$ 를 가지

므로

$$-a^{3-1} + 2 = -\frac{7}{2}a + \frac{7}{2}$$

$$-a^2 = -\frac{7}{2}a + \frac{3}{2}$$

$$2a^2 - 7a + 3 = 0$$

$$(2a - 1)(a - 3) = 0$$

$$a = \frac{1}{2} \text{ 또는 } a = 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

한편, 함수  $y = -a^{x-1} + 2$ 의 그래프는 함수  $y = -a^x$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 1만큼,  $y$ 축의 방향으로 2만큼 평행 이동한 것이다.

그러므로 주어진 함수가  $x = 3$ 에서 최댓값을 갖기 위해서는 함수  $y = -a^x$ 의 그래프는  $x$ 의 값이 커짐에 따라  $y$ 의 값은 감소해야 한다.

한편, 함수  $y = -a^x$ 의 그래프는 함수  $y = a^x$ 의 그래프를  $x$ 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 함수  $y = a^x$ 의 그래프는  $x$ 의 값이 커짐에 따라  $y$ 의 값도 증가해야 한다.

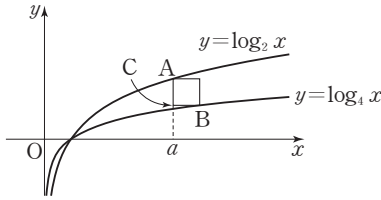
즉,  $a > 1$ 이어야 하므로 ㉔에서  $a = 3$ 이고,  $x = 4$ 일 때 최솟값  $m$ 은

$$m = -3^{4-1} + 2 = -25$$

$$\text{따라서 } a + m = 3 + (-25) = -22$$

답 ②

5 그림과 같이 두 점 A, B를 잡으면 점 A의 좌표가  $(a, \log_2 a)$ 이고 정사각형의 한 변의 길이가 1이므로  $b = a + 1$ 이고  $B(a + 1, \log_2 (a + 1))$



점 A와 x좌표가 같은 정사각형의 다른 한 꼭짓점을 C라 하면  $\overline{AC}=1$ 이므로

$$\log_2 a - \log_4 (a+1) = 1$$

$$\log_4 a^2 = 1 + \log_4 (a+1)$$

$$\log_4 a^2 = \log_4 4(a+1)$$

$$a^2 = 4a + 4$$

$$a^2 - 4a - 4 = 0$$

$$a = 2 \pm 2\sqrt{2}$$

이때  $a > 1$ 이므로

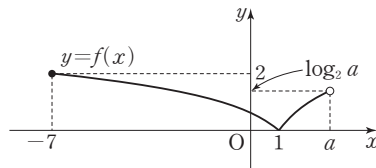
$$a = 2 + 2\sqrt{2}$$

따라서  $(a-2)^2 = 8$

답 8

- 6  $y = \log_3 (-x+2) = \log_3 \{-(x-2)\}$ 이므로  
함수  $y = \log_3 (-x+2)$ 의 그래프는 함수  $y = \log_3 x$ 의 그래프를  $y$ 축에 대하여 대칭이동한 후  $x$ 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

그러므로 함수  $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



그러므로 함수  $f(x)$ 가 최댓값을 가지려면

$$\log_2 a \leq 2 \text{ 이어야 하므로 } a \leq 4$$

따라서  $a$ 의 최댓값은 4이다.

답 ②

- 7  $y = 2 \log_4 (16x-32)$   
 $= 2 \log_{2^2} (16x-32)$   
 $= \log_2 16(x-2)$   
 $= \log_2 (x-2) + 4$

그러므로 함수  $y = 2 \log_4 (16x-32)$ 의 그래프는 함수  $y = \log_2 x$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 2만큼,  $y$ 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

한편, 직선  $y = 2x-3$ 의 기울기가 2이므로 점  $A(a, b)$ 라 하면

$$B(a+2, b+4)$$

$$\text{그러므로 } \overline{AB} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

원점 O와 직선  $y = 2x-3$ , 즉  $2x-y-3=0$  사이의 거리는

$$\frac{|0-0-3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{3}{\sqrt{5}} = 3$$

답 ④

- 8 방정식  $\log_2 (x+1) + \log_{\frac{1}{2}} (x+5) = a$  ( $x > -1$ )의 근이 3이므로

$$\log_2 4 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = a$$

$$\log_2 2^2 + \log_{2^{-1}} 2^3 = a$$

$$2 - 3 = a$$

$$a = -1$$

그러므로 주어진 부등식은

$$\log_2 (x+1) + \log_{\frac{1}{2}} (x+5) < -1$$

이 부등식을 풀면

$$\log_2 (x+1) + \log_{2^{-1}} (x+5) < -1$$

$$\log_2 (x+1) - \log_2 (x+5) < -1$$

$$\log_2 (x+1) + \log_2 2 < \log_2 (x+5)$$

$$\log_2 2(x+1) < \log_2 (x+5)$$

밑 2가 1보다 크므로

$$2x+2 < x+5$$

$$x < 3$$

따라서 자연수  $x$ 는 1, 2이고 그 개수는 2이므로

$$a = -1, b = 2 \text{ 에서}$$

$$a+b = (-1) + 2 = 1$$

답 ④

Level 3 실력 완성

본문 33~34쪽

- 1 ⑤    2 ①    3 ②    4 ②    5 ⑤  
 6 ④

## 정답과 풀이

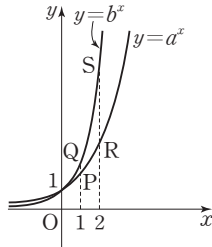
1 네 점 P, Q, R, S의 좌표는

$$P(1, a), Q(1, b), R(2, a^2), S(2, b^2)$$

조건 (가)에서  $OR < OS$ 이므로

$$\sqrt{4+a^4} < \sqrt{4+b^4}, a^4 < b^4 \text{에서 } a < b$$

그러므로 두 함수  $y=a^x, y=b^x$ 의 그래프와 네 점 P, Q, R, S는 그림과 같다.



한편, 조건 (나)에서 네 점 P, Q, R, S를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이가 7이므로

$$\frac{1}{2} \times 1 \times (\overline{PQ} + \overline{RS}) = 7$$

$$\frac{1}{2} \times \{(b-a) + (b^2-a^2)\} = 7$$

$$(b-a) + (b-a)(b+a) = 14$$

$$(b-a)(b+a+1) = 14$$

이때  $b-a, b+a+1$ 은 모두 자연수이고  $b-a < b+a+1$ 이므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i)  $b-a=1, b+a+1=14$ 일 때

$$b-a=1, b+a=13 \text{이므로 연립하여 풀면}$$

$$a=6, b=7$$

(ii)  $b-a=2, b+a+1=7$ 일 때

$$b-a=2, b+a=6 \text{이므로 연립하여 풀면}$$

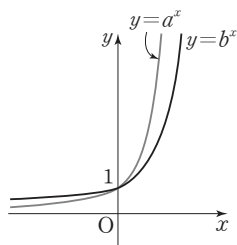
$$a=2, b=4$$

(i), (ii)에서  $b$ 의 값은 4 또는 7이므로  $b$ 의 최댓값은 7이다.

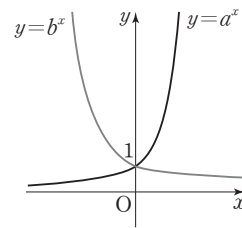
답 ⑤

2  $x > 0$ 에서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 함수  $y=g(x)$ 의 그래프보다 위쪽에 있는 경우는 다음과 같다.

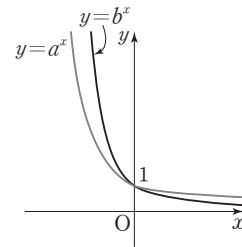
(i)  $a > 1$ 일 때,  $a > b > 1$ 인 경우



(ii)  $a > 1$ 일 때,  $0 < b < 1 < a$ 인 경우



(iii)  $0 < a < 1$ 일 때,  $0 < b < a < 1$ 인 경우



ㄱ.  $a > 1$ 이면 (i), (ii)의 경우와 같으므로

$a > b > 1$  또는  $0 < b < 1 < a$ 이다. (거짓)

ㄴ.  $0 < a < 1$ 이면 (iii)의 경우와 같으므로

$0 < b < a < 1$ 이다. (참)

ㄷ.  $ab < 1$ 이면  $0 < a < 1$ 이거나  $0 < b < 1$ 이어야 한다.

$0 < a < 1$ 일 때, (iii)의 경우와 같으므로

$0 < b < a < 1$

$0 < b < 1$ 일 때, (ii), (iii)의 경우와 같으므로

$0 < a < 1$  또는  $a > 1$  (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

답 ①

참고

$$\text{ㄷ. [반례]} f(x)=2^x, g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

3 함수  $y=2^{x-1}+3$ 의 그래프는 함수  $y=2^x$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 1만큼,  $y$ 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

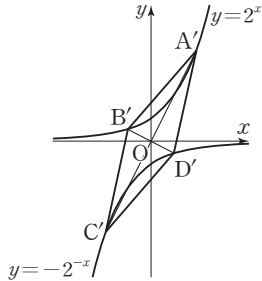
$$\text{또 } y=-\frac{2}{2^x}+3 \text{에서}$$

$$y=-2 \times 2^{-x}+3=-2^{-(x-1)}+3 \text{이므로}$$

함수  $y=-\frac{2}{2^x}+3$ 의 그래프는 함수  $y=-2^{-x}$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로 1만큼,  $y$ 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.



한편, 네 점 A, B, C, D를  $x$ 축의 방향으로  $-1$ 만큼,  $y$ 축의 방향으로  $-3$ 만큼 평행이동한 점을 각각  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ 이라 하면 그림과 같이 두 점  $A'$ ,  $B'$ 은 함수  $y=2^x$ 의 그래프 위에 있고 두 점  $C'$ ,  $D'$ 은 함수  $y=-2^{-x}$ 의 그래프 위에 있다.



조건 (가)에서 사각형 ABCD가 평행사변형이므로 사각형  $A'B'C'D'$ 도 평행사변형이다.

또 조건 (나)에서 삼각형 ABD의 무게중심의  $x$ 좌표는  $\frac{5}{3}$ ,

삼각형 ABC의 무게중심의  $x$ 좌표는  $\frac{2}{3}$ 이므로

삼각형  $A'B'D'$ 의 무게중심의  $x$ 좌표는  $\frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$ ,

삼각형  $A'B'C'$ 의 무게중심의  $x$ 좌표는  $\frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$

한편, 두 함수  $y=2^x$ 과  $y=-2^{-x}$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로  $A'(m, 2^m)$ ,  $B'(-n, 2^{-n})$  ( $m>0, n>0$ )으로 놓으면

$C'(-m, -2^{-m})$ ,  $D'(n, -2^{-n})$

그러므로 두 삼각형  $A'B'D'$ ,  $A'B'C'$ 의 무게중심의  $x$ 좌표는 각각

$$\frac{m+(-n)+n}{3} = \frac{2}{3}, \quad \frac{m+(-n)+(-m)}{3} = -\frac{1}{3}$$

즉,  $m=2, n=1$

그러므로

$$A'(2, 4), B'\left(-1, \frac{1}{2}\right), C'(-2, -4), D'\left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

한편, 두 직선  $OA'$ ,  $OB'$ 의 기울기는 각각  $2, -\frac{1}{2}$ 이므로 두 직선은 수직이다.

또 선분  $B'D'$ 의 중점은 원점이므로 세 점  $A'$ ,  $B'$ , O를 지나는 원의 중심의 좌표는 선분  $A'B'$ 의 중점이다.

이때 선분  $A'B'$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+(-1)}{2}, \frac{4+\frac{1}{2}}{2}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{1}{2}+1, \frac{9}{4}+3\right), \text{ 즉 } \left(\frac{3}{2}, \frac{21}{4}\right) \text{ 이므로 } a=\frac{3}{2}, b=\frac{21}{4} \text{ 에서}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{7}{2}$$

답 ②

4 원 C의 지름이  $\overline{AQ}$ 이므로  $\angle ARQ=90^\circ$   
또 직선 AQ의 기울기가 1이므로 직각삼각형 ARQ에서  $\angle QAR=45^\circ$

그러므로  $\overline{AR}=\overline{AQ} \cos 45^\circ=2$ 에서

$$\overline{AQ} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

$$\overline{AQ}=2\sqrt{2}$$

점 P에서  $x$ 축에 내린 수선의 발을  $P'$ 이라 하면

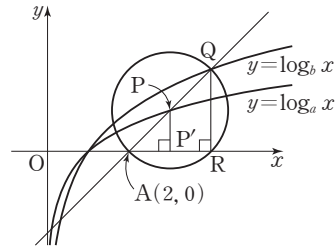
삼각형 PAP'은  $\overline{AP}=\sqrt{2}$ 이고  $\angle PAP'=45^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{AP'}=\overline{PP'}=1$$

즉, 점 P의 좌표는  $(3, 1)$ 이므로  $y=\log_a x$ 에  $x=3, y=1$ 을 대입하면

$$1=\log_a 3$$

$$a=3$$



또  $\overline{AR}=\overline{RQ}=2$ 이므로 점 Q의 좌표는

$$(4, 2)$$

이 점이 함수  $y=\log_b x$ 의 그래프 위에 있으므로

$$2=\log_b 4$$

$$b^2=4$$

이때  $b>1$ 이므로

$$b=2$$

따라서  $a=3, b=2$ 이므로

$$a+b=3+2=5$$

답 ②

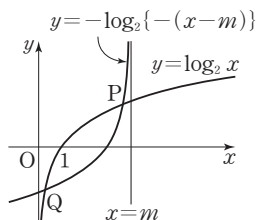
$$5 \quad y=\log_2 \frac{1}{m-x}$$

$$=-\log_2 (m-x)$$

$$=-\log_2 \{-(x-m)\}$$

## 정답과 풀이

이므로 함수  $y = \log_2 \frac{1}{m-x}$ 의 그래프는 함수  $y = \log_2 x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후  $x$ 축의 방향으로  $m$ 만큼 평행이동한 것이고 점근선의 방정식은  $x=m$ 이다.



두 함수  $y = \log_2 x$ ,  $y = -\log_2 \{-(x-m)\}$ 의 그래프는

점  $(\frac{m}{2}, 0)$ 에 대하여 대칭이므로 두 점 P, Q는

점  $(\frac{m}{2}, 0)$ 에 대하여 대칭이다.

두 점 P, Q가 중심이  $(2, 0)$ 인 원 위에 있기 위해서는

$$\frac{m}{2} = 2 \text{ 이어야 하므로}$$

$$m = 4$$

이때 두 함수  $y = \log_2 x$ ,  $y = -\log_2 \{-(x-4)\}$ 의 그래프의 교점의  $x$ 좌표는

$$\log_2 x = -\log_2 \{-(x-4)\} \text{에서}$$

$$\log_2 x + \log_2 (4-x) = 0$$

$$\log_2 x(4-x) = 0$$

$$x(4-x) = 1$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{3}$$

따라서 두 점 P, Q의  $x$ 좌표의 곱  $a$ 는

$$a = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$$

이므로  $m=4$ ,  $a=1$ 에서

$$m+a=4+1=5$$

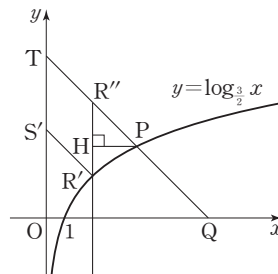
답 ⑤

- 6  $y = \log_{\frac{2}{3}} x = -\log_{\frac{3}{2}} x$ 이므로 함수  $y = \log_{\frac{2}{3}} x$ 의 그래프는 함수  $y = \log_{\frac{3}{2}} x$ 의 그래프를  $x$ 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

그러므로 두 점 R, S를  $x$ 축에 대하여 대칭이동한 점을 각각 R', S'이라 하면 점 R'은 곡선  $y = \log_{\frac{3}{2}} x$  위에 있고 점 S'은  $y$ 축 위에 있다.

또 직선 R'S'의 기울기는  $-1$ 이므로 직선 PQ와 평행하고

$$\overline{RS} = \overline{R'S'} \quad \dots\dots ㉠$$



이때 직선 PQ가  $y$ 축과 만나는 점을 T라 하면 직선 PQ의 기울기가  $-1$ 이므로 직각삼각형 OQT에서

$$\sqrt{2} \times \overline{OQ} = \overline{QT} \quad \dots\dots ㉡$$

또 점 R'을 지나고  $y$ 축에 평행한 직선이 직선 PQ와 만나는 점을 R''이라 하면

$$\overline{S'R'} = \overline{TR''} \quad \dots\dots ㉢$$

조건 (가)에서

$$\sqrt{2} \times \overline{OQ} = \overline{PQ} + \overline{RS} + \sqrt{2} \text{이므로 } ㉠, ㉡, ㉢ \text{에서}$$

$$\overline{TQ} = \overline{PQ} + \overline{TR''} + \sqrt{2}$$

$$\overline{TQ} - \overline{PQ} - \overline{TR''} = \sqrt{2}$$

$$\text{즉, } \overline{R''P} = \sqrt{2}$$

점 P에서 선분 R'R''에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\angle HPR'' = 45^\circ \text{이므로}$$

$$\overline{PH} = 1$$

그러므로 점 R'의  $x$ 좌표를  $a$ 라 하면 점 P의  $x$ 좌표는  $a+1$ 이다.

한편, 조건 (나)에서 두 점 P와 R의  $y$ 좌표의 합이 1이므로

$$\log_{\frac{3}{2}} (a+1) - \log_{\frac{3}{2}} a = 1$$

$$\log_{\frac{3}{2}} \frac{a+1}{a} = 1$$

$$\frac{a+1}{a} = \frac{3}{2}$$

$$a = 2$$

따라서 점 P의  $x$ 좌표는

$$a+1=3$$

답 ④

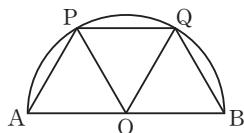
## 03 삼각함수

유제

본문 37~45쪽

- |     |     |     |     |      |
|-----|-----|-----|-----|------|
| 1 ④ | 2 ③ | 3 ② | 4 ① | 5 ①  |
| 6 ① | 7 ④ | 8 ① | 9 ② | 10 ⑤ |

- 1 선분 AB의 중점을 O라 하면 호 AB를 삼등분하는 점 P, Q이므로



$$\begin{aligned}\angle AOP &= \angle POQ \\ &= \angle QOB \\ &= \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

$\overline{OA} = r$ 라 하면 호 AQ의 길이가  $8\pi$ 이고

$$\angle AOQ = 2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi \text{ 이므로}$$

$$r \times \frac{2}{3}\pi = 8\pi$$

$$r = 12$$

삼각형 AOP에서

$$\angle AOP = \frac{\pi}{3} \text{ 이고 } \overline{OA} = \overline{OP} \text{ 이므로}$$

삼각형 AOP는 정삼각형이다.

