

수학 I

01

지수함수와 로그함수

정답

본문 7~19쪽

01 ①	02 48	03 81	04 ⑤	05 ⑤
06 ③	07 ③	08 ④	09 20	10 ⑤
11 ④	12 ③	13 ②	14 ③	15 ⑤
16 ①	17 ④	18 40	19 11	20 ③
21 ①	22 ②	23 ④	24 2	25 ⑤
26 ②	27 260	28 ③	29 ③	30 ⑤
31 300	32 ⑤	33 8	34 ③	35 ⑤
36 5	37 256	38 ③		

01

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{-125} + \sqrt[3]{(-2)^6} &= \sqrt[3]{(-5)^3} + \sqrt[3]{(-2)^6} \\ &= -5 + |-2| \\ &= -3\end{aligned}$$

답 ①

02

$$\begin{aligned}a &= \sqrt{3} \text{이므로} \\ \sqrt[3]{a} &= \sqrt[3]{\sqrt{3}} = \sqrt[6]{3} \\ \text{또, } b &= \sqrt[3]{4} \\ \text{따라서 } (\sqrt[3]{ab})^6 &= (\sqrt[6]{3} \sqrt[3]{4})^6 \\ &= (\sqrt[6]{3})^6 (\sqrt[3]{4})^6 \\ &= 3 \{(\sqrt[3]{4})^3\}^2 \\ &= 3 \times 4^2 \\ &= 48\end{aligned}$$

답 48

03

$$\begin{aligned}\text{주어진 등식에서} \\ \sqrt[3]{-72} &= -\sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b^2} \\ &= -\sqrt[3]{ab^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ab^2 &= 72 \\ \text{이때 } 72 &= 72 \times 1^2 = 18 \times 2^2 = 8 \times 3^2 = 2 \times 6^2 \text{이므로} \\ a+b \text{의 최댓값 } M \text{과 최솟값 } m \text{을 구하면} \\ M &= 72+1=73 \\ m &= 2+6=8 \\ \text{따라서 } M+m &= 73+8=81\end{aligned}$$

답 81

04

$$\begin{aligned}(\sqrt{8})^{-1} \times \sqrt[6]{8^7} &= (8^{\frac{1}{2}})^{-1} \times 8^{\frac{7}{6}} \\ &= 8^{-\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{7}{6}} = 8^{-\frac{1}{2} + \frac{7}{6}} \\ &= 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} \\ &= 2^2 = 4\end{aligned}$$

답 ⑤

05

$$\begin{aligned}\left(\frac{2^{-2}}{27}\right)^{\frac{12}{n}} &= (2^{-24} \times 27^{-12})^{\frac{1}{n}} \\ &= (2^{-24})^{\frac{1}{n}} \times \{(3^3)^{-12}\}^{\frac{1}{n}} \\ &= 2^{-\frac{24}{n}} \times 3^{-\frac{36}{n}}\end{aligned}$$

$\left(\frac{2^{-2}}{27}\right)^{\frac{12}{n}}$ 이 자연수가 되려면 $2^{-\frac{24}{n}}$ 과 $3^{-\frac{36}{n}}$ 이 모두 자연수가 되어야 하

므로 $-\frac{24}{n}$ 와 $-\frac{36}{n}$ 이 모두 음이 아닌 정수이어야 한다.

따라서 정수 n 은 $-1, -2, -3, -4, -6, -12$ 의 6개이다.

답 ⑤

06

이차방정식 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 4$$

따라서

$$\begin{aligned}& \left(\sqrt{3^\alpha} + \frac{6}{\sqrt{3^\beta}}\right) \left(\sqrt{3^\beta} + \frac{6}{\sqrt{3^\alpha}}\right) \\ &= \sqrt{3^\alpha} \sqrt{3^\beta} + \frac{36}{\sqrt{3^\alpha} \sqrt{3^\beta}} + 12 \\ &= \sqrt{3^{\alpha+\beta}} + \frac{36}{\sqrt{3^{\alpha+\beta}}} + 12 \\ &= \sqrt{3^4} + \frac{36}{\sqrt{3^4}} + 12 \\ &= 9 + \frac{36}{9} + 12 \\ &= 9 + 4 + 12 = 25\end{aligned}$$

답 ③

07

$$\begin{aligned}2^{a-1} &= 3 \text{에서} \\ 2^a &= 6 \\ 6^{b+1} &= 96 \text{에서} \\ 6^b &= 16 \\ \text{따라서 } 2^{ab} &= (2^a)^b = 6^b = 16\end{aligned}$$

답 ③

08

$$A = \sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}}$$

$$B = \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^2} = 2^{\frac{1}{3}}$$

$$C = \sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5} = 5^{\frac{1}{6}}$$

이므로

$$A^{12} = (3^{\frac{1}{4}})^{12} = 3^3 = 27$$

$$B^{12} = (2^{\frac{1}{3}})^{12} = 2^4 = 16$$

$$C^{12} = (5^{\frac{1}{6}})^{12} = 5^2 = 25$$

따라서 $B^{12} < C^{12} < A^{12}$ 이고 $A > 0, B > 0, C > 0$ 이므로

$$B < C < A$$

답 ④

09

$$\begin{aligned} (2^x + 2^{-y})^3 &= (2^x)^3 + (2^{-y})^3 + 3 \times 2^x \times 2^{-y} \times (2^x + 2^{-y}) \\ &= 8^x + 8^{-y} + 3 \times 2^{x-y} \times (2^x + 2^{-y}) \end{aligned}$$

이때 $2^x + 2^{-y} = 6, 8^x + 8^{-y} = 72$ 이므로

$$6^3 = 72 + 3 \times 2^{x-y} \times 6 \text{에서 } 2^{x-y} = 8$$

따라서

$$\begin{aligned} (2^x + 2^{-y})^2 &= (2^x)^2 + 2 \times 2^x \times 2^{-y} + (2^{-y})^2 \\ &= 4^x + 2 \times 2^{x-y} + 4^{-y} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} 4^x + 4^{-y} &= (2^x + 2^{-y})^2 - 2 \times 2^{x-y} \\ &= 6^2 - 2 \times 8 \\ &= 20 \end{aligned}$$

답 20

10

(i) 밑의 조건에서 $3-x > 0, 3-x \neq 1$ 이어야 하므로

$$x < 3, x \neq 2$$

(ii) 진수 조건에서 $16-x^2 > 0$ 이어야 하므로

$$x^2 - 16 < 0$$

$$(x-4)(x+4) < 0$$

$$-4 < x < 4$$

(i), (ii)에서 공통범위를 구하면

$$-4 < x < 3, x \neq 2$$

따라서 정수 x 는 $-3, -2, -1, 0, 1$ 의 5개이다.

답 ⑤

11

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{8}{3} + \log_2 12 &= \log_2 \left(\frac{8}{3} \times 12 \right) \\ &= \log_2 32 \\ &= \log_2 2^5 \\ &= 5 \log_2 2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

답 ④

12

$$\log_{12} x = \frac{1}{3} \text{에서 } x = 12^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{12}$$

$$\log_y 18 = 3 \text{에서 } y^3 = 18$$

따라서

$$\begin{aligned} 3 \log_6 xy &= \log_6 (xy)^3 \\ &= \log_6 x^3 y^3 \\ &= \log_6 \{ (\sqrt[3]{12})^3 \times 18 \} \\ &= \log_6 (12 \times 18) \\ &= \log_6 6^3 \\ &= 3 \log_6 6 \\ &= 3 \end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이

$$x = 12^{\frac{1}{3}} \text{이고 } y^3 = 18 \text{에서 } y = 18^{\frac{1}{3}}$$

$$\begin{aligned} xy &= (12 \times 18)^{\frac{1}{3}} \\ &= (6^3)^{\frac{1}{3}} = 6 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } 3 \log_6 xy = 3 \times 1 = 3$$

13

$$\begin{aligned} 6 \log_4 48 + \log_{\frac{1}{2}} 27 &= 6 \log_{2^2} 48 + \log_{2^{-1}} 3^3 \\ &= 3 \log_2 48 - 3 \log_2 3 \\ &= 3(\log_2 48 - \log_2 3) \\ &= 3 \log_2 \frac{48}{3} \\ &= 3 \log_2 16 \\ &= 3 \log_2 2^4 \\ &= 12 \log_2 2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

답 ②

14

$$a^2 = b^3 \text{에서 } (a^2)^{\frac{1}{3}} = (b^3)^{\frac{1}{3}} \text{이므로}$$

$$b = a^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{또, } b^3 = c^4 \text{에서 } (b^3)^{\frac{1}{4}} = (c^4)^{\frac{1}{4}} \text{이므로}$$

$$c = b^{\frac{3}{4}}$$

따라서

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt[3]{a}} b + 2 \log_{\sqrt{b}} c &= \log_{a^{\frac{1}{3}}} a^{\frac{2}{3}} + 2 \log_{b^{\frac{1}{2}}} b^{\frac{3}{4}} \\ &= 2 \log_a a + 3 \log_b b \\ &= 2 + 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

답 ③

15

$$\text{조건 (가)에서 } (a+b)^{\frac{2}{3}} = 4 \text{이므로}$$

$$\{(a+b)^{\frac{2}{3}}\}^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}}$$

$$a+b=(2^2)^{\frac{3}{2}}=2^3=8$$

$$\text{조건 (나)에서 } 2 \log_2 b \times \log_b a + \frac{2}{\log_b 4} = 3 \text{이므로}$$

$$2 \log_2 b \times \log_b a + \frac{2}{\log_b 4}$$

$$= \log_2 b^2 \times \log_b a + \frac{2}{2 \log_b 2}$$

$$= \log_2 a + \frac{1}{\log_b 2}$$

$$= \log_2 a + \log_2 b$$

$$= \log_2 ab = 3$$

$$ab = 2^3 = 8$$

따라서

$$\begin{aligned} \log_2(a-b) &= \frac{1}{2} \log_2(a-b)^2 \\ &= \frac{1}{2} \log_2\{(a+b)^2 - 4ab\} \\ &= \frac{1}{2} \log_2(8^2 - 4 \times 8) \\ &= \frac{1}{2} \log_2 32 \\ &= \frac{1}{2} \log_2 2^5 \\ &= \frac{5}{2} \log_2 2 \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

16

$$\begin{aligned} \log 8150 &= \log(8.15 \times 10^3) \\ &= \log 8.15 + \log 10^3 \\ &= 0.9112 + 3 = 3.9112 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } A = 3.9112$$

$$\begin{aligned} \log B &= -0.0888 \\ &= -1 + 0.9112 \\ &= \log 10^{-1} + \log 8.15 \\ &= \log(10^{-1} \times 8.15) \\ &= \log 0.815 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } B = 0.815$$

$$\text{따라서 } A+B = 3.9112 + 0.815 = 4.7262$$

17

$$\begin{aligned} -3.0458 &= -3 - 0.0458 \\ &= -4 + (1 - 0.0458) \\ &= -4 + 0.9542 \\ &= -4 + 2 \times 0.4771 \\ &= \log 10^{-4} + 2 \log 3 \\ &= \log(9 \times 10^{-4}) \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } n = -4, a = 9 \text{이므로 } n+a = 5$$

18

$$\begin{aligned} \log 5x^2 - \log \frac{\sqrt{x}}{2} \\ &= (\log 5 + \log x^2) - (\log \sqrt{x} - \log 2) \\ &= (1 + \log 2 + 2 \log x) - \left(\frac{1}{2} \log x - \log 2\right) \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{3}{2} \log x$$

$$\text{조건 (가)에서 } \frac{5}{2} < 1 + \frac{3}{2} \log x < 4 \text{이고}$$

$$1 + \frac{3}{2} \log x \text{가 정수이어야 하므로}$$

$$1 + \frac{3}{2} \log x = 3$$

$$\log x = \frac{4}{3}$$

$$\text{따라서 } 30 \log x = 30 \times \frac{4}{3} = 40$$

답 40

19

곡선 $y = 2^{x-3}$ 의 점근선은 직선 $y = 0$ 이고,

곡선 $y = 2^{x-3} + \sqrt{11}$ 은 곡선 $y = 2^{x-3}$ 을 y 축의 방향으로 $\sqrt{11}$ 만큼 평행 이동한 것이므로 곡선 $y = 2^{x-3} + \sqrt{11}$ 의 점근선은 직선 $y = \sqrt{11}$ 이다.

$$\text{따라서 } k = \sqrt{11} \text{이므로 } k^2 = 11$$

답 11

20

$$y = \log_4 x \text{에서}$$

x 를 y 에 대한 식으로 나타내면

$$x = 4^y \text{이고, } x \text{와 } y \text{를 바꾸면 } y = 4^x \text{이므로}$$

함수 $y = \log_4 x$ 의 역함수는 $y = 4^x$ 이다.

조건 (가)에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_4 x$ 의 역함수의 그래프를 평행이동한 것이므로 $f(x) = 4^{x-a} + b$ (a, b 는 상수)로 놓을 수 있다.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 두 점 $(-3, 3), (-2, 6)$ 을 지나므로

$$f(-3) = 3 \text{에서}$$

$$4^{-3-a} + b = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(-2) = 6 \text{에서}$$

$$4^{-2-a} + b = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} - \textcircled{㉠} \text{을 하면}$$

$$4^{-2-a} - 4^{-3-a} = 3 \text{에서}$$

$$4^a = 4^{-3}$$

$$a = -3$$

$$a = -3 \text{을 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면}$$

$$4^{-3+3} + b = 3 \text{에서}$$

$$b = 3 - 1 = 2$$

$$\text{따라서 } f(x) = 4^{x+3} + 2 \text{이므로}$$

$$f(-1) = 4^2 + 2 = 16 + 2 = 18$$

답 ③

답 ⑤

답 ①

답 ④

다른 풀이

함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 로 놓으면 조건 (가)에 의하여 $g(x) = \log_4(x-a) + b$ (a, b 는 상수)로 놓을 수 있다.

조건 (나)에 의하여

$$f(-3) = 3 \text{에서 } g(3) = -3 \text{이므로}$$

$$g(3) = \log_4(3-a) + b = -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$f(-2) = 6 \text{에서 } g(6) = -2 \text{이므로}$$

$$g(6) = \log_4(6-a) + b = -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{8} - \textcircled{7}$ 을 하면

$$\log_4(6-a) - \log_4(3-a) = 1$$

$$\log_4(6-a) = \log_4(3-a) + \log_4 4$$

$$\log_4(6-a) = \log_4 4(3-a)$$

$$6-a = 4(3-a)$$

$$3a = 6$$

$$a = 2$$

$a = 2$ 를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$\log_4(3-2) + b = -3$$

$$0 + b = -3$$

$$b = -3$$

$$\text{그러므로 } g(x) = \log_4(x-2) - 3$$

$$f(-1) = k \text{로 놓으면}$$

$$g(k) = -1 \text{이므로}$$

$$g(k) = \log_4(k-2) - 3 = -1$$

$$\log_4(k-2) = 2$$

$$k-2 = 4^2$$

$$\text{따라서 } k = 4^2 + 2 = 16 + 2 = 18 \text{이므로}$$

$$f(-1) = k = 18$$

21

두 점 A, B의 x 좌표를 각각 s, t ($s < t$)로 놓으면

두 점 A, B의 좌표는 각각 $(s, a^s), (t, a^t)$ 이고,

두 점 A, B가 원 C의 지름의 양 끝점이므로 선분 AB의 중점

$$\left(\frac{s+t}{2}, \frac{a^s+a^t}{2}\right) \text{은 원 C의 중심 } \left(0, \frac{5}{3}\right) \text{와 같다.}$$

$$\frac{s+t}{2} = 0 \text{에서 } s+t=0, \text{ 즉 } t=-s \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\frac{a^s+a^t}{2} = \frac{5}{3} \text{에서 } a^s+a^t = \frac{10}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$ 을 $\textcircled{8}$ 에 대입하면

$$a^s + a^{-s} = \frac{10}{3}$$

$$3a^{2s} - 10a^s + 3 = 0$$

$$(3a^s - 1)(a^s - 3) = 0$$

$$a^s = \frac{1}{3} \text{ 또는 } a^s = 3$$

$$s = \log_a \frac{1}{3} \text{ 또는 } s = \log_a 3$$

$$s = \log_a \frac{1}{3} \text{이면 } \textcircled{7} \text{에서}$$

$$t = -\log_a \frac{1}{3} = \log_a 3$$

$$s = \log_a 3 \text{이면 } \textcircled{7} \text{에서}$$

$$t = -\log_a 3 = \log_a \frac{1}{3}$$

$$a > 1 \text{에서 } \log_a \frac{1}{3} < \log_a 3 \text{이고, } s < t \text{이므로}$$

$$s = \log_a \frac{1}{3} \text{이고, } t = \log_a 3 \text{이다.}$$

그러므로 두 점 A, B의 좌표는 각각

$$\left(\log_a \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), (\log_a 3, 3) \text{이다.}$$

두 점 A $\left(\log_a \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, B $(\log_a 3, 3)$ 이 원 C의 지름의 양 끝점이면

선분 AB는 원 C의 지름이므로

$$\overline{AB}^2 = 4 \times \frac{73}{36}$$

$$\left(\log_a 3 - \log_a \frac{1}{3}\right)^2 + \left(3 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{73}{9}$$

$$(\log_a 3 + \log_a 3)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{73}{9}$$

$$(\log_a 9)^2 = \frac{73}{9} - \frac{64}{9} = 1$$

$$\log_a 9 = -1 \text{ 또는 } \log_a 9 = 1$$

$$a = \frac{1}{9} \text{ 또는 } a = 9$$

따라서 $a > 1$ 이므로 $a = 9$

답 ①

22

$$\frac{5^{x^2}}{5^{7x}} = 125 \text{에서}$$

$$5^{x^2-7x} = 5^3$$

$$x^2 - 7x = 3$$

$$x^2 - 7x - 3 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

이차방정식 $\textcircled{7}$ 의 판별식을 D 로 놓으면

$$D = 7^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 49 + 12 = 61 > 0 \text{이므로}$$

이차방정식 $\textcircled{7}$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

이차방정식 $\textcircled{7}$ 의 두 실근의 합은 7이므로

주어진 방정식의 서로 다른 모든 실근의 합은 7이다.

답 ②

23

직선 $y = f(x)$ 는 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이고, 점 $(4, 0)$ 을 지나므로

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-4) \text{에서 } f(x) = \frac{1}{2}x - 2$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{|f(x)|} \geq \frac{1}{25} \text{에서}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{|f(x)|} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

밑 $\frac{1}{5}$ 은 1보다 작은 양의 실수이므로

$$|f(x)| \leq 2$$

$$-2 \leq f(x) \leq 2$$

$$-2 \leq \frac{1}{2}x - 2 \leq 2$$

$$0 \leq \frac{1}{2}x \leq 4$$

$$0 \leq x \leq 8$$

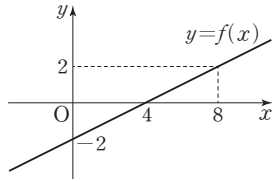
따라서 정수 x 는 0, 1, 2, ..., 8이므로 모든 정수 x 의 개수는 9이다.

답 ④

다른 풀이

직선 $y=f(x)$ 는 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이고, 점 (4, 0)을 지나므로

직선 $y=f(x)$ 는 그림과 같다.



$$\left(\frac{1}{5}\right)^{|f(x)|} \geq \frac{1}{25} \text{에서}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{|f(x)|} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

밑 $\frac{1}{5}$ 은 1보다 작은 양의 실수이므로

$$|f(x)| \leq 2 \text{에서}$$

$$-2 \leq f(x) \leq 2$$

직선 $y=f(x)$ 는 두 점 (0, -2), (8, 2)를 지나므로

$$0 \leq x \leq 8$$

따라서 정수 x 는 0, 1, 2, ..., 8이므로 모든 정수 x 의 개수는 9이다.

24

$$128 \times 2^{\{f(x)\}^2} = 256^{f(x)} \text{에서}$$

$$2^7 \times 2^{\{f(x)\}^2} = (2^8)^{f(x)}$$

$$2^{\{f(x)\}^2+7} = 2^{8f(x)}$$

$$\{f(x)\}^2 + 7 = 8f(x)$$

$$\{f(x)\}^2 - 8f(x) + 7 = 0$$

$$f(x) = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 8t + 7 = 0$$

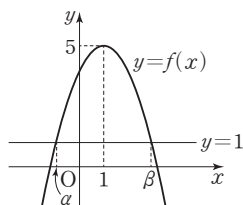
$$(t-1)(t-7) = 0$$

$$t=1 \text{ 또는 } t=7$$

$$f(x)=1 \text{ 또는 } f(x)=7$$

(i) $f(x)=1$ 일 때,

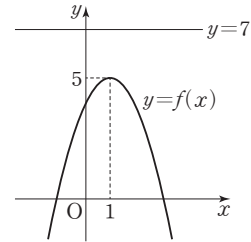
방정식 $f(x)=1$ 의 실근은 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 이 만나는 점의 x 좌표와 같고, 그림과 같이 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 이 만나는 서로 다른 두 점의 x 좌표를 각각 α , β 로 놓으면 두 점 (α , 0), (β , 0)은 직선 $x=1$ 에 대하여 서로 대칭이므로 $\frac{\alpha+\beta}{2}=1$, 즉 $\alpha+\beta=2$ 이다.