삼각형 AOP의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 12 \times 12 = 36\sqrt{3}$$

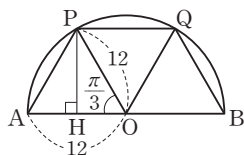
따라서 두 삼각형 POQ, QOB도 한 변의 길이가 12인 정삼각형이므로 사각형 PABQ의 넓이는

$$3 \times (\text{삼각형 AOP의 넓이}) = 3 \times 36\sqrt{3} = 108\sqrt{3}$$

답 ④

참고

점 P에서 선분 AO에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{PH} = \overline{OP} \times \sin \frac{\pi}{3} \text{ 이므로}$$

정삼각형 AOP의 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{PH} &= \frac{1}{2} \times \overline{OP} \times \overline{OP} \times \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{OP} \times \overline{OP} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \overline{OP}^2\end{aligned}$$

- 2 동경 OB가 나타내는 각의 크기는

$$\frac{13}{6}\pi - \frac{7}{18}\pi = \frac{32}{18}\pi = \frac{16}{9}\pi$$

이므로 선분 AB를 포함하는 부채꼴 AOB의 중심각의 크기를  $\theta$ 라 하면

$$\theta = 2\pi - \frac{16}{9}\pi = \frac{2}{9}\pi$$

따라서 선분 AB를 포함하는 부채꼴 AOB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3^2 \times \frac{2}{9}\pi = \pi$$

답 ③

$$\begin{aligned}3 \cos \theta &\times \left( \frac{1}{1 - \sin \theta} - \frac{1}{1 + \sin \theta} \right) \\ &= \cos \theta \times \frac{(1 + \sin \theta) - (1 - \sin \theta)}{1 - \sin^2 \theta} \\ &= \cos \theta \times \frac{2 \sin \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{2 \sin \theta}{\cos \theta} < 0\end{aligned}$$

$$\text{이때 } \cos \theta = \frac{3}{5} > 0 \text{ 이므로}$$

$$\sin \theta < 0$$

그러므로

$$\begin{aligned}\sin \theta &= -\sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} \\ &= -\frac{4}{5}\end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

답 ②

- 4  $y = x$ 를  $x^2 + y^2 = 1$ 에 대입하면

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

## 정답과 풀이

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

점 P는 제 3사분면에 있으므로

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 점 P의 좌표는  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 이므로

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{따라서 } \sin \theta + \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

답 ①

5 함수  $y = -2 \cos(ax+b) + b$ 의 주기가  $6\pi$ 이므로

$$\frac{2\pi}{|a|} = 6\pi$$

이때  $a > 0$ 이므로

$$a = \frac{1}{3}$$

한편, 함수  $y = -2 \cos\left(\frac{1}{3}x + b\right) + b$ 의 최댓값이 5이므로

$$2 + b = 5$$

$$b = 3$$

$$\text{따라서 } ab = \frac{1}{3} \times 3 = 1$$

답 ①

6 함수  $y = \tan(ax+b) = \tan\left\{a\left(x + \frac{b}{a}\right)\right\}$ 이므로

함수  $y = \tan(ax+b)$ 의 그래프는 함수  $y = \tan ax$ 의 그래프를  $x$ 축의 방향으로  $-\frac{b}{a}$ 만큼 평행이동한 것이다.

함수  $y = \tan(ax+b)$ 의 주기가  $2\pi$ 이므로

$$\frac{\pi}{|a|} = 2\pi$$

이때  $a > 0$ 이므로

$$a = \frac{1}{2}$$

한편,  $0 < b < \pi$ 이고  $-\frac{b}{a} = -2b$ 이므로

$$-2\pi < -2b < 0$$

$$\text{그러므로 } -2b = -\frac{3}{2}\pi \text{에서}$$

$$b = \frac{3}{4}\pi$$

$$\text{따라서 } ab = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{8}\pi$$

답 ①

7  $\tan(\pi - \theta) = \frac{4}{3}$ 에서

$$-\tan \theta = \frac{4}{3}$$

$$\tan \theta = -\frac{4}{3}$$

$$\text{즉, } \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{4}{3} \text{에서}$$

$$4 \cos \theta = -3 \sin \theta$$

$$\cos \theta = -\frac{3}{4} \sin \theta \quad \dots\dots ㉠$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$\sin^2 \theta + \left(-\frac{3}{4} \sin \theta\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \theta + \frac{9}{16} \sin^2 \theta = 1$$

$$\frac{25}{16} \sin^2 \theta = 1$$

$$\sin^2 \theta = \frac{16}{25}$$

이때  $\sin \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta = -\frac{4}{5}$$

㉠에서

$$\cos \theta = -\frac{3}{4} \times \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}$$

$$\text{따라서 } \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta = \frac{3}{5}$$

답 ④

8  $\cos(\pi + \theta) - \cos(2\pi - \theta) = \frac{4}{3}$ 에서

$$-\cos \theta - \cos \theta = \frac{4}{3}$$

$$-2 \cos \theta = \frac{4}{3}$$

$$\cos \theta = -\frac{2}{3}$$

이때

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$= 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{4}{9}$$

$$= \frac{5}{9}$$

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{5}}{3} \text{ 또는 } \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{한편, } \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) < 0 \text{에서}$$

$$-\sin \theta < 0$$

$\sin \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

따라서

$$\begin{aligned} & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \times \tan(2\pi - \theta) \\ &= \cos \theta \times (-\tan \theta) \\ &= \cos \theta \times \left(-\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right) \\ &= -\sin \theta \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

답 ①

9  $\cos^2 x - \sin^2 x + 3 \cos x - 1 < 0$ 에서

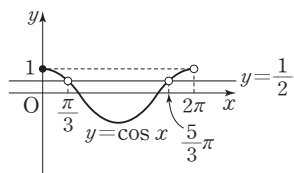
$$\begin{aligned} & \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + 3 \cos x - 1 < 0 \\ & 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 < 0 \\ & (\cos x + 2)(2 \cos x - 1) < 0 \\ & -2 < \cos x < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

이때  $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$-1 \leq \cos x < \frac{1}{2}$$

이 부등식의 해는 함수  $y = \cos x$ 의 그래프가 직선  $y = \frac{1}{2}$ 보다 아래쪽에 있는  $x$ 의 값의 범위이므로

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$$



따라서  $\beta - \alpha = \frac{5}{3}\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos(\beta - \alpha) &= \cos \frac{4}{3}\pi \\ &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\cos \frac{\pi}{3} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ②

10 방정식  $\sin x \tan x = \cos x$ 에서

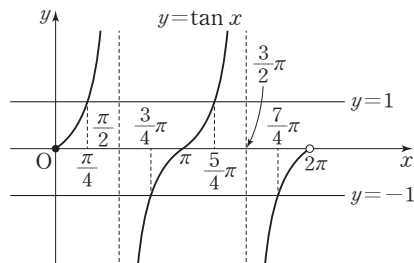
$\cos x \neq 0$ 이므로 양변을  $\cos x$ 로 나누면

$$\frac{\sin x}{\cos x} \times \tan x = 1$$

이때  $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$ 이므로

$$\tan^2 x = 1$$

$$\tan x = -1 \text{ 또는 } \tan x = 1$$



$0 \leq x < 2\pi$ 이고  $\cos x \neq 0$ 일 때, 함수  $y = \tan x$ 의 그래프와 직선  $y = -1$ 이 만나는 점의  $x$ 좌표는  $\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$ 이고, 함수  $y = \tan x$ 의 그래프와 직선  $y = 1$ 이 만나는 점의  $x$ 좌표는  $\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$ 이다.

따라서 구하는 모든 실수  $x$ 의 값의 합은

$$\frac{3}{4}\pi + \frac{7}{4}\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{5}{4}\pi = 4\pi$$

답 ⑤

### Level 1 기초 연습

본문 46~47쪽

- |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 ② | 2 ④ | 3 ① | 4 ④ | 5 ③ |
| 6 ⑤ | 7 ④ | 8 ⑤ |     |     |

1 호 AB의 길이가 호 AP의 길이의 2배이므로

$$\angle AOB = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

삼각형 AOB는 직각삼각형이므로

$\overline{OA} = r$ 라 하면

삼각형 AOB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times r^2 = 2$$

$$r^2 = 4$$

$$r = 2$$

따라서 선분 AP를 포함하는 부채꼴 AOP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

답 ②

## 정답과 풀이

2 점 P(-5, 12)에 대하여

$$\overline{OP} = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$$

$$\sin \theta = \frac{12}{13}, \cos \theta = -\frac{5}{13} \text{이므로}$$

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{12}{13} - \frac{5}{13} = \frac{7}{13}$$

답 ④

3  $x^2 - 3\pi x + 2\pi^2 < 0$ 에서

$$(x - \pi)(x - 2\pi) < 0$$

$$\pi < x < 2\pi$$

$$\cos x = \frac{3}{4} \text{이므로}$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$= \frac{7}{16}$$

$$\pi < x < 2\pi \text{에서 } \sin x < 0 \text{이므로}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{따라서 } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

답 ①

4  $a > 0$ 이므로

$$a + c = 3, -a + c = -1 \text{에서}$$

$$a = 2, c = 1$$

$$\text{주기가 } \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{이때 } b > 0 \text{이므로}$$

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{2}$$

$$b = 4$$

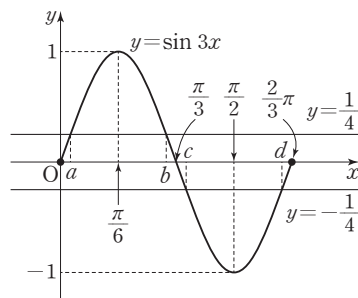
$$\text{따라서 } a = 2, b = 4, c = 1 \text{이므로}$$

$$abc = 2 \times 4 \times 1 = 8$$

답 ④

5 그림과 같이 함수  $y = \sin 3x$ 의 그래프가 직선  $y = \frac{1}{4}$ 과 만

나는 두 점은 직선  $x = \frac{\pi}{6}$ 에 대하여 서로 대칭이므로



$$\frac{a+b}{2} = \frac{\pi}{6} \text{에서}$$

$$a+b = \frac{\pi}{3}$$

마찬가지로 함수  $y = \sin 3x$ 의 그래프가 직선  $y = -\frac{1}{4}$ 과

만나는 두 점은 직선  $x = \frac{\pi}{2}$ 에 대하여 서로 대칭이므로

$$\frac{c+d}{2} = \frac{\pi}{2} \text{에서}$$

$$c+d = \pi$$

$$\text{따라서 } a+b+c+d = \frac{\pi}{3} + \pi \text{이므로}$$

$$\cos(a+b+c+d) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\cos \frac{\pi}{3}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

답 ③

$$6 \cos^2\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \left(-\cos \frac{\pi}{3}\right)^2$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\tan^2\left(\frac{7}{6}\pi\right) = \tan^2\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \left(\tan \frac{\pi}{6}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } \cos^2\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \tan^2\left(\frac{7}{6}\pi\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}
 7 \quad & \sin^2 \frac{\pi}{5} + \sin^2 \frac{2}{5} \pi + \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{7}{5} \pi \right) + \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{6}{5} \pi \right) \\
 &= \sin^2 \frac{\pi}{5} + \sin^2 \frac{2}{5} \pi + \cos^2 \frac{7}{5} \pi + \cos^2 \frac{6}{5} \pi \\
 &= \sin^2 \frac{\pi}{5} + \sin^2 \frac{2}{5} \pi + \cos^2 \left( \pi + \frac{2}{5} \pi \right) + \cos^2 \left( \pi + \frac{\pi}{5} \right) \\
 &= \sin^2 \frac{\pi}{5} + \sin^2 \frac{2}{5} \pi + \cos^2 \frac{2}{5} \pi + \cos^2 \frac{\pi}{5} \\
 &= \sin^2 \frac{\pi}{5} + \cos^2 \frac{\pi}{5} + \sin^2 \frac{2}{5} \pi + \cos^2 \frac{2}{5} \pi \\
 &= 1 + 1 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

답 ④

8  $x$ 에 대한 이차방정식  $4x^2 - (4 \sin \theta)x + \cos \theta + 1 = 0$ 의 판별식을  $D$ 라 하면 이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로  $D=0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \frac{D}{4} = 4 \sin^2 \theta - 4(\cos \theta + 1) = 0 \text{ 이므로}$$

이 식에  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ 를 대입하면

$$4(1 - \cos^2 \theta) - 4(\cos \theta + 1) = 0$$

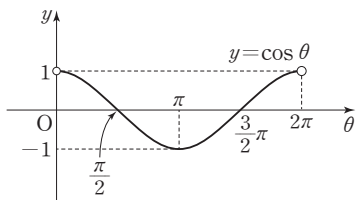
$$4 - 4 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta - 4 = 0$$

$$4 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta = 0$$

$$4 \cos \theta (\cos \theta + 1) = 0$$

$$\cos \theta = 0 \text{ 또는 } \cos \theta = -1$$

$0 < \theta < 2\pi$ 일 때, 함수  $y = \cos \theta$ 의 그래프는 그림과 같다.



(i)  $\cos \theta = 0$ 일 때

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \theta = \frac{3}{2} \pi$$

(ii)  $\cos \theta = -1$ 일 때

$$\theta = \pi$$

따라서 서로 다른 모든  $\theta$ 의 값의 합은

$$\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2} \pi + \pi = 3\pi$$

답 ⑤

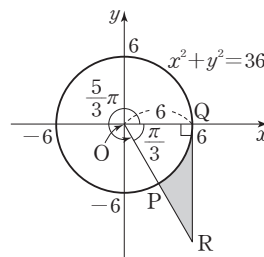
## Level 2 기본 연습

본문 48~50쪽

- |      |      |      |     |      |
|------|------|------|-----|------|
| 1 ③  | 2 ⑤  | 3 ①  | 4 ① | 5 ④  |
| 6 9  | 7 31 | 8 30 | 9 ③ | 10 3 |
| 11 ② | 12 ① |      |     |      |

### 1 직각삼각형 ORQ에서

$$\overline{OP} = \overline{OQ} = 6$$



동경 OP가 각  $\frac{5}{3} \pi$ 를 나타내므로

$$\angle ROQ = \frac{\pi}{3}$$

$$\overline{QR} = \overline{OQ} \times \tan \frac{\pi}{3} = 6\sqrt{3}$$

삼각형 ORQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OQ} \times \overline{QR} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$$

부채꼴 OPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \frac{\pi}{3} = 6\pi$$

따라서 호 PQ와 두 선분 PR, QR로 둘러싸인 색칠한 도형의 넓이는  $18\sqrt{3} - 6\pi$ 이다.

답 ③

### 2 조건 (가)에서 $7\theta - \theta = 2n\pi$ ( $n$ 은 정수)

$$\text{즉, } \theta = \frac{n}{3} \pi$$

이때  $0 < \theta < 2\pi$ 이므로

$$0 < \frac{n}{3} \pi < 2\pi$$

$$0 < n < 6$$

$n$ 은 정수이므로

$$n = 1, 2, 3, 4, 5$$

조건 (나)에서  $\sin \theta < 0$ ,  $\cos \theta > 0$ 이므로

$$n = 5$$

## 정답과 풀이

따라서  $\theta = \frac{5}{3}\pi$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin(\theta - \pi) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) \\ &= -\sin(\pi - \theta) - \sin \theta \\ &= -\sin \theta - \sin \theta \\ &= -2 \sin \theta \\ &= -2 \sin \frac{5}{3}\pi \\ &= -2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

답 ⑤

3  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta + (1 + \sin \theta)^2}{(1 + \sin \theta) \times \cos \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta + 1 + 2 \sin \theta + \sin^2 \theta}{\cos \theta(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{2 + 2 \sin \theta}{\cos \theta(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{2(1 + \sin \theta)}{\cos \theta(1 + \sin \theta)} \\ &= -6 \\ \sin \theta > 0 \text{이므로} \\ \frac{2}{\cos \theta} &= -6 \\ \cos \theta &= -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \\ \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sin \theta \times \tan \theta &= \sin \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} \\ &= -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

답 ①

4  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 이므로

$$\tan^2 \theta - 8 \tan \theta + 1 = 0 \text{에서}$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - 8 \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + 1 = 0$$

양변에  $\cos^2 \theta$ 를 곱하면

$$\sin^2 \theta - 8 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 0$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$1 - 8 \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{8}$$

한편,

$$\begin{aligned} (\sin \theta + \cos \theta)^2 \\ &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + 2 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

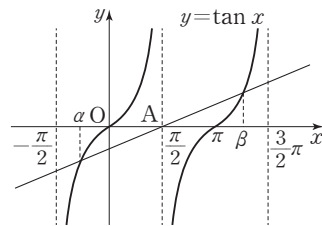
$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 에서  $\sin \theta < 0$ ,  $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta + \cos \theta < 0$$

$$\text{따라서 } \sin \theta + \cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

답 ①

5  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$ 에서 점  $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 을 지나고 기울기가 양수인 직선과 함수  $y = \tan x$ 의 그래프는 그림과 같다.



함수  $y = \tan x$ 의 그래프는 주기가  $\pi$ 이므로

$$\beta - \pi = 0 - \alpha \text{에서}$$

$$\alpha + \beta = \pi$$

한편,  $\beta - 2\alpha = 2\pi$ 이므로

$$\alpha = -\frac{\pi}{3}, \beta = \frac{4}{3}\pi$$

따라서

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + 2\beta) &= \tan\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{8}{3}\pi\right) \\ &= \tan \frac{7}{3}\pi \end{aligned}$$

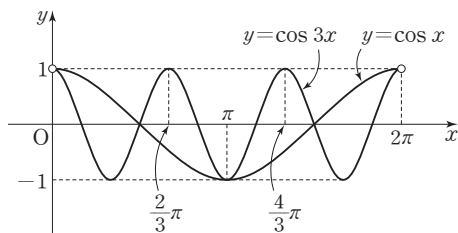


$$= \tan \frac{\pi}{3}$$

$$= \sqrt{3}$$

답 ④

- 6 두 함수  $y = \cos x$ 와  $y = \cos 3x$ 의 주기가 각각  $2\pi$ ,  $\frac{2}{3}\pi$ 이므로  $0 < x < 2\pi$ 에서 두 함수  $y = \cos x$ 와  $y = \cos 3x$ 의 그래프는 [그림 1]과 같다.

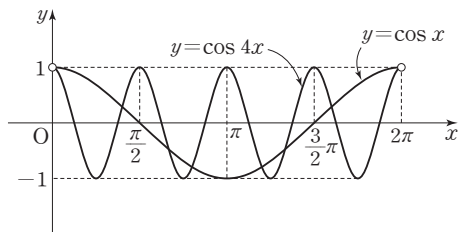


[그림 1]

[그림 1]에서 두 곡선의 교점의 개수가 3이므로

$$a = 3$$

두 함수  $y = \cos x$ 와  $y = \cos 4x$ 의 주기가 각각  $2\pi$ ,  $\frac{\pi}{2}$ 이므로  $0 < x < 2\pi$ 에서 두 함수  $y = \cos x$ 와  $y = \cos 4x$ 의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

[그림 2]에서 두 곡선의 교점의 개수가 6이므로

$$b = 6$$

$$\text{따라서 } a + b = 3 + 6 = 9$$

답 9

- 7 함수  $y = 2 \sin \pi(x + a) - 1$ 의 그래프의 주기가  $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ 이므로
- $$c = 2$$
- $$\frac{b+c}{2} = \frac{5}{3} \text{이므로}$$
- $$\frac{b+2}{2} = \frac{5}{3}$$

$$b = \frac{4}{3}$$

함수  $y = 2 \sin \pi(x + a) - 1$ 에  $x = 0$ 을 대입하면

$$2 \sin a\pi - 1 = 0$$

$$\sin a\pi = \frac{1}{2}$$

$$0 < a < 1 \text{이므로}$$

$$0 < a\pi < \pi$$

$$a = \frac{1}{6} \text{ 또는 } a = \frac{5}{6}$$

$$(i) a = \frac{1}{6} \text{일 때}$$

함수  $y = 2 \sin \pi\left(x + \frac{1}{6}\right) - 1$ 에  $x = \frac{5}{3}$ 를 대입하면

$$2 \sin \pi\left(\frac{5}{3} + \frac{1}{6}\right) - 1 = 2 \sin \frac{11}{6}\pi - 1$$

$$= 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 1$$

$$= -2$$

이므로 그래프를 만족시키지 않는다.

$$(ii) a = \frac{5}{6} \text{일 때}$$

함수  $y = 2 \sin \pi\left(x + \frac{5}{6}\right) - 1$ 에  $x = \frac{5}{3}$ 를 대입하면

$$2 \sin \pi\left(\frac{5}{3} + \frac{5}{6}\right) - 1 = 2 \sin \frac{5}{2}\pi - 1$$

$$= 1$$

이므로 그래프를 만족시킨다.

$$(i), (ii) \text{에서 } a = \frac{5}{6}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{5}{6}, b = \frac{4}{3}, c = 2 \text{이므로}$$

$$a + b + c = \frac{5}{6} + \frac{4}{3} + 2 = \frac{25}{6}$$

$$\text{즉, } p = 6, q = 25 \text{이므로}$$

$$p + q = 6 + 25 = 31$$

답 31

참고

$$\frac{b+c}{2} = \frac{5}{3} \text{이므로 } b+c = \frac{10}{3}$$

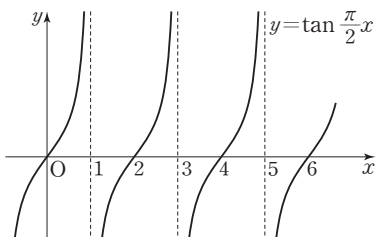
$$\text{따라서 } a = \frac{5}{6}, b+c = \frac{10}{3} \text{이므로}$$

$$a+b+c = \frac{5}{6} + \frac{10}{3} = \frac{25}{6}$$

- 8 함수  $y = \tan \frac{\pi}{2}x$ 는 주기가  $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2$ 이므로

함수  $y = \tan \frac{\pi}{2}x$ 의 그래프는 그림과 같다.

## 정답과 풀이



방정식  $\tan \frac{\pi}{2}x = a$ 의 해는 함수  $y = \tan \frac{\pi}{2}x$ 의 그래프와 직선  $y = a$ 가 만나는 점의  $x$ 좌표이고, 방정식  $\tan \frac{\pi}{2}x = a$ 는 정수인 해를 가지므로  $a = 0$

따라서 방정식  $\tan \frac{\pi}{2}x = a$ 의 10 이하의 모든 자연수인 해는 2, 4, 6, 8, 10이므로 그 합은  $2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$

답 30

9  $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$ 에서  $\frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \pi$ 이므로

$$0 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$$

따라서 함수  $g(x) = 3 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$ 의 최댓값은 4, 최솟값은 1이다.

즉,  $1 \leq g(x) \leq 4$ 이므로

$$g(x) = t \text{라 하면 } 1 \leq t \leq 4$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(t) = \log_2 t + 1$$

$$\log_2 1 \leq \log_2 t \leq \log_2 4$$

$$0 \leq \log_2 t \leq 2$$

$$1 \leq \log_2 t + 1 \leq 3$$

$$1 \leq (f \circ g)(x) \leq 3$$

따라서 합성함수  $(f \circ g)(x)$ 의 최댓값은 3, 최솟값은 1이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$$3 + 1 = 4$$

답 ③

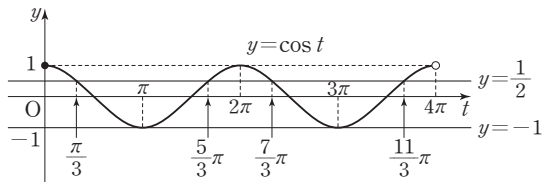
10  $\left|\cos 2x + \frac{1}{4}\right| = \frac{3}{4}$ 에서

$$2x = t \ (0 \leq t < 4\pi) \text{라 하면}$$

$$\left|\cos t + \frac{1}{4}\right| = \frac{3}{4}$$

$$\cos t + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ 또는 } \cos t + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{즉, } \cos t = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos t = -1$$



(i)  $\cos t = \frac{1}{2}$ 일 때

함수  $y = \cos t$ 의 그래프와 직선  $y = \frac{1}{2}$ 이 만나는 서로 다른 네 점의  $t$ 좌표는  $\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi, \frac{7}{3}\pi, \frac{11}{3}\pi$ 이다.

이때  $t = 2x$ 이므로 방정식  $\cos 2x = \frac{1}{2}$ 을 만족시키는 서로 다른  $x$ 의 값은

$$\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \text{이고, 그 합은}$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi + \frac{7}{6}\pi + \frac{11}{6}\pi = 4\pi$$

(ii)  $\cos t = -1$ 일 때

함수  $y = \cos t$ 의 그래프와 직선  $y = -1$ 이 만나는 서로 다른 두 점의  $t$ 좌표는  $\pi, 3\pi$ 이다.

이때  $t = 2x$ 이므로

방정식  $\cos 2x = -1$ 을 만족시키는 서로 다른  $x$ 의 값은

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \text{이고, 그 합은}$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi = 2\pi$$

(i), (ii)에서  $x$ 의 최댓값은  $\frac{11}{6}\pi$ , 최솟값은  $\frac{\pi}{6}$ 이고,

서로 다른 모든  $x$ 의 값의 합은  $4\pi + 2\pi = 6\pi$ 이므로

$$a = \frac{11}{6}\pi, b = \frac{\pi}{6}, c = 6\pi$$

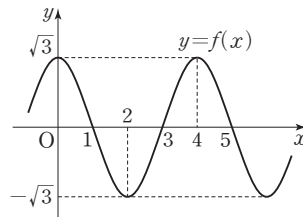
$$\text{따라서 } \frac{c}{a+b} = \frac{6\pi}{\frac{11}{6}\pi + \frac{\pi}{6}} = \frac{6\pi}{2\pi} = 3$$

답 3

11 함수  $f(x) = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{2}x$ 는 최솟값과 최댓값이 각각  $-\sqrt{3}$ ,

$\sqrt{3}$ 이고, 주기가  $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ 이므로 함수  $y = f(x)$ 의 그래프는

그림과 같다.



함수  $y = \tan \frac{\pi}{n} x$ 는 주기가  $\frac{\pi}{\frac{\pi}{n}} = n$ 이고, 점근선의 방정식

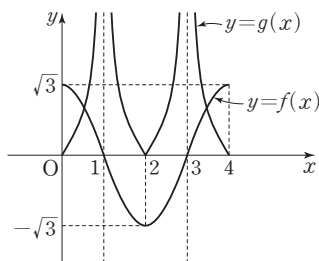
이  $x = \frac{n}{2} + nm$  ( $m$ 은 정수)이다.

(i)  $n=2$ 일 때, 함수  $y = \tan \frac{\pi}{2} x$ 는 주기가 2이고,

점근선의 방정식이  $x=1+2m$  ( $m$ 은 정수)이므로

$0 \leq x \leq 4$ 에서 두 함수  $f(x) = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{2} x$ ,

$g(x) = \left| \tan \frac{\pi}{2} x \right|$ 의 그래프가 만나는 점의 개수는 2이다.



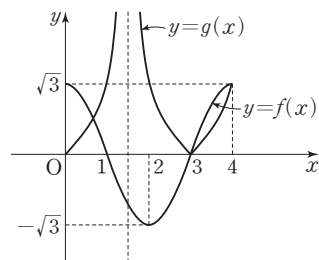
(ii)  $n=3$ 일 때, 함수  $y = \tan \frac{\pi}{3} x$ 는 주기가 3이고,

점근선의 방정식이  $x = \frac{3}{2} + 3m$  ( $m$ 은 정수)이다.

또한 함수  $y = \tan \frac{\pi}{3} x$ 의 그래프는 점  $(4, \sqrt{3})$ 을 지나

므로  $0 \leq x \leq 4$ 에서 두 함수  $f(x) = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{2} x$ ,

$g(x) = \left| \tan \frac{\pi}{3} x \right|$ 의 그래프가 만나는 점의 개수는 3이다.

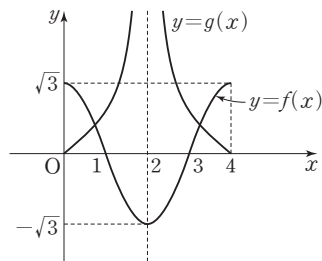


(iii)  $n=4$ 일 때, 함수  $y = \tan \frac{\pi}{4} x$ 는 주기가 4이고,

점근선의 방정식이  $x=2+4m$  ( $m$ 은 정수)이므로

$0 \leq x \leq 4$ 에서 두 함수  $f(x) = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{2} x$ ,

$g(x) = \left| \tan \frac{\pi}{4} x \right|$ 의 그래프가 만나는 점의 개수는 2이다.



(iv)  $n=5$ 일 때, 함수  $y = \tan \frac{\pi}{5} x$ 는 주기가 5이고,

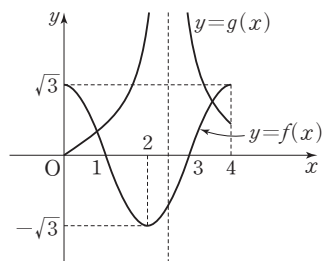
점근선의 방정식이  $x = \frac{5}{2} + 5m$  ( $m$ 은 정수)이다.

또한  $\frac{4}{5}\pi > \frac{2}{3}\pi$ 이므로  $\tan \frac{4}{5}\pi > \tan \frac{2}{3}\pi = -\sqrt{3}$

즉,  $\left| \tan \frac{4}{5}\pi \right| < \sqrt{3}$

그러므로  $0 \leq x \leq 4$ 에서 두 함수  $f(x) = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{2} x$ ,

$g(x) = \left| \tan \frac{\pi}{5} x \right|$ 의 그래프가 만나는 점의 개수는 2이다.



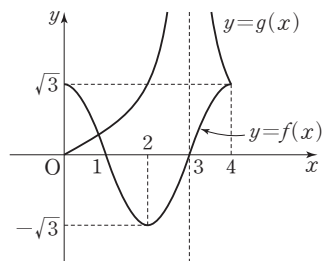
(v)  $n=6$ 일 때, 함수  $y = \tan \frac{\pi}{6} x$ 는 주기가 6이고,

점근선의 방정식이  $x=3+6m$  ( $m$ 은 정수)이다.

또한 함수  $y = \tan \frac{\pi}{6} x$ 의 그래프는 점  $(4, -\sqrt{3})$ 을 지나

나므로  $0 \leq x \leq 4$ 에서 두 함수  $f(x) = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{2} x$ ,

$g(x) = \left| \tan \frac{\pi}{6} x \right|$ 의 그래프가 만나는 점의 개수는 2이다.



따라서 (i)~(v)에서 조건을 만족시키는  $n$ 의 값은 3이다.

답 ②

## 정답과 풀이

### 12 $\sin x = t$ ( $-1 \leq t \leq 1$ )이라 하면

부등식  $\sin^2 x - 4 \sin x + 7 - k \geq 0$ 에서

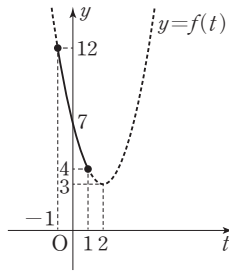
$$t^2 - 4t + 7 - k \geq 0$$

$$(t-2)^2 + 3 - k \geq 0$$

$$(t-2)^2 + 3 \geq k$$

$f(t) = (t-2)^2 + 3$ 이라 하면  $-1 \leq t \leq 1$ 일 때 함수  $f(t)$ 는  $t=1$ 에서 최솟값  $f(1)=4$ 를 갖는다.

즉, 주어진 부등식이 항상 성립하려면  $-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수  $y=f(t)$ 의 그래프가 직선  $y=k$ 의 위쪽에 있거나 직선  $y=k$ 가 점 (1, 4)를 지나야 한다.



따라서  $k \leq 4$ 이므로 실수  $k$ 의 최댓값은 4이다.

답 ①

### Level 3 실력 완성

본문 51쪽

1 3      2 ⑤      3 ③

### 1 함수 $y = 2 \cos \pi x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ 이고,

최댓값은 2, 최솟값은 -2이다.

두 점 A, B의 x좌표를 각각  $\alpha, \beta$ 라 하면

두 점 A, B의 좌표는 각각  $A(\alpha, m)$ ,  $B(\beta, m)$ 이다.

직선 OA의 기울기가 직선 OB의 기울기의 7배이므로

$$\frac{m}{\alpha} = 7 \times \frac{m}{\beta}$$

$$0 < m < 2 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{7}{\beta}$$

$$\beta = 7\alpha$$

함수  $y = 2 \cos \pi x$ 의 그래프는 직선  $x=1$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 1$$

$$\frac{\alpha + 7\alpha}{2} = 1$$

$$4\alpha = 1$$

$$\text{즉, } \alpha = \frac{1}{4}, \beta = \frac{7}{4}$$

선분 AB의 길이가  $n$ 이므로

$$n = \beta - \alpha = \frac{7}{4} - \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

한편, 점  $A\left(\frac{1}{4}, m\right)$ 은 함수  $y = 2 \cos \pi x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$m = 2 \cos \frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\text{따라서 } m^2 \times n = (\sqrt{2})^2 \times \frac{3}{2} = 3$$

답 3

### 2 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 이므로

$$y = -\cos^2 x - 2a \sin x + a + 4$$

$$= -(1 - \sin^2 x) - 2a \sin x + a + 4$$

$$= \sin^2 x - 2a \sin x + a + 3$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서  $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로

$\sin x = t$  ( $-1 \leq t \leq 1$ )이라 하면

$$y = t^2 - 2at + a + 3$$

$$= (t-a)^2 - a^2 + a + 3$$

함수  $y = t^2 - 2at + a + 3$ 의 최솟값  $f(a)$ 와 방정식

$3f(a) - a + 4 = 0$ 의 실근은  $a$ 의 값의 범위에 따라 다음과 같다.

(i)  $a \leq -1$ 일 때

함수  $y = t^2 - 2at + a + 3$ 은  $t = -1$ 일 때 최소이므로

$$f(a) = 3a + 4$$

$$3f(a) - a + 4 = 0 \text{에서}$$

$$3(3a + 4) - a + 4 = 0$$

$$8a + 16 = 0$$

$$a = -2$$

$$a \leq -1 \text{이므로 } a = -2$$

(ii)  $-1 < a < 1$ 일 때

함수  $y = t^2 - 2at + a + 3 = (t-a)^2 - a^2 + a + 3$ 은

$t = a$ 일 때 최소이므로

$$f(a) = -a^2 + a + 3$$

$$3f(a) - a + 4 = 0 \text{에서}$$

$$3(-a^2 + a + 3) - a + 4 = 0$$

$$-3a^2 + 2a + 13 = 0$$

$$g(a) = -3a^2 + 2a + 13 \text{이라 하면}$$

$$g(a) = -3a^2 + 2a + 13 = -3\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{40}{3}$$

$g(-1)=8>0$ ,  $g(1)=12>0$ 이므로

$-1<a<1$ 에서  $g(a)=0$ 이 되는  $a$ 의 값은 존재하지 않는다.

(iii)  $a \geq 1$ 일 때

함수  $y=t^2-2at+a+3$ 은  $t=1$ 일 때 최소이므로

$$f(a)=-a+4$$

$$3f(a)-a+4=0$$

$$3(-a+4)-a+4=0$$

$$-4a+16=0$$

$$a=4$$

$$a \geq 1 \text{이므로 } a=4$$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 모든 실수  $a$ 의 값은

$-2, 4$ 이므로 그 합은

$$-2+4=2$$

답 ⑤

3  $g(x)=t$ 라 하면

$$t=2 \sin \frac{\pi}{n} x, -2 \leq t \leq 2$$

한편, 방정식  $(f \circ g)(x)=1$ 에서

$$f(g(x))=1$$

$$f(t)=1$$

$$\cos 2\pi t=1$$

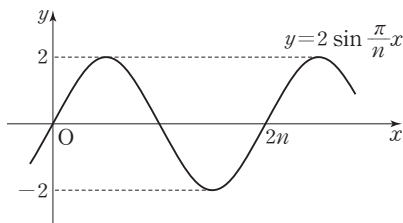
$$2\pi t=2k\pi \quad (k \text{는 정수})$$

$$-2 \leq t \leq 2 \text{이므로}$$

$$t=-2, -1, 0, 1, 2$$

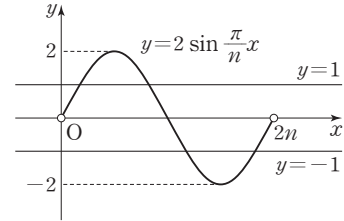
한편, 함수  $y=2 \sin \frac{\pi}{n} x$ 는 최솟값과 최댓값이 각각  $-2$ ,

$2$ 이고 주기가  $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{n}}=2n$ 이므로 그래프는 그림과 같다.



방정식  $t=2 \sin \frac{\pi}{n} x$ 의 서로 다른 실근의 개수는

함수  $y=2 \sin \frac{\pi}{n} x$ 의 그래프와 직선  $y=t$ 가 만나는 점의 개수이므로  $0 < x < 2n$ 에서  $t$ 의 값에 따라 서로 다른 실근의 개수는 다음과 같다.



(i)  $2 \sin \frac{\pi}{n} x = -2$ 일 때,

서로 다른 실근의 개수는 1

(ii)  $2 \sin \frac{\pi}{n} x = -1$ 일 때,

서로 다른 실근의 개수는 2

(iii)  $2 \sin \frac{\pi}{n} x = 0$ 일 때,

서로 다른 실근의 개수는 1

(iv)  $2 \sin \frac{\pi}{n} x = 1$ 일 때,

서로 다른 실근의 개수는 2

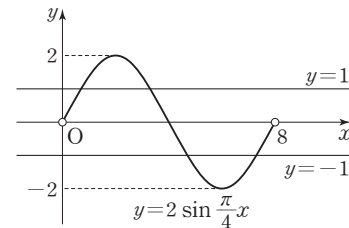
(v)  $2 \sin \frac{\pi}{n} x = 2$ 일 때,

서로 다른 실근의 개수는 1

따라서  $0 < x < 2n$ 에서  $t = -2, -1, 0, 1, 2$ 일 때 방정식

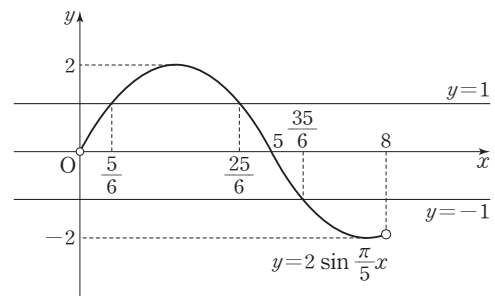
$t=2 \sin \frac{\pi}{n} x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 7이므로  $n=4$ 일

때  $0 < x < 8$ 에서 방정식  $(f \circ g)(x)=1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.