그러므로 방정식 $f(x)=1$ 의 두 실근 α , β 의 합은 $\alpha+\beta=2$ 이다.

(ii) $f(x)=7$ 일 때,

방정식 $f(x)=7$ 의 실근은 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=7$ 이 만나는 점의 x 좌표와 같고, 그림과 같이 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=7$ 이 만나지 않으므로 방정식 $f(x)=7$ 의 실근은 존재하지 않는다.



(i), (ii)에서 방정식 $\{f(x)\}^2 - 8f(x) + 7 = 0$ 의 서로 다른 모든 실근의 합은 2이므로 방정식 $128 \times 2^{\{f(x)\}^2} = 256^{f(x)}$ 의 서로 다른 모든 실근의 합은 2이다.

답 2

다른 풀이

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 (1, 5)이고,

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 위로 볼록이므로

$f(x)=a(x-1)^2+5$ ($a<0$)으로 놓을 수 있다.

$$128 \times 2^{\{f(x)\}^2} = 256^{f(x)} \text{에서}$$

$$2^7 \times 2^{\{f(x)\}^2} = (2^8)^{f(x)}$$

$$2^{\{f(x)\}^2+7} = 2^{8f(x)}$$

$$\{f(x)\}^2 + 7 = 8f(x)$$

$$\{f(x)\}^2 - 8f(x) + 7 = 0$$

$$f(x)=t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 8t + 7 = 0$$

$$(t-1)(t-7) = 0$$

$$t=1 \text{ 또는 } t=7$$

$$f(x)=1 \text{ 또는 } f(x)=7$$

(i) $f(x)=1$ 일 때,

$$a(x-1)^2+5=1 \text{에서}$$

$$ax^2-2ax+a+4=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 ①의 판별식을 D 로 놓으면

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - a(a+4) = -4a > 0$$

이므로 이차방정식 ①은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이차방정식 ①의 두 실근을 α , β 로 놓으면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\text{두 실근 } \alpha, \beta \text{의 합은 } \alpha+\beta = \frac{2a}{a} = 2 \text{이므로}$$

방정식 $f(x)=1$ 의 두 실근 α , β 의 합은 2이다.

(ii) $f(x)=7$ 일 때,

$$a(x-1)^2+5=7 \text{에서}$$

$$ax^2-2ax+a-2=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이차방정식 ②의 판별식을 D 로 놓으면

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - a(a-2) = 2a < 0$$

이므로 이차방정식 ②은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

그러므로 방정식 $f(x)=7$ 의 실근은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 방정식 $\{f(x)\}^2 - 8f(x) + 7 = 0$ 의 서로 다른 모든 실근의 합은 2이므로 방정식 $128 \times 2^{f(x)^2} = 256^{f(x)}$ 의 서로 다른 모든 실근의 합은 2이다.

25

$$f(x) = \log_3 \left(1 + \frac{1}{x+4} \right) = \log_3 \frac{x+5}{x+4}$$

이므로

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) = \log_3 \frac{6}{5} + \log_3 \frac{7}{6} + \log_3 \frac{8}{7} + \cdots + \log_3 \frac{n+5}{n+4}$$

$$= \log_3 \left(\frac{6}{5} \times \frac{7}{6} \times \frac{8}{7} \times \cdots \times \frac{n+5}{n+4} \right)$$

$$= \log_3 \frac{n+5}{5}$$

$$\text{따라서 } \log_3 \frac{n+5}{5} = 2 \text{이므로 } \frac{n+5}{5} = 9, \text{ 즉 } n = 40$$

답 ⑤

26

곡선 $y = \log_2(x-k)$ 의 점근선은 직선 $x=k$ 이다.

곡선 $y = \log_2(x-k)$ 의 점근선과 곡선 $y = 3^{x-1} + 2$ 가 만나는 점의 y 좌표가 5이므로

$$x=k, y=5 \text{를 } y=3^{x-1} + 2 \text{에 대입하면}$$

$$5 = 3^{k-1} + 2 \text{에서 } 3^{k-1} = 3$$

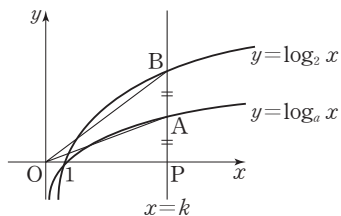
$$\text{따라서 } k-1=1 \text{이므로 } k=2$$

답 ②

27

점 $P(k, 0)$ 을 지나고 y 축에 평행한 직선 $x=k$ 가 두 함수

$y = \log_a x$ ($a > 2$), $y = \log_2 x$ 의 그래프와 만나는 점이 각각 A, B이므로 그림으로 나타내면 다음과 같다.



삼각형 OPB의 넓이가 삼각형 OPA의 넓이의 2배이므로

$$\overline{PB} = 2\overline{PA}$$

$$\overline{AB} = \overline{PA} = 4 \text{이므로}$$

$$\overline{PB} = 2\overline{PA} = 2\overline{AB} = 8$$

$$\log_2 k = 8$$

$$k = 2^8 = 256$$

점 A의 좌표가 (256, 4)이므로

$$\log_a 256 = 4$$

$$a^4 = 256$$

$$a > 2 \text{이므로 } a = 4$$

$$\text{따라서 } a = 4 \text{이고 } k = 256 \text{이므로}$$

$$a + k = 4 + 256 = 260$$

답 260

28

로그의 진수 조건에 의하여

$$3x+1 > 0, \text{ 즉 } x > -\frac{1}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$3 \log_{64} 3(3x+1) = 1 \text{에서}$$

$$\log_{64} (9x+3) = \frac{1}{3}$$

$$9x+3 = 64^{\frac{1}{3}} = (4^3)^{\frac{1}{3}} = 4$$

$$9x=1, x=\frac{1}{9}$$

$$x=\frac{1}{9} \text{은 } \textcircled{1} \text{을 만족시킨다.}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{1}{9} \text{이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} a = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} \right)^2 = 2$$

답 ③

29

$$3^x \leq 81 \text{에서 } 3^x \leq 3^4$$

밑 3은 1보다 큰 양의 실수이므로

$$x^2 \leq 4$$

$$x^2 - 4 \leq 0$$

$$(x+2)(x-2) \leq 0$$

$$-2 \leq x \leq 2$$

$$\text{따라서 } A = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} k \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{k}$$

$$\text{밑 } \frac{1}{2} \text{이 } 1 \text{보다 작은 양의 실수이므로}$$

$$x+1 < \sqrt{k}, \text{ 즉 } x < \sqrt{k}-1$$

$$\text{진수 조건에 의하여 } x+1 > 0, \text{ 즉 } x > -1$$

$$k \text{는 자연수에서 } \sqrt{k}-1 \geq 0 \text{이므로 } B = \{x \mid -1 < x < \sqrt{k}-1\}$$

B가 A의 부분집합이므로

$$\sqrt{k}-1 \leq 2 \text{에서 } \sqrt{k} \leq 3$$

$$\text{따라서 } 1 \leq k \leq 9 \text{이므로 조건을 만족시키는 자연수 } k \text{의 최댓값은 } 9 \text{이다.}$$

답 ③

30

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 좌표는 (2, 0), (8, 0)이므로 0이 아닌 상수 a 에 대하여 $f(x) = a(x-2)(x-8)$ 로 놓을 수 있다.

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점의 좌표가 (0, 16)이므로 $16 = a(-2)(-8)$ 에서 $a=1$, 즉 $f(x) = (x-2)(x-8)$

$$\log_2 f(x) \leq 4 \text{에서}$$

$$\log_2 (x-2)(x-8) \leq \log_2 16$$

밑 2는 1보다 큰 양의 실수이므로

$$(x-2)(x-8) \leq 16$$

$$x^2 - 10x \leq 0$$

$$x(x-10) \leq 0$$

$$0 \leq x \leq 10 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

로그의 진수 조건에 의하여 $f(x) > 0$ 이므로

$$(x-2)(x-8) > 0$$

$$x < 2 \text{ 또는 } x > 8 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $0 \leq x < 2$ 또는 $8 < x \leq 10$

따라서 정수 x 의 값은 0, 1, 9, 10이므로

주어진 부등식을 만족시키는 모든 정수 x 의 값의 합은

$$0 + 1 + 9 + 10 = 20$$

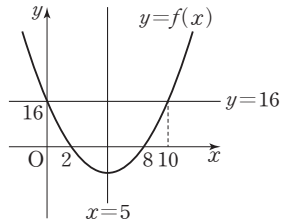
답 ⑤

다른 풀이

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 좌표는 (2, 0),

(8, 0)이고, y 축과 만나는 점의 좌표는 (0, 16)이므로 이차함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$$\log_2 f(x) \leq 4 \text{에서}$$

$$\log_2 f(x) \leq \log_2 16$$

밑 2는 1보다 큰 양의 실수이므로

$$f(x) \leq 16$$

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=5$ 에 대하여 대칭이므로

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 (10, 16)을 지난다.

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 부등식 $f(x) \leq 16$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$0 \leq x \leq 10 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

로그의 진수 조건에 의하여 $f(x) > 0$ 이므로

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서

$$x < 2 \text{ 또는 } x > 8 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $0 \leq x < 2$ 또는 $8 < x \leq 10$

따라서 정수 x 의 값은 0, 1, 9, 10이므로

주어진 부등식을 만족시키는 모든 정수 x 의 값의 합은

$$0 + 1 + 9 + 10 = 20$$

31

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 두 점 A, B를 모두 지나고, $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ 이므로

점 A의 x 좌표를 t 로 놓으면 점 A는 직선 $y=x$ 위에 있으므로

A(t, t), B($t+2, t+2$)로 놓을 수 있다.

두 점 A(t, t), B($t+2, t+2$)는

함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위에 있으므로

$$t = 5^{t-a} + \frac{23}{12} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$t+2 = 5^{t+2-a} + \frac{23}{12} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠-㉡을 하면

$$2 = 25 \times 5^{t-a} - 5^{t-a}$$

$$5^{t-a} = \frac{1}{12} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉢을 ㉠에 대입하면

$$t = \frac{1}{12} + \frac{23}{12} = \frac{24}{12} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

㉢을 ㉢에 대입하면

$$5^{2-a} = \frac{1}{12} \text{에서}$$

$$5^a = 25 \times 12 = 300$$

답 300

32

ㄱ. $(a, b) \in A$ 이면 $b = 9^a > 0$ 이다.

$ab < 0$ 이면 $b > 0$ 이므로 $a < 0$ 이다.

따라서 $a^2 > 0$ 이고, $b > 0$ 이므로 $a^2 b > 0$ 이다. (참)

ㄴ. $(a, b) \in B$ 이면 $b = \log_9 a$, 즉 $a = 9^b$ 이므로

$$9^{\frac{b}{2}} = (9^b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9^b} = \sqrt{a} \text{이다.}$$

따라서 $\left(\frac{b}{2}, \sqrt{a}\right) \in A$ 이다. (참)

ㄷ. $(a, b) \in A$ 에서 $b = 9^a$ 이므로 $a = \log_9 b$ $\dots\dots \textcircled{㉠}$

$(b+6, 2a) \in B$ 에서 $2a = \log_9 (b+6)$ $\dots\dots \textcircled{㉡}$

㉠, ㉡에서

$$2 \log_9 b = \log_9 (b+6), \text{ 즉 } \log_9 b^2 = \log_9 (b+6)$$

$$b^2 = b+6$$

$$b^2 - b - 6 = 0$$

$$(b+2)(b-3) = 0$$

$$b = -2 \text{ 또는 } b = 3$$

$$b > 0 \text{이므로 } b = 3$$

$$\text{이것을 ㉠에 대입하면 } a = \log_9 3 = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{1}{2}, b = 3 \text{이므로 } a+b = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2} \text{이다. (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

33

$y = a^x - b$ 에서 x 와 y 를 바꾸면

$$x = a^y - b \text{이고,}$$

y 를 x 에 대한 함수로 나타내면 $y = \log_a (x+b)$ 이므로

함수 $y = a^x - b$ 의 역함수는 $y = \log_a (x+b)$ 이다.

점 A의 좌표는 (2, 14)이고, 두 점 A, B는 직선 $y=x$ 에 대하여 서로 대칭이므로 점 B의 좌표는 (14, 2)이다.

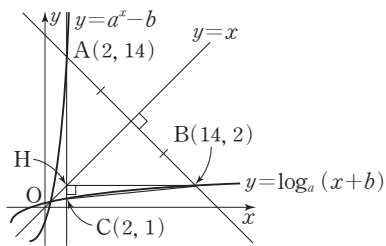
점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{BH} = 12$ 이므로 삼각형 ACB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BH} = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times 12 = 78 \text{에서}$$

$$\overline{AC} = \frac{78}{6} = 13$$

점 C의 x 좌표는 점 A(2, 14)의 x 좌표와 같고, $\overline{AC} = 13$ 이므로 점 C의 좌표는 (2, 1)이다.



점 B(14, 2)는 함수 $y = \log_a(x+b)$ 의 그래프 위에 있으므로 $2 = \log_a(14+b)$ 에서 $a^2 - b = 14$ ㉠

점 C(2, 1)은 함수 $y = \log_a(x+b)$ 의 그래프 위에 있으므로 $1 = \log_a(2+b)$ 에서 $a - b = 2$ ㉡

㉠-㉡을 하면 $a^2 - a = 12$

$$a^2 - a - 12 = 0, (a+3)(a-4) = 0$$

$$a = -3 \text{ 또는 } a = 4$$

$$a > 1 \text{ 이므로 } a = 4$$

$$a = 4 \text{ 를 ㉡에 대입하면}$$

$$4 - b = 2 \text{ 에서 } b = 4 - 2 = 2$$

$$\text{따라서 } a \times b = 4 \times 2 = 8$$

답 8

34

밑 3은 1보다 큰 양의 실수이므로 함수 $f(x) = 3^{x-4} - 1$ 은 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값도 증가하는 함수이다.

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[4, 8]$ 에서

$$x = 4 \text{ 일 때, 최솟값 } f(4) = 3^0 - 1 = 1 - 1 = 0,$$

$$x = 8 \text{ 일 때, 최댓값 } f(8) = 3^4 - 1 = 81 - 1 = 80 \text{ 을 갖는다.}$$

따라서 $M = 80$ 이고 $m = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \log_2(M+m) - \log_2 10 &= \log_2 80 - \log_2 10 \\ &= \log_2 \frac{80}{10} = \log_2 8 = 3 \end{aligned}$$

답 ③

35

밑 a 는 1보다 큰 양의 실수이므로 함수 $f(x) = \log_a x$ 는 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값도 증가하는 함수이다.

함수 $f(x) = \log_a x$ 는 닫힌구간 $[3, 9]$ 에서

$$x = 9 \text{ 일 때, 최댓값 } 4, x = 3 \text{ 일 때, 최솟값 } m \text{ 을 갖는다.}$$

$$f(9) = \log_a 9 = 4 \text{ 에서 } a^4 = 9$$

$$a > 1 \text{ 이므로 } a = \sqrt{3}$$

$$f(x) = \log_{\sqrt{3}} x \text{ 이므로 } m = f(3) = \log_{\sqrt{3}} 3 = 2$$

$$\text{따라서 } a^2 + m = (\sqrt{3})^2 + 2 = 3 + 2 = 5$$

답 ⑤

36

$$\log_x y = 2 + \log_2 x + \log_x 16 \text{ 에서}$$

$$\frac{\log_2 y}{\log_2 x} = 2 + \log_2 x + \log_x 2^4 \text{ 이므로}$$

$$\log_2 y = \log_2 x (2 + \log_2 x + 4 \log_x 2) = (\log_2 x)^2 + 2 \log_2 x + 4$$

$$\log_2 \frac{y}{x^6} = \log_2 y - \log_2 x^6$$

$$\begin{aligned} &= (\log_2 x)^2 + 2 \log_2 x + 4 - 6 \log_2 x \\ &= (\log_2 x)^2 - 4 \log_2 x + 4 = (\log_2 x - 2)^2 \end{aligned}$$

$\log_2 \frac{y}{x^6}$ 는 $\log_2 x = 2$, 즉 $x = 4$ 일 때, 최소이고,

최솟값은 0이므로 $\log_2 \frac{y}{x^6} \geq 0$ 이다.

$\frac{y}{x^6} \geq 2^0 = 1$ 이므로 $\frac{y}{x^6}$ 의 최솟값은 1이다.

따라서 $a = 4, m = 1$ 이므로 $a + m = 4 + 1 = 5$

답 5

37

이 광케이블을 이용하여 보낸 초기 전기 신호의 세기가 s_0 일 때,

이 광케이블을 따라 10 km 지난 곳에서의 전기 신호의 세기는 초기 전

기 신호의 세기의 $\frac{1}{16}$ 배이므로

$$s_0 \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{10}{a}} = \frac{1}{16} s_0 \text{ 에서 } \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{10}{a}} = \left(\frac{1}{4} \right)^2$$

$$\text{따라서 } \frac{10}{a} = 2 \text{ 이므로 } a = 5$$

이 광케이블을 이용하여 보낸 초기 전기 신호의 세기가 s_0 일 때, 이 광케이블을 따라 20 km 지난 곳에서의 전기 신호의 세기는 초기 전기 신호의 세기의 k 배이므로

$$s_0 \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{20}{5}} = k s_0 \text{ 에서 } k = \left(\frac{1}{4} \right)^4 = \frac{1}{256}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{k} = 256$$

답 256

38

첫 번째 보호막을 통과하기 전 방사선 입자의 양을 A 로 놓으면 방사선 입자가 어떤 보호막을 한 개 통과할 때마다 방사선 입자의 양은 이 보호막을 통과하기 전 방사선 입자의 양의 $\frac{4}{5}$ 가 되므로 n 개의 보호막을

통과한 후의 방사선 입자의 양은 $A \left(\frac{4}{5} \right)^n$ 이다.

방사선 입자의 양이 첫 번째 보호막을 통과하기 전 방사선 입자의 양의

$\frac{1}{1000}$ 미만이 되도록 하려면

$$A \left(\frac{4}{5} \right)^n < \frac{1}{1000} A, \text{ 즉 } \left(\frac{4}{5} \right)^n < \frac{1}{1000} \text{ 이어야 한다.}$$

$$\text{양변에 상용로그를 취하면 } \log \left(\frac{4}{5} \right)^n < \log \frac{1}{1000}$$

$$n \log \frac{4}{5} < \log 10^{-3}, n \log \frac{2^3}{10} < -3$$

$$n(3 \log 2 - \log 10) < -3$$

$$n(0.9 - 1) < -3, -0.1n < -3$$

$$n > 30$$

따라서 $n \geq 31$ 이므로 방사선 입자의 양이 첫 번째 보호막을 통과하기

전 방사선 입자의 양의 $\frac{1}{1000}$ 미만이 되도록 하려면 최소한 31개의 보호막이 필요하다.

답 ③

02

삼각함수

정답

본문 23~37쪽

01 9	02 61	03 ①	04 7	05 ④
06 ②	07 17	08 ④	09 ①	10 3
11 33	12 ①	13 ④	14 3	15 ④
16 ③	17 ①	18 ①	19 ⑤	20 ⑤
21 ⑤	22 ③	23 16	24 ②	25 ⑤
26 14	27 ②	28 ①	29 ⑤	30 ①
31 ②	32 ⑤	33 252	34 13	35 400
36 20	37 250	38 ③	39 ③	40 ④
41 ⑤	42 ③	43 ②	44 25	45 15
46 ③	47 ②	48 19	49 144	50 128
51 47	52 217			

01

부채꼴의 반지름의 길이와 넓이를 각각 r 와 S 로 놓으면 반지름의 길이가 4이고, 넓이가 $\frac{4}{3}\pi$ 이므로 $r=4$ 이고, $S=\frac{4}{3}\pi$ 이다.

부채꼴의 호의 길이는 l 이므로

$$S = \frac{1}{2}rl \text{에서 } \frac{4}{3}\pi = \frac{1}{2} \times 4 \times l$$

$$\text{그러므로 } l = \frac{2}{3}\pi$$

부채꼴의 중심각의 크기는 θ 이므로

$$l = r\theta \text{에서 } \frac{2}{3}\pi = 4\theta$$

$$\text{그러므로 } \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{따라서 } \frac{\pi^2}{\theta \times l} = \frac{\pi^2}{\frac{\pi}{6} \times \frac{2}{3}\pi} = 9$$

답 9

02

반지름의 길이가 $\frac{2\sqrt{n}}{n+1}$ 이고, 중심각의 크기가 $\frac{n+1}{n^2}$ 인 부채꼴의 넓이는 S_n 이므로

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{2\sqrt{n}}{n+1} \right)^2 \times \frac{n+1}{n^2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4n}{(n+1)^2} \times \frac{n+1}{n^2} \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{20} S_n &= \sum_{n=1}^{20} \frac{2}{n(n+1)} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{20} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

$$= 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{21} \right) \right\}$$

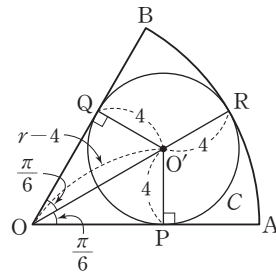
$$= 2 \left(1 - \frac{1}{21} \right) = 2 \times \frac{20}{21} = \frac{40}{21}$$

따라서 $p=21$, $q=40$ 이므로 $p+q=21+40=61$

답 61

03

원 C 가 두 선분 OA , OB 와 만나는 점을 각각 P , Q , 호 AB 와 만나는 점을 R 라 하고, 부채꼴 OAB 의 반지름의 길이를 r 라 하면 다음 그림과 같이 나타낼 수 있다.



부채꼴 OAB 의 중심각 BOA 의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\angle O'OP = \frac{1}{2} \angle BOA = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

원 C 의 반지름의 길이가 4이므로

$$\overline{OP} = \overline{OR} = 4$$

직각삼각형 OPO' 에서

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OO'}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OR} - \overline{OR}} = \frac{4}{r-4}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{4}{r-4} = \frac{1}{2} \text{에서 } r=12$$

따라서 부채꼴 OAB 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 12^2 \times \frac{\pi}{3} = 24\pi$$

답 ①

04

$$\sin^2 \theta = \left(\frac{1}{\sqrt{7}} \right)^2 = \frac{1}{7} \text{이고,}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} &= 1 + \frac{1}{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} = 1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{1}{\sin^2 \theta} = 7 \end{aligned}$$

답 7

다른 풀이

$$\sin^2 \theta = \left(\frac{1}{\sqrt{7}} \right)^2 = \frac{1}{7} \text{이고,}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \text{이므로}$$

$$1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{1 + \tan^2 \theta}{\tan^2 \theta} = \frac{1}{\frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{1}{\sin^2 \theta} = 7$$

05

$$\sin \theta \cos \theta > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\cos \theta \tan \theta < 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } \cos \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} < 0 \text{이므로}$$

$$\sin \theta < 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉢} \text{에서 } \cos \theta < 0$$

$\sin \theta$ 와 $\cos \theta$ 가 모두 음수이므로 θ 는 제3사분면의 각이다.

$$\sin \theta + \cos \theta < 0, \sin \theta < 0 \text{이고,}$$

$$\sqrt{\sin^2 \theta} = |\sin \theta| \text{이며, } \sqrt[3]{(\tan \theta + \cos \theta)^3} = \tan \theta + \cos \theta \text{이므로}$$

$$|\sin \theta + \cos \theta| - \sqrt{\sin^2 \theta} + \sqrt[3]{(\tan \theta + \cos \theta)^3}$$

$$= -(\sin \theta + \cos \theta) - |\sin \theta| + \tan \theta + \cos \theta$$

$$= -\sin \theta - \cos \theta + \sin \theta + \tan \theta + \cos \theta$$

$$= \tan \theta$$

$$\text{따라서 } a=0, b=0, c=1 \text{이므로}$$

$$a+b+c=1$$

답 ④

다른 풀이

$\sin \theta \cos \theta > 0$ 에서 θ 는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이고,

$\cos \theta \tan \theta < 0$ 에서 θ 는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이므로

θ 는 제3사분면의 각이다.

$$\sin \theta + \cos \theta < 0, \sin \theta < 0 \text{이고,}$$

$$\sqrt{\sin^2 \theta} = |\sin \theta| \text{이며, } \sqrt[3]{(\tan \theta + \cos \theta)^3} = \tan \theta + \cos \theta \text{이므로}$$

$$|\sin \theta + \cos \theta| - \sqrt{\sin^2 \theta} + \sqrt[3]{(\tan \theta + \cos \theta)^3}$$

$$= -(\sin \theta + \cos \theta) - |\sin \theta| + \tan \theta + \cos \theta$$

$$= -\sin \theta - \cos \theta + \sin \theta + \tan \theta + \cos \theta$$

$$= \tan \theta$$

$$\text{따라서 } a=0, b=0, c=1 \text{이므로}$$

$$a+b+c=1$$

06

각 θ 를 나타내는 동경과 각 8θ 를 나타내는 동경이 한 직선 위에 있고
방향이 반대이므로

$$8\theta - \theta = 2n\pi + \pi \quad (n \text{은 정수}) \text{에서}$$

$$7\theta = 2n\pi + \pi$$

$$\theta = \frac{(2n+1)\pi}{7} \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$0 < \theta < \frac{3\pi}{7} \text{이므로 } \theta = \frac{(2n+1)\pi}{7} \text{에서 } n=0 \text{일 때, } \theta = \frac{\pi}{7}$$

따라서

$$\cos\left(\theta + \frac{4}{21}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{7} + \frac{4}{21}\pi\right)$$

$$= \cos\left(\frac{3\pi + 4\pi}{21}\right)$$

$$= \cos \frac{7}{21}\pi$$

$$= \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2}$$

답 ②

07

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{2} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{4}$$

$$\sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

$$\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} + \frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta + \frac{1}{\sin \theta} - \sin \theta$$

$$= \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta} - \cos \theta - \sin \theta$$

$$= \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} - (\sin \theta + \cos \theta)$$

$$= -\frac{1}{\frac{3}{8}} - \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{8+3}{6} = \frac{11}{6}$$

$$\text{따라서 } p=6, q=11 \text{이므로}$$

$$p+q=6+11=17$$

답 17

08

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \sin \theta > 0, \cos \theta > 0$$

두 점 $A(\cos^2 \theta, f(\cos^2 \theta))$, $B(\sin^2 \theta, f(\sin^2 \theta))$ 는 함수 $f(x) = \sqrt{x}$
의 그래프 위의 점이므로

$$f(\cos^2 \theta) = \sqrt{\cos^2 \theta} = |\cos \theta| = \cos \theta \text{이고,}$$

$$f(\sin^2 \theta) = \sqrt{\sin^2 \theta} = |\sin \theta| = \sin \theta \text{이다.}$$

직선 AB의 기울기는

$$\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta} = \frac{\sin \theta - \cos \theta}{(\sin \theta - \cos \theta)(\sin \theta + \cos \theta)}$$

$$= \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{9}{32} \text{이고, } \sin \theta + \cos \theta > 0 \text{이므로}$$

$$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{(\sin \theta + \cos \theta)^2}$$

$$= \sqrt{\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta}$$

$$= \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta}$$

$$= \sqrt{1 + 2 \sin \theta \cos \theta}$$

$$= \sqrt{1 + 2 \times \frac{9}{32}} = \sqrt{1 + \frac{9}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{16+9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

따라서 직선 AB의 기울기는 $\frac{1}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{4}{5}$

답 ④

09

각 θ 를 나타내는 동경과 각 2θ 를 나타내는 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 서로 대칭이므로

$$\theta + 2\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n \text{은 정수}) \text{에서}$$

$$\theta = \frac{2}{3}n\pi + \frac{\pi}{6} \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$0 < \theta < \pi \text{이므로 } 0 < \frac{2}{3}n\pi + \frac{\pi}{6} < \pi \text{에서}$$

$$-\frac{1}{4} < n < \frac{5}{4}$$

n 은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$

$$(i) \ n=0 \text{이면 } \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$(ii) \ n=1 \text{이면 } \theta = \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$$

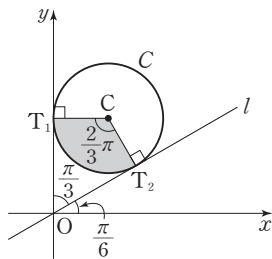
$$\text{따라서 } \sin \alpha + \sin \beta = \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

답 ①

10

직선 l 과 x 축의 양의 방향이 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\angle T_1OT_2 = \frac{\pi}{3}$$



사각형 CT_1OT_2 에서 $\angle CT_1O = \frac{\pi}{2}$, $\angle OT_2C = \frac{\pi}{2}$ 이고,

사각형 CT_1OT_2 의 네 내각의 크기의 합은 2π 이므로

$$\angle T_1OT_2 + \angle T_2CT_1 = \pi$$

$$\angle T_1OT_2 = \frac{\pi}{3} \text{이므로 } \angle T_2CT_1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

색칠되어 있는 부채꼴 CT_1T_2 의 반지름의 길이는 원 C의 반지름의 길

이 3과 같고, 중심각의 크기는 $\angle T_2CT_1 = \frac{2}{3}\pi$ 이므로

색칠되어 있는 부채꼴 CT_1T_2 의 넓이는

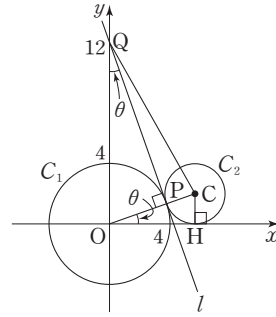
$$\frac{1}{2} \times 3^2 \times \frac{2}{3}\pi = 3\pi$$

따라서 $k=3$

답 3

11

원 C_1 의 반지름의 길이는 4이므로 $\overline{OP}=4$ 이고, $\overline{OQ}=12$ 이다.



원점 O에 대하여 삼각형 OPQ는 $\angle OPQ = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이므로

$\angle PQO = \theta$ 로 놓으면

$$\sin \theta = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \text{이고,}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{OQ}^2 - \overline{OP}^2} = \sqrt{12^2 - 4^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

원 C_2 는 점 P에서 원 C_1 과 접하고, 직선 OP는 원 C_2 의 중심 C를 지나므로 직선 PQ와 직선 OC는 서로 수직이다.

원 C_2 의 중심 C에서 x 축에 내린 수선의 발을 H로 놓으면

$\angle COH = \theta$ 이다.

원 C_2 의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\overline{OC} = \overline{OP} + \overline{PC} = 4 + r, \overline{CH} = r \text{이고,}$$

삼각형 OHC는 $\angle OHC = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이므로

$$\sin \theta = \frac{\overline{CH}}{\overline{OC}} = \frac{r}{4+r} = \frac{1}{3}$$

$$3r = r + 4$$

$$\text{따라서 } 2r = 4 \text{이므로 } r = 2$$

직각삼각형 CQP에서

$$\tan^2(\angle CQP) = \left(\frac{\overline{PC}}{\overline{PQ}}\right)^2 = \left(\frac{2}{8\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{32}$$

$$\text{따라서 } p=32, q=1 \text{이므로 } p+q=32+1=33$$

답 33

12

함수 $f(x)$ 의 주기가 $\frac{\pi}{3}$ 이므로 $\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{3}$ 에서 $b=6$, 즉

$$f(x) = a \cos\left(6x - \frac{\pi}{2}\right) + c$$

$$f(0) = 2 \text{이므로}$$

$$f(0) = a \cos\left(0 - \frac{\pi}{2}\right) + c = a \cos \frac{\pi}{2} + c = 0 + c = c = 2$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = a \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + c = a \cos \pi + c = -a + c = 0$$

$$c = 2 \text{이므로 } a = 2$$

$$\text{그러므로 } f(x) = 2 \cos\left(6x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$$

$$\text{따라서 } a+b+c = 2+6+2 = 10 \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{(a+b+c)\pi}{2}\right) = f\left(\frac{10\pi}{2}\right) = f(5\pi) = f(0) = 2$$

답 ①

13

직선 $y=k$ ($0 < k < \frac{\sqrt{2}}{2}$)가 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$ 와 만나는 점의 x 좌표를 작은 값부터 그 크기순으로 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$ 이라 하자.

a_1, a_3, a_5, a_7 은 직선 $y=k$ ($0 < k < \frac{\sqrt{2}}{2}$)가 곡선 $y=\sin x$ 와 만나는 점의 x 좌표이고,

a_2, a_4, a_6, a_8 은 직선 $y=k$ ($0 < k < \frac{\sqrt{2}}{2}$)가 곡선 $y=\cos x$ 와 만나는 점의 x 좌표이다.

a_1, a_3 은 직선 $x=\frac{\pi}{2}$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{a_1+a_3}{2}=\frac{\pi}{2} \text{에서 } a_1+a_3=\pi$$

a_2, a_4 는 직선 $x=\pi$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{a_2+a_4}{2}=\pi \text{에서 } a_2+a_4=2\pi$$

a_5, a_7 은 직선 $x=\frac{5}{2}\pi$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{a_5+a_7}{2}=\frac{5}{2}\pi \text{에서 } a_5+a_7=5\pi$$

a_6, a_8 은 직선 $x=3\pi$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{a_6+a_8}{2}=3\pi \text{에서 } a_6+a_8=6\pi$$

따라서

$$\frac{S}{\pi}=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^8 a_k=\frac{1}{\pi}(\pi+2\pi+5\pi+6\pi)=14$$

답 ④

14

$$f(x)=a \tan (bx+c)+d=a \tan b\left(x+\frac{c}{b}\right)+d$$

$b>0$ 이고, 조건 (가)에서 함수 $f(x)$ 의 주기가 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{2} \text{에서 } b=2, \text{ 즉 } f(x)=a \tan 2\left(x+\frac{c}{2}\right)+d \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

조건 (나)에서 $y=a \tan 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$ 만큼,

y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 함수의 그래프는

$$\text{함수 } y=a \tan 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

의 그래프와 같다.

$0 < c < \pi$ 이므로 $0 < \frac{c}{2} < \frac{\pi}{2}$ 이다.

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } \frac{c}{2}=\frac{\pi}{4}, d=1$$

$$c=\frac{\pi}{2}$$

$$\text{그러므로 } f(x)=a \tan 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1$$

조건 (다)에서 $f\left(-\frac{\pi}{8}\right)=4$ 이므로

$$a \tan 2\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)+1=a \tan \frac{\pi}{4}+1=a+1=4$$

$$a+1=4, \text{ 즉 } a=3$$

따라서 $a \times b \times c \times d=3 \times 2 \times \frac{\pi}{2} \times 1=3\pi$ 이므로 $k=3$

답 3

15

$$-1 \leq \sin \left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right) \leq 1 \text{이므로}$$

$$-3+2 \leq 3 \sin \left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)+2 \leq 3+2$$

$$-1 \leq 3 \sin \left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)+2 \leq 5$$

함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $M=5$ 이고, 최솟값은 $m=-1$

$$\text{함수 } f(x) \text{의 주기는 } \frac{2\pi}{\pi}=2$$

$$\text{따라서 } M+m+p=5+(-1)+2=6$$

답 ④

16

$$f(x)=\cos ^2 x-4 \sin x+1$$

$$=1-\sin ^2 x-4 \sin x+1$$

$$=-(\sin ^2 x+4 \sin x+4-4)+2$$

$$=-(\sin x+2)^2+6$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \text{이므로}$$

함수 $f(x)$ 는 $\sin x=-1$ 일 때, 최댓값 $-(-1+2)^2+6=5$,

$\sin x=1$ 일 때, 최솟값 $-(1+2)^2+6=-9+6=-3$ 을 갖는다.

따라서 $M=5, m=-3$ 이므로

$$M-m=5-(-3)=8$$

답 ③

17

$$f(x)=2 \cos ^2 x+\sqrt{1-\cos ^2 x}+k$$

$$=2(1-\sin ^2 x)+\sqrt{\sin ^2 x}+k$$

$$=-2 \sin ^2 x+|\sin x|+k+2$$

$$=-2|\sin x|^2+|\sin x|+k+2$$

$$|\sin x|=t \text{로 놓으면 } 0 \leq t \leq 1$$

$$g(t)=-2 t^2+t+k+2 \text{로 놓으면}$$

$$g(t)=-2 t^2+t+k+2$$

$$=-2\left(t^2-\frac{1}{2} t+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)+k+2$$

$$=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+k+2+\frac{1}{8}$$

$$=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+k+\frac{17}{8}$$

함수 $g(t)$ 는 $t=\frac{1}{4}$ 일 때 최댓값 $g\left(\frac{1}{4}\right)=k+\frac{17}{8}$, $t=1$ 일 때 최솟값

$g(1)=k+1$ 을 가지므로

함수 $f(x)$ 는 최댓값 $k+\frac{17}{8}$, 최솟값 $k+1$ 을 갖는다.

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $\frac{23}{16}$ 이므로

$$k+1=\frac{23}{16} \text{에서 } k=\frac{7}{16}$$

$$\text{따라서 } k+M=k+k+\frac{17}{8}=2k+\frac{17}{8}=\frac{7}{8}+\frac{17}{8}=\frac{24}{8}=3$$

답 ①

18

$$\begin{aligned}
 & 2 \sin \frac{11}{3} \pi + 3 \tan \frac{5}{6} \pi \\
 &= 2 \sin \left(4\pi - \frac{\pi}{3} \right) + 3 \tan \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) \\
 &= -2 \sin \frac{\pi}{3} - 3 \tan \frac{\pi}{6} \\
 &= -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \\
 &= -\sqrt{3} - \sqrt{3} = -2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

①

19

$$x - 2y + 6 = 0 \text{에서 } y = \frac{1}{2}x + 3$$

직선 $x - 2y + 6 = 0$ 의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\tan \theta = \frac{1}{2}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 & \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + \cos (\pi - \theta) + \tan \left(\frac{3}{2} \pi - \theta \right) \\
 &= \cos \theta - \cos \theta + \frac{1}{\tan \theta} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

⑤

20

$$\cos \theta = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\cos (2\pi - \theta)}{1 + \sin (\pi + \theta)} - \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right)} = \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\
 &= \frac{\cos^2 \theta - \sin \theta (1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta) \cos \theta} \\
 &= \frac{\cos^2 \theta - \sin \theta + \sin^2 \theta}{(1 - \sin \theta) \cos \theta} \\
 &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \sin \theta}{(1 - \sin \theta) \cos \theta} \\
 &= \frac{1 - \sin \theta}{(1 - \sin \theta) \cos \theta} \\
 &= \frac{1}{\cos \theta} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

⑤

다른 풀이

$$\cos \theta = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\cos (2\pi - \theta)}{1 + \sin (\pi + \theta)} - \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right)} \\
 &= \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cos \theta (1 + \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\
 &= \frac{\cos \theta (1 + \sin \theta)}{1 - \sin^2 \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\
 &= \frac{\cos \theta (1 + \sin \theta)}{\cos^2 \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\
 &= \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\
 &= \frac{1 + \sin \theta - \sin \theta}{\cos \theta} \\
 &= \frac{1}{\cos \theta} = 3
 \end{aligned}$$

21

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{3}{2} \pi + x \right) + 2 \cos 3x + k \\
 &= \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \cos 3x + k \\
 &= 1 + 2 \cos 3x + k \\
 &= 2 \cos 3x + 1 + k
 \end{aligned}$$

$$-1 \leq \cos 3x \leq 1 \text{이므로}$$

$$-2 + 1 + k \leq 2 \cos 3x + 1 + k \leq 2 + 1 + k$$

$$k - 1 \leq 2 \cos 3x + 1 + k \leq k + 3$$

$$k - 1 \leq f(x) \leq k + 3$$

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $k - 1$, 최댓값은 $k + 3$ 이다.

함수 $f(x)$ 의 최댓값은 6이므로 $k + 3 = 6$ 에서 $k = 3$

따라서 $k = 3$, $m = k - 1$ 이므로

$$k + m = k + k - 1 = 2k - 1 = 2 \times 3 - 1 = 6 - 1 = 5$$

⑤

22

$$\log_2 (\sin \theta + \cos \theta) = \frac{1}{2} \log_2 \frac{5}{4} \text{에서}$$

$$2 \log_2 (\sin \theta + \cos \theta) = \log_2 \frac{5}{4}$$

$$\log_2 (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \log_2 \frac{5}{4}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{5}{4}$$

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{5}{4}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{5}{4}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{5}{4}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{8}$$

따라서

$$\log_2 \frac{1}{\sin (\pi - \theta)} + \log_2 \frac{1}{\cos (2\pi - \theta)}$$

$$= \log_2 \frac{1}{\sin \theta} + \log_2 \frac{1}{\cos \theta}$$

$$= \log_2 \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \log_2 8 = 3$$

답 ③

23

이차방정식 $3x^2 + \sqrt{a}x - a = 0$ 의 두 근이

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right), \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) \text{이므로}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = -\sin \theta - \cos \theta$$

$$= -\frac{\sqrt{a}}{3}$$

$$\text{에서 } \sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{a}}{3} \quad \dots\dots ㉑$$

이고,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \times \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = (-\sin \theta) \times (-\cos \theta)$$

$$= \sin \theta \cos \theta = \frac{-a}{3}$$

$$= -\frac{a}{3} \quad \dots\dots ㉒$$

이다.