$n=5$ 이면  $\frac{3}{2}\pi < \frac{8}{5}\pi$ 이므로  $0 < x < 8$ 에서 방정식

$(f \circ g)(x)=1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

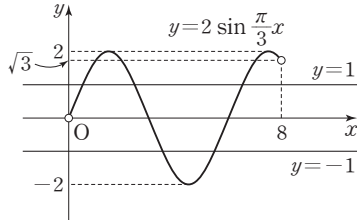


## 정답과 풀이

따라서  $n \leq 3$ 인 경우를 확인한다.

$0 < x < 8$ 에서 방정식  $(f \circ g)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 자연수  $n$  ( $n \leq 3$ )의 값에 따라 다음과 같다.

㉠  $n=3$ 일 때,



방정식  $2 \sin \frac{\pi}{3} x = -2$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1

방정식  $2 \sin \frac{\pi}{3} x = -1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2

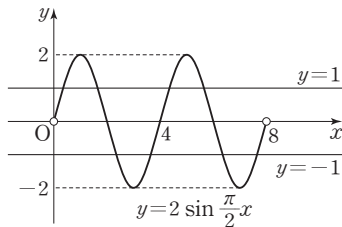
방정식  $2 \sin \frac{\pi}{3} x = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2

방정식  $2 \sin \frac{\pi}{3} x = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3

방정식  $2 \sin \frac{\pi}{3} x = 2$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2

그러므로  $0 < x < 8$ 에서 방정식  $(f \circ g)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 10이다.

㉢  $n=2$ 일 때,



방정식  $2 \sin \frac{\pi}{2} x = -2$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2

방정식  $2 \sin \frac{\pi}{2} x = -1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4

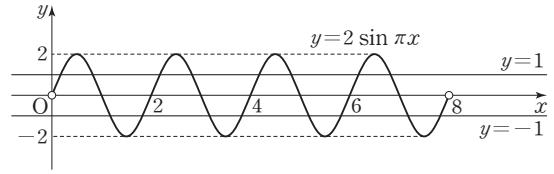
방정식  $2 \sin \frac{\pi}{2} x = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3

방정식  $2 \sin \frac{\pi}{2} x = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4

방정식  $2 \sin \frac{\pi}{2} x = 2$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2

그러므로  $0 < x < 8$ 에서 방정식  $(f \circ g)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 15이다.

㉡  $n=1$ 일 때,



방정식  $2 \sin \pi x = -2$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4

방정식  $2 \sin \pi x = -1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 8

방정식  $2 \sin \pi x = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 7

방정식  $2 \sin \pi x = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 8

방정식  $2 \sin \pi x = 2$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4

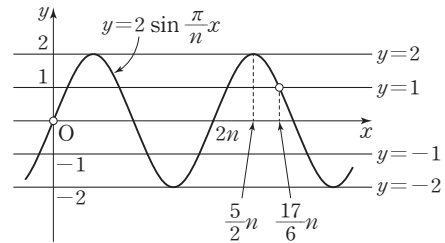
따라서  $0 < x < 8$ 에서 방정식  $(f \circ g)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 31이다.

따라서 ㉠, ㉢, ㉡에 의하여 구하는  $n$ 의 값은 3이다.

답 ③

### 참고

함수  $y = 2 \sin \frac{\pi}{n} x$ 의 그래프와 직선  $y = t$  ( $t = -2, -1, 0, 1, 2$ )는 그림과 같다.



방정식  $t = 2 \sin \frac{\pi}{n} x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수

$y = 2 \sin \frac{\pi}{n} x$ 의 그래프와 직선  $y = t$ 가 만나는 점의 개수이다. 그러므로  $0 < x < 8$ 에서 서로 다른 실근의 개수가 10이기 위한  $n$ 의 범위를 구하면

$$\frac{5}{2}n < 8 \leq \frac{17}{6}n \text{에서}$$

$$\frac{48}{17} \leq n < \frac{16}{5}$$

따라서 자연수  $n$ 의 값은 3이다.

## 04 사인법칙과 코사인법칙

유제

본문 55~61쪽

- 1 ④      2 ①      3 7      4 45      5 8  
6 ②      7 ③      8 8

- 1 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 1이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2 \times 1 = 2$$

$$BC = 2 \sin A, CA = 2 \sin B, AB = 2 \sin C \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} BC + CA + AB &= 2 \sin A + 2 \sin B + 2 \sin C \\ &= 2(\sin A + \sin B + \sin C) \\ &= 4 \end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는 4이다.

답 ④

- 2  $4 \cos^2 A - 5 \sin A + 2 = 0$ 에서  
 $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$ 이므로  
 $4(1 - \sin^2 A) - 5 \sin A + 2 = 0$   
 $4 \sin^2 A + 5 \sin A - 6 = 0$   
 $(\sin A + 2)(4 \sin A - 3) = 0$

$$\sin A = -2 \text{ 또는 } \sin A = \frac{3}{4}$$

$$\sin A > 0 \text{ 이므로}$$

$$\sin A = \frac{3}{4} \quad \dots\dots ①$$

$$A + B + C = \pi \text{ 이므로}$$

$$B + C = \pi - A$$

$$\overline{AB} = \overline{AC} \text{ 이므로}$$

$$B = C \text{ 에서}$$

$$B = C = \frac{\pi - A}{2}$$

점 O는 삼각형 ABC의 외심이므로

$$\angle AOB = 2C = 2 \times \frac{\pi - A}{2} = \pi - A$$

삼각형 OAB의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle AOB)} = 2R$$

①에서

$$\sin(\angle AOB) = \sin(\pi - A) = \sin A = \frac{3}{4} \text{ 이므로}$$

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = 2R$$

$$2R = 4$$

$$R = 2$$

따라서 삼각형 OAB의 외접원의 반지름의 길이는 2이다.

답 ①

- 3 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos B$$

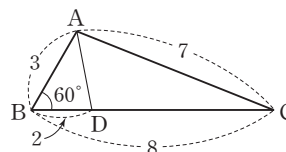
$$7^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \times 3 \times 8 \times \cos B$$

$$\cos B = \frac{1}{2}$$

$$\text{이므로 } \angle B = 60^\circ$$

이때 선분 BC를 1 : 3으로 내분하는 점이 D이므로

$$\overline{BD} = 2$$



삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \cos 60^\circ$$

$$= 13 - 6$$

$$= 7$$

답 7

- 4 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하자.  
 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ 이므로}$$

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

$$\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 7 \text{ 에서}$$

$$\frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R} = 3 : 5 : 7$$

$$\text{즉, } a : b : c = 3 : 5 : 7$$

양수 k에 대하여  $a = 3k, b = 5k, c = 7k$ 라 하면

코사인법칙에 의하여

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$(7k)^2 = (3k)^2 + (5k)^2 - 2 \times 3k \times 5k \times \cos C$$

$$k^2 > 0 \text{ 이므로 양변을 } k^2 \text{ 으로 나누면}$$

$$49 = 9 + 25 - 30 \cos C$$

## 정답과 풀이

$$\cos C = -\frac{1}{2}$$

이므로  $\angle C = 120^\circ$

$\sin C = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{c}{\sin C} = 2 \times 7\sqrt{3}$$

$$c = 14\sqrt{3} \times \sin C$$

$$= 14\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 21$$

$$c = 7k = 21 \text{이므로}$$

$$k = 3$$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$a + b + c = 3k + 5k + 7k = 15k = 15 \times 3 = 45$$

답 45

5 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

조건 (가)에서  $b \cos C = c \cos B$ 이므로

$$b \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = c \times \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

$$b^2 = c^2$$

$b > 0, c > 0$ 이므로

$$b = c \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (나)에서  $\cos^2(A+B) = \cos^2 A + \sin^2 B$ 이고

$A+B+C=\pi$ 이므로

$$A+B=\pi-C$$

$$\cos^2(\pi-C) = \cos^2 A + \sin^2 B$$

$$\cos^2 C = \cos^2 A + \sin^2 B$$

$$1 - \sin^2 C = (1 - \sin^2 A) + \sin^2 B$$

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를  $R$ 라 하면  
사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R} \text{이므로}$$

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 삼각형 ABC는  $\angle A = 90^\circ$ 이고  $b=c$ 인 직각이  
등변삼각형이므로 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$

답 8

6 조건 (가)에서

$$\sin A + \sin B \cos(A+B) = 0$$

$$\sin A + \sin B \cos(\pi-C) = 0$$

$$\sin A - \sin B \cos C = 0$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를  $R$ 라 하면  
사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R} \text{이고,}$$

코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \text{이므로}$$

$$\frac{a}{2R} - \frac{b}{2R} \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 0$$

양변에  $4aR$ 를 곱하면

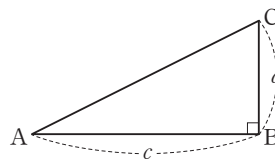
$$2a^2 - (a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

$$a^2 - b^2 + c^2 = 0$$

$$b^2 = a^2 + c^2$$

따라서 삼각형 ABC는  $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이고, 조건  
(나)에서  $2 \sin A = \sin C$ 이므로

$$2 \times \frac{a}{2R} = \frac{c}{2R}$$



즉,  $2a = c$ 이므로

$$\tan A = \frac{a}{c} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

답 ②

7 삼각형 ABC에서  $A+B+C=\pi$ 이므로

$$\cos(A+B) = \cos(\pi-C) = -\cos C = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{즉, } \cos C = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\sin C > 0$ 이므로



$$\sin C = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CA} \times \sin C = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \frac{1}{3} = 4$$

답 ③

8 세 선분 AB, BC, CA가 삼각형의 세 변이므로

$$\overline{AB}=1, \overline{BC}=2, \overline{CA}>\sqrt{5} \text{에서}$$

$$\sqrt{5} < \overline{CA} < 3$$

$\angle ABC = \theta$ 라 하면

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{에서}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

$$\cos \theta = -\frac{3}{4} \text{ 또는 } \cos \theta = \frac{3}{4}$$

둔각삼각형 ABC에서  $\overline{CA} > \sqrt{5}$ 이므로  $\cos \theta < 0$

$$\text{즉, } \cos \theta = -\frac{3}{4}$$

따라서 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CA}^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos \theta$$

$$= 5 - 4 \times \cos \theta$$

$$= 5 - 4 \times \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$= 8$$

답 8

### Level 1 기초 연습

본문 62~63쪽

- |     |     |       |     |     |
|-----|-----|-------|-----|-----|
| 1 ① | 2 ② | 3 ②   | 4 ① | 5 ③ |
| 6 7 | 7 5 | 8 108 |     |     |

1 삼각형 ABC에서

$$C = 180^\circ - (100^\circ + 35^\circ) = 45^\circ$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면  
사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2R \text{이므로 } \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R$$

$$4\sqrt{2} = 2R$$

$$\text{따라서 } R = 2\sqrt{2}$$

답 ①

2 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면  
사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{CA}}{\sin B} = \frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2R$$

$$\sin A = \frac{\overline{BC}}{2R}, \sin B = \frac{\overline{CA}}{2R}, \sin C = \frac{\overline{AB}}{2R}$$

$$\sin A : \sin B : \sin C = \frac{\overline{BC}}{2R} : \frac{\overline{CA}}{2R} : \frac{\overline{AB}}{2R} \\ = \overline{BC} : \overline{CA} : \overline{AB} \quad \dots\dots ㉠$$

양수 k에 대하여

$$2 \sin A = 2\sqrt{3} \sin B = \sqrt{3} \sin C = k \text{라 하면}$$

$$\sin A = \frac{k}{2}, \sin B = \frac{k}{2\sqrt{3}}, \sin C = \frac{k}{\sqrt{3}} \text{이므로}$$

$$\sin A : \sin B : \sin C = \frac{k}{2} : \frac{k}{2\sqrt{3}} : \frac{k}{\sqrt{3}} \\ = \frac{1}{2} : \frac{1}{2\sqrt{3}} : \frac{1}{\sqrt{3}} \\ = \sqrt{3} : 1 : 2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\overline{BC} : \overline{CA} : \overline{AB} = \sqrt{3} : 1 : 2 \text{이므로}$$

$$\angle BCA = 90^\circ, \angle CAB = 60^\circ, \angle ABC = 30^\circ$$

$$\text{따라서 } \cos A = \cos (\angle CAB) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

답 ②

### 참고

$$\overline{BC} : \overline{CA} : \overline{AB} = \sqrt{3} : 1 : 2 \text{이므로}$$

양수 s에 대하여

$$\overline{BC} = \sqrt{3}s, \overline{CA} = s, \overline{AB} = 2s \text{라 하면}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{CA} \times \cos A$$

$$(\sqrt{3}s)^2 = (2s)^2 + s^2 - 2 \times 2s \times s \times \cos A$$

$$3s^2 = 5s^2 - 4s^2 \cos A$$

$$\text{따라서 } \cos A = \frac{1}{2}$$

3 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos 60^\circ$$

$$= 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2}$$

$$= 7$$

이므로

$$\overline{BC} = \sqrt{7}$$

이때 원 O의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin (\angle BAC)} = 2R$$

## 정답과 풀이

$$\frac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$\frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R, R = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

따라서 원  $O$ 의 넓이는  $\frac{7}{3}\pi$ 이다.

답 ②

- 4 삼각형  $ABC$ 에서  $\overline{BC} = x$ 라 하면  
코사인법칙에 의하여  
 $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AC} \times \overline{BC} \times \cos 30^\circ$ 이므로

$$2^2 = (2\sqrt{3})^2 + x^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times x \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

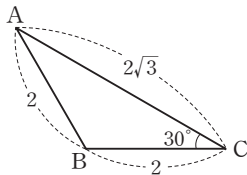
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x-2)(x-4) = 0$$

$$x = 2 \text{ 또는 } x = 4$$

(i)  $x = 2$ 일 때

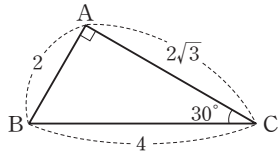
$\overline{AB} = \overline{BC} = 2$ 이므로 삼각형  $ABC$ 는 이등변삼각형이다.



즉,  $\angle A = \angle C = 30^\circ$ ,  $\angle B = 120^\circ$ 이므로 조건을 만족시킨다.

(ii)  $x = 4$ 일 때

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 이므로 삼각형  $ABC$ 는  $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.



이는 삼각형  $ABC$ 가 둔각삼각형이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 선분  $BC$ 의 길이는 2이다.

답 ①

### 다른 풀이

삼각형  $ABC$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin B} = \frac{\overline{AB}}{\sin C}, \frac{2\sqrt{3}}{\sin B} = \frac{2}{\sin 30^\circ}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin B} = \frac{2}{\frac{1}{2}}$$

$$\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$B = 60^\circ \text{ 또는 } B = 120^\circ$$

$B = 60^\circ$ 이면  $A = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$ 가 되어 둔각삼각형이라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서  $B = 120^\circ$ 이고,

$$A = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 30^\circ \text{이므로}$$

삼각형  $ABC$ 는 이등변삼각형이다.

즉,  $\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서

$$\overline{BC} = 2$$

- 5 삼각형  $ABC$ 에서  $\overline{AC} = x$ 라 하면

코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos (\angle CAB)$$

$$(2\sqrt{3})^2 = 2^2 + x^2 - 2 \times 2 \times x \times \cos 60^\circ$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x+2)(x-4) = 0$$

$$x > 0 \text{이므로 } x = 4$$

$$\text{즉, } \overline{AC} = 4$$

따라서 삼각형  $ABC$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin (\angle CAB)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

답 ③

- 6 양수  $k$ 에 대하여

$$\sin (\angle DAB) = 4k, \sin (\angle CAD) = k, \overline{AD} = x \text{라 하면}$$

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{AB} \times \sin (\angle DAB)$$

$$= \frac{1}{2} \times x \times 7 \times 4k$$

$$T = \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{AC} \times \sin (\angle CAD)$$

$$= \frac{1}{2} \times x \times 4 \times k$$

이므로

$$\frac{S}{T} = \frac{\frac{1}{2} \times x \times 7 \times 4k}{\frac{1}{2} \times x \times 4 \times k} = 7$$

답 7

7 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여  

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{CA}}{\sin B} = \frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2$$

$$\overline{AB} = 2 \sin C, \overline{BC} = 2 \sin A, \overline{CA} = 2 \sin B$$
 이고 조건 (가)에서  $\overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{CA} = 6$ 이므로  

$$2 \sin C \times 2 \sin A \times 2 \sin B = 6$$

$$\sin A \times \sin B \times \sin C = \frac{3}{4}$$

삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CA} \times \sin C \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \sin A \times 2 \sin B \times \sin C \\ &= 2 \times \sin A \times \sin B \times \sin C \\ &= 2 \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

따라서  $p=2, q=3$ 이므로  
 $p+q=2+3=5$

**다른 풀이**

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} & \frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2 \\ & \text{즉, } \sin C = \frac{\overline{AB}}{2} \\ & \text{삼각형 ABC의 넓이는} \\ & \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CA} \times \sin C \\ &= \frac{1}{4} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{CA} \\ &= \frac{1}{4} \times 6 \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

따라서  $p=2, q=3$ 이므로  
 $p+q=2+3=5$

8  $\overline{AB}=x$ 라 하면 마름모 ABCD의 넓이는  

$$2 \times \frac{1}{2} \times x \times x \times \sin (\angle DAB) = x^2 \times \sin 30^\circ$$

$$= \frac{x^2}{2}$$

$$= 18$$

$$x^2 = 36 \text{이고 } x > 0 \text{이므로}$$

$$x = 6$$

$$\angle DAB = 30^\circ \text{이므로 } \angle ABC = 150^\circ$$

답 5

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여  

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos (\angle ABC) \\ &= 6^2 + 6^2 - 2 \times 6 \times 6 \times \cos 150^\circ \\ &= 6^2 + 6^2 - 2 \times 6 \times 6 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 72 + 36\sqrt{3} \end{aligned}$$
 따라서  $m=72, n=36$ 이므로  
 $m+n=72+36=108$

답 108

**Level 2 기본 연습**

본문 64~66쪽

1 ㉔	2 ㉔	3 20	4 ㉔	5 550
6 ㉔	7 ㉔	8 ㉔	9 ㉔	

1 삼각형 ABC에서  $\overline{AB} = \overline{AC}$ ,  $\angle CAB = 120^\circ$ 이므로  
 $\angle ABC = \angle ACB = 30^\circ$   
 $\overline{BP} = x \left(0 < x < \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ 이라 하면 삼각형 PBC에서 코사인  
 법칙에 의하여  

$$\begin{aligned} \overline{CP}^2 &= x^2 + 4^2 - 2 \times x \times 4 \times \cos 30^\circ \\ &= x^2 + 16 - 4\sqrt{3}x \end{aligned}$$
 이므로  

$$\begin{aligned} \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 &= x^2 + (x^2 + 16 - 4\sqrt{3}x) \\ &= 2x^2 - 4\sqrt{3}x + 16 \\ &= 2(x - \sqrt{3})^2 + 10 \end{aligned}$$
 $\overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 은  $x = \sqrt{3}$ 일 때, 최솟값 10을 갖는다.  
 즉,  $\overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 은  $\overline{BP} = \sqrt{3}$ ,  $\overline{CP} = \sqrt{7}$ 일 때 최솟값을 가지  
 므로 삼각형 PBC에서 코사인법칙에 의하여  

$$4^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{7})^2 - 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{7} \times \cos (\angle CPB)$$
 따라서  $\cos (\angle CPB) = \frac{-6}{2\sqrt{21}} = -\frac{\sqrt{21}}{7}$