㉑의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{a}{9}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{a}{9}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{a}{9}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{\frac{a}{9} - 1}{2} = \frac{a - 9}{18} \quad \dots\dots ㉓$$

㉓을 ㉒에 대입하면

$$\frac{a - 9}{18} = -\frac{a}{3}$$

$$a - 9 = -6a$$

$$7a = 9$$

$$a = \frac{9}{7}$$

따라서 $p = 7, q = 9$ 이므로

$$p + q = 7 + 9 = 16$$

답 16

24

(i) $\sin x \geq 0$ 일 때,

$$\sin x + 2|\sin x| = 1 \text{에서}$$

$$|\sin x| = \sin x \text{이므로}$$

$$\sin x + 2 \sin x = 1$$

$$3 \sin x = 1$$

$$\sin x = \frac{1}{3}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{이므로 } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{인 한 근을 } \alpha \text{로 놓으면}$$

$$\text{다른 한 근은 } \pi - \alpha$$

(ii) $\sin x < 0$ 일 때,

$$\sin x + 2|\sin x| = 1 \text{에서}$$

$$|\sin x| = -\sin x \text{이므로}$$

$$\sin x - 2 \sin x = 1$$

$$\sin x = -1$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{이므로 } x = \frac{3}{2}\pi$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 해의 합은

$$\alpha + \pi - \alpha + \frac{3}{2}\pi = \frac{5}{2}\pi$$

답 ②

25

$$(2^x + 1)\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0 \text{에서}$$

$$2^x + 1 > 0 \text{이므로}$$

$$\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$$

$$\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{방정식 } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{의 두 실근은 } \frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi \text{이고, 함수 } y = \cos x \text{의}$$

$$\text{그래프가 직선 } y = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{보다 아래쪽에 있는 } x \text{의 값의 범위는}$$

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{11}{6}\pi \text{이므로 주어진 부등식의 해는 } \frac{\pi}{6} < x < \frac{11}{6}\pi \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{11}{6}\pi \text{이므로}$$

$$\beta - \alpha = \frac{11}{6}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{10}{6}\pi = \frac{5}{3}\pi$$

답 ⑤

26

$$y = x^2 + (4 \cos \theta)x - 4 \sin^2 \theta$$

$$= x^2 + (4 \cos \theta)x + 4 \cos^2 \theta - 4 \cos^2 \theta - 4 \sin^2 \theta$$

$$= (x + 2 \cos \theta)^2 - 4$$

이므로 이차함수 $y = x^2 + (4 \cos \theta)x - 4 \sin^2 \theta$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-2 \cos \theta, -4)$

점 $(-2 \cos \theta, -4)$ 가 직선 $2x - y - 2 = 0$ 위에 있도록 하려면

$$2 \times (-2 \cos \theta) - (-4) - 2 = 0$$

$$-4 \cos \theta + 2 = 0$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{이므로 } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \theta = \frac{5}{3}\pi$$

조건을 만족시키는 서로 다른 모든 θ 의 값의 곱은

$$\frac{\pi}{3} \times \frac{5}{3}\pi = \frac{5}{9}\pi^2$$

따라서 $p = 9, q = 5$ 이므로

$$p + q = 9 + 5 = 14$$

답 14

27

$$2 \log_2 (\sqrt{3} \sin x) = \log_2 (1 - \cos x) + 1 \text{에서}$$

$$\log_2 (\sqrt{3} \sin x)^2 = \log_2 (1 - \cos x) + \log_2 2$$

$$\log_2 (3 \sin^2 x) = \log_2 2(1 - \cos x)$$

$$3 \sin^2 x = 2(1 - \cos x)$$

$$3(1 - \cos^2 x) = 2 - 2 \cos x$$

$$3 \cos^2 x - 2 \cos x - 1 = 0$$

$$(3 \cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } \cos x = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

로그의 진수 조건에 의하여

$$\sin x > 0, \cos x < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$\cos x = -\frac{1}{3}$$

㉡에서 $\sin x > 0$ 이므로

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -2\sqrt{2}$$

주어진 등식을 만족시키는 x 의 값은 α 이므로

$$\tan \alpha = -2\sqrt{2}$$

답 ②

28

(i) $k=2$ 일 때,

$$2 \sin(\pi + 2x) - 2 \sin \pi = 0 \text{에서}$$

$$\sin(\pi + 2x) = 0, \text{ 즉 } \sin 2x = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 방정식 ㉠의 해는

$$x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \pi \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi \text{이므로 } f(2) = 3\pi$$

(ii) $k=3$ 일 때,

$$3 \sin\left(\frac{3}{2}\pi + 3x\right) - 2 \sin \frac{3}{2}\pi = 0 \text{에서 } -3 \cos 3x + 2 = 0 \text{이므로}$$

$$\cos 3x = \frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$0 \leq 3x \leq \frac{\pi}{2}$ 인 해를 $x = \alpha$ 라 하면

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 방정식 ㉡의 해는

$$x = \alpha \text{ 또는 } x = \frac{2}{3}\pi \pm \alpha \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi \pm \alpha \text{ 또는 } x = 2\pi - \alpha \text{이므로}$$

$$f(3) = 6\pi$$

(i), (ii)에서 $f(2) + f(3) = 3\pi + 6\pi = 9\pi$

답 ①

29

$$0 \leq \cos^2 2x \leq 1 \text{이므로 } 0 \leq \pi \cos^2 2x \leq \pi$$

$$f(x) = \sin(\pi \cos^2 2x), g(x) = \cos(\pi \cos^2 2x) \text{에 대하여}$$

부등식 $f(x) \geq g(x)$ 를 만족시키기 위해서는

$$\frac{\pi}{4} \leq \pi \cos^2 2x \leq \pi$$

$$\frac{1}{4} \leq \cos^2 2x \leq 1$$

$$-1 \leq \cos 2x \leq -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \frac{1}{2} \leq \cos 2x \leq 1$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{5}{6}\pi \leq x < \pi$$

따라서 조건을 만족시키는 정수 x 는 0, 2, 3이므로 그 합은

$$0 + 2 + 3 = 5$$

답 ⑤

30

삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180° 이므로

$$C = 180^\circ - A - B = 180^\circ - 105^\circ - 30^\circ = 45^\circ$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin B} = \frac{\overline{AB}}{\sin C} \text{에서 } \frac{12}{\sin 30^\circ} = \frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}$$

$$\frac{12}{\frac{1}{2}} = \frac{\overline{AB}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\text{따라서 } \overline{AB} = 24 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2} \text{이므로 } \overline{AB}^2 = 288$$

답 ①

31

삼각형 ABC에 외접하는 원의 반지름의 길이가 8이므로

삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ 로 놓

으면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2 \times 8 = 16, \text{ 즉}$$

$$\sin A = \frac{a}{16}, \sin B = \frac{b}{16}, \sin C = \frac{c}{16}$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{a}{16} + \frac{b}{16} + \frac{c}{16} = \frac{3}{2}, \frac{1}{16}(a+b+c) = \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } a+b+c = \frac{3}{2} \times 16 = 24 \text{이므로}$$

삼각형 ABC의 둘레의 길이는 24

답 ②

32

삼각형 BCD에서

$$\overline{CD} = \overline{BD} \sin 45^\circ \text{이므로}$$

$$\overline{BD} = \frac{\overline{CD}}{\sin 45^\circ} = \frac{30(\sqrt{3}+1)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= 30\sqrt{2}(\sqrt{3}+1) = 30(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin 105^\circ} = \frac{\overline{AB}}{\sin 30^\circ} \text{이므로}$$

$$\overline{AB} = \frac{\overline{BD} \sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{30(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \times \frac{1}{2}}{\sin 105^\circ} = \frac{15(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sin 105^\circ}$$

$$\sin 105^\circ = \sin(180^\circ - 75^\circ) = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{이므로}$$

$$\overline{AB} = \frac{15(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\sin 105^\circ} = \frac{15(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

$$= \frac{15(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = 15 \times 4 = 60$$

따라서 선분 AB의 길이는 60

⑤

33

$A + B + C = 180^\circ$ 이므로

$$4 \sin(A + B) \sin C = 1$$

에서

$$4 \sin(180^\circ - C) \sin C = 1$$

$$4 \sin^2 C = 1$$

$$\sin^2 C = \frac{1}{4}$$

$$\sin C > 0 \text{이므로 } \sin C = \frac{1}{2}$$

$$0^\circ < C < 90^\circ \text{이므로 } C = 30^\circ$$

$$B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - (105^\circ + 30^\circ) = 45^\circ$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

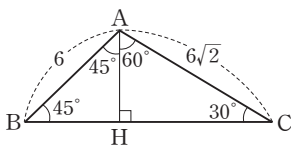
$$\frac{\overline{AC}}{\sin B} = \frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2 \times 6$$

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 45^\circ} = \frac{\overline{AB}}{\sin 30^\circ} = 12$$

$$\frac{\overline{AC}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\overline{AB}}{\frac{1}{2}} = 12$$

$$\overline{AB} = 6, \overline{AC} = 6\sqrt{2}$$

삼각형 ABC의 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H로 놓으면



$\angle HAB = 45^\circ$ 이고, $\angle CAH = 60^\circ$ 이므로

$$\text{삼각형 ABH에서 } \overline{BH} = \overline{AB} \sin 45^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \text{이고,}$$

$$\text{삼각형 AHC에서 } \overline{CH} = \overline{AC} \sin 60^\circ = 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6} \text{이다.}$$

$$\text{그러므로 } \overline{BC} = \overline{BH} + \overline{CH} = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}$$

$$\text{따라서 } \overline{AB}^2 + (\overline{AC} - 2\overline{BC})^2 = 6^2 + (-6\sqrt{6})^2 = 36 + 216 = 252$$

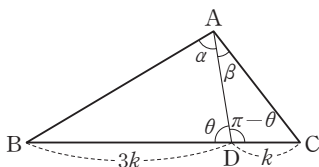
⑤ 252

34

$\angle BDA = \theta$ 로 놓으면 $\angle ADC = \pi - \theta$ 이고,

삼각형 ABC에서 변 BC를 3 : 1로 내분하는 점은 D이므로

$\overline{BD} = 3k, \overline{DC} = k (k > 0)$ 으로 놓으면



삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\sin \theta} \text{에서}$$

$$\sin \theta = \frac{\overline{AB} \sin \alpha}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AB} \sin \alpha}{3k} \dots\dots \textcircled{1}$$

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{DC}}{\sin \beta} = \frac{\overline{AC}}{\sin(\pi - \theta)} \text{에서 } \frac{\overline{DC}}{\sin \beta} = \frac{\overline{AC}}{\sin \theta} \text{이므로}$$

$$\sin \theta = \frac{\overline{AC} \sin \beta}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AC} \sin \beta}{k} \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$\frac{\overline{AB} \sin \alpha}{3k} = \frac{\overline{AC} \sin \beta}{k} \text{이고,}$$

$$\sin \beta = \frac{8}{15} \sin \alpha \text{이므로}$$

$$\frac{\overline{AB} \sin \alpha}{3k} = \frac{\overline{AC} \times \frac{8}{15} \sin \alpha}{k}$$

$$\text{그러므로 } \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = 3 \times \frac{8}{15} = \frac{8}{5}$$

따라서 $p = 5, q = 8$ 이므로 $p + q = 5 + 8 = 13$

⑤ 13

35

$$\angle DAB = \angle ADC - \angle ABD$$

$$= 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle DAB)} = \frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ABD)} = 2R \text{이므로}$$

$$\frac{\overline{BD}}{\sin 45^\circ} = \frac{\overline{AD}}{\sin 30^\circ} = 2R \text{에서}$$

$$\overline{AD} = \frac{\overline{BD} \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{20 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 10\sqrt{2} \text{이고,}$$

$$2R = \frac{\overline{BD}}{\sin 45^\circ} = \frac{20}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 20\sqrt{2} \text{이다.}$$

따라서 $l = 10\sqrt{2}, R = 10\sqrt{2}$ 이므로

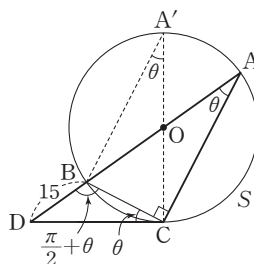
$$l^2 + R^2 = (10\sqrt{2})^2 + (10\sqrt{2})^2 = 200 + 200 = 400$$

⑤ 400

36

원 S 위의 점 C와 원의 중심 O를 지나는 직선이 원 S와 만나는 점을 A'이라 하면 원주각의 성질에 의하여 $\angle CA'B = \angle CAB = \theta$ 이므로

$\angle DCB = \theta$ 이고, $\angle CBD = \frac{\pi}{2} + \theta$ 이다.



$\overline{DB}=15$ 이므로 삼각형 BDC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{DC}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}=\frac{\overline{DB}}{\sin\theta}\text{에서}$$

$$\frac{\overline{DC}}{\cos\theta}=\frac{15}{\sin\theta}$$

$$\overline{DC}=\frac{15\cos\theta}{\sin\theta}\quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

원 S의 반지름의 길이를 R로 놓으면

$$\overline{DB}=15\text{이고, } \overline{DA}=\overline{DB}+\overline{AB}=15+2R=2R+15\text{이므로}$$

원의 성질에 의하여

$$\overline{DB}\times\overline{DA}=\overline{DC}^2\text{에서}$$

$$15(2R+15)=\overline{DC}^2\quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

㉑을 ㉒에 대입하면

$$15(2R+15)=\frac{15^2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$2R+15=\frac{15\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$2R\sin^2\theta+15\sin^2\theta=15\cos^2\theta\quad \dots\dots \textcircled{㉓}$$

조건 (나)에서

$$2R\sin^2\theta=\frac{21}{5}\quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

㉓을 ㉔에 대입하면

$$\frac{21}{5}+15\sin^2\theta=15\cos^2\theta$$

$$\frac{21}{5}+15\sin^2\theta=15(1-\sin^2\theta)$$

$$30\sin^2\theta=15-\frac{21}{5}=\frac{54}{5}$$

$$\sin^2\theta=\frac{9}{25}$$

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$$

㉑에서

$$\overline{DC}^2=\frac{15^2\times\frac{16}{25}}{\frac{9}{25}}=20^2\text{이므로}$$

$$\overline{DC}=20$$

답 20

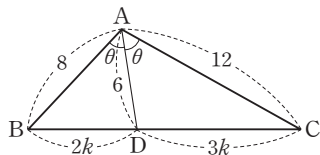
37

선분 AD가 $\angle A$ 를 이등분하므로

삼각형의 각의 이등분선의 성질에 의하여

$$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=8:12=2:3$$

$\angle DAB=\angle CAD=\theta$, $\overline{BD}=2k$, $\overline{CD}=3k$ ($k>0$)으로 놓으면



두 삼각형 ABD와 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{8^2+6^2-(2k)^2}{2\times 8\times 6}=\frac{12^2+6^2-(3k)^2}{2\times 12\times 6}$$

$$k^2=10$$

k 는 양수이므로 $k=\sqrt{10}$

$$\text{그러므로 } \overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}=2k+3k=5k=5\sqrt{10}$$

따라서 $l=5\sqrt{10}$ 이므로

$$l^2=250$$

답 250

38

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A, \text{ 즉 } \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\text{이고,}$$

세 변의 길이 a, b, c 가 $5a^2=3b^2+3c^2$ 을 만족시키므로

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b^2+c^2-\frac{5}{3}(b^2+c^2)}{2bc} \\ &= \frac{\frac{2}{3}(b^2+c^2)}{2bc} = \frac{b^2+c^2}{3bc} = \frac{1}{5}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\end{aligned}$$

이다.

$\frac{b}{c}>0$, $\frac{c}{b}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{1}{5}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \geq \frac{1}{5}\times 2\sqrt{\frac{b}{c}\times\frac{c}{b}} \\ &= \frac{1}{5}\times 2 = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

(단, 등호는 $\frac{b}{c}=\frac{c}{b}$, 즉 $b=c$ 일 때 성립)

이므로

$$\cos A\text{의 최솟값은 }\frac{2}{5}$$

답 ③

39

삼각형 ABC에서

$$a\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=b\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)\text{이므로}$$

$$a\cos A=b\cos B$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\text{이므로}$$

$$a\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$$

$$a^2c^2-a^4=b^2c^2-b^4$$

$$a^4-b^4-a^2c^2+b^2c^2=0$$

$$(a^2+b^2)(a^2-b^2)-c^2(a^2-b^2)=0$$

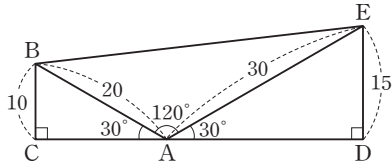
$$(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$$

$$a\neq b\text{이므로 } a^2+b^2-c^2=0$$

따라서 $c^2=a^2+b^2$ 이므로 삼각형 ABC는 $C=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이다.

답 ③

40



$\overline{BC}=10$, $\overline{DE}=15$ 이므로

삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = \frac{10}{\sin 30^\circ} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20$ 이고,

삼각형 ADE에서 $\overline{AE} = \frac{15}{\sin 30^\circ} = \frac{15}{\frac{1}{2}} = 30$ 이다.

삼각형 AEB에서 $\angle BAE = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$ 이고,

$\overline{AB}=20$, $\overline{AE}=30$ 이므로 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BE}^2 &= 20^2 + 30^2 - 2 \times 20 \times 30 \times \cos 120^\circ \\ &= 400 + 900 - 1200 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 1900\end{aligned}$$

이므로

$$\overline{BE} = \sqrt{1900} = 10\sqrt{19}$$

따라서 선분 BE의 길이는 $10\sqrt{19}$

답 ④

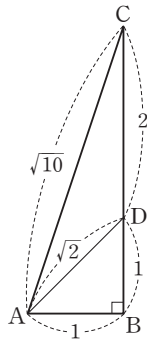
41

삼각형 ABD에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{이고,}$$

삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \text{이므로}$$



삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

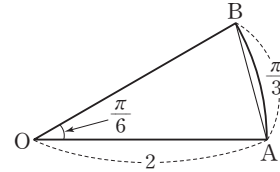
$$\begin{aligned}\cos(\angle CAD) &= \frac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{10})^2 - 2^2}{2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{10}} \\ &= \frac{2 + 10 - 4}{2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{10}} \\ &= \frac{8}{4\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

답 ⑤

42

반지름의 길이가 2이고, 호 AB의 길이가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 OAB의 중심각의 크기를 θ 로 놓으면

$$2\theta = \frac{\pi}{3} \text{이므로 } \theta = \frac{\pi}{6}$$



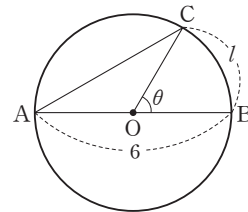
삼각형 OAB에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2 \times \overline{OA} \times \overline{OB} \times \cos \theta \\ &= 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{6} \\ &= 4 + 4 - 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 8 - 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

따라서 $l^2 = 8 - 4\sqrt{3}$ 이므로 $l^2 + 4\sqrt{3} = 8$

답 ③

43



$\angle COB = \theta$ 로 놓으면

$\angle AOC = \pi - \angle COB = \pi - \theta$ 이므로

삼각형 OCA에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 - 2 \times \overline{OA} \times \overline{OC} \times \cos(\pi - \theta) \\ 18 + 9\sqrt{2} &= 3^2 + 3^2 + 2 \times 3 \times 3 \times \cos \theta \\ 18 + 9\sqrt{2} &= 18 + 18\cos \theta\end{aligned}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \theta = \frac{\pi}{4}$$

따라서 부채꼴 OBC에서 호 BC의 길이 l 은

$$l = 3 \times \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

답 ②

44

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{10^2 + 10^2 - \overline{CA}^2}{2 \times 10 \times 10} = \frac{7}{25} \text{이므로}$$

$$200 - \overline{CA}^2 = 56, \overline{CA}^2 = 200 - 56 = 144$$

$$\overline{CA} = 12$$

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{625 - 49}{625}}$$

$$= \sqrt{\frac{576}{625}} = \sqrt{\left(\frac{24}{25}\right)^2} = \frac{24}{25}$$

이므로 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$2R = \frac{\overline{CA}}{\sin B} = \frac{12}{\frac{24}{25}} = \frac{25}{2}$$

따라서 $4R = 25$

답 25

45

삼각형 ABC에서 세 변의 길이를 각각

$\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ 로 놓으면

$\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : 4$ 이고, 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$ 이므로

$a : b : c = 2 : 3 : 4$

$a = 2k$, $b = 3k$, $c = 4k$ ($k > 0$)으로 놓으면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{(3k)^2 + (4k)^2 - (2k)^2}{2 \times 3k \times 4k} = \frac{7}{8}$$

따라서 $p = 8$, $q = 7$ 이므로 $p + q = 8 + 7 = 15$

답 15

46

$\overline{BC} = l$ 로 놓으면 직각삼각형 BCD에서

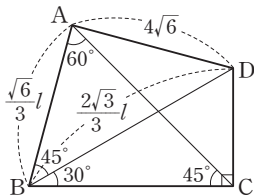
$$\overline{BD} = \frac{\overline{BC}}{\cos 30^\circ} = \frac{l}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} l = \frac{2\sqrt{3}}{3} l$$

삼각형 ABC에서 $\angle CAB = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ$ 이므로

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ} = \frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ} \text{에서}$$

$$\overline{AB} = \frac{\overline{BC} \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{l \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} l = \frac{\sqrt{6}}{3} l$$



삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BD} \times \cos 45^\circ$$

$$(4\sqrt{6})^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3} l\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} l\right)^2 - 2 \times \frac{\sqrt{6}}{3} l \times \frac{2\sqrt{3}}{3} l \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$96 = \frac{2}{3} l^2 + \frac{4}{3} l^2 - \frac{4}{3} l^2$$

$$\frac{2}{3} l^2 = 96$$

$$l^2 = 144$$

따라서 $l = 12$ 이므로 선분 BC의 길이는 12이다.

답 ③

47

$A + B + C = 180^\circ$ 에서

$C + A = 180^\circ - B$ 이므로

$$\sin(C + A) = \sin(180^\circ - B) = \sin B = \frac{1}{4}$$

$\overline{AB} = 12$, $\overline{BC} = 16$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin B = \frac{1}{2} \times 12 \times 16 \times \frac{1}{4} = 24$$

답 ②

48

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

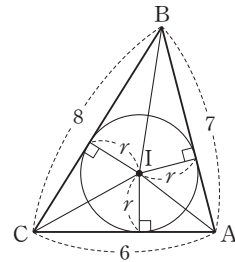
$$\cos A = \frac{6^2 + 7^2 - 8^2}{2 \times 6 \times 7} = \frac{36 + 49 - 64}{2 \times 6 \times 7} = \frac{21}{84} = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16 - 1}{16}} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

삼각형 ABC의 넓이를 S로 놓으면

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 7 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{21\sqrt{15}}{4} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r로 놓으면



$$S = \frac{r}{2} (6 + 7 + 8) = \frac{21}{2} r \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } \frac{21}{2} r = \frac{21\sqrt{15}}{4} \text{이므로 } r = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

따라서 삼각형 ABC에 내접하는 원의 넓이는

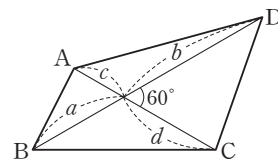
$$\pi \times \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 = \frac{15}{4} \pi$$

따라서 $p = 4$, $q = 15$ 이므로 $p + q = 4 + 15 = 19$

답 19

49

그림과 같이 사각형 ABCD의 잘린 두 대각선의 네 선분의 길이를 각각 a , b , c , d 로 놓으면



$a + b = x$, $c + d = y$ 이고, 사각형 ABCD의 넓이를 S로 놓으면

$$\sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ac \sin 60^\circ + \frac{1}{2} bc \sin 60^\circ + \frac{1}{2} bd \sin 60^\circ + \frac{1}{2} ad \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} c(a+b) + \frac{\sqrt{3}}{4} d(a+b) \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(a+b)(c+d) = \frac{\sqrt{3}}{4}xy$$

사각형 ABCD의 넓이가 $\sqrt{3}$ 이므로 $\frac{\sqrt{3}}{4}xy = \sqrt{3}$ 에서

$$xy = 4$$

$$x + y = 6 \text{이므로}$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$$

$$= 6^3 - 3 \times 4 \times 6$$

$$= 216 - 72$$

$$= 144$$

144

50

삼각형 ABC의 넓이가 $16\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \sin B = 16\sqrt{2}$$

$$\sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$0^\circ < B < 90^\circ \text{이므로}$$

$$\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \times 6 \times 8 \times \cos B$$

$$= 100 - 96 \times \frac{1}{3} = 100 - 32$$

$$= 68$$

$$B + D = 180^\circ \text{에서 } D = 180^\circ - B \text{이므로}$$

$$\cos D = \cos(180^\circ - B) = -\cos B = -\frac{1}{3}$$

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos D = \frac{4^2 + \overline{AD}^2 - 68}{2 \times 4 \times \overline{AD}}$$

$$\frac{\overline{AD}^2 - 52}{8\overline{AD}} = -\frac{1}{3}$$

$$3\overline{AD}^2 + 8\overline{AD} - 156 = 0$$

$$(3\overline{AD} + 26)(\overline{AD} - 6) = 0$$

$$3\overline{AD} + 26 > 0 \text{이므로 } \overline{AD} = 6$$

따라서 삼각형 ACD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{CD} \times \sin D = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin(180^\circ - B)$$

$$= 12 \sin B$$

$$= 12 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 8\sqrt{2}$$

$$\text{따라서 } S = 8\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$S^2 = 128$$

128

51

$\overline{AB} = 5$, $\overline{AC} = 3$, $\angle A = 120^\circ$ 인 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos 120^\circ$$

$$= 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 25 + 9 + 15 = 49$$

$$\text{이므로 } \overline{BC} = 7 \text{이다.}$$

삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발은 H이므로

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin 120^\circ \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \times 7 \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \text{이므로}$$

$$\overline{AH} = \frac{15\sqrt{3}}{14}$$

삼각형 AHC는 $\angle AHC = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

직각삼각형 AHC에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{HC} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{15\sqrt{3}}{14}\right)^2}$$

$$= \sqrt{9 - \frac{225 \times 3}{196}} = \sqrt{\frac{1764 - 675}{196}}$$

$$= \sqrt{\frac{1089}{196}} = \sqrt{\left(\frac{33}{14}\right)^2}$$

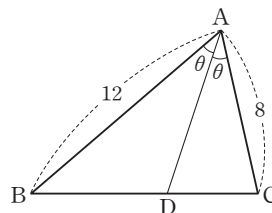
$$= \frac{33}{14}$$

$$\text{따라서 } p = 14, q = 33 \text{이므로}$$

$$p + q = 14 + 33 = 47$$

47

52



$$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin 2\theta$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AD} \times \sin \theta + \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{AD} \times \sin \theta$$

$$\frac{1}{2} \times 12 \times 8 \times \sin 2\theta$$

$$= \frac{1}{2} \times 12 \times \overline{AD} \times \sin \theta + \frac{1}{2} \times 8 \times \overline{AD} \times \sin \theta$$

$$48 \sin 2\theta = 6\overline{AD} \sin \theta + 4\overline{AD} \sin \theta$$

$$10\overline{AD} \sin \theta = 48 \sin 2\theta$$

$$\overline{AD} = \frac{48 \sin 2\theta}{10 \sin \theta} = \frac{24}{5} \times \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta}$$

$$= \frac{24}{5} \times \frac{8}{5} = \frac{192}{25}$$

$$\text{따라서 } p = 25, q = 192 \text{이므로}$$

$$p + q = 25 + 192 = 217$$

217



수열

정답

본문 40~53쪽

01 ④	02 ④	03 21	04 ②	05 ①
06 11	07 ②	08 ②	09 ③	10 ④
11 ⑤	12 ③	13 24	14 ③	15 13
16 ②	17 ④	18 ②	19 ②	20 70
21 ③	22 ③	23 80	24 ②	25 ③
26 ①	27 ④	28 ④	29 ④	30 11
31 55	32 ④	33 ⑤	34 10	35 979
36 110	37 ①	38 ④	39 ④	40 ④
41 ②	42 ②	43 23	44 ④	

01

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 일반항 a_n 은

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

이므로

$$a_1 + a_5 = 2 \text{에서 } a_1 + (a_1 + 4d) = 2 \text{이므로}$$

$$2a_1 + 4d = 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a_3 + a_4 = 0 \text{에서 } (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) = 0 \text{이므로}$$

$$2a_1 + 5d = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡} \text{을 하면 } d = -2 \text{이므로 } a_1 = 5$$

따라서

$$a_7 = 5 + 6 \times (-2) = -7$$

답 ④

02

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_2 - a_4 = 4 \text{에서}$$

$$(a_1 + d) - (a_1 + 3d) = 4$$

$$-2d = 4 \text{이므로 } d = -2$$

$$\text{또, } 3a_1 - 2a_3 + a_5 = 20 \text{에서}$$

$$3a_1 - 2(a_1 + 2d) + (a_1 + 4d) = 20$$

$$2a_1 = 20 \text{이므로 } a_1 = 10$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = 10 + (n-1) \times (-2) = -2n + 12$$

따라서 $a_n = 0$ 이어야 하므로

$$-2n + 12 = 0 \text{에서 } n = 6 \text{이다.}$$

답 ④

03

$$a_6 = 48 \text{이므로}$$

$$a_1 + 5 \times (-2) = 48$$

$$a_1 = 58$$

따라서

$$a_n = 58 + (n-1) \times (-2)$$

$$= -2n + 60$$

이므로

$$b_n = -2 \times 2n + 60 + (-2n + 60)$$

$$= -6n + 120$$

$b_n < 0$ 이어야 하므로

$$-6n + 120 < 0$$

$$n > 20$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 21이다.

답 21

04

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공차를 각각 d_1 , d_2 라 하면

$$a_2 + b_3 = 4 \text{에서}$$

$$(a_1 + b_1) + (d_1 + 2d_2) = 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a_6 + b_{11} = -36 \text{에서}$$

$$(a_1 + b_1) + 5(d_1 + 2d_2) = -36 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡} \text{을 하면 } 4(d_1 + 2d_2) = -40 \text{이므로}$$

$$d_1 + 2d_2 = -10 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉢}$ 을 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면

$$a_1 + b_1 = 14$$

$$\text{따라서 } a_4 + b_7 = (a_1 + b_1) + 3(d_1 + 2d_2)$$

$$= 14 + 3 \times (-10) = -16$$

답 ②

다른 풀이

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$a_2 + b_3$ 과 $a_6 + b_{11}$ 의 등차중항은 $a_4 + b_7$ 이므로

$$\begin{aligned} a_4 + b_7 &= \frac{(a_2 + b_3) + (a_6 + b_{11})}{2} \\ &= \frac{4 + (-36)}{2} = -16 \end{aligned}$$

05

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 -3 이므로

$$a_n = a_1 + (n-1) \times (-3) = -3n + a_1 + 3$$

$$a_3 = a_1 - 6, a_6 = a_1 - 15$$

$$2(a_3 + 3) = |a_6 - 3| \text{에서}$$

$$2(a_1 - 3) = |a_1 - 18|$$

$$2(a_1 - 3) = a_1 - 18 \text{ 또는 } 2(a_1 - 3) = -(a_1 - 18) \text{이므로}$$

$$a_1 = -12 \text{ 또는 } a_1 = 8$$

(i) $a_1 = -12$ 일 때,

$$a_n = -12 + (n-1) \times (-3)$$

$$= -3(n+3)$$

이므로 $a_n \times a_{n+3} < 0$ 을 만족시키는 n 은 존재하지 않는다.

(ii) $a_1 = 8$ 일 때,

$$a_n = 8 + (n-1) \times (-3)$$

$$= -3n + 11$$

이므로 자연수 $n=1, 2, 3$ 은 $a_n \times a_{n+3} < 0$ 을 만족시킨다.

따라서 $a_n = -3n + 11$ 이므로 $a_5 = -4$ 이다.

답 ①

06

이 수열의 공차를 d 라 하면

$$10 + (n+1)d = 46 \text{ 이므로}$$

$$n+1 = \frac{36}{d} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 n 이 자연수이므로 1이 아닌 공차 d 는 36의 양의 약수인

2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 중 하나이다.

또, 제 m 항이 31이라 하면

$$10 + (m-1)d = 31 \text{에서}$$

$$(m-1)d = 21$$

따라서 $7 \times 3 = 21$ 이므로 $d=3$ 이고 $\textcircled{1}$ 에서 $n=11$ 이다.

답 11

07

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$S_{11} = \frac{11(2a_1 + 10d)}{2} = 0 \text{에서}$$

$$2a_1 + 10d = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_{22} = \frac{22(2a_1 + 21d)}{2} = 363 \text{에서}$$

$$2a_1 + 21d = 33 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a_1 = -15, d = 3$$

$$a_{21} = -15 + (21-1) \times 3 = 45$$

$$\text{따라서 } a_1 + a_{21} = (-15) + 45 = 30$$

답 ②

08

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_1 + a_{20} = a_1 + (a_1 + 19d) = 2a_1 + 19d$$

$$a_2 + a_{19} = (a_1 + d) + (a_1 + 18d) = 2a_1 + 19d$$

$$a_3 + a_{18} = (a_1 + 2d) + (a_1 + 17d) = 2a_1 + 19d$$

\vdots

$$a_{10} + a_{11} = (a_1 + 9d) + (a_1 + 10d) = 2a_1 + 19d$$

이므로

$$a_1 + a_{20} = a_2 + a_{19} = a_3 + a_{18} = \dots = a_{10} + a_{11}$$

따라서

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20} &= \frac{20(a_1 + a_{20})}{2} \\ &= \frac{20(a_{10} + a_{11})}{2} \\ &= \frac{20 \times \frac{25}{2}}{2} \\ &= 125 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20} = 10(a_{10} + a_{11}) = 10 \times \frac{25}{2} = 125$$

참고 $a_n = \frac{1}{2}n + 1$ 은 조건을 만족시킨다.

09

등차수열 $\{a_n\}$ 에서 공차를 d 라 하면

$$a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)d$$

$$= dn + (2a_1 - d)$$

$$= 2n - 8$$

에서

$$d = 2, 2a_1 - d = -8$$

$$\text{이므로 } a_1 = -3$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + \dots + a_{20}$$

$$= S_{20} - S_{10}$$

$$= \frac{20(-6 + 19 \times 2)}{2} - \frac{10(-6 + 9 \times 2)}{2}$$

$$= 320 - 60 = 260$$

답 ③

다른 풀이

$$a_1 = -3, d = 2 \text{에서}$$

$$a_n = -3 + (n-1) \times 2 = 2n - 5$$

$$\text{이므로 } a_{11} = 17, a_{20} = 35$$

따라서

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} + a_{13} + \dots + a_{20} &= \frac{10(17 + 35)}{2} \\ &= 260 \end{aligned}$$

10

2와 4 사이에 n 개의 수를 넣어 만든 등차수열의 첫째항부터 끝항까지의 합은 첫째항이 2, 끝항이 4이고 항의 개수가 $n+2$ 이므로

$$S_n = \frac{(n+2) \times (2+4)}{2} = 3n+6$$

2와 8 사이에 $2n$ 개의 수를 넣어 만든 등차수열의 첫째항부터 끝항까지의 합은 첫째항이 2, 끝항이 8이고 항의 개수가 $2n+2$ 이므로

$$T_n = \frac{(2n+2) \times (2+8)}{2} = 10n+10$$

$$\text{따라서 } |S_n - T_n| = |(3n+6) - (10n+10)| = 7n+4 = 60 \text{에서}$$

$$n=8 \text{이다.}$$

답 ④

11

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

$$S_{10} = S_{11} \text{이면 } a_{11} = 0 \text{이므로}$$

$$20 + 10d = 0 \text{에서}$$

$$d = -2$$

$$S_n = \frac{n \times \{40 + (n-1) \times (-2)\}}{2} < 0 \text{에서}$$

$$n(n-21) > 0$$

따라서 $n > 21$ 이므로 자연수 n 의 최솟값은 22이다.

답 ⑤

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하자.

$$S_{10} = S_{11} \text{에서 } a_{11} = 0 \text{이므로 } d < 0 \text{이고}$$

$$a_1 + a_{21} = a_2 + a_{20} = a_3 + a_{19} = \dots = a_{10} + a_{12} = 2a_{11} = 0$$

따라서

$$S_{21} = (a_1 + a_{21}) + (a_2 + a_{20}) + (a_3 + a_{19}) + \cdots + (a_{10} + a_{12}) + a_{11} = 0$$

이므로 구하는 자연수 n 의 최솟값은 22이다.

12

$$a_{11} = a_9 + 2d = 22 + 2d$$

$$a_{31} = a_{11} + 20d = 22 + 22d$$

$a_{11}, a_{13}, a_{15}, \dots, a_{31}$ 은 항의 개수가 11인 등차수열이므로

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{13} + a_{15} + \cdots + a_{31} &= \frac{11 \times (a_{11} + a_{31})}{2} \\ &= \frac{11 \times \{(22 + 2d) + (22 + 22d)\}}{2} \\ &= -22 \end{aligned}$$

$$22 + 12d = -2 \text{에서 } d = -2$$

$$\text{또, } a_9 = a_1 + (9-1) \times (-2) = 22 \text{에서 } a_1 = 38$$

$$\text{따라서 } \frac{a_1}{d} = \frac{38}{-2} = -19$$

답 ③

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_{11} = a_9 + 2d = 22 + 2d$$

$a_{11}, a_{13}, a_{15}, \dots, a_{31}$ 의 항의 개수는 11이므로

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{13} + a_{15} + \cdots + a_{31} &= \frac{11 \{2a_{11} + (11-1) \times 2d\}}{2} \\ &= \frac{11 \times \{2 \times (22 + 2d) + (11-1) \times 2d\}}{2} \\ &= 11 \times (22 + 12d) = -22 \end{aligned}$$

$$22 + 12d = -2 \text{에서 } d = -2$$

$$\text{또, } a_9 = a_1 + (9-1) \times (-2) = 22 \text{에서 } a_1 = 38$$

$$\text{따라서 } \frac{a_1}{d} = \frac{38}{-2} = -19$$

13

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\frac{a_5}{a_2} = \frac{a_1 \times r^4}{a_1 \times r} = r^3 = 2\sqrt{2}$$

따라서

$$\begin{aligned} a_8 &= a_5 \times r^3 \\ &= 6\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \\ &= 24 \end{aligned}$$

답 24

14

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\frac{a_4 \times r^2 - a_4}{a_4 \times r} = \frac{r^2 - 1}{r} = \frac{3}{2}$$

$$2r^2 - 3r - 2 = 0$$

$$(2r+1)(r-2) = 0$$

모든 항이 양수이므로 $r > 0$ 에서

$$r = 2$$

따라서

$$a_7 = a_1 \times r^6 = \frac{3}{2} \times 2^6 = 96$$

답 ③

15

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_5 a_6 a_7 = a_4 a_8 \text{에서 } a_1 r^4 \times a_1 r^5 \times a_1 r^6 = a_1 r^3 \times a_1 r^7 \text{이므로}$$

$$a_1 r^5 = a_6 = 1 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$a_7 + a_8 = 6 \text{에서 } a_6(r + r^2) = 6 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠과 ㉡에서

$$r^2 + r = 6, (r-2)(r+3) = 0$$

모든 항이 양수이어야 하므로 $r > 0$ 에서 $r = 2$

$$r = 2 \text{를 ㉠에 대입하면 } a_1 = \frac{1}{32}$$

$$a_n = \frac{1}{32} \times 2^{n-1} = 2^{n-6}$$

$$a_n > 100 \text{에서}$$

$$2^{n-6} > 100$$

$$\text{이때 } 2^6 = 64 < 100 < 2^7 = 128 \text{이므로}$$

$$n-6 \geq 7, n \geq 13$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 13이다.

답 13

16

(가)에서 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{a_1 r^{n-1} + a_1 r^n}{3} \\ &= \frac{a_1(1+r)}{3} \times r^{n-1} \end{aligned}$$

이므로 수열 $\{b_n\}$ 은 $b_1 = \frac{a_1(1+r)}{3}$ 이고 공비가 r 인 등비수열이다.

$$\text{(나)에서 } \frac{b_2 b_4}{b_1 b_3} = \frac{b_1 r \times b_3 r}{b_1 b_3} = r^2 \text{이므로}$$

$$r^2 = \frac{576}{144} = 4$$

등비수열 $\{a_n\}$ 은 모든 항이 양수인 수열이므로

$$r = 2$$

$$\text{또, } b_1 b_3 = b_1^2 \times r^2$$

$$= \left\{ \frac{a_1(1+r)}{3} \right\}^2 \times r^2$$

$$= \left\{ \frac{a_1 \times (1+2)}{3} \right\}^2 \times 2^2$$

$$= 4a_1^2 = 144$$

$$a_1 > 0 \text{이므로 } a_1^2 = \frac{144}{4} = 36 \text{에서 } a_1 = 6$$

$$\text{따라서 } a_1 + b_1 = 6 + \frac{6 \times (1+2)}{3} = 12$$

답 ②

17

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_1 = 4a_3$$

에서 $a_1 = 4 \times a_1 \times r^2$ 이므로

$$4r^2 = 1, r^2 = \frac{1}{4}$$

$$r = \frac{1}{2} \text{ 또는 } r = -\frac{1}{2}$$

(i) $r = \frac{1}{2}$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_2 + a_4 &= a_1 \times r + a_1 \times r^3 \\ &= a_1(r + r^3) \\ &= a_1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{5}{8}a_1 = 5 \end{aligned}$$

이므로 $a_1 = 8$

(ii) $r = -\frac{1}{2}$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_2 + a_4 &= a_1 \times r + a_1 \times r^3 \\ &= a_1(r + r^3) \\ &= a_1\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) \\ &= -\frac{5}{8}a_1 = 5 \end{aligned}$$

이므로 $a_1 = -8$

등비수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 양수이므로

$$a_1 = 8, r = \frac{1}{2}$$

따라서 $a_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{4-n}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(n) &= \log_2(a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n) \\ &= \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \cdots + \log_2 a_n \\ &= \log_2 2^3 + \log_2 2^2 + \log_2 2 + \cdots + \log_2 2^{4-n} \\ &= 3 + 2 + 1 + \cdots + (4-n) \end{aligned}$$

따라서 $f(n)$ 은 첫째항이 3이고 제 n 항이 $4-n$ 인 등차수열의 합이므로

$$f(n) = \frac{n\{3 + (4-n)\}}{2} < 0$$

$$n(n-7) > 0$$

$$n < 0 \text{ 또는 } n > 7$$

따라서 $f(n) < 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 8이다.