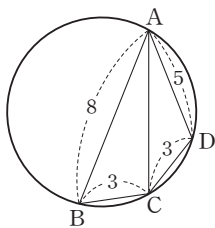
답 ㉔

2 사각형 ABCD가 원에 내접하므로  
 $\angle ABC = \theta$ 라 하면  
 $\angle ADC = \pi - \theta$   
 $\cos (\angle ADC) = \cos (\pi - \theta) = -\cos \theta$   
 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여  

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos \theta \\ &= 8^2 + 3^2 - 2 \times 8 \times 3 \times \cos \theta \\ &= 73 - 48 \cos \theta \quad \cdots \cdots ㉔ \end{aligned}$$

## 정답과 풀이

같은 방법으로 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여



$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos(\angle ADC) \\ &= 34 - 30 \cos(\angle ADC) \\ &= 34 + 30 \cos \theta \quad \cdots \cdots \textcircled{A}\end{aligned}$$

㉑-㉒에서

$$0 = 39 - 78 \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$0^\circ < \theta < 180^\circ \text{이므로 } \theta = 60^\circ$$

㉒에서

$$\overline{AC}^2 = 34 + 30 \times \frac{1}{2} = 49$$

$$\overline{AC} = 7$$

사각형 ABCD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

삼각형 ABC에서

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \theta} = 2R$$

$$\frac{7}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{49}{3}\pi$$

답 ②

3  $\overline{AB} = 10$ ,  $\overline{BC} = 8$ ,  $\overline{CA} = 6$ 에서

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 \text{이므로}$$

삼각형 ABC는  $\angle BCA = 90^\circ$ 인 직각삼각형이고,

선분 AB는 삼각형 ABC의 외접원의 지름이다.

$$\text{즉, } \overline{PC} = \overline{PA} = \overline{PB} = 5$$

삼각형 PBC는 이등변삼각형이므로

$$\angle PCB = \angle PBC$$

$$\cos(\angle PCB) = \cos(\angle PBC) = \cos(\angle ABC)$$

$$= \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

또한 선분 CP를 4:1로 내분하는 점이 Q이므로

$$\overline{CQ} = 4$$

삼각형 CQB에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BQ}^2 = \overline{CQ}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{CQ} \times \overline{BC} \times \cos(\angle QCB)$$

$$= 4^2 + 8^2 - 2 \times 4 \times 8 \times \frac{4}{5}$$

$$= \frac{144}{5}$$

$$\overline{BQ} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(\angle PCB) = \sin(\angle PBC) = \sin(\angle ABC)$$

$$= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

삼각형 CQB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BQ}}{\sin(\angle QCB)} = 2R$$

$$\frac{\overline{BQ}}{\sin(\angle PCB)} = 2R$$

$$\frac{\frac{12}{\sqrt{5}}}{\frac{3}{5}} = 2R$$

$$2R = 4\sqrt{5}$$

$$R = 2\sqrt{5}$$

$$\text{따라서 } R^2 = 20$$

답 20

4 ㄱ. 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CD}^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3} = 7 \text{이므로}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{7}$$

삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2R$$

$$\frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$R = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \text{이므로}$$

$$R^2 = \frac{7}{3}$$

그러므로 세 점 A, C, D를 지나는 원의 넓이는  $\frac{7}{3}\pi$ 이

다. (참)

ㄴ. 점 C를 직선 AB에 대하여 대칭이동한 점이 C'이므로

$$\angle CAB = \angle C'AB = \frac{\pi}{6}$$



## 정답과 풀이

6 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}{2 \times \overline{AC} \times \overline{BC}} = \frac{7^2 + 8^2 - 9^2}{2 \times 7 \times 8} = \frac{2}{7}$$

$\sin C > 0$ 이므로

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

$$\sin(\angle ADC) = \frac{3\sqrt{5}}{8} \text{이므로}$$

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin C} = \frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ADC)}$$

$$\frac{\overline{AD}}{\frac{3\sqrt{5}}{7}} = \frac{7}{\frac{3\sqrt{5}}{8}}$$

$$\overline{AD} = 8$$

$\overline{CD} = x$ 라 하면 삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + x^2 - 2 \times \overline{AC} \times x \times \cos C$$

$$8^2 = 7^2 + x^2 - 2 \times 7 \times x \times \frac{2}{7}$$

$$64 = 49 + x^2 - 4x$$

$$x^2 - 4x - 15 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{19}$$

$x > 0$ 이므로

$$x = 2 + \sqrt{19}$$

따라서

$$\overline{BD} = \overline{BC} - \overline{CD}$$

$$= 8 - x = 8 - (2 + \sqrt{19})$$

$$= 6 - \sqrt{19}$$

에서  $p = 6$ ,  $q = -1$ 이므로

$$p \times q = 6 \times (-1) = -6$$

답 ②

7 조건 (가)에서  $\cos^2 B + \sin^2 C = 1$ 이므로

$$(1 - \sin^2 B) + \sin^2 C = 1$$

$$\sin^2 B = \sin^2 C$$

삼각형 ABC에서  $\sin B > 0$ ,  $\sin C > 0$ 이므로

$$\sin B = \sin C$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를  $R$ 라 하면

사인법칙에 의하여

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$\text{즉, } \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R} \text{이므로}$$

$$\frac{b}{2R} = \frac{c}{2R} \text{에서}$$

$$b = c$$

$$b = \overline{CA} = n + 4, c = \overline{AB} = n^2 - 2n \text{이므로}$$

$$n + 4 = n^2 - 2n \text{에서}$$

$$n^2 - 3n - 4 = 0$$

$$(n + 1)(n - 4) = 0$$

$n > 2$ 이므로

$$n = 4$$

$$\text{즉, } b = c = 8$$

조건 (나)에서  $\cos B + \cos C = 1$ 이므로

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \text{에서}$$

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 1$$

$$b = c \text{이므로}$$

$$\frac{a^2}{2ab} + \frac{a^2}{2ab} = 1$$

$$\frac{a}{b} = 1$$

$$\text{즉, } a = b$$

따라서  $a = b = c = 8$

즉, 삼각형 ABC는 정삼각형이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$$

답 ③

### 다른 풀이

조건 (나)에서  $\cos B = 1 - \cos C$ 이므로

$$\text{조건 (가)에서 } (1 - \cos C)^2 + \sin^2 C = 1$$

$$1 - 2 \cos C + \cos^2 C + \sin^2 C = 1$$

$$\cos^2 C + \sin^2 C = 1 \text{이므로}$$

$$2 \cos C = 1$$

$$\cos C = \frac{1}{2}$$

$$\text{조건 (나)에서 } \cos B = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\cos B = \cos C = \frac{1}{2}$$

$$B = C = 60^\circ$$

즉, 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

그러므로  $\overline{AB} = n^2 - 2n$ ,  $\overline{CA} = n + 4$ 에서

$$n^2 - 2n = n + 4$$

$$n^2 - 3n - 4 = 0$$

$$(n + 1)(n - 4) = 0$$

$n > 2$ 이므로  $n = 4$

$$\text{즉, } \overline{AB} = \overline{CA} = 8$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \sin 60^\circ = 16\sqrt{3}$$

### 8 사각형 ABCD의 두 대각선 AC, BD에 대하여

$\overline{AC} = x$ ,  $\overline{BD} = y$ 라 하자.

조건 (가)에서  $x + y = 10$

조건 (나)에서  $\frac{1}{2} \times x \times y \times \sin 30^\circ = 4$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} \times x \times y \times \frac{1}{2} = 4 \text{에서 } xy = 16$$

$x, y$ 를 두 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인  $t$ 에 대한 이차방정식은  $t^2 - 10t + 16 = 0$ 이므로

$$(t-2)(t-8) = 0 \text{에서}$$

$$t = 2 \text{ 또는 } t = 8$$

이때  $x < y$ 이므로

$$x = 2, y = 8$$

$$\text{따라서 } \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{y}{x} = \frac{8}{2} = 4$$

답 ④

### 9 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{CA}}{\sin B}$$

조건 (가)에서  $\sqrt{2} \sin A = \sin B$ 이므로

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{CA}}{\sqrt{2} \sin A}$$

$$\sin A > 0 \text{이므로}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{2} \times \overline{BC}$$

$$\overline{BC} = 2 \text{이므로}$$

$$\overline{CA} = 2\sqrt{2}$$

조건 (나)에서  $\overline{CA}^2 = \overline{AB} \times \overline{BC}$ 이므로

$$(2\sqrt{2})^2 = \overline{AB} \times 2$$

$$8 = \overline{AB} \times 2$$

$$\overline{AB} = 4$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{CA} \times \cos A$$

$$2^2 = 4^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \times 4 \times 2\sqrt{2} \times \cos A$$

$$\cos A = \frac{5\sqrt{2}}{8}$$

$\sin A > 0$ 이므로

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{8}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CA} \times \sin A &= \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{14}}{8} \\ &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

답 ②

### Level 3 실력 완성

본문 67쪽

1 ④      2 ②      3 ③

### 1 두 원 O, O'의 반지름의 길이를 각각 R, R'이라 하자.

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\text{즉, } \sin \alpha = \frac{\overline{AB}}{2R}$$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \beta} = 2R'$$

$$\text{즉, } \sin \beta = \frac{\overline{AB}}{2R'}$$

조건 (가)에서  $4 \sin \alpha = 3 \sin \beta$ 이므로

$$4 \times \frac{\overline{AB}}{2R} = 3 \times \frac{\overline{AB}}{2R'}$$

$$4R' = 3R$$

$$R' = \frac{3}{4}R$$

한편, 두 원 O, O'의 넓이의 합은

$$\begin{aligned} \pi(R^2 + R'^2) &= \pi \left\{ R^2 + \left( \frac{3}{4}R \right)^2 \right\} \\ &= \frac{25}{16}R^2\pi \end{aligned}$$

조건 (나)에서 두 원 O, O'의 넓이의 합이  $25\pi$ 이므로

$$\frac{25}{16}R^2\pi = 25\pi \text{에서}$$

$$R^2 = 16$$

$$R > 0 \text{이므로 } R = 4$$

$$R' = \frac{3}{4}R = 3$$

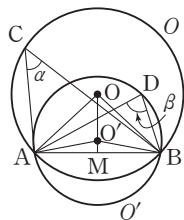
선분 AB의 중점을 M이라 하면

$$\angle AOO' = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \times 2\alpha = \alpha,$$

$$\angle AO'M = \frac{1}{2} \angle AO'B = \frac{1}{2} \times 2\beta = \beta \text{이므로}$$

$$\angle OAO' = \beta - \alpha$$

## 정답과 풀이



삼각형 OAO'에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{OO'}^2 &= R^2 + R'^2 - 2RR' \times \cos(\beta - \alpha) \\ &= 4^2 + 3^2 - 2 \times 4 \times 3 \times \frac{5}{6} \\ &= 5\end{aligned}$$

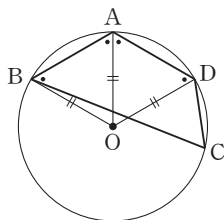
따라서  $\overline{OO'} = \sqrt{5}$

답 ④

2  $\angle DAB = \frac{2}{3}\pi$ 이므로  $\angle OAB = \frac{\pi}{3}$

삼각형 OAB에서  $\overline{OA} = \overline{OB}$ 이므로

삼각형 OAB는 정삼각형이고, 한 변의 길이는 사각형 ABCD의 외접원의 반지름의 길이와 같다.



마찬가지로 삼각형 ODA는 정삼각형이고, 한 변의 길이가 사각형 ABCD의 외접원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\overline{AB} = \overline{AD}$$

$$\overline{AB} = \overline{AD} = x \text{라 하면 } \overline{BD} = 2\sqrt{3} \text{이므로}$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$(2\sqrt{3})^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \times \cos \frac{2}{3}\pi$$

$$3x^2 = 12, x^2 = 4$$

$$x > 0 \text{이므로 } x = 2$$

즉,  $\overline{AB} = \overline{AD} = 2$ 이므로 삼각형 ABD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin \frac{2}{3}\pi = \sqrt{3} \quad \dots\dots ㉑$$

사각형 ABCD는 원에 내접하는 사각형이므로

$$\angle BAD + \angle BCD = \pi \text{에서}$$

$$\angle BCD = \frac{\pi}{3}$$

삼각형 BCD에서  $\overline{BC} = y$ ,  $\overline{CD} = z$ 라 하면

코사인법칙에 의하여

$$(2\sqrt{3})^2 = y^2 + z^2 - 2yz \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= y^2 + z^2 - yz$$

$$= (y+z)^2 - 3yz$$

$$y+z = 4\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$(2\sqrt{3})^2 = (4\sqrt{2})^2 - 3yz$$

$$yz = \frac{20}{3}$$

즉,  $\overline{BC} \times \overline{CD} = \frac{20}{3}$ 이므로 삼각형 BCD의 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CD} \times \sin \frac{\pi}{3} &= \frac{1}{2} \times \frac{20}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{3} \quad \dots\dots ㉒\end{aligned}$$

㉑, ㉒에서 사각형 ABCD의 넓이는

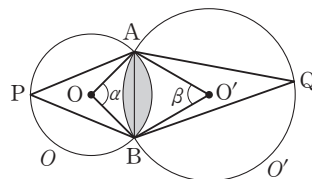
$$\sqrt{3} + \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

답 ②

3 점 P는 원 O'의 외부에 있고 점 Q는 원 O의 외부에 있도록 두 원 O, O' 위에 각각 두 점 P, Q를 잡으면 각 APB는 호 AB의 원주각이므로

$$\angle APB = \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{마찬가지로 } \angle AQB = \frac{\beta}{2}$$



두 원 O, O'의 반지름의 길이를 각각 R, R'이라 하면 삼각형 APB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = 2R$$

$$\text{즉, } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{AB}}{2R}$$

삼각형 ABQ에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \frac{\beta}{2}} = 2R'$$

$$\text{즉, } \sin \frac{\beta}{2} = \frac{\overline{AB}}{2R'}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2} \times \sin \frac{\beta}{2} \text{이므로}$$



$$\frac{\overline{AB}}{2R} = \sqrt{2} \times \frac{\overline{AB}}{2R'}$$

$$R' = \sqrt{2}R$$

사각형 AOB O'의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{AO} + \overline{BO} + \overline{AO'} + \overline{BO'} &= 2R + 2R' \\ &= 2R + 2\sqrt{2}R \\ &= 2R(1 + \sqrt{2}) \\ &= 6\sqrt{2} + 6\end{aligned}$$

이므로

$$R = \frac{6(1 + \sqrt{2})}{2(1 + \sqrt{2})} = 3$$

$$R' = 3\sqrt{2}$$

삼각형 AOB에서

$$\overline{AO} = \overline{BO} = 3, \overline{AB} = 3\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\angle AOB = \frac{\pi}{2}$$

부채꼴 AOB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{\pi}{2} = \frac{9}{4}\pi$$

삼각형 AOB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$$

삼각형 ABO'에서

$$\overline{AO'} = \overline{BO'} = 3\sqrt{2}, \overline{AB} = 3\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\angle AO'B = \frac{\pi}{3}$$

부채꼴 BO'A의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\pi}{3} = 3\pi$$

삼각형 ABO'의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \sin \frac{\pi}{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\left(\frac{9}{4}\pi - \frac{9}{2}\right) + \left(3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{21}{4}\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{2}$$

답 ③

## 05 등차수열과 등비수열

유제

본문 71~77쪽

1 ③	2 ⑤	3 ③	4 ④	5 ④
6 100	7 ③	8 ⑤		

1 등차수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 공차를  $d$ 라 하면

$$a_6 + a_7 = 7 \text{에서 } (a + 5d) + (a + 6d) = 7$$

$$2a + 11d = 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_7 + a_8 = 9 \text{에서 } (a + 6d) + (a + 7d) = 9$$

$$2a + 13d = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -2, d = 1$$

따라서

$$a_7 = a + 6d = -2 + 6 \times 1 = 4$$

답 ③

다른 풀이

$$\frac{a_6 + a_8}{2} = a_7 \text{이므로}$$

$$(a_6 + a_7) + (a_7 + a_8) = 7 + 9$$

$$(a_6 + a_8) + 2a_7 = 16$$

$$2a_7 + 2a_7 = 16$$

따라서  $4a_7 = 16$ 에서

$$a_7 = 4$$

2  $a_2 + a_4 + a_6 + a_8$

$$= (a + d) + (a + 3d) + (a + 5d) + (a + 7d)$$

$$= 4a + 16d$$

$$4a + 16d = 160 \text{에서}$$

$$a + 4d = 40 \text{이므로}$$

$$a \times d = (40 - 4d) \times d$$

$$= 4(-d^2 + 10d)$$

$$= 4\{-(d-5)^2 + 25\}$$

$$= -4(d-5)^2 + 100$$

따라서  $a \times d$ 의 최댓값은  $d = 5$ 일 때 100이다.

답 ⑤

다른 풀이

$$a_2 + a_4 + a_6 + a_8$$

$$= (a + d) + (a + 3d) + (a + 5d) + (a + 7d)$$

$$= 4a + 16d$$

## 정답과 풀이

$$4a+16d=160 \text{에서 } a+4d=40$$

이때  $a>0$ ,  $4d>0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a+4d}{2} \geq \sqrt{a \times 4d}$$

(단, 등호는  $a=4d$ 일 때 성립하고, 이때  $a+4d=8d=40$ 에서  $a$ 와  $d$ 가 모두 자연수이다.)

$$\frac{40}{2} \geq 2\sqrt{a \times d}$$

$$10 \geq \sqrt{a \times d}$$

따라서  $100 \geq a \times d$ 이므로  $a \times d$ 의 최댓값은 100이다.

$$3 \quad a_n = \frac{2}{5} + (n-1) \times \frac{2}{5} = \frac{2n}{5} \text{이므로}$$

$$b_1 = a_5 = 2$$

$$b_2 = a_{10} = 4$$

$$b_3 = a_{15} = 6$$

⋮

즉, 수열  $\{b_n\}$ 은 첫째항이 2이고 공차가 2인 등차수열이다.

따라서  $b_{10} = 2 + 9 \times 2 = 20$ 이므로

수열  $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 10 항까지의 합은

$$\frac{10 \times (b_1 + b_{10})}{2} = \frac{10 \times (2 + 20)}{2} = 110$$

답 ③

$$4 \quad (i) a_1 = S_1 = (1+1)^2 + 1 = 5$$

(ii)  $n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= \{(n+1)^2 + 1\} - (n^2 + 1)$$

$$= 2n + 1$$

$$\text{이므로 } a_{10} = 2 \times 10 + 1 = 21$$

(i), (ii)에서

$$a_1 + a_{10} = 5 + 21 = 26$$

답 ④

**다른 풀이**

$$a_1 = S_1 = 5$$

$$a_{10} = S_{10} - S_9$$

$$= (11^2 + 1) - (10^2 + 1)$$

$$= 122 - 101$$

$$= 21$$

$$\text{따라서 } a_1 + a_{10} = 5 + 21 = 26$$

$$5 \quad \text{등비수열 } \{a_n\} \text{의 첫째항을 } a, \text{ 공비를 } r \text{라 하면}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 14 \text{에서}$$

$$a + ar + ar^2 = 14 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } a_2 + a_3 + a_4 = -42 \text{에서}$$

$$ar + ar^2 + ar^3 = -42$$

$$r(a + ar + ar^2) = -42$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } r \times 14 = -42 \text{이므로 } r = -3$$

$$r = -3 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$a - 3a + 9a = 14$$

$$7a = 14 \text{에서 } a = 2$$

$$\text{따라서 } a_1 = 2$$

답 ④

$$6 \quad a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \text{이므로}$$

$$a_2 \times a_4 \times a_6 \times \cdots \times a_{20}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \cdots \times \left(\frac{1}{3}\right)^{19}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{1+3+5+\cdots+19}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{100}$$

따라서 구하는 자연수  $m$ 의 값은 100이다.

답 100

$$7 \quad \text{수열 } \{a_n\} \text{의 첫째항을 } a, \text{ 공비를 } r (r \neq 1) \text{이라 하면}$$

$$S_5 = \frac{a(r^5 - 1)}{r - 1} = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$S_{10} = \frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^5 - 1)(r^5 + 1)}{r - 1} = 15 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{에서}$$

$$r^5 + 1 = 3, r^5 = 2$$

따라서

$$\begin{aligned} S_{15} &= \frac{a(r^{15} - 1)}{r - 1} \\ &= \frac{a(r^5 - 1)(r^{10} + r^5 + 1)}{r - 1} \\ &= \frac{a(r^5 - 1)}{r - 1} \times (r^{10} + r^5 + 1) \\ &= 5 \times (2^2 + 2 + 1) \\ &= 35 \end{aligned}$$

답 ③

**다른 풀이**

수열  $\{a_n\}$ 이 등비수열이므로

연속된 다섯 개의 항의 합으로 이루어진 수열

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5, a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10},$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} \text{도 등비수열을 이룬다.}$$

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= 5, \\ a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} &= 15 - 5 = 10 \text{이므로} \\ a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} &= 20 \\ \text{따라서 } S_{15} &= 5 + 10 + 20 = 35 \end{aligned}$$

8 등비수열  $\{a_n\}$ 의 공비를  $r$  ( $r > 0, r \neq 1$ )이라 하자.

$$S_{10} = \frac{2 \times (1 - r^{10})}{1 - r} = \frac{2(r^{10} - 1)}{r - 1}$$

한편, 수열  $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 첫째항이  $\frac{1}{2}$ 이고 공비가  $\frac{1}{r}$ 인 등비수열  
이므로

$$\begin{aligned} T_{10} &= \frac{\frac{1}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{10}\right]}{1 - \frac{1}{r}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times (r^{10} - 1)}{r^{10} - r^9} \\ &= \frac{r^{10} - 1}{2r^9(r - 1)} \\ &= \frac{S_{10}}{4r^9} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{S_{10}}{T_{10}} = 4r^9$$

$$\frac{S_{10}}{T_{10}} = 40 \text{이므로 } 4r^9 = 40 \text{에서 } r^9 = 10$$

따라서

$$a_{10} = 2 \times r^9 = 2 \times 10 = 20$$

답 ⑤

### Level 1 기초 연습

본문 78~79쪽

- |     |      |     |     |     |
|-----|------|-----|-----|-----|
| 1 ② | 2 5  | 3 6 | 4 ④ | 5 ③ |
| 6 ② | 7 64 | 8 ① |     |     |

1 등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$ 라 하면

$$a_5 = 10 + 4d, a_{18} = 10 + 17d \text{이므로}$$

$$\frac{10 + 4d}{10 + 17d} = 2 \text{에서 } d = -\frac{1}{3}$$

따라서

$$\begin{aligned} a_{25} &= 10 + 24d \\ &= 10 + 24 \times \left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= 10 - 8 \\ &= 2 \end{aligned}$$

답 ②

2 등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$ 라 하면

$$a_6 + a_7 + a_8 = a_{11} \text{에서}$$

$$(20 + 5d) + (20 + 6d) + (20 + 7d) = 20 + 10d$$

$$60 + 18d = 20 + 10d \text{에서 } d = -5$$

$$\text{따라서 } a_n = 20 + (n - 1) \times (-5) = -5n + 25 \text{이므로}$$

$$a_m = -5m + 25 = 0 \text{에서}$$

$$m = 5$$

답 5

3  $a_n = a_1 + (n - 1) \times 6 = 6n + a_1 - 6$ 이므로

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$= \frac{n(2a_1 - 6 + 6n)}{2}$$

$$\text{이때 } \frac{S_n}{n^2} = \frac{2a_1 - 6 + 6n}{2n} = \frac{a_1 - 3}{n} + 3 \text{이므로 } \frac{a_1 - 3}{n} + 3 \text{은}$$

$a_1 = 3$ 일 때 일정한 값 3을 갖는다.

$$\text{따라서 } p = 3, q = 3 \text{이므로}$$

$$p + q = 3 + 3 = 6$$

답 6

4 등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$ 라 하면

$$a_{20} - a_{10} = 10d \text{이므로}$$

$$10d = -30 \text{에서 } d = -3$$

$$\text{즉, } a_n = 50 + (n - 1) \times (-3) = -3n + 53$$

$$\text{따라서 } a_{11} = 20, a_{20} = -7 \text{이므로}$$

등차수열  $\{a_n\}$ 의 제 11 항부터 제 20 항까지의 합은

$$\begin{aligned} \frac{10 \times (a_{11} + a_{20})}{2} &= \frac{10 \times \{20 + (-7)\}}{2} \\ &= 5 \times 13 \\ &= 65 \end{aligned}$$

답 ④

5 (i)  $a_1 = S_1 = 3$

(ii)  $n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (2n^2 - 3n + 4) - \{2(n-1)^2 - 3(n-1) + 4\}$$

$$= 4n - 5$$

$$\text{이므로 } a_{11} = 4 \times 11 - 5 = 39$$

(i), (ii)에서

$$\frac{a_{11}}{a_1} = \frac{39}{3} = 13$$

답 ③

## 정답과 풀이

### 다른 풀이

$$a_1 = S_1 = 3$$

$$a_{11} = S_{11} - S_{10}$$

$$= (242 - 33 + 4) - (200 - 30 + 4)$$

$$= 39$$

$$\text{따라서 } \frac{a_{11}}{a_1} = \frac{39}{3} = 13$$

- 6 세 수  $a, b, 4$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$b = \frac{a+4}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 세 수  $4, a, b$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a^2 = 4b$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } \frac{a^2}{4} = \frac{a+4}{2}$$

$$a^2 - 2a - 8 = 0$$

$$(a+2)(a-4) = 0$$

$$a = -2 \text{ 또는 } a = 4$$

$$a = -2 \text{ 일 때 } b = 1, a = 4 \text{ 일 때 } b = 4$$

따라서  $a \neq b$ 이므로  $a+b$ 의 값은

$$-2 + 1 = -1$$

답 ②

- 7 등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 공비를  $r$ 라 하면

$$a_1 + a_2 = -1 \text{에서}$$

$$a + ar = -1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a_3 = 4 \text{에서}$$

$$ar^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } a = \frac{4}{r^2} \text{를 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면}$$

$$\frac{4}{r^2} + \frac{4}{r} = -1$$

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

$$(r+2)^2 = 0$$

따라서  $r = -2$ 이고,

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } a = 1 \text{이므로}$$

$$a_7 = ar^6 = 1 \times (-2)^6 = 64$$

답 64

- 8 등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$  ( $a \neq 0$ ), 공비를  $r$  ( $r \neq 1$ )이라 하면

$$S_8 = 5S_4 \text{에서}$$

$$\frac{a(1-r^8)}{1-r} = \frac{5a(1-r^4)}{1-r}$$

$$\frac{a(1+r^4)(1-r^4)}{1-r} = \frac{5a(1-r^4)}{1-r}$$

$$\text{에서 } 1+r^4=5, r^4=4$$

따라서

$$\frac{a_{27}}{a_{15}} = \frac{ar^{26}}{ar^{14}}$$

$$= r^{12}$$

$$= (r^4)^3$$

$$= 4^3$$

$$= 64$$

답 ①

### Level 2 기본 연습

본문 80~81쪽

1 ①

2 ②

3 ②

4 ②

5 ③

6 8

7 75

8 ③

- 1 조건 (가)에서

$$(a_9^2 - a_5^2) + (a_7^2 - a_3^2) = 0$$

$$(a_9 - a_5)(a_9 + a_5) + (a_7 - a_3)(a_7 + a_3) = 0$$

등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$  ( $d \neq 0$ )이라 하면

$$4d(a_9 + a_5) + 4d(a_7 + a_3) = 0$$

$$d \neq 0 \text{이므로 } (a_9 + a_5) + (a_7 + a_3) = 0$$

$$\frac{a_9 + a_3}{2} + \frac{a_7 + a_5}{2} = 0$$

$$a_6 + a_6 = 0 \text{에서 } a_6 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$  항까지의 합을  $S_n$ 이라 하면

$$\frac{a_1 + a_{11}}{2} = a_6 = 0 \text{이므로}$$

$$S_{11} = \frac{11 \times (a_1 + a_{11})}{2} = 11a_6 = 0$$

$$\text{조건 (나)에서 } S_{12} = S_{11} + a_{12} = 12 \text{이므로}$$

$$a_{12} = 12 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\text{이때 } a_{12} - a_6 = 6d \text{이므로}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } 6d = 12, d = 2$$

따라서

$$a_{20} = a_{12} + 8d$$

$$= 12 + 8 \times 2$$

$$= 28$$

답 ①

- 2 등차수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 공차를  $d$ 라 하면

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$= dn + a - d$$

이때

$$\begin{aligned} b_n &= (a_{n+6} - a_n)(a_{n+6} + a_n) \\ &= 6d \times (a_n + 6d + a_n) \\ &= 6d \times (2a_n + 6d) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} d_1 &= b_2 - b_1 \\ &= 6d(2a_2 + 6d) - 6d(2a_1 + 6d) \\ &= 12d(a_2 - a_1) \\ &= 12d^2 \end{aligned}$$

또

$$\begin{aligned} c_n &= (a_{n+k} - a_n)(a_{n+k} + a_n) \\ &= kd \times (a_n + kd + a_n) \\ &= kd \times (2a_n + kd) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} d_2 &= c_2 - c_1 \\ &= kd(2a_2 + kd) - kd(2a_1 + kd) \\ &= 2kd(a_2 - a_1) \\ &= 2kd^2 \end{aligned}$$

따라서  $\frac{d_1}{d_2} = \frac{12d^2}{2kd^2} = \frac{6}{k}$  이므로

$\frac{6}{k} = 3$ 에서  $k = 2$

답 ②

- 3 등차수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10 항까지의 합은

$$\begin{aligned} \frac{10 \times (a_1 + a_{10})}{2} &= \frac{10 \times (a + a + 9b)}{2} \\ &= 5(2a + 9b) \end{aligned}$$

$5(2a + 9b) = 200$ 에서  $2a + 9b = 40$

이때  $a, b$ 가 모두 자연수이므로

$b = 2$ 일 때  $a = 11$

$b = 4$ 일 때  $a = 2$

뿐이다.

따라서  $a + b$ 의 값은 13 또는 6이므로 모든  $a + b$ 의 값의 합은

$13 + 6 = 19$

답 ②

- 4 등차수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 공차를  $d$ 라 하면

$S_{10} = 40$ 에서  $\frac{10 \times (a_1 + a_{10})}{2} = 40$ 이므로

$\frac{10 \times (2a + 9d)}{2} = 40$

$2a + 9d = 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$S_{40} = 10$ 에서  $\frac{40 \times (a_1 + a_{40})}{2} = 10$

$\frac{40 \times (2a + 39d)}{2} = 10$

$2a + 39d = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ 에서  $30d = -\frac{15}{2}, d = -\frac{1}{4}$

$\textcircled{1}$ 에서  $2a + 9 \times (-\frac{1}{4}) = 8, a = \frac{41}{8}$

따라서  $a_n = \frac{41}{8} + (n-1) \times (-\frac{1}{4}) = -\frac{2n+43}{8}$  이므로

$S_{70} = \frac{70 \times (a_1 + a_{70})}{2}$

$= \frac{70 \times (\frac{41}{8} - \frac{97}{8})}{2}$

$= \frac{70 \times (-7)}{2}$

$= -245$

답 ②

#### 다른 풀이 1

등차수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 공차를  $d$ 라 하면

$S_{10} = 40$ 에서  $\frac{10 \times (a_1 + a_{10})}{2} = 40$ 이므로

$\frac{10 \times (2a + 9d)}{2} = 40$

$2a + 9d = 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$S_{40} = 10$ 에서

$\frac{40 \times (a_1 + a_{40})}{2} = 10$

$\frac{40 \times (2a + 39d)}{2} = 10$

$2a + 39d = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$2 \times \textcircled{2} - \textcircled{1}$ 에서  $2a + 69d = -7$ 이므로

$S_{70} = \frac{70 \times (a_1 + a_{70})}{2}$

$= \frac{70 \times (2a + 69d)}{2}$

$= \frac{70 \times (-7)}{2}$

$= -245$

#### 다른 풀이 2

$b_n = a_{10n-9} + a_{10n-8} + a_{10n-7} + \dots + a_{10n-1} + a_{10n}$ 이라 하면 수열  $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로 수열  $\{b_n\}$ 도 등차수열이다.

## 정답과 풀이

등차수열  $\{b_n\}$ 의 공차를  $d$ 라 하면

$$b_1=40\text{이므로}$$

$$b_2=40+d, b_3=40+2d, b_4=40+3d$$

$$S_{40}=b_1+b_2+b_3+b_4=160+6d$$

$$160+6d=10\text{에서 }d=-25$$

따라서

$$S_{70}=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_7$$

$$=280+21d$$

$$=280+21\times(-25)$$

$$=-245$$

- 5 등차수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 등차수열  $\{b_n\}$ 의 첫째항을  $b$ 라 하자.

$$a_{12}=a+11\times 3=a+33,$$

$$b_{12}=b+11\times(-2)=b-22\text{이므로}$$

$$a_{12}+b_{12}=0\text{에서}$$

$$(a+33)+(b-22)=0$$

$$a+b=-11 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\text{한편, } S_m = \frac{m \times (a_1 + a_m)}{2} = \frac{m \times \{2a + (m-1) \times 3\}}{2},$$

$$T_m = \frac{m \times (b_1 + b_m)}{2} = \frac{m \times \{2b + (m-1) \times (-2)\}}{2}$$

$$\text{이므로 } S_m + T_m = 0\text{에서}$$

$$\frac{m \times \{2a + 2b + (m-1)\}}{2} = 0$$

$$m \neq 0\text{이므로 } 2a + 2b + (m-1) = 0$$

$$\textcircled{7}\text{에서 } -22 + (m-1) = 0\text{이므로}$$

$$m=23$$

답 ③

- 6 등비수열  $\{a_n\}$ 의 공비를  $r$  ( $r>0$ )이라 하면

$$a_2+a_3=\frac{1}{9}\times r+\frac{1}{9}\times r^2=\frac{1}{9}(r+r^2)\text{이므로}$$

$$\frac{1}{9}(r+r^2)=\frac{4}{3}\text{에서}$$

$$r^2+r-12=0$$

$$(r+4)(r-3)=0$$

$$r=-4 \text{ 또는 } r=3$$

$$r>0\text{이므로 } r=3$$

$$\text{즉, } a_n=\frac{1}{9}\times 3^{n-1}=3^{n-3}$$

$$\text{따라서 } 3^4=81, 3^5=243\text{이므로}$$

$$a_n>100\text{을 만족시키는 자연수 } n\text{의 최솟값은}$$

$$n-3=5\text{에서 } n=8$$

답 8

- 7 등차수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항을  $a$ , 공차를  $d$ 라 하고,

등비수열  $\{b_n\}$ 의 공비를  $r$  ( $r\neq 1$ )이라 하자.

$$a_1=b_2\text{에서 } a=-3r\text{이므로}$$

$$r^2=\frac{a^2}{9} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$a_2=b_1\text{에서 } a+d=-3\text{이므로}$$

$$d=-a-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$a_3=b_3\text{에서 } a+2d=-3r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{9}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을  $\textcircled{9}$ 에 대입하면

$$a+2\times(-a-3)=-3\times\frac{a^2}{9}$$

$$\text{정리하면 } a^2-3a-18=0$$

$$(a+3)(a-6)=0$$

$$a=-3 \text{ 또는 } a=6$$

$$a=-3\text{일 때 } r=1$$

$$a=6\text{일 때 } r=-2$$

$$r\neq 1\text{이므로 } a=6\text{이고 } \textcircled{8}\text{에서 } d=-9$$

$$\text{따라서 } a_{10}=a+9d=6+9\times(-9)=-75$$

$$\text{즉, } |a_{10}|=|-75|=75$$

답 75

- 8 (i)  $S_{2n+1}-S_{2n}=3n-1$ 에서

$$a_{2n+1}=3n-1 \quad (n\geq 1)$$

수열  $\{a_{2n+1}\}$ 은 등차수열이므로

$$a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{19}=\frac{9\times(a_3+a_{19})}{2}$$

$$=\frac{9\times(2+26)}{2}$$

$$=126$$

- (ii)  $S_{2n+2}-S_{2n+1}=2^n$ 에서

$$a_{2n+2}=2^n \quad (n\geq 1)$$

수열  $\{a_{2n+2}\}$ 은 등비수열이므로

$$a_4+a_6+a_8+\cdots+a_{20}=\frac{2\times(2^9-1)}{2-1}$$

$$=1022$$

- (i), (ii)에서

$$S_{20}=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+\cdots+a_{19}+a_{20}$$

$$=a_1+a_2+(a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{19})$$

$$+(a_4+a_6+a_8+\cdots+a_{20})$$

$$=1+2+126+1022$$

$$=1151$$

답 ③

다른 풀이

$$S_{2n+1}=S_{2n}+3n-1\text{이므로}$$

$$S_{2n+2} = (S_{2n} + 3n - 1) + 2^n$$

$$S_{2n+2} - S_{2n} = 3n - 1 + 2^n \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

⑦의  $n$ 에 1, 2, 3, ..., 9를 차례로 대입하면

$$n=1\text{일 때, } S_4 - S_2 = 3 \times 1 - 1 + 2^1$$

$$n=2\text{일 때, } S_6 - S_4 = 3 \times 2 - 1 + 2^2$$

$$n=3\text{일 때, } S_8 - S_6 = 3 \times 3 - 1 + 2^3$$

⋮

$$n=9\text{일 때, } S_{20} - S_{18} = 3 \times 9 - 1 + 2^9$$

이 9개의 등식을 변끼리 더하면

$$S_{20} - S_2$$

$$= 3 \times (1 + 2 + 3 + \cdots + 9) - 9 + (2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^9)$$

$$= 3 \times \frac{9 \times (1+9)}{2} - 9 + \frac{2 \times (2^9 - 1)}{2 - 1}$$

$$= 3 \times 45 - 9 + 1022$$

$$= 1148$$

따라서

$$S_{20} = S_2 + 1148$$

$$= (a_1 + a_2) + 1148$$

$$= (1 + 2) + 1148$$

$$= 1151$$

### Level 3 실력 완성

본문 82쪽

1 ②      2 21      3 ②

1  $a_k + a_{k+2} = 40$ 이므로

$$a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k+2}}{2} = 20$$

$$S_{k+1} - S_k = a_{k+1} \text{이므로}$$

$$S_{k+1} - 45 = 20 \text{에서 } S_{k+1} = 65$$

$$\text{또 } S_{k+2} - S_{k+1} = a_{k+2} \text{이므로}$$

$$a_{k+2} = 88 - 65 = 23$$

이때 등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$ 라 하면

$$d = a_{k+2} - a_{k+1} = 23 - 20 = 3$$

$$a_k = a_{k+1} - d = 20 - 3 = 17$$

$$\text{한편, } a_k = a_1 + (k-1) \times 3 \text{이므로}$$

$$a_1 + (k-1) \times 3 = 17 \text{에서}$$

$$a_1 = 20 - 3k$$

$$\text{따라서 } S_k = 45 \text{에서}$$

$$\frac{k(a_1 + a_k)}{2} = 45$$

$$\frac{k(20 - 3k + 17)}{2} = 45$$

$$\text{정리하면 } 3k^2 - 37k + 90 = 0$$

$$(3k - 10)(k - 9) = 0$$

$$k = \frac{10}{3} \text{ 또는 } k = 9$$

$$k \text{가 자연수이므로 } k = 9$$

$$\text{따라서 } a_1 = 20 - 3 \times 9 = -7$$

답 ②

2 등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$  ( $d \neq 0$ )이라 하자.