답 ④

18

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$2a_1a_2 = a_4 \text{에서}$$

$$2 \times a_1 \times a_1r = a_1r^3$$

$$2a_1 = r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_6 = 4(a_5 - a_4) \text{에서}$$

$$a_1r^5 = 4(a_1r^4 - a_1r^3), r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$(r-2)^2 = 0$$

이므로 $r = 2$

$r = 2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $a_1 = 2$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제9항까지의 합은

$$\begin{aligned} \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} &= 2^{10} - 2 \\ &= 1022 \end{aligned}$$

답 ②

19

$$a_n = \frac{2^n}{6} = \frac{1}{3} \times 2^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \cdots) \text{이므로}$$

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $a_1 = \frac{1}{3}$ 이고 공비가 2인 등비수열이다.

따라서

$$\begin{aligned} a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_9 \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_9) - a_1 \\ &= \frac{\frac{1}{3}(2^9 - 1)}{2 - 1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}(2^8 - 1) \\ &= 170 \end{aligned}$$

답 ②

20

등비수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 서로 다르므로 공비를 r 라 하면

$$r \neq -1, r \neq 0, r \neq 1 \text{이다.}$$

$$10a_6 = a_2a_{10} \text{에서}$$

$$10 \times a_1r^5 = a_1r \times a_1r^9$$

$$\text{이므로 } a_1 = 10$$

$$\text{또, } S_{20} = 3S_{10} \text{에서}$$

$$S_{10} = \frac{a_1(r^{10} - 1)}{r - 1} \text{이고}$$

$$\begin{aligned} S_{20} &= \frac{a_1(r^{20} - 1)}{r - 1} \\ &= \frac{a_1(r^{10} - 1)(r^{10} + 1)}{r - 1} \\ &= (r^{10} + 1)S_{10} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } r^{10} + 1 = 3$$

$$r^{10} = 2$$

따라서

$$\begin{aligned} a_1 + a_{11} + a_{21} &= a_1 + a_1r^{10} + a_1r^{20} \\ &= 10 + 10 \times 2 + 10 \times 2^2 = 70 \end{aligned}$$

답 70

21

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_4 = a_1r^3 = 2r^3 = 54 \text{이므로 } r^3 = 27$$

$$r = 3$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{2(3^n - 1)}{3 - 1} = 3^n - 1$$

$$\log(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)^2 = 2 \log(3^n - 1) < 6 \text{에서}$$

$$\log(3^n - 1) < 3$$

$$3^n - 1 < 10^3$$

$$3^n < 1001$$

따라서 $3^6=729$, $3^7=2187$ 이므로 부등식을 만족시키는 자연수 n 의 최댓값은 6이다.

답 ③

22

$$\begin{aligned} a_n &= \overline{P_n Q_n} - \overline{R_n S_n} \\ &= 2^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-n+1} \\ &= 2^{n+1} - 2^{n-1} \\ &= 3 \times 2^{n-1} \end{aligned}$$

에서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이다.
따라서

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} &= \frac{3(2^{10}-1)}{2-1} \\ &= 3 \times 1023 \\ &= 3069 \end{aligned}$$

답 ③

23

세 수 4, a , b^2 은 이 순서대로 등비수열을 이루므로
 $a^2=4b^2$ 에서

$$a=2b \quad (a>0, b>0) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

세 수 a , b^2 , $2(a+b)$ 는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2b^2 = a + 2(a+b)$$

$$2b^2 = 3a + 2b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하여 풀면

$$2b^2 = 3 \times 2b + 2b$$

$$b^2 - 4b = 0, \quad b(b-4) = 0$$

$$b=4 \quad (b>0) \text{이므로 } \textcircled{1} \text{에서 } a=8$$

$$\text{따라서 } a^2 + b^2 = 8^2 + 4^2 = 64 + 16 = 80$$

답 80

24

a_2 , a_6 , a_{10} 은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$a_2 + a_{10} = 2a_6$$

또, a_4 , a_6 , a_8 은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$a_4 + a_8 = 2a_6$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 80 \text{에서}$$

$$5a_6 = 80 \text{이므로 } a_6 = 16$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_6 = a_1 + 5d$$

$$= 1 + 5d = 16$$

이므로 $d=3$

$$|a_{11} - a_{21}| = |(a_1 + 10d) - (a_1 + 20d)|$$

$$= |-10d|$$

$$= |-10 \times 3|$$

$$= 30$$

답 ②

25

점 $P(2, 0)$ 을 지나는 직선 l 의 기울기를 m 이라 할 때 직선 l 의 방정식은

$$y = mx - 2m$$

이고 점 Q 의 y 좌표는 $-2m$ 이다.

두 점 H_1 , H_2 의 x 좌표를 각각 α , β 라 하면

이차방정식

$$\frac{1}{2}x^2 - 6x + 19 = mx - 2m$$

은 두 양의 실근 α , β 를 갖는다.

$$\text{즉, } x^2 - 2(m+6)x + 4m + 38 = 0 \text{에서}$$

$$\alpha + \beta = 2(m+6) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta = 4m + 38 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

세 선분 OP , OH_1 , OH_2 의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$\alpha = \frac{2+\beta}{2} \text{에서}$$

$$\beta = 2\alpha - 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

③을 ①에 대입하여 정리하면

$$\alpha + (2\alpha - 2) = 2(m+6)$$

$$2m = 3\alpha - 14 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

③을 ②에 대입하여 정리하면

$$\alpha(2\alpha - 2) = 4m + 38$$

$$2m = \alpha^2 - \alpha - 19 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

④과 ⑤을 연립하여 풀면

$$\alpha^2 - 4\alpha - 5 = 0$$

$$(\alpha+1)(\alpha-5) = 0$$

$$\alpha > 2 \text{이므로 } \alpha = 5$$

$$\alpha = 5 \text{를 } \textcircled{5} \text{에 대입하면 } \beta = 8$$

$$\alpha = 5, \beta = 8 \text{을 } \textcircled{1} \text{ 또는 } \textcircled{2} \text{에 대입하면}$$

$$m = \frac{1}{2}$$

따라서 점 Q 의 y 좌표가 -1 이므로 삼각형 POQ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$$

답 ③

26

$n=6$ 일 때

$$a_7 = 2a_6 + 5 \text{에서 } a_7 - 2a_6 = 5$$

따라서

$$7S_7 - 21S_6 + 14S_5$$

$$= 7S_7 - 7S_6 - 14S_6 + 14S_5$$

$$= 7(S_7 - S_6) - 14(S_6 - S_5)$$

$$= 7a_7 - 14a_6$$

$$= 7(a_7 - 2a_6)$$

$$= 7 \times 5$$

$$= 35$$

답 ①

27

$$\begin{aligned}
 a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= (n^2 - 16n) - \{(n-1)^2 - 16(n-1)\} \\
 &= 2n - 17 \quad (n \geq 2) \\
 a_1 &= S_1 = -15 \text{이므로} \\
 a_n &= 2n - 17 \quad (n \geq 1) \\
 a_k a_{k+1} &= (2k - 17) \{2(k+1) - 17\} \\
 &= (2k - 17)(2k - 15) < 0 \\
 \frac{15}{2} < k < \frac{17}{2} \\
 \text{따라서 자연수 } k &= 8 \text{이다.}
 \end{aligned}$$

답 ④

28

$$\begin{aligned}
 \log_2(S_n - 4) &= -n \text{에서} \\
 S_n - 4 &= 2^{-n} \text{이므로} \\
 S_n &= 2^{-n} + 4 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\
 a_1 &= S_1 = 2^{-1} + 4 = \frac{9}{2} \\
 a_5 &= S_5 - S_4 \\
 &= (2^{-5} + 4) - (2^{-4} + 4) \\
 &= \frac{1}{32} - \frac{1}{16} = -\frac{1}{32} \\
 \text{따라서 } \frac{a_1}{a_5} &= \frac{9}{2} \times (-32) = -144
 \end{aligned}$$

답 ④

29

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{10} (2a_k - 3)^2 \\
 &= \sum_{k=1}^{10} \{4(a_k)^2 - 12a_k + 9\} \\
 &= 4 \sum_{k=1}^{10} (a_k)^2 - 12 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 9 \\
 &= 4 \times \frac{85}{4} - 12 \times \frac{5}{2} + 9 \times 10 \\
 &= 145
 \end{aligned}$$

답 ④

참고

$\{a_n\}$: 첫째항이 -2 이고 공차가 $\frac{1}{2}$ 인 등차수열은 조건을 만족시킨다.

30

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{10} (a_n + 1) &= \sum_{n=1}^9 (a_n + p) \text{에서} \\
 \sum_{n=1}^{10} a_n + \sum_{n=1}^{10} 1 &= \sum_{n=1}^9 a_n + \sum_{n=1}^9 p \\
 \sum_{n=1}^{10} a_n - \sum_{n=1}^9 a_n &= \sum_{n=1}^9 p - \sum_{n=1}^{10} 1 \\
 a_{10} &= 9p - 10 \times 1 \\
 \text{따라서} \\
 p &= \frac{1}{9}(a_{10} + 10) = \frac{1}{9}(89 + 10) = 11
 \end{aligned}$$

답 11

31

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^9 (1 + ka_{k+1}) \\
 &= (1 + a_2) + (1 + 2a_3) + (1 + 3a_4) + \dots + (1 + 9a_{10}) \\
 &= 9 + (a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \dots + 9a_{10}) = 339 \\
 \text{이므로 } a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \dots + 9a_{10} &= 330 \quad \text{..... ㉠} \\
 \sum_{k=1}^{10} (1 + k)a_k \\
 &= 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + \dots + 11a_{10} = 440 \quad \text{..... ㉡} \\
 \text{㉡} - \text{㉠} \text{을 하면} \\
 2(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}) &= 110 \\
 \text{따라서 } a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} &= \sum_{k=1}^{10} a_k = 55
 \end{aligned}$$

답 55

참고

$a_n = n$ 은 조건을 만족시킨다.

32

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{20} (ak - 3) &= a \sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{20} 3 \\
 &= a \times \frac{20 \times (20 + 1)}{2} - 3 \times 20 \\
 &= 210a - 60 = 990 \\
 \text{따라서 } 210a &= 1050 \text{이므로 } a = 5 \text{이다.}
 \end{aligned}$$

답 ④

33

$$\begin{aligned}
 \text{등차수열 } \{a_n\} \text{의 공차를 } d \text{라 하면} \\
 \sum_{k=1}^{10} a_k &= \frac{10\{2 \times 2 + (10-1)d\}}{2} = 290 \text{이므로} \\
 4 + 9d &= 58 \text{에서 } d = 6 \\
 \text{따라서 } a_n &= 2 + (n-1) \times 6 = 6n - 4 \text{이므로} \\
 \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2}k(a_k + 4) &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2}k\{(6k-4) + 4\} \\
 &= 3 \sum_{k=1}^{10} k^2 \\
 &= 3 \times \frac{10 \times (10+1) \times (2 \times 10 + 1)}{6} \\
 &= 1155
 \end{aligned}$$

답 ⑤

34

$$\begin{aligned}
 \text{다항식 } x^3 - (n-2)x^2 + 2x + a \text{를 일차식 } x - n \text{으로 나눈 나머지 } a_n \text{은} \\
 a_n &= n^3 - (n-2)n^2 + 2n + a \\
 &= 2n^2 + 2n + a \\
 \text{이므로} \\
 \sum_{n=1}^{10} a_n &= \sum_{n=1}^{10} (2n^2 + 2n + a) \\
 &= 2 \sum_{n=1}^{10} n^2 + 2 \sum_{n=1}^{10} n + \sum_{n=1}^{10} a \\
 &= 2 \times \frac{10 \times (10+1) \times (2 \times 10 + 1)}{6} + 2 \times \frac{10 \times (10+1)}{2} + 10a
 \end{aligned}$$

$$=880+10a=980$$

따라서 $a=10$ 이다.

답 10

35

$$\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 2n + 1 \text{ 이므로}$$

$$n=1 \text{ 일 때, } a_1 = 1^2 + 2 \times 1 + 1 = 4$$

$$n \geq 2 \text{ 일 때}$$

$$a_n = (n^2 + 2n + 1) - \{(n-1)^2 + 2(n-1) + 1\} \\ = 2n + 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{20} \frac{1}{a_n a_{n+1}} &= \frac{1}{a_1 a_2} + \sum_{n=2}^{20} \frac{1}{a_n a_{n+1}} \\ &= \frac{1}{4 \times 5} + \sum_{n=2}^{20} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{1}{20} + \sum_{n=2}^{20} \left\{ \frac{1}{(2n+3) - (2n+1)} \times \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{20} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{20} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \\ &= \frac{1}{20} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{41} - \frac{1}{43} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{20} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{43} \right) \\ &= \frac{119}{860} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } p=860, q=119 \text{ 이므로 } p+q=860+119=979$$

답 979

36

$$\begin{aligned} a_{10} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{p}{2+4+6+\dots+2k} \\ &= \frac{p}{2} \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{1+2+3+\dots+k} \\ &= \frac{p}{2} \sum_{k=1}^{10} \frac{2}{k(k+1)} \\ &= p \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= p \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= p \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \right\} \\ &= p \left(1 - \frac{1}{11} \right) \\ &= \frac{10p}{11} \end{aligned}$$

$$\log a_{10} = \log \frac{10p}{11} = 2 \text{ 에서}$$

$$\frac{10p}{11} = 10^2 = 100$$

따라서 $p=110$ 이다.

답 110

37

점 $(n-1, \sqrt{n})$ 과 점 $(n, 0)$ 을 연결한 선분을 대각선으로 갖고 가로는 x 축과 평행한 직사각형의 넓이를 S_n 이라 하면

$$S_n = \{n - (n-1)\} \times \sqrt{(n-1)+1} = \sqrt{n}$$

또 점 $(n+1, \sqrt{n+2})$ 와 점 $(n, 0)$ 을 연결한 선분을 대각선으로 갖고 가로는 x 축과 평행한 직사각형의 넓이를 T_n 이라 하면

$$T_n = \{(n+1) - n\} \times \sqrt{(n+1)+1} = \sqrt{n+2}$$

두 직사각형의 넓이 S_n 과 T_n 의 차 a_n 은

$$\begin{aligned} a_n &= T_n - S_n \\ &= \sqrt{n+2} - \sqrt{n} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{23} a_n &= \sum_{n=1}^{23} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \\ &= (\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{4} - \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{6} - \sqrt{4}) + \dots \\ &\quad + (\sqrt{23} - \sqrt{21}) + (\sqrt{24} - \sqrt{22}) + (\sqrt{25} - \sqrt{23}) \\ &= -1 - \sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 5 \\ &= 4 - \sqrt{2} + 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

따라서 $a=4, b=-1$ 이므로

$$a+b=4+(-1)=3$$

답 ①

38

모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \frac{3p}{a_n + p} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이므로 $\textcircled{7}$ 에서

$$n=1 \text{ 일 때}$$

$$a_2 = \frac{3p}{a_1 + p} = \frac{3p}{1+p}$$

$$n=2 \text{ 일 때}$$

$$a_3 = \frac{3p}{a_2 + p} = \frac{3p}{\frac{3p}{1+p} + p} = \frac{3(p+1)}{p+4}$$

$$\text{이때 } a_3 = \frac{3}{2} \text{ 이므로 } \frac{3(p+1)}{p+4} = \frac{3}{2} \text{ 에서 } p=2$$

따라서 $\textcircled{7}$ 에서 $n=3$ 일 때,

$$a_4 = \frac{6}{a_3 + 2} = \frac{6}{\frac{3}{2} + 2} = \frac{12}{7}$$

이고 $n=4$ 일 때,

$$a_5 = \frac{6}{a_4 + 2} = \frac{21}{13}$$

답 ④

39

조건 (나)에서

$$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{3}$$

이고 $n=1$ 일 때

$$a_2 = a_1 - \frac{1}{3}$$

조건 (가)에서

$$5a_1 = 6a_2$$

$$= 6\left(a_1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 6a_1 - 2$$

$$\text{이므로 } a_1 = 2$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2이고 공차가 $-\frac{1}{3}$ 인 등차수열이므로

$$a_{10} = 2 + (10-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= 2 - 3 = -1$$

답 ④

40

$$2a_n + a_{n+1} = 2n - 3 \quad \dots\dots ㉠$$

㉠에 $n=2$ 를 대입하면

$$2a_2 + a_3 = 2 \times 2 - 3 = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(1 - a_3) = \frac{1}{2}(1 - 5) = -2$$

㉠에 $n=1$ 을 대입하면

$$2a_1 + a_2 = 2 \times 1 - 3 = -1$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(-1 - a_2) = \frac{1}{2}\{-1 - (-2)\} = \frac{1}{2}$$

㉠에 $n=3$ 을 대입하면

$$2a_3 + a_4 = 2 \times 3 - 3 = 3$$

$$a_4 = 3 - 2a_3 = 3 - 2 \times 5 = -7$$

㉠에 $n=4$ 를 대입하면

$$2a_4 + a_5 = 2 \times 4 - 3 = 5$$

$$a_5 = 5 - 2a_4 = 5 - 2 \times (-7) = 19$$

$$\text{따라서 } a_1 + a_5 = \frac{1}{2} + 19 = \frac{39}{2}$$

답 ④

41

$$a_1 = 4 < 10 \text{이므로 } a_2 = 2 \times a_1 = 2 \times 4 = 8$$

$$a_2 = 8 < 10 \text{이므로 } a_3 = 2 \times a_2 = 2 \times 8 = 16$$

$$a_3 = 16 \geq 10 \text{이므로 } a_4 = a_3 - 2 = 16 - 2 = 14$$

$$a_4 = 14 \geq 10 \text{이므로 } a_5 = a_4 - 2 = 14 - 2 = 12$$

$$a_5 = 12 \geq 10 \text{이므로 } a_6 = a_5 - 2 = 12 - 2 = 10$$

$$a_6 = 10 \geq 10 \text{이므로 } a_7 = a_6 - 2 = 10 - 2 = 8$$

$$a_7 = 8 < 10 \text{이므로 } a_8 = 2 \times a_7 = 2 \times 8 = 16$$

$$a_8 = 16 \geq 10 \text{이므로 } a_9 = a_8 - 2 = 16 - 2 = 14$$

$$a_9 = 14 \geq 10 \text{이므로 } a_{10} = a_9 - 2 = 14 - 2 = 12$$

$$a_{10} = 12 \geq 10 \text{이므로 } a_{11} = a_{10} - 2 = 12 - 2 = 10$$

$$a_{11} = 10 \geq 10 \text{이므로 } a_{12} = a_{11} - 2 = 10 - 2 = 8$$

⋮

$n \geq 2$ 인 자연수 n 에 대하여 $a_{n+5} = a_n$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 두 번째 항부터 8, 16, 14, 12, 10이 순서대로 반복되고 $n = 5k + 1$ ($k = 1, 2, 3, \dots$)번째 항의 값이 10이다.

따라서 두 자리의 자연수 n 의 값은 11, 16, \dots , 96의 18개이다.

답 ②

42

$a_2 = x$ 라 하면 조건 (가)로부터

$$a_3 = 2(a_1 + 1) = 2 \times (1 + 1) = 4$$

$$a_4 = 2(a_2 + 1) = 2 \times (x + 1) = 2x + 2$$

$$a_5 = 2(a_3 + 1) = 2 \times (4 + 1) = 10$$

$$a_6 = 2(a_4 + 1) = 2 \times \{(2x + 2) + 1\} = 4x + 6$$

조건 (나)로부터 $a_{n+6} = a_n$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{30} a_k = 5(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)$$

$$= 5\{1 + x + 4 + (2x + 2) + 10 + (4x + 6)\}$$

$$= 5(7x + 23) = 185$$

따라서 $x = 2$, $100 = 6 \times 16 + 4$ 이므로

$$a_{100} = a_4 = 2 \times 2 + 2 = 6$$

답 ②

43

$n = k$ 일 때, 두 수 2^k 과 3^k 의 일의 자리의 숫자만을 생각하여 수열 $\{a_n\}$ 의 항의 값을 차례로 구하면 다음과 같다.

$k=1$ 일 때, 2^1 과 3^1 의 일의 자리의 숫자는 각각 2, 3이므로

$$a_1 = 5$$

$k=2$ 일 때, 2^2 과 3^2 의 일의 자리의 숫자는 각각 4, 9이므로

$$a_2 = 3$$

$k=3$ 일 때, 2^3 과 3^3 의 일의 자리의 숫자는 각각 8, 7이므로

$$a_3 = 5$$

$k=4$ 일 때, 2^4 과 3^4 의 일의 자리의 숫자는 각각 6, 1이므로

$$a_4 = 7$$

$k=5$ 일 때, 2^5 과 3^5 의 일의 자리의 숫자는 각각 2, 3이므로

$$a_5 = 5$$

$k=6$ 일 때, 2^6 과 3^6 의 일의 자리의 숫자는 각각 4, 9이므로

$$a_6 = 3$$

⋮

즉, $a_{n+4} = a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)이고,

$$\sum_{n=1}^4 a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 5 + 3 + 5 + 7 = 20 \text{이다.}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^m a_n = 113$$

$$= 5 \times 20 + 5 + 3 + 5$$

따라서 항의 개수인 m 의 값은

$$m = 5 \times 4 + 3 = 23$$

답 23

〈다른 풀이〉

자연수 n 에 대하여 2^n 과 3^n 을 10으로 나눈 나머지를 각각 구하여 차례로 나열하면 다음과 같다.

$$2^n: 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, \dots$$

$$3^n: 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, \dots$$

이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 각 항을 차례로 나열하면

$$a_n: 5, 3, 5, 7, 5, 3, 5, 7, \dots$$

따라서 $a_{n+4} = a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)이므로

$$\sum_{n=1}^m a_n = 113 = (5+3+5+7) \times 5 + 5 + 3 + 5$$

에서 $m = 5 \times 4 + 3 = 23$

44

(i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, (\text{우변}) = \frac{1}{4} \left(3 - \frac{1}{1} \right) = \frac{1}{2}$$

이므로 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{4} \left(3 - \frac{1}{k} \right)$$

이므로

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)-1} - \frac{1}{2(k+1)}$$

$$\leq \frac{1}{4} \left(3 - \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{2(k+1)-1} - \frac{1}{2(k+1)}$$

$$= \frac{1}{4} \left(3 - \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$$

이때

$$\frac{1}{4} \left(3 - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{4} \left(3 - \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{2(2k+1)(k+1)}$$

$$= \frac{1}{2(k+1)} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2(k+1)} \times \frac{1}{2k(2k+1)} > 0$$

$$\text{이므로 } \frac{1}{4} \left(3 - \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} < \frac{1}{4} \left(3 - \frac{1}{k+1} \right)$$

따라서

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2(k+1)-1} - \frac{1}{2(k+1)} \leq \frac{1}{4} \left(3 - \frac{1}{k+1} \right)$$

이므로 $n=k+1$ 일 때도 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

$$\text{따라서 } f(k) = \frac{1}{2(k+1)-1} - \frac{1}{2(k+1)} = \frac{1}{(2k+1)(2k+2)},$$

$$g(k) = \frac{1}{2(k+1)} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{f(3)} + \frac{1}{g(4)} = 56 + 10 = 66$$

답 ④

미적분

04 수열의 극한

정답

본문 56~67쪽

01 ⑤	02 ③	03 ②	04 ②	05 ③
06 11	07 ③	08 ①	09 ③	10 ③
11 ②	12 ②	13 8	14 ⑤	15 ③
16 ④	17 ⑤	18 ③	19 ③	20 ⑤
21 ④	22 23	23 ④	24 ④	25 ②
26 ③	27 ③	28 ③	29 6	30 ⑤
31 ④	32 ④	33 7	34 ③	35 ⑤

01

$a_n + 2b_n = c_n$, $a_n - b_n = d_n$ 이라 하면

$c_n + 2d_n = 3a_n$, $c_n - d_n = 3b_n$ 에서

$$a_n = \frac{c_n + 2d_n}{3}, b_n = \frac{c_n - d_n}{3}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 3$, $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 6$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n + 2d_n}{3} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} c_n + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} d_n}{3} \\ &= \frac{3 + 2 \times 6}{3} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n - d_n}{3} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} c_n - \lim_{n \rightarrow \infty} d_n}{3} \\ &= \frac{3 - 6}{3} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= 5 \times (-1) = -5 \end{aligned}$$

답 ⑤

02

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 로 놓으면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n a_{n+1}}{a_n + 3} = \frac{1}{2} \text{에서 } \frac{a^2}{a+3} = \frac{1}{2}$$

$$2a^2 - a - 3 = 0$$

$$(2a-3)(a+1) = 0$$

$$a = \frac{3}{2} \text{ 또는 } a = -1$$

수열 $\{a_n\}$ 은 모든 항이 양수인 수열이므로 극한값 a 는 음수가 아니다.

$$a = \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n+1}) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$$

답 ③

03

$(2n+1)a_n = nb_n$ 에서

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{2n+1} \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2} \text{이다.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n + b_n} = 6 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{c_n}{a_n + b_n} \times \frac{a_n + b_n}{b_n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n + b_n} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} + 1 \right) \\ &= 6 \times \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \\ &= 9 \end{aligned}$$

답 ②

04

$$\begin{aligned} &\left(n^2 + \frac{1}{n} \right)^2 - \left(n^2 - \frac{1}{n} \right)^2 \\ &= n^4 + 2n + \frac{1}{n^2} - \left(n^4 - 2n + \frac{1}{n^2} \right) \\ &= 4n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(n^2 + \frac{1}{n} \right)^2 - \left(n^2 - \frac{1}{n} \right)^2}{2n+3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{2n+3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{2 + \frac{3}{n}} = 2 \end{aligned}$$

답 ②

05

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} \times \frac{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \right) \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + \sqrt{1}} = 3 \end{aligned}$$

답 ③

06

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{an^2 + 12n} - 3n}{\sqrt{n^2 + 2n} - n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(an^2 + 12n) - 9n^2}{(n^2 + 2n) - n^2} \times \frac{\sqrt{n^2 + 2n} + n}{\sqrt{an^2 + 12n} + 3n} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(a-9)n^2 + 12n}{2n} \times \frac{\sqrt{n^2 + 2n} + n}{\sqrt{an^2 + 12n} + 3n} \right\} \end{aligned}$$

극한값이 존재하려면 $a-9=0$ 에서 $a=9$

$a=9$ 일 때 주어진 극한값을 구하면

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{12n}{2n} \times \frac{\sqrt{n^2 + 2n} + n}{\sqrt{9n^2 + 12n} + 3n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(6 \times \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1}{\sqrt{9 + \frac{12}{n}} + 3} \right) \\ &= 6 \times \frac{2}{6} = 2 = b \\ &\text{따라서 } a=9, b=2 \text{이므로} \\ &a+b=11 \end{aligned}$$

답 11

07

$x^2 + 2nx - 3n = 0$ 의 두 실근은

$$x = -n + \sqrt{n^2 + 3n} \text{ 또는 } x = -n - \sqrt{n^2 + 3n}$$

그런데 $a_n > 0$ 이므로

$$a_n = \sqrt{n^2 + 3n} - n$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} \\ &= \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

답 ③

08

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2n+3} = 6 \text{에서}$$

$$\frac{a_n}{2n+3} = b_n \text{이라 하면}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 6 \text{이고 } a_n = (2n+3)b_n$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{(2n+3)b_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{2n+3} \times \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 ①

09

첫째항이 3이고, 공차가 2인 등차수열의 일반항은 $a_n = 2n+1$ 이고

$$S_n = \frac{n\{2 \times 3 + (n-1) \times 2\}}{2} = n^2 + 2n$$

이므로

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} (2\sqrt{S_n} - a_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{2\sqrt{n^2 + 2n} - (2n+1)\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n^2 + 2n) - (2n+1)^2}{2\sqrt{n^2 + 2n} + 2n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{2\sqrt{n^2+2n+2n+1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-\frac{1}{n}}{2\sqrt{1+\frac{2}{n}+2+\frac{1}{n}}} \\
&= \frac{4}{2+2} = 1
\end{aligned}$$

답 ③

10

$$\begin{aligned}
&n(n+1)(n+2) < a_n < (n+1)^3 \text{에서} \\
&n^3+3n^2+2n < a_n < n^3+3n^2+3n+1 \\
&3n^2+2n < a_n - n^3 < 3n^2+3n+1 \\
&\frac{3n^2+2n}{n^2} < \frac{a_n-n^3}{n^2} < \frac{3n^2+3n+1}{n^2} \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{n}\right) = 3, \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 3 \\
&\text{이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여} \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n-n^3}{n^2} = 3
\end{aligned}$$

답 ③

11

$$\begin{aligned}
&\neg. [\text{반례}] \text{ 모든 자연수 } n \text{에 대하여 } \frac{1}{n} < \frac{2}{n} \text{이지만} \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0 \text{ (거짓)} \\
&\neg. \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \text{이고 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여} \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{이다. (참)} \\
&\neg. [\text{반례}] a_n = n + \frac{1}{n}, c_n = n + \frac{2}{n}, b_n = n + \frac{3}{n} \text{에 대하여} \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0 \text{이지만 } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty \text{이므로 수열 } \{c_n\} \text{은} \\
&\text{발산한다. (거짓)} \\
&\text{따라서 옳은 것은 } \neg \text{이다.}
\end{aligned}$$

답 ②

12

$$\begin{aligned}
&(a_n - n^2)(a_n - n^2 - n) < 0 \text{에서} \\
&n^2 < a_n < n^2 + n \\
&1 < a_1 < 2, 4 < a_2 < 6, 9 < a_3 < 12, \dots \text{이므로} \\
&1+4+9+\dots+n^2 < a_1+a_2+a_3+\dots+a_n \\
&< 2+6+12+\dots+(n^2+n) \\
&\sum_{k=1}^n k^2 < S_n < \sum_{k=1}^n (k^2+k) \\
&\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} < S_n < \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\
&\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} < \frac{S_n}{n^3} < \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} + \frac{n(n+1)}{2n^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6} < \frac{S_n}{n^3} < \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6} + \frac{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{2} \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6} = \frac{1}{3}, \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6} + \frac{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{2} \right\} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^3} = \frac{1}{3}$$

답 ②

13

주어진 수열이 수렴하려면 $-1 < \frac{x^2-4x-1}{4} \leq 1$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned}
&\text{(i) } -1 < \frac{x^2-4x-1}{4} \text{에서} \\
&x^2-4x-1 > -4, x^2-4x+3 > 0, (x-1)(x-3) > 0 \\
&x < 1 \text{ 또는 } x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\
&\text{(ii) } \frac{x^2-4x-1}{4} \leq 1 \text{에서} \\
&x^2-4x-1 \leq 4, x^2-4x-5 \leq 0, (x+1)(x-5) \leq 0 \\
&-1 \leq x \leq 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}
\end{aligned}$$

 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면

$$-1 \leq x < 1 \text{ 또는 } 3 < x \leq 5$$

따라서 구하는 정수 x 는 $-1, 0, 4, 5$ 이고 그 합은

$$-1+0+4+5=8$$

답 8

14

$$a_n = 2 \times 3^{n-1} \text{이므로}$$

$$a_{2n} = 2 \times 3^{2n-1} = \frac{2}{3} \times 3^{2n}$$

$$(a_n)^2 = 4 \times 3^{2n-2} = \frac{4}{9} \times 3^{2n}$$

따라서

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n} + (a_n)^2}{3^{2n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{3} \times 3^{2n} + \frac{4}{9} \times 3^{2n}}{3^{2n} + 1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{3} + \frac{4}{9}}{1 + \frac{1}{3^{2n}}} \\
&= \frac{2}{3} + \frac{4}{9} = \frac{10}{9}
\end{aligned}$$

답 ⑤

15

 x 의 값의 범위에 따라 함수 $f(x)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$-1 < x < 1 \text{이면}$$

$$n \rightarrow \infty \text{일 때, } x^n \rightarrow 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} + 2x}{x^n + 1} = 2x$$

$$x=1 \text{ 이면 } f(1) = \frac{3}{2}$$

$$x > 1 \text{ 또는 } x < -1 \text{ 이면}$$

$$n \rightarrow \infty \text{ 일 때, } |x^n| \rightarrow \infty \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} + 2x}{x^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{2}{x^{n-1}}}{1 + \frac{1}{x^n}} = x$$

a 의 값의 범위에 따라 $f(a) - f\left(\frac{1}{a}\right) = 1$ 을 만족시키는 a 의 값을 구해 보자.

$$(i) -1 < a < 1 \text{ 이면 } f(a) = 2a, f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \text{ 이므로}$$

$$f(a) - f\left(\frac{1}{a}\right) = 1 \text{ 에서}$$

$$2a - \frac{1}{a} = 1, 2a^2 - a - 1 = 0, (2a+1)(a-1) = 0$$

$$-1 < a < 1 \text{ 이므로 } a = -\frac{1}{2}$$

$$(ii) a=1 \text{ 이면 } f(a) - f\left(\frac{1}{a}\right) = 1 \text{ 을 만족시키지 않는다.}$$

$$(iii) a > 1 \text{ 또는 } a < -1 \text{ 이면 } f(a) = a, f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{2}{a} \text{ 이므로}$$

$$f(a) - f\left(\frac{1}{a}\right) = 1 \text{ 에서}$$

$$a - \frac{2}{a} = 1, a^2 - a - 2 = 0, (a+1)(a-2) = 0$$

$$a > 1 \text{ 또는 } a < -1 \text{ 이므로 } a = 2$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$-\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

답 ③

16

$$(i) -1 < r < 1 \text{ 일 때}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{1+r^{n+1}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$(ii) r=1 \text{ 일 때}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{1+r^{n+1}} = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$(iii) |r| > 1 \text{ 일 때}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^n}{1+r^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{r^n} - 1}{\frac{1}{r^n} + r} = \frac{0-1}{0+r} = -\frac{1}{r}$$

$$-\frac{1}{r} = \frac{1}{2} \text{ 에서 } r = -2$$

$$(i), (ii), (iii) \text{ 에 의하여 } r = -2 \text{ 이다.}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+2} + 3}{r^{n+1} + r^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^{n+2} + 3}{(-2)^{n+1} + (-2)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^2 + \frac{3}{(-2)^n}}{-2 + 1} \\ &= \frac{4+0}{-2+1} = -4 \end{aligned}$$

답 ④

17

$$10^n = 2^n \times 5^n \text{ 이므로}$$

$$f(n) = (1+2^1+\cdots+2^n)(1+5^1+\cdots+5^n)$$

$$= \frac{1}{4}(2^{n+1}-1)(5^{n+1}-1)$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{10^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}(2^{n+1}-1)(5^{n+1}-1)}{10^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} \times \frac{2^{n+1}-1}{2^n} \times \frac{5^{n+1}-1}{5^n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left\{ \left(2 - \frac{1}{2^n} \right) \left(5 - \frac{1}{5^n} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \times 2 \times 5 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

답 ⑤

18

조건 (가)에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이고, 공비는 a_1 ($a_1 > 0$)이다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공비를 모두 r ($r > 0$)이라 하면 $a_n = r^n$ 이다.

$$(i) r=1 \text{ 일 때, } a_n = 1, S_n = n \text{ 이므로}$$

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$$(ii) r \neq 1 \text{ 일 때, } a_n = r^n, S_n = \frac{r(r^n-1)}{r-1}$$

$$\frac{S_n}{a_n} = \frac{\frac{r(r^n-1)}{r-1}}{r^n} = \frac{r(r^n-1)}{r^n(r-1)}$$

$$\textcircled{1} r > 1 \text{ 일 때, } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r(r^n-1)}{r^n(r-1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r\left(1 - \frac{1}{r^n}\right)}{r-1} \\ &= \frac{r}{r-1} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_n} = 3 \text{ 에서}$$

$$\frac{r}{r-1} = 3, r = 3r - 3, r = \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{2} 0 < r < 1 \text{ 일 때, } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \text{ 이므로}$$

$$\frac{S_n}{a_n} = \frac{r(r^n-1)}{r^n(r-1)} \text{ 은 발산한다.}$$

(i), (ii)에 의하여

$$a_1 = r = \frac{3}{2}$$

답 ③

19

원 C 의 반지름의 길이는 $n+1$ 이다.

$$\begin{aligned} f(n) &= \overline{OA} - (n+1) \\ &= \sqrt{(n+1)^2 + (\sqrt{n})^2} - (n+1) \\ &= \sqrt{n^2 + 3n + 1} - (n+1) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{n^2 + 3n + 1} - (n+1)\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n + 1 - (n+1)^2}{\sqrt{n^2 + 3n + 1} + n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 3n + 1} + n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ③

20

점 $P_n(2^n, n)$ 을 지나고 기울기가 -1 인 직선은

$$y = -(x - 2^n) + n \text{ 이므로 } y = -x + 2^n + n$$

점 Q_n 의 좌표는 $(0, 2^n + n)$

$P_{n+1}(2^{n+1}, n+1)$ 이므로 선분 $P_{n+1}Q_n$ 의 길이 L_n 은

$$\begin{aligned} L_n &= \sqrt{(2^{n+1})^2 + (1 - 2^n)^2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{2^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(2^{n+1})^2 + (1 - 2^n)^2}}{2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(2^{n+1})^2 + (2^n - 1)^2}{(2^n)^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2^2 + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

답 ⑤

21

$Q_n(\sqrt{n}, n), R_n(\sqrt{n}, 0)$ 이므로

$$\overline{P_n Q_n} = \sqrt{n}, \overline{P_n P_{n+1}} = 1, \overline{Q_n R_n} = n, \overline{R_n R_{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\begin{aligned} S(n) &= \frac{1}{2} \times (\overline{P_n Q_n} + \overline{P_{n+1} Q_{n+1}}) \times \overline{P_n P_{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \times (\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) \times 1 = \frac{1}{2} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= \frac{1}{2} \times (\overline{Q_n R_n} + \overline{Q_{n+1} R_{n+1}}) \times \overline{R_n R_{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \times (n + n+1) \times (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \frac{1}{2} (2n+1) (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n)}{T(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{(2n+1)(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2}{(2n+1)(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1+2\sqrt{n^2+n}}{2n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n} + 2\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{2 + \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

$$= \frac{2+2}{2} = 2$$

답 ④

22

$2a_n - b_n = c_n, -a_n + 3b_n = d_n$ 으로 놓으면

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 6, \sum_{n=1}^{\infty} d_n = 7$$

$$c_n + 2d_n = 5b_n \text{에서 } b_n = \frac{c_n + 2d_n}{5}$$

$$3c_n + d_n = 5a_n \text{에서 } a_n = \frac{3c_n + d_n}{5}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (3a_n + 2b_n) &= 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= \frac{3}{5} \sum_{n=1}^{\infty} (3c_n + d_n) + \frac{2}{5} \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + 2d_n) \\ &= \frac{11}{5} \sum_{n=1}^{\infty} c_n + \frac{7}{5} \sum_{n=1}^{\infty} d_n \\ &= \frac{11}{5} \times 6 + \frac{7}{5} \times 7 = 23 \end{aligned}$$

답 23

23

이차방정식 $x^2 - 4nx + 2n - 1 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n + \beta_n = 4n, \alpha_n \beta_n = 2n - 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n(2n+1)} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right) \right\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n(2n+1)} \times \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n(2n+1)} \times \frac{4n}{2n-1} \right\} \\ &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = 2 \end{aligned}$$

답 ④

24

$a_{n+1} = a_n + 2$ 이므로 $a_n = a_1 + 2(n-1)$

$$-\ln a_n - \ln a_{n+1} = \ln b_n$$

$$\ln \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \ln b_n \text{에서 } b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{k+1} - a_k} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + 2n} \right) \\ &= \frac{1}{2a_1} = 100 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a_1 = \frac{1}{200}$$

답 ④

25

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_n + \frac{n}{2n+1} \right) = 1 \text{ 이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-a_n + \frac{n}{2n+1} \right) = 0$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)a_n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \times a_n \right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

답 ②

26

$$\frac{(2n-1)a_n}{2n^2} = b_n \text{ 으로 놓으면}$$

급수

$$\left(\frac{a_1}{2} - 2 \right) + \left(\frac{3a_2}{8} - 2 \right) + \left(\frac{5a_3}{18} - 2 \right) + \dots + \left\{ \frac{(2n-1)a_n}{2n^2} - 2 \right\} + \dots$$

가 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$

$$\frac{(2n-1)a_n}{2n^2} = b_n \text{ 에서 } a_n = \frac{2n^2}{2n-1} \times b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + a_n}{3n + 2a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \frac{2n^2}{2n-1} \times b_n}{3n + 2 \times \frac{2n^2}{2n-1} \times b_n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2n}{2n-1} \times b_n}{3 + 2 \times \frac{2n}{2n-1} \times b_n}$$

$$= \frac{2 + 1 \times 2}{3 + 2 \times 1 \times 2} = \frac{4}{7}$$

답 ③

27

$$\text{급수 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{ak^2 + 4k + (2k-1)^2}{k(k+1)} \text{ 이 수렴하므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + 4n + (2n-1)^2}{n(n+1)} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a+4)n^2 + 1}{n(n+1)} = 0, \text{ 즉 } a = -4$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{ak^2 + 4k + (2k-1)^2}{k(k+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 \end{aligned}$$

이므로 $b=1$

따라서 $a+b = -4+1 = -3$

답 ③

28

$$\text{급수 } \sum_{n=1}^{\infty} (x-3) \left(\frac{x+1}{3} \right)^n \text{ 이 수렴하므로}$$

$$(x-3) \left(\frac{x+1}{3} \right) = 0 \text{ 또는 } -1 < \frac{x+1}{3} < 1$$

$$(x-3) \left(\frac{x+1}{3} \right) = 0 \text{ 에서}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 3 \quad \dots\dots ㉠$$

$$-1 < \frac{x+1}{3} < 1 \text{ 에서 } -4 < x < 2$$

$$\text{이때 가능한 정수 } x \text{ 는 } -3, -2, -1, 0, 1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 가능한 x 는 $-3, -2, -1, 0, 1, 3$ 이고 구하는 정수 x 의 개수는 6이다.