(i)  $d > 0$ 인 경우

$S_n$ 의 최댓값이 36이라는 조건에 모순이다.

(ii)  $d < 0$ 이고,  $a_1 > 0 > a_2 > a_3 > \cdots$ 인 경우

조건 (나)에서

$$a_1 = 36, a_1 + a_2 = 35, a_1 + a_2 + a_3 = 33 \text{이므로}$$

$$a_1 = 36, a_2 = -1, a_3 = -2$$

이 경우 수열  $\{a_n\}$ 은 등차수열이 아니다.

(iii)  $d < 0$ 이고, 2 이상의 자연수  $m$ 에 대하여

$$a_m > 0 > a_{m+1} > a_{m+2} > \cdots \text{인 경우}$$

$$S_1 < S_2 < \cdots < S_{m-1} < S_m > S_{m+1} > S_{m+2} > \cdots$$

$$\text{이므로 } b_1 = S_m \text{이고,}$$

$$b_2 = S_{m-1}, b_3 = S_{m+1} \text{ 또는 } b_2 = S_{m+1}, b_3 = S_{m-1} \text{이다.}$$

$$\textcircled{1} S_m = 36, S_{m-1} = 35, S_{m+1} = 33 \text{이면}$$

$$a_m = S_m - S_{m-1} = 36 - 35 = 1,$$

$$a_{m+1} = S_{m+1} - S_m = 33 - 36 = -3 \text{이므로}$$

$$d = a_{m+1} - a_m = -4 \text{이고,}$$

$$a_{m+1} = a_1 + m \times (-4) = -3 \text{에서 } a_1 = 4m - 3$$

즉,

$$S_m = \frac{m \times (a_1 + a_m)}{2} = \frac{m \times (4m - 3 + 1)}{2}$$

$$= m(2m - 1)$$

$$m(2m - 1) = 36 \text{에서}$$

$$(m + 4)(2m - 9) = 0$$

$$m = -4 \text{ 또는 } m = \frac{9}{2}$$

$m$ 은 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$\textcircled{2} S_m = 36, S_{m+1} = 35, S_{m-1} = 33 \text{이면}$$

$$a_m = S_m - S_{m-1} = 36 - 33 = 3,$$

$$a_{m+1} = S_{m+1} - S_m = 35 - 36 = -1 \text{이므로}$$

$$d = a_{m+1} - a_m = -4 \text{이고,}$$

$$a_{m+1} = a_1 + m \times (-4) = -1 \text{에서 } a_1 = 4m - 1$$

즉,

$$S_m = \frac{m \times (a_1 + a_m)}{2} = \frac{m \times (4m - 1 + 3)}{2}$$

$$= m(2m + 1)$$

## 정답과 풀이

$$\begin{aligned} m(2m+1) &= 36 \text{에서} \\ (2m+9)(m-4) &= 0 \\ m &= -\frac{9}{2} \text{ 또는 } m=4 \\ m &\text{은 자연수이므로 } m=4 \\ \text{(i), (ii), (iii)에서 } a_4 &= 3, d = -4 \text{이므로} \\ a_{10} &= a_4 + 6d = 3 + 6 \times (-4) = -21 \\ \text{따라서 } |a_{10}| &= |-21| = 21 \end{aligned}$$

답 21

**3** 점  $(a_n, f(a_n))$ 을 지나고 기울기가  $b_n$ 인 직선의 방정식은

$$\begin{aligned} y - f(a_n) &= b_n(x - a_n) \\ y &= b_n x + f(a_n) - a_n b_n \\ &= b_n x + a_n^2 + a_n - a_n b_n \\ &= b_n x + a_n(a_n + 1 - b_n) \end{aligned}$$

이때  $x^2 + x = b_n x + a_n(a_n + 1 - b_n)$ 에서

$$\begin{aligned} x^2 + (1 - b_n)x - a_n(a_n + 1 - b_n) &= 0 \\ (x - a_n)\{x + (a_n + 1 - b_n)\} &= 0 \\ x = a_n \text{ 또는 } x &= -a_n - 1 + b_n \\ \text{즉, } a_{n+1} &= -a_n - 1 + b_n \text{이므로} \\ a_{n+1} + a_n &= b_n - 1 \end{aligned}$$

따라서 수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + \cdots + (a_{19} + a_{20}) \\ = (b_1 - 1) + (b_3 - 1) + (b_5 - 1) + \cdots + (b_{19} - 1) \\ = (b_1 + b_3 + b_5 + \cdots + b_{19}) - 10 \\ = \frac{b_1 \times [\{(\sqrt[4]{2})^2\}^{10} - 1]}{(\sqrt[4]{2})^2 - 1} - 10 \\ = \frac{b_1 \times (32 - 1)}{\sqrt{2} - 1} - 10 \\ = \frac{31b_1}{\sqrt{2} - 1} - 10 \end{aligned}$$

즉,  $\frac{31b_1}{\sqrt{2} - 1} - 10 = 21$ 에서

$$b_1 = \sqrt{2} - 1$$

답 ②

## 06

## 수열의 합과 수학적 귀납법

유제

본문 85~95쪽

1 ①	2 ③	3 ⑤	4 15	5 18
6 ⑤	7 16	8 ②	9 ①	10 10
11 ③				

**1**  $\sum_{k=1}^{10} (k^2 - 2) - \sum_{k=1}^9 k^2$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{10} k^2 - 20 - \sum_{k=1}^9 k^2 \\ &= \sum_{k=1}^9 k^2 + 100 - 20 - \sum_{k=1}^9 k^2 \\ &= 100 - 20 \\ &= 80 \end{aligned}$$

답 ①

**2**  $\sum_{k=1}^{15} 2a_{k+1} = 2 \sum_{k=1}^{15} a_{k+1} = 50$ 에서  $\sum_{k=1}^{15} a_{k+1} = 25$

즉,  $\sum_{k=2}^{16} a_k = 25$ 이므로

$$\sum_{k=2}^{15} a_k + a_{16} = 25 \quad \cdots \textcircled{1}$$

또  $\sum_{k=1}^{15} 3a_k = 3 \sum_{k=1}^{15} a_k = 30$ 에서  $\sum_{k=1}^{15} a_k = 10$

즉,  $a_1 + \sum_{k=2}^{15} a_k = 10$ 이므로

$$3 + \sum_{k=2}^{15} a_k = 10 \text{에서 } \sum_{k=2}^{15} a_k = 7$$

따라서 ①에서

$$7 + a_{16} = 25 \text{이므로}$$

$$a_{16} = 18$$

답 ③

**3**  $\sum_{k=1}^8 (2k+1)^2 - \sum_{k=1}^8 (3k^2 + 4k - 1)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^8 (4k^2 + 4k + 1) - \sum_{k=1}^8 (3k^2 + 4k - 1) \\ &= \sum_{k=1}^8 \{(4k^2 + 4k + 1) - (3k^2 + 4k - 1)\} \\ &= \sum_{k=1}^8 (k^2 + 2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^8 k^2 + \sum_{k=1}^8 2 \\
 &= \frac{8 \times 9 \times 17}{6} + 2 \times 8 \\
 &= 204 + 16 \\
 &= 220
 \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}
 4 \quad f(n) &= \sum_{k=1}^n k(n-k+1) \\
 &= \sum_{k=1}^n \{(n+1)k - k^2\} \\
 &= (n+1) \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k^2 \\
 &= (n+1) \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{n(n+1)}{6} \times \{3(n+1) - (2n+1)\} \\
 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}
 \end{aligned}$$

이므로

$$\frac{f(20)}{f(14)} = \frac{\frac{20 \times 21 \times 22}{6}}{\frac{14 \times 15 \times 16}{6}} = \frac{11}{4}$$

따라서  $p=4$ ,  $q=11$ 이므로

$$p+q=4+11=15$$

답 15

$$\begin{aligned}
 5 \quad &\frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}} \\
 &= \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1})} \\
 &= \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}}{(k+2) - (k+1)} \\
 &= \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} \\
 &\text{이므로} \\
 &\sum_{k=3}^{398} \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}} \\
 &= \sum_{k=3}^{398} (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) \\
 &= (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + (\sqrt{6} - \sqrt{5}) + (\sqrt{7} - \sqrt{6}) + \dots \\
 &\quad + (\sqrt{400} - \sqrt{399}) \\
 &= -\sqrt{4} + \sqrt{400} \\
 &= -2 + 20 \\
 &= 18
 \end{aligned}$$

답 18

6 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_k + \beta_k = -2k, \quad \alpha_k \beta_k = k^2 - k$$

이때

$$\begin{aligned}
 \alpha_k^2 + \beta_k^2 &= (\alpha_k + \beta_k)^2 - 2\alpha_k \beta_k \\
 &= (-2k)^2 - 2(k^2 - k) \\
 &= 2k^2 + 2k
 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} &= \frac{1}{2k^2 + 2k} \\
 &= \frac{1}{2k(k+1)} \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)
 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \\
 &= \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{1}{15} - \frac{1}{16} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{16} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{15}{16} \\
 &= \frac{15}{32}
 \end{aligned}$$

답 ⑤

7 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 를 만족시키므로 수열  $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

따라서 등차중항의 성질에 의하여

$$\begin{aligned}
 a_9 &= \frac{a_3 + a_{15}}{2} \\
 &= \frac{3 + 29}{2} \\
 &= 16
 \end{aligned}$$

답 16

**다른 풀이**

모든 자연수  $n$ 에 대하여  $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 를 만족시키므로 수열  $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차를  $d$ 라 하면

$$a_{15} = a_3 + 12d$$

$$29 = 3 + 12d \text{에서 } d = \frac{13}{6}$$

따라서

## 정답과 풀이

$$\begin{aligned} a_9 &= a_3 + 6d \\ &= 3 + 6 \times \frac{13}{6} \\ &= 16 \end{aligned}$$

- 8  $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 8(4n-3)$ 에서  
 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 8(4n-3)$   
 $(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) = 8(4n-3)$   
 이때 등차수열  $\{a_n\}$ 의 공차가 4이므로

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 4 \\ \text{즉, } 4(a_{n+1} + a_n) &= 8(4n-3) \text{에서} \\ a_{n+1} + a_n &= 2(4n-3) \\ (a_n + 4) + a_n &= 2(4n-3) \text{이므로} \\ a_n &= 4n-5 \\ \text{따라서 } a_1 &= -1, a_{10} = 35 \text{이므로 등차수열 } \{a_n\} \text{의 첫째항부터 제 10 항까지의 합은} \\ \frac{10(a_1 + a_{10})}{2} &= \frac{10 \times (-1 + 35)}{2} = 170 \end{aligned}$$

답 ②

9  $a_2 = a_1 + 2 \cos \frac{\pi}{3}$   
 $= 1 + 2 \times \frac{1}{2}$   
 $= 2$   
 $a_3 = a_2 + 2 \cos \frac{2}{3} \pi$   
 $= 2 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$   
 $= 1$   
 $a_4 = a_3 + 2 \cos \pi$   
 $= 1 + 2 \times (-1)$   
 $= -1$   
 $a_5 = a_4 + 2 \cos \frac{4}{3} \pi$   
 $= -1 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$   
 $= -2$

답 ①

10  $a_2 = (-1)^2 a_1 + 1$   
 $= 3 + 1$   
 $= 4$

$$\begin{aligned} a_3 &= (-1)^3 a_2 + 1 \\ &= -4 + 1 \\ &= -3 \\ a_4 &= (-1)^4 a_3 + 1 \\ &= -3 + 1 \\ &= -2 \\ a_5 &= (-1)^5 a_4 + 1 \\ &= 2 + 1 \\ &= 3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

즉, 자연수  $l$ 에 대하여

$$\begin{aligned} a_{4l-3} &= 3, a_{4l-2} = 4, a_{4l-1} = -3, a_{4l} = -2 \\ \text{따라서 } a_{4l-3} + a_{4l-2} + a_{4l-1} + a_{4l} &= 2 \text{이므로} \\ \sum_{k=1}^{15} a_k &= \sum_{k=1}^{12} a_k + a_{13} + a_{14} + a_{15} \\ &= (2+2+2) + 3 + 4 + (-3) \\ &= 10 \end{aligned}$$

답 10

- 11 (i)  $n=1$ 일 때,

$$2^{3 \times 1 - 2} + 3^1 = \boxed{5} \text{이므로 } 2^{3 \times 1 - 2} + 3^1 \text{은 5의 배수이다.}$$

- (ii)  $n=k$ 일 때,  $2^{3k-2} + 3^k$ 이 5의 배수라고 가정하면

자연수  $m$ 에 대하여  $2^{3k-2} + 3^k = 5m$ 으로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned} 2^{3(k+1)-2} + 3^{k+1} &= 8 \times 2^{3k-2} + 3 \times 3^k \\ &= 3 \times 2^{3k-2} + 3 \times 3^k + 5 \times 2^{3k-2} \\ &= 3 \times (2^{3k-2} + 3^k) + 5 \times 2^{3k-2} \\ &= 3 \times 5m + 5 \times 2^{3k-2} \\ &= \boxed{15} \times m + 5 \times 2^{3k-2} \end{aligned}$$

이때  $\boxed{15} \times m$ 과  $5 \times 2^{3k-2}$ 이 모두 5의 배수이므로

$$2^{3(k+1)-2} + 3^{k+1} \text{도 5의 배수이다.}$$

- (i), (ii)에 의하여 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $2^{3n-2} + 3^n$ 은 5의 배수이다.

따라서  $p=5, q=15, f(k)=3k-2$ 이므로

$$p+q+f(3)=5+15+7=27$$

답 ③

### Level 1 기초 연습

분문 96~97쪽

- |     |     |     |       |      |
|-----|-----|-----|-------|------|
| 1 ② | 2 ⑤ | 3 ③ | 4 890 | 5 22 |
| 6 ① | 7 ③ | 8 ③ |       |      |

$$\begin{aligned}
 1 \quad & \sum_{k=1}^9 \frac{2k+1}{2k+3} - \sum_{i=1}^9 \frac{2i-1}{2i+1} \\
 &= \left( \frac{3}{5} + \frac{5}{7} + \frac{7}{9} + \cdots + \frac{17}{19} + \frac{19}{21} \right) \\
 &\quad - \left( \frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{5}{7} + \cdots + \frac{15}{17} + \frac{17}{19} \right) \\
 &= \frac{19}{21} - \frac{1}{3} \\
 &= \frac{4}{7}
 \end{aligned}$$

답 ②

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^9 \frac{2k+1}{2k+3} - \sum_{i=1}^9 \frac{2i-1}{2i+1} \\
 &= \sum_{k=2}^{10} \frac{2k-1}{2k+1} - \sum_{k=1}^9 \frac{2k-1}{2k+1} \\
 &= \frac{19}{21} - \frac{1}{3} \\
 &= \frac{4}{7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \quad & \sum_{k=1}^{10} (2a_k + 3b_k) = 18, \\
 & \sum_{k=1}^{10} (2a_k - 4b_k) = 2 \sum_{k=1}^{10} (a_k - 2b_k) = 4 \text{에서} \\
 & \sum_{k=1}^{10} (2a_k + 3b_k) - \sum_{k=1}^{10} (2a_k - 4b_k) = 18 - 4 = 14 \text{이므로} \\
 & \sum_{k=1}^{10} \{ (2a_k + 3b_k) - (2a_k - 4b_k) \} = 14 \\
 & \sum_{k=1}^{10} 7b_k = 14 \\
 & \text{즉, } 7 \sum_{k=1}^{10} b_k = 14 \text{에서 } \sum_{k=1}^{10} b_k = 2 \\
 & \text{따라서} \\
 & \sum_{k=1}^{10} (4b_k + 3) = 4 \sum_{k=1}^{10} b_k + \sum_{k=1}^{10} 3 \\
 &= 4 \times 2 + 3 \times 10 \\
 &= 38
 \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}
 3 \quad & \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n k^2 \\
 &= \frac{1}{n+1} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{n(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{2n^2+n}{6}
 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^5 \left( \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n+1} \right) &= \frac{1}{6} \sum_{n=1}^5 (2n^2+n) \\
 &= \frac{1}{6} \times \left( 2 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} + \frac{5 \times 6}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{6} \times (110 + 15) \\
 &= \frac{125}{6}
 \end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned}
 4 \quad & a_n = 2 \times \{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)\} + (2n+1) \\
 &= 2 \sum_{k=1}^n (2k-1) + (2n+1) \\
 &= 2 \times \left[ 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n \right] + (2n+1) \\
 &= 2n^2 + 2n + 1
 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} (2k^2 + 2k + 1) \\
 &= 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 2 \times \frac{10 \times 11}{2} + 10 \\
 &= 770 + 110 + 10 \\
 &= 890
 \end{aligned}$$

답 890

$$\begin{aligned}
 5 \quad & a_1, a_2, a_3 \text{이 이 순서대로 등차수열을 이루므로} \\
 & a_1 = 2, a_2 = 3 \text{에서 } a_3 = 4 \\
 & \text{또 } a_2, a_3, a_4 \text{가 이 순서대로 등비수열을 이루므로} \\
 & a_2 = 3, a_3 = 4 \text{에서 } a_4 = \frac{16}{3} \\
 & \text{또 } a_3, a_4, a_5 \text{가 이 순서대로 등차수열을 이루므로} \\
 & a_3 = 4, a_4 = \frac{16}{3} \text{에서 } a_5 = \frac{20}{3} \\
 & \text{또 } a_4, a_5, a_6 \text{이 이 순서대로 등비수열을 이루므로} \\
 & a_4 = \frac{16}{3}, a_5 = \frac{20}{3} \text{에서 } a_6 = \frac{25}{3} \\
 & \text{또 } a_5, a_6, a_7 \text{이 이 순서대로 등차수열을 이루므로} \\
 & a_5 = \frac{20}{3}, a_6 = \frac{25}{3} \text{에서 } a_7 = 10 \\
 & \text{또 } a_6, a_7, a_8 \text{이 이 순서대로 등비수열을 이루므로} \\
 & a_6 = \frac{25}{3}, a_7 = 10 \text{에서 } a_8 = 12 \\
 & \text{따라서 } a_7 + a_8 = 10 + 12 = 22
 \end{aligned}$$

답 22

## 정답과 풀이

6  $a_1 = S_1 = 1$   
 $n \geq 2$ 일 때,  
 $a_n = S_n - S_{n-1}$   
 $= n^2 - (n-1)^2$   
 $= 2n - 1$   
 $a_1 = 1$ 이므로 모든 자연수  $n$ 에 대하여  
 $a_n = 2n - 1$   
따라서  

$$\sum_{k=1}^{16} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{16} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{16} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left( 1 - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots \right.$$

$$\left. + \left( \frac{1}{31} - \frac{1}{33} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left( 1 - \frac{1}{33} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{32}{33}$$

$$= \frac{16}{33}$$

답 ①

7  $a_1 = 1$ 이므로  $a_2 = 2 - \frac{4}{1} = -2$   
 $a_2 = -2$ 이므로  $a_3 = 2 - \frac{4}{-2} = 4$   
 $a_3 = 4$ 이므로  $a_4 = 2 - \frac{4}{4} = 1$   
 $a_4 = 1$ 이므로  $a_5 = 2 - \frac{4}{1} = -2$   
 $\vdots$   
즉, 자연수  $m$ 에 대하여  
 $a_{3m-2} = 1, a_{3m-1} = -2, a_{3m} = 4$   
따라서  

$$\sum_{k=1}^{100} a_k = \sum_{k=1}^{99} a_k + a_{100}$$

$$= \sum_{k=1}^{99} a_k + a_1$$

$$= 33 \times \{1 + (-2) + 4\} + 1$$

$$= 99 + 1$$

$$= 100$$

답 ③

8 (i)  $n=1$ 일 때,  
(좌변)  $= \boxed{3}$ , (우변)  $= \boxed{3}$ 이므로  $(*)$ 이 성립한다.

(ii)  $n=m$ 일 때,  $(*)$ 이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m (2k+1) = m(m+2) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에  $\boxed{2m+3}$ 을 더하면

$$\sum_{k=1}^{m+1} (2k+1) = m(m+2) + (2m+3)$$

$$= m^2 + 4m + 3$$

$$= \boxed{(m+1)(m+3)}$$

이므로  $n=m+1$ 일 때도  $(*)$ 이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $(*)$ 이 성립한다.

따라서  $p=3$ ,  $f(m)=2m+3$ ,  $g(m)=(m+1)(m+3)$

이므로

$$\frac{f(6)+g(5)}{p} = \frac{15+48}{3} = 21$$

답 ③

### Level 2 기본 연습

본문 98~99쪽

- 1 ④      2 ②      3 ②      4 22      5 ⑤  
6 81      7 ②      8 8

1  $\sum_{k=1}^{20} k(a_k - 2a_{k+1})$   
 $= (a_1 - 2a_2) + 2(a_2 - 2a_3) + 3(a_3 - 2a_4) + 4(a_4 - 2a_5)$   
 $+ \cdots + 19(a_{19} - 2a_{20}) + 20(a_{20} - 2a_{21})$   
 $= a_1 - a_3 - 2a_4 - 3a_5 - \cdots - 18a_{20} - 40a_{21}$   
 $= a_1 - (a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \cdots + 18a_{20}) - 40a_{21}$   
 $= a_1 - \sum_{k=1}^{18} ka_{k+2} - 40a_{21}$   
따라서 조건 (가)와 (나)에서  
 $98 = 1 - \sum_{k=1}^{18} ka_{k+2} + 40$ 이므로  
 $\sum_{k=1}^{18} ka_{k+2} = 1 + 40 - 98 = -57$

답 ④

2  $\frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{k(k+2)}$   
 $= \frac{k(k+2) + 1}{k(k+2)}$

$$= 1 + \frac{1}{k(k+2)}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

따라서

$$\sum_{k=1}^8 \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$$

$$= \sum_{k=1}^8 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \right\}$$

$$= 8 + \sum_{k=1}^8 \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= 8 + \frac{1}{2} \left\{ \left( 1 - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots \right.$$

$$\left. + \left( \frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) \right\}$$

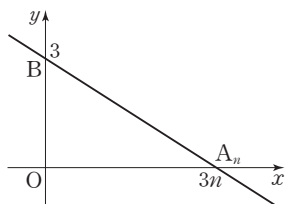
$$= 8 + \frac{1}{2} \times \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right)$$

$$= 8 + \frac{29}{45}$$

$$= \frac{389}{45}$$

답 ②

3



직선  $A_n B$ 의 방정식은  $\frac{x}{3n} + \frac{y}{3} = 1$

(i) 직선  $A_n B$  위의 점 중  $y$ 좌표가 0인 점의 좌표가  $(3n, 0)$   
 이므로  $y$ 좌표가 0이고  $x$ 좌표가 정수인 점의 개수는  
 $3n + 1$

(ii) 직선  $A_n B$  위의 점 중  $y$ 좌표가 1인 점의 좌표가  $(2n, 1)$   
 이므로  $y$ 좌표가 1이고  $x$ 좌표가 정수인 점의 개수는  
 $2n + 1$

(iii) 직선  $A_n B$  위의 점 중  $y$ 좌표가 2인 점의 좌표가  $(n, 2)$   
 이므로  $y$ 좌표가 2이고  $x$ 좌표가 정수인 점의 개수는  
 $n + 1$

(iv) 직선  $A_n B$  위의 점 중  $y$ 좌표가 3인 점의 좌표가  $(0, 3)$   
 이므로  $y$ 좌표가 3이고  $x$ 좌표가 정수인 점의 개수는  
 1

(i)~(iv)에서

$$f(n) = (3n + 1) + (2n + 1) + (n + 1) + 1$$

$$= 6n + 4$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10} f(k) = \sum_{k=1}^{10} (6k + 4)$$

$$= 6 \times \frac{10 \times 11}{2} + 40$$

$$= 330 + 40$$

$$= 370$$

답 ②

4

$$\frac{1}{\sqrt{k+4} + \sqrt{k+2}}$$

$$= \frac{\sqrt{k+4} - \sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+4} + \sqrt{k+2})(\sqrt{k+4} - \sqrt{k+2})}$$

$$= \frac{\sqrt{k+4} - \sqrt{k+2}}{(k+4) - (k+2)}$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{k+4} - \sqrt{k+2})$$

이므로

$$\sum_{k=m}^{45} \frac{1}{\sqrt{k+4} + \sqrt{k+2}}$$

$$= \sum_{k=m}^{45} \frac{1}{2}(\sqrt{k+4} - \sqrt{k+2})$$

$$= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{m+4} - \sqrt{m+2}) + (\sqrt{m+5} - \sqrt{m+3})$$

$$+ (\sqrt{m+6} - \sqrt{m+4}) + \dots + (\sqrt{48} - \sqrt{46})$$

$$+ (\sqrt{49} - \sqrt{47}) \}$$

$$= \frac{1}{2}(-\sqrt{m+2} - \sqrt{m+3} + \sqrt{48} + \sqrt{49})$$

$$= \frac{1}{2}(-\sqrt{m+2} - \sqrt{m+3} + 4\sqrt{3} + 7)$$

따라서

$$\frac{1}{2}(-\sqrt{m+2} - \sqrt{m+3} + 4\sqrt{3} + 7) = 2\sqrt{3} - \sqrt{6} + 1$$

$$\text{에서}$$

$$-\sqrt{m+2} - \sqrt{m+3} + 4\sqrt{3} + 7 = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6} + 2$$

$$\sqrt{m+2} + \sqrt{m+3} = 2\sqrt{6} + 5$$

$$\text{즉, } \sqrt{m+2} + \sqrt{m+3} = \sqrt{24} + \sqrt{25} \text{ 이므로}$$

$$m = 22$$

답 22

5

$$S_n = \frac{1 \times (4^n - 1)}{4 - 1} = \frac{4^n - 1}{3} \text{ 이므로}$$

$$3S_k + 1 = 3 \times \frac{4^k - 1}{3} + 1 = 4^k$$

$$\text{이때 } \frac{3 - 2^k}{3S_k + 1} = \frac{3 - 2^k}{4^k} = 3 \times \left( \frac{1}{4} \right)^k - \left( \frac{1}{2} \right)^k$$

## 정답과 풀이

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} \frac{3-2^k}{3S_k+1} &= \sum_{k=1}^{10} \left\{ 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^k \right\} \\ &= 3 \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{4}\right)^k - \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= 3 \times \frac{\frac{1}{4} \times \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \right\}}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{\frac{1}{2} \times \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \right\}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \right\} - \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \right\} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} - \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \\ &= (2^{10}-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \\ &= 1023 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{20}\end{aligned}$$

즉,  $m=1023$

답 ⑤

6 수열  $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1이고, 공차가 3인 등차수열이므로

$$a_n = 1 + (n-1) \times 3 = 3n-2$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \times \left\{ \left( 1 - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \left( \frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left( \frac{1}{58} - \frac{1}{61} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \times \left( 1 - \frac{1}{61} \right) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{60}{61} \\ &= \frac{20}{61}\end{aligned}$$

즉,  $p=61$ ,  $q=20$ 이므로

$$p+q=61+20=81$$

답 81

7  $\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{1}{10}$ 이므로 수열  $\{S_n\}$ 은 공비가  $\frac{1}{10}$ 인 등비수열이다.

이때  $S_1 = a_1 = 1$ 이므로

$$S_n = 1 \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

$$\text{즉, } S_{10} = \left(\frac{1}{10}\right)^9$$

또

$$\begin{aligned}a_9 &= S_9 - S_8 = \left(\frac{1}{10}\right)^8 - \left(\frac{1}{10}\right)^7 \\ &= \left(\frac{1}{10}\right)^8 \times (1-10) \\ &= (-9) \times \left(\frac{1}{10}\right)^8\end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{a_9}{S_{10}} = \frac{(-9) \times \left(\frac{1}{10}\right)^8}{\left(\frac{1}{10}\right)^9} = -90$$

답 ②

$$8 \quad a_3 = a_2 - a_1 = -2 - a$$

$$a_4 = a_3 - a_2 = (-2 - a) - (-2) = -a$$

$$a_5 = a_4 - a_3 = (-a) - (-2 - a) = 2$$

$$a_6 = a_5 - a_4 = 2 - (-a) = 2 + a$$

$$a_7 = a_6 - a_5 = (2 + a) - 2 = a$$

⋮

이때  $a > 0$ 이므로

$$|a_1| = a, |a_2| = 2, |a_3| = 2 + a,$$

$$|a_4| = a, |a_5| = 2, |a_6| = 2 + a, \dots$$

즉, 자연수  $m$ 에 대하여

$$|a_{3m-2}| = a, |a_{3m-1}| = 2, |a_{3m}| = 2 + a$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{20} |a_k| = \sum_{k=1}^{18} |a_k| + |a_{19}| + |a_{20}|$$

$$= \sum_{k=1}^{18} |a_k| + |a_1| + |a_2|$$

$$= 6 \times (a + 2 + 2 + a) + a + 2$$

$$= 13a + 26$$

이므로  $13a + 26 = 130$ 에서  $a=8$

답 8

### Level 3 실력 완성

본문 100~101쪽

1 825

2 ⑤

3 6

4 ④

5 56

1 조건 (가)에서  $\sum_{k=1}^3 a_k = 5$ 이므로 조건 (나)에서

$$3^2 - c \times 3 + c + 2 = 5$$

$$2c = 6 \text{에서 } c = 3$$

이때 수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제  $n$  항까지의 합을  $S_n$ 이라 하면 조건 (나)에서

$$S_n = n^2 - 3n + 5$$

$$(i) a_1 = S_1 = 1^2 - 3 \times 1 + 5 = 3$$

(ii)  $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 - 3n + 5) - \{(n-1)^2 - 3(n-1) + 5\} \\ &= 2n - 4 \\ &= 2(n-2) \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k^2 &= a_1^2 + \sum_{k=2}^{10} a_k^2 \\ &= 3^2 + 4 \sum_{k=2}^{10} (k-2)^2 \\ &= 9 + 4 \times (0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + 8^2) \\ &= 9 + 4 \sum_{k=1}^8 k^2 \\ &= 9 + 4 \times \frac{8 \times 9 \times 17}{6} \\ &= 9 + 816 \\ &= 825 \end{aligned}$$

답 825

2 (i)  $n=1$ 일 때

$$A_1 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

$$B_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{이므로}$$

$$(A_1 - B_1) \cup (B_1 - A_1) = \{1, 7, 8\}$$

$$\text{즉, } a_1 = 1$$

(ii)  $n=2$ 일 때

$$A_2 = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\},$$

$$B_2 = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\} \text{이므로}$$

$$(A_2 - B_2) \cup (B_2 - A_2) = \{12\}$$

$$\text{즉, } a_2 = 12$$

(iii)  $n \geq 3$ 일 때

집합  $A_n$ 의 원소의 최솟값  $(n^2+n)$ 과 집합  $B_n$ 의 원소의 최솟값  $(2n^2-n)$ 을 비교하면

$$(2n^2-n) - (n^2+n) = n^2 - 2n = n(n-2)$$

$$n \geq 3 \text{일 때 } n(n-2) > 0 \text{이므로}$$

$$n^2+n < 2n^2-n$$

즉, 집합  $(A_n - B_n) \cup (B_n - A_n)$ 의 원소의 최솟값은

항상  $n^2+n$ 이므로

$$a_n = n^2 + n$$

(i), (ii), (iii)에서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{20} \frac{1}{a_n} &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \sum_{n=3}^{20} \frac{1}{a_n} \\ &= 1 + \frac{1}{12} + \sum_{n=3}^{20} \frac{1}{n^2+n} \\ &= \frac{13}{12} + \sum_{n=3}^{20} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{13}{12} + \sum_{n=3}^{20} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{13}{12} + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \dots \\ &\quad + \left( \frac{1}{20} - \frac{1}{21} \right) \\ &= \frac{13}{12} + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{21} \right) \\ &= \frac{13}{12} + \frac{2}{7} \\ &= \frac{115}{84} \end{aligned}$$

답 ⑤

3  $a_2 = a_1 + 2p + q$

$$= 30 + 2p + q$$

$$a_3 = a_2 + 4p + q$$

$$= (30 + 2p + q) + 4p + q$$

$$= 30 + 6p + 2q$$

$$a_4 = a_3 + 6p + q$$

$$= (30 + 6p + 2q) + 6p + q$$

$$= 30 + 12p + 3q$$

이때  $a_3 > 0$ 이므로

$$30 + 6p + 2q > 0 \text{에서 } q > -3p - 15 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

또  $a_4 < 0$ 이므로

$$30 + 12p + 3q < 0 \text{에서 } q < -4p - 10 \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

$$\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒} \text{에서 } -3p - 15 < q < -4p - 10$$

그런데  $-3p - 15, -4p - 10$ 이 모두 정수이고, 정수  $q$ 가 존재해야 하므로  $(-4p - 10) - (-3p - 15) \geq 2$ 가 성립해야 한다.

$$\text{즉, } p \leq 3 \text{이므로 } p=1 \text{ 또는 } p=2 \text{ 또는 } p=3$$

(i)  $p=1$ 일 때

$$-18 < q < -14 \text{이므로 모든 순서쌍 } (p, q) \text{는}$$

$$(1, -17), (1, -16), (1, -15)$$

(ii)  $p=2$ 일 때

$$-21 < q < -18 \text{이므로 모든 순서쌍 } (p, q) \text{는}$$

$$(2, -20), (2, -19)$$

(iii)  $p=3$ 일 때

$$-24 < q < -22 \text{이므로 모든 순서쌍 } (p, q) \text{는}$$

$$(3, -23)$$

## 정답과 풀이

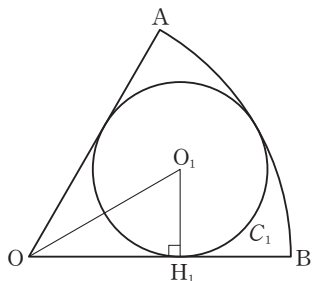
(i), (ii), (iii)에서 모든 순서쌍  $(p, q)$ 의 개수는  
 $3+2+1=6$

답 6

- 4  $S_1=a_1=6$ 이므로 (\*)에  $n=1$ 을 대입하면  
 $2(S_2+S_1)=(S_2-S_1)^2$   
 $S_2=a_1+a_2=6+a_2$ 이므로  
 $2(6+a_2+6)=a_2^2$ 에서  $a_2^2-2a_2-24=0$   
 $(a_2+4)(a_2-6)=0$   
 $a_2=-4$  또는  $a_2=6$   
 $a_2>0$ 이므로  $a_2=6$   
 한편, (\*)에  $n$  대신  $n+1$ 을 대입하면  
 $2(S_{n+2}+S_{n+1})=(S_{n+2}-S_{n+1})^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$   
 $\textcircled{7}-(*)$ 에서  
 $2(S_{n+2}-S_n)=(S_{n+2}-S_{n+1})^2-(S_{n+1}-S_n)^2$   
 $2(a_{n+2}+a_{n+1})=a_{n+2}^2-a_{n+1}^2$   
 $2(a_{n+2}+a_{n+1})=(a_{n+2}+a_{n+1})(a_{n+2}-a_{n+1})$   
 $a_{n+2}+a_{n+1}>0$ 이므로  
 $a_{n+2}-a_{n+1}=2$   
 따라서  $n \geq 2$ 일 때 수열  $\{a_n\}$ 은  $a_2=6$ 이고 공차가 2인 등차 수열이므로  
 $a_1=6, a_n=2n+2 \quad (n \geq 2)$   
 이상에서  $p=6, q=2, f(n)=2n+2$ 이므로  
 $\frac{p+f(10)}{q}=\frac{6+22}{2}=14$

답 ④

- 5 원  $C_1$ 의 중심을  $O_1$ 이라 하고, 점  $O_1$ 에서 선분  $OB$ 에 내린 수선의 발을  $H_1$ 이라 하자.



삼각형  $O_1OH_1$ 에서

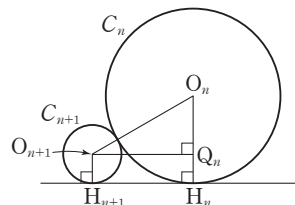
$\overline{O_1H_1}=a_1, \overline{OO_1}=6-a_1$ 이고,  $\angle O_1OH_1=\frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{\overline{O_1H_1}}{\overline{OO_1}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a_1}{6-a_1} \text{에서}$$

$$a_1=2$$

한편, 원  $C_n$ 의 중심을  $O_n$ 이라 하고, 점  $O_n$ 에서 선분  $OB$ 에 내린 수선의 발을  $H_n$ 이라 하자.



점  $O_{n+1}$ 에서 선분  $O_nH_n$ 에 내린 수선의 발을  $Q_n$ 이라 하면 삼각형  $O_nO_{n+1}Q_n$ 에서

$$\overline{O_nO_{n+1}}=a_n+a_{n+1}, \overline{O_nQ_n}=a_n-a_{n+1} \text{이고,}$$

$$\angle O_nO_{n+1}Q_n=\frac{\pi}{6} \text{이므로}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{\overline{O_nQ_n}}{\overline{O_nO_{n+1}}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a_n-a_{n+1}}{a_n+a_{n+1}} \text{에서}$$

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$$

따라서  $p=2, q=\frac{1}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} 24(p+q) &= 24 \times \left(2 + \frac{1}{3}\right) \\ &= 48 + 8 \\ &= 56 \end{aligned}$$

답 56