답 ③

29

$$\text{급수 } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^2}{4} - \frac{3}{2}x + 1 \right|^{n-1} \text{ 이 수렴하므로}$$

$$\left| \frac{x^2}{4} - \frac{3}{2}x + 1 \right| < 1$$

$$-1 < \frac{x^2}{4} - \frac{3}{2}x + 1 < 1$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{3}{2}x + 1 > -1 \text{ 에서 } x^2 - 6x + 8 > 0$$

$$(x-2)(x-4) > 0, x < 2 \text{ 또는 } x > 4 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{3}{2}x + 1 < 1 \text{ 에서 } x^2 - 6x < 0$$

$$x(x-6) < 0, 0 < x < 6 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$0 < x < 2 \text{ 또는 } 4 < x < 6$$

따라서 가능한 정수 x 는 1, 5이고 구하는 정수 x 의 값의 합은

$$1+5=6$$

답 6

30

$$\text{급수 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{r} \right)^n \text{ 이 수렴하므로 } -1 < \frac{3}{r} < 1$$

$$\text{즉, } r > 3 \text{ 또는 } r < -3 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{9} \right)^n \text{ 이 수렴하면}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n + 2^{2n}}{3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{9} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9} \right)^n \text{ 이 성립하고 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n + 2^{2n}}{3^{2n}} \text{ 이 수렴하}$$

므로

$$-1 < \frac{r}{9} < 1 \text{ 에서 } -9 < r < 9$$

이때 ㉠을 만족시켜야 하므로

$$-9 < r < -3 \text{ 또는 } 3 < r < 9$$

따라서 가능한 정수 r 는 $-8, -7, -6, -5, -4, 4, 5, 6, 7, 8$ 이므로 구하는 정수 r 의 개수는 10이다.

답 ⑤

31

$$a_n = ar^{n-1} \text{ 으로 놓으면}$$

$$a_3 = ar^2 = 20 \quad \dots\dots ㉠$$

$$a_5 = ar^4 = 10 \quad \dots\dots ㉡$$

㉔ ÷ ㉓을 하면 $r^2 = \frac{1}{2}$ 이므로

$$a=40, r=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|a_n|=40 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 40 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n-1} \right\} \\ &= 20\sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{20\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}} = 40\sqrt{2}\end{aligned}$$

32

$a_n = ar^{n-1}$ 으로 놓으면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-r} = 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉓}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 = \frac{a^2}{1-r^2} = 24 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$$\textcircled{㉔} \div \textcircled{㉓} \text{을 하면 } \frac{a}{1+r} = 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

$$\textcircled{㉕} \div \textcircled{㉓} \text{을 하면 } \frac{1-r}{1+r} = \frac{2}{3}, r = \frac{1}{5}$$

$$\text{이것을 } \textcircled{㉓} \text{에 대입하면 } a = \frac{24}{5}$$

$$\begin{aligned}a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + \dots &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \{ (ar^{n-1}) \times (ar^n) \} \\ &= \frac{576}{125} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{25}\right)^{n-1} \\ &= \frac{576}{125} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{25}} = \frac{24}{5}\end{aligned}$$

33

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{BC} = \sqrt{(2^n)^2 + 1} = \sqrt{4^n + 1}$$

삼각형 ABH와 삼각형 CBA가 서로 닮은 도형이므로

$$\overline{AB} : \overline{BH} = \overline{CB} : \overline{BA}$$

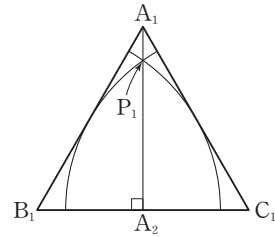
$$2^n : a_n = \sqrt{4^n + 1} : 2^n$$

$$\text{이것을 정리하면 } a_n = \frac{4^n}{\sqrt{4^n + 1}}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a_n)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 1}{16^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{1}{16^n} \right) \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{16}} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

따라서 $p=5, q=2$ 이므로 $p+q=5+2=7$

34



정삼각형 $A_1B_1C_1$ 은 한 변의 길이가 1이므로 점 B_1 을 중심으로 하고 직선 A_1C_1 에 접하는 원의 반지름의 길이는 정삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 높이인 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 과 같다.

따라서 삼각형 $P_1B_1C_1$ 은 $\overline{P_1B_1} = \overline{P_1C_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 인 이등변삼각형이고

$\overline{B_1A_2} = \frac{1}{2}$ 이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{P_1A_2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

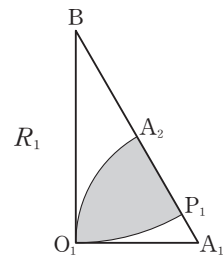
$$\text{따라서 } l_1 = \overline{A_1P_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

삼각형 $A_2B_2C_2$ 와 삼각형 $A_1B_1C_1$ 은 서로 닮은 도형이고 닮음비는 1 : 2이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

답 ③

35



직각삼각형 O_1A_1B 의 내부에 있고 부채꼴 BO_1P_1 의 외부에 있는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} - \frac{1}{2} \times (\sqrt{3})^2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉓}$$

S_1 의 값은 부채꼴 $A_1A_2O_1$ 의 넓이에서 ㉓의 값을 뺀 것과 같으므로

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{5}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

삼각형 O_2A_2B 와 삼각형 O_1A_1B 는 서로 닮은 도형이고 닮음비는

$$\overline{BA_2} : \overline{BA_1} = (2-1) : 2 = 1 : 2$$

이므로 넓이의 비는 1 : 4이다.

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{5}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{9}$$

답 ⑤

답 ④

답 ④

답 7

05

미분법

정답

본문 72~85쪽

01 ④	02 ④	03 ①	04 ④	05 ②
06 ③	07 ③	08 ②	09 ③	10 ③
11 ①	12 ④	13 ③	14 100	15 ③
16 ④	17 297	18 ③	19 ⑤	20 16
21 ④	22 ④	23 ⑤	24 ⑤	25 ④
26 ②	27 ②	28 ④	29 ⑤	30 ③
31 ②	32 11	33 ④	34 ③	35 ③
36 ①	37 ②	38 ①	39 ②	

01

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax} \\ = a \times 1 = 3$$

따라서 $a=3$

답 ④

02

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{\ln(1+3x)} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x(x-2)}{\ln(1+3x)} \\ = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{3x}{\ln(1+3x)} \times (x-2) \right\} \\ = \frac{1}{3} \times 1 \times (-2) = -\frac{2}{3}$$

답 ④

03

$f(a)=0$ 이므로 $x \rightarrow a$ 일 때, $f(x) \rightarrow 0$

이때 0이 아닌 극한값 $b^2 + \frac{1}{4}$ 이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln(1+2x) = \ln(1+2a) = 0$$

$a=0$

따라서 $f(x)=e^x-1$ 이고 주어진 식은

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - 1}{\ln(1+2x)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{2x}{\ln(1+2x)} \times \frac{e^x - 1}{x} \right\} \\ = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\ln(1+2x)} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \\ = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

이므로

$$b^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, b^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } a^2 + b^2 = \frac{1}{4}$$

답 ①

04

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} + 1\right)e^x + (\ln x + x)e^x$$

이므로

$$f'(1) = 2e + e = 3e$$

답 ④

05

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-2h)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} + \frac{f(1-2h) - f(1)}{-h} \right\} \\ = 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} + 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h} \\ = 2f'(1) + 2f'(1) = 4f'(1)$$

이고

$$f'(x) = ae^x \ln x^2 + (ae^x + 1) \times \frac{2}{x} \text{에서}$$

$$f'(1) = 2(ae + 1) \text{이므로}$$

$$4f'(1) = 8(ae + 1) = 8 + e, 8ae = e$$

$$\text{따라서 } a = \frac{1}{8}$$

답 ②

06

$x \rightarrow 1$ 일 때, (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - 2x\} = 0$$

$$f(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{e^{x-1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - 2x}{x-1} \times \frac{x-1}{e^{x-1} - 1} \right\} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1) - 2(x-1)}{x-1} \right\} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{e^{x-1} - 1}$$

$$\text{이때 } x-1=t \text{로 놓으면 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{e^{x-1} - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1 \text{이고}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1) - 2(x-1)}{x-1} \right\} = f'(1) - 2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{e^{x-1} - 1} = f'(1) - 2 = 2$$

$$f'(1) = 4$$

$$g(x) = f(x)(1 + \ln x) \text{에서}$$

$$g'(x) = f'(x)(1 + \ln x) + f(x) \times \frac{1}{x}$$

$$\text{따라서 } g'(1) = f'(1) + f(1) = 4 + 2 = 6$$

답 ③

07

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = \frac{15}{16} \text{이므로}$$

$$\sec^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ = \frac{1}{\frac{15}{16}} = \frac{16}{15}$$

답 ③

08

$\tan \theta + \sqrt{2} \cot \theta = 4$ 의 양변을 제곱하면

$$\tan^2 \theta + 2\sqrt{2} + 2 \cot^2 \theta = 16$$

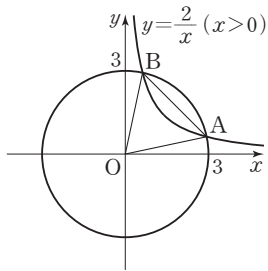
$$\tan^2 \theta + 2\sqrt{2} + 2 \cot^2 \theta + 3 = 19$$

$$1 + \tan^2 \theta + 2(1 + \cot^2 \theta) = 19 - 2\sqrt{2}$$

$$\sec^2 \theta + 2 \csc^2 \theta = 19 - 2\sqrt{2}$$

②

09



점 A의 좌표가 $(3 \cos \theta, 3 \sin \theta)$ 이고 원과 곡선 $y = \frac{2}{x} (x > 0)$ 은

모두 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

점 B의 좌표는 $(3 \sin \theta, 3 \cos \theta)$ 이다.

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(3 \cos \theta - 3 \sin \theta)^2 + (3 \sin \theta - 3 \cos \theta)^2} \\ &= \sqrt{18(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - 36 \sin \theta \cos \theta} \\ &= \sqrt{18 - 36 \sin \theta \cos \theta} \end{aligned}$$

이때 점 A $(3 \cos \theta, 3 \sin \theta)$ 는 곡선 $y = \frac{2}{x}$ 위의 점이므로

$$3 \sin \theta = \frac{2}{3 \cos \theta}, \sin \theta \cos \theta = \frac{2}{9}$$

$$\text{따라서 } \overline{AB} = \sqrt{18 - 36 \times \frac{2}{9}} = \sqrt{10}$$

삼각형 OAB는 $\overline{OA} = \overline{OB} = 3$ 인 이등변삼각형이므로

$\angle OAB = \alpha$ 라 하면 $\pi - 2\alpha + 2\theta = \frac{\pi}{2}$ 에서 $\alpha = \frac{\pi}{4} + \theta$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sec \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right) &= \frac{1}{3 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right)} \\ &= \frac{1}{3 \cos \alpha} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2} \overline{AB}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \end{aligned}$$

③

10

$$2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right)$$

$$= 2 \sin \theta \cos \frac{\pi}{4} + 2 \cos \theta \sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} \cos \theta - \sin \frac{\pi}{4} \sin \theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \theta + \cos \theta)$$

$$= 2\sqrt{2} \cos \theta$$

에서 $\sin \theta = 3 \cos \theta$

$\cos \theta \neq 0$ 이므로 $\tan \theta = 3$

③

11

점 $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ 와 직선 $x \sin \beta + y \cos \beta + 2 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta + 2|}{\sqrt{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta}} = \frac{3}{2}$$

$$|\sin(\alpha + \beta) + 2| = \frac{3}{2}$$

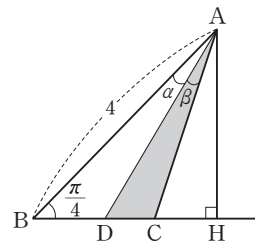
$\sin(\alpha + \beta) + 2 > 0$ 이므로

$$\sin(\alpha + \beta) + 2 = \frac{3}{2}$$

따라서 $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2}$

①

12



점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때,

$$\overline{AH} = 4 \sin \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$$

$$\angle ACH = \alpha + \beta + \frac{\pi}{4} \text{이고}$$

$$\begin{aligned} \tan \left(\alpha + \beta + \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan(\alpha + \beta) \tan \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + 1}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

이므로

$$\overline{CH} = \frac{\overline{AH}}{\tan \left(\alpha + \beta + \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\angle ADH = \alpha + \frac{\pi}{4} \text{이고}$$

$$\begin{aligned} \tan \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\frac{1}{4} + 1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \overline{DH} &= \frac{\overline{AH}}{\tan \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\frac{5}{3}} = \frac{6\sqrt{2}}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{DC} &= \overline{DH} - \overline{CH} \\ &= \frac{6\sqrt{2}}{5} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{15}\end{aligned}$$

따라서 삼각형 ADC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{DC} \times \overline{AH} = \frac{1}{2} \times \frac{8\sqrt{2}}{15} \times 2\sqrt{2} = \frac{16}{15}$$

답 ④

13

삼각형 ABP는 각 APB가 직각인

직각삼각형이므로

$$\overline{AP} = 2 \cos \theta, \overline{BP} = 2 \sin \theta$$

직각삼각형 PAQ에서

$$\overline{AQ} = \overline{AP} \cos \theta = 2 \cos^2 \theta$$

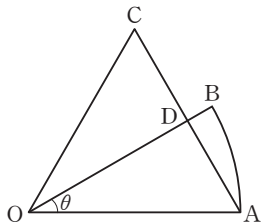
직각삼각형 RAQ에서

$$\overline{QR} = \overline{AQ} \sin \theta = 2 \cos^2 \theta \sin \theta$$

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\overline{BP} - \overline{QR}}{\theta^3} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin \theta - 2 \cos^2 \theta \sin \theta}{\theta^3} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 \sin \theta}{\theta} \times \frac{1 - \cos^2 \theta}{\theta^2} \right) \\ &= 2 \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \times \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \right) \\ &= 2 \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2} \\ &= 2 \times 1 \times 1 = 2\end{aligned}$$

답 ③

14



$$\angle ODA = \frac{2}{3}\pi - \theta \text{ 이므로}$$

$$\text{삼각형 OAD에서 사인법칙에 의해 } \frac{\overline{OA}}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \theta\right)} = \frac{\overline{OD}}{\sin \frac{\pi}{3}}$$

$$\begin{aligned}\overline{OD} &= \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \theta\right)} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin \frac{2}{3}\pi \cos \theta - \cos \frac{2}{3}\pi \sin \theta} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OD} \times \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta} \times \sin \theta \\ &= \frac{\sqrt{3} \sin \theta}{2(\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta)}\end{aligned}$$

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \theta = \frac{\theta}{2} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{T(\theta)}{S(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{3} \sin \theta}{\theta(\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta)} \\ &= \sqrt{3} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta} \\ &= \sqrt{3} \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 1\end{aligned}$$

$$\text{따라서 } 100p = 100 \times 1 = 100$$

답 100

15

$$f(x) = \sin x \cos x + \frac{1}{2}x \text{ 에서}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \cos^2 x - \sin^2 x + \frac{1}{2} \\ &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \frac{1}{2} \\ &= 2 \cos^2 x - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

이므로

$$f'(a) = 2 \cos^2 a - \frac{1}{2} = 0 \text{ 에서 } \cos^2 a = \frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } \sin^2 a = 1 - \cos^2 a = \frac{3}{4} \text{ 이고}$$

$$\begin{aligned}\tan^2 a &= \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} \\ &= \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 3\end{aligned}$$

답 ③

16

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x - 1) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (a \sin x + b \cos x) = b \\ \text{에서 } b &= 0\end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a \sin x}{x}\end{aligned}$$

$$1 = a$$

$$\text{따라서 } a + b = 1$$

답 ④

17

$$f'(x) = \sin x + x \cos x \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) - \sin x - \frac{2}{k}x &= \sin x + x \cos x - \sin x - \frac{2}{k}x \\
 &= x \cos x - \frac{2}{k}x \\
 &= x \left(\cos x - \frac{2}{k} \right) = 0
 \end{aligned}$$

에서 $x=0$ 또는 $\cos x = \frac{2}{k}$

$k=1$ 이면 주어진 방정식의 실근은 $x=0$ 뿐이므로 $g(1)=1$

$k=2$ 이면 주어진 방정식의 실근은 $x=0$ 또는 방정식 $\cos x=1$ 의 근인 $x=0$ 또는 $x=2\pi$ 이므로 $g(2)=2$

$k=3$ 이면 주어진 방정식의 실근은 $x=0$ 또는 방정식 $\cos x = \frac{2}{3}$ 의 근이고 그 근은 0이 아니고 그 개수는 2이므로 $g(3)=3$

$k \geq 4$ 이면 마찬가지로 주어진 방정식의 실근은 $x=0$ 또는 방정식

$\cos x = \frac{2}{k}$ 의 근이고 그 근은 0이 아니고 그 개수는 2이므로 $g(k)=3$

$$\sum_{k=1}^{100} g(k) = g(1) + g(2) + 3 \times 98 = 297$$

답 297

18

$f(2x-1) = \frac{x \sin \pi x}{x^2+1}$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(2x-1) \times 2 = \frac{(\sin \pi x + \pi x \cos \pi x)(x^2+1) - (x \sin \pi x) \times 2x}{(x^2+1)^2}$$

에서 $x=1$ 을 대입하면

$$2f'(1) = \frac{-2\pi}{2^2}, f'(1) = -\frac{\pi}{4}$$

답 ③

19

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{x-2} = 3 \text{에서 } f(2)=2, f'(2)=3$$

$(g \circ f)(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ 을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(x))f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+1) \times \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

에서 $x=2$ 를 대입하면

$$g'(2) \times 3 = \frac{\sqrt{5} - 3 \times \frac{2}{\sqrt{5}}}{5} = -\frac{\sqrt{5}}{25}$$

$$\text{따라서 } g'(2) = -\frac{\sqrt{5}}{75}$$

답 ⑤

20

$g(x) = -g(-x)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = g'(-x), \text{ 즉 } g'(1) = g'(-1)$$

$g(x) = \frac{2xf(2x)}{e^x}$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \frac{\{2f(2x) + 4xf'(2x)\}e^x - 2xf(2x)e^x}{e^{2x}} \\
 &= \frac{2(1-x)f(2x) + 4xf'(2x)}{e^x}
 \end{aligned}$$

에서 $x=1$ 을 대입하면

$$g'(1) = \frac{4f'(2)}{e} = 16$$

따라서 $g'(-1) = 16$

답 16

21

$f(0)=1$ 에서 $g(1)=0$

$f'(x) = e^x + \frac{1}{x+1}$ 이므로

$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-a}{x-1} = b$ 가 성립하므로

$$g(1) = a = 0, g'(1) = b = \frac{1}{2}$$

따라서 $a+b = \frac{1}{2}$

답 ④

22

$G(x) = g(2x-1)$ 로 놓으면

$f(0)=3$ 이므로 $G(3)=g(5)=0$

$f'(x) = e^x(x^2+3x+4)$ 에서 $f'(0)=4$

$G(x) = g(2x-1)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$G'(x) = 2g'(2x-1)$$

$$G'(3) = 2g'(5) \text{이고}$$

$$G'(3) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$2g'(5) = \frac{1}{4} \text{에서 } g'(5) = \frac{1}{8}$$

답 ④

23

$$f(-1) = \frac{1}{e}, f(1) = 2 \text{이고}$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 g'\left(\frac{1}{e}\right) + g'(2) &= \frac{1}{f'(-1)} + \frac{1}{f'(1)} \\
 &= \frac{1}{e^{-1}} + 1 = e + 1
 \end{aligned}$$

답 ⑤

▶ $f'(x)$ 를 구할 때, $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ 을 이용한다.

24

$f(x) = e^x \sin x$ 에서

$$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$$

$$f''(x) = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x$$

$$\text{따라서 } \frac{f''(\pi)}{f'(\pi)} = \frac{2e^\pi \times (-1)}{e^\pi \times (-1)} = 2$$

답 ⑤

25

함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$f'(x) = 3x^2 + ax + b \quad (\text{단, } a, b \text{는 상수})$$

$f''(x) = 6x + a = 0$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점의 x 좌표가 2이므로

$$f''(2) = 12 + a = 0 \text{에서 } a = -12$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + b$$

$$= 3(x-2)^2 + b - 12$$

이때 함수 $y = f'(x)$ 의 최솟값은 -4 이므로

$$b - 12 = -4 \text{에서 } b = 8$$

방정식 $f'(x) = 0$, 즉 $3x^2 - 12x + 8 = 0$ 에서

$$\alpha + \beta = 4, \quad \alpha\beta = \frac{8}{3}$$

따라서

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta &= (\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta \\ &= 4^2 - 3 \times \frac{8}{3} = 8 \end{aligned}$$

답 ④

26

2 이상의 자연수 n 에 대하여 좌표평면에서 곡선

$y = \sin^n x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$ 의 변곡점의 좌표를 (b_n, a_n) 이라 하자.

$$y' = n \sin^{n-1} x \times \cos x$$

$$y'' = n(n-1) \sin^{n-2} x \times \cos^2 x + n \sin^{n-1} x \times (-\sin x)$$

$\sin x > 0$ 이므로 $y'' = 0$ 에서

$$(n-1) \cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

$$(n-1) \cos^2 b_n = \sin^2 b_n$$

$$\sin^2 b_n = 1 - \cos^2 b_n \text{이므로}$$

$$(n-1) \cos^2 b_n = 1 - \cos^2 b_n \text{에서}$$

$$\cos^2 b_n = \frac{1}{n} \text{이고 } \sin^2 b_n = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\sin b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

따라서 $a_n = \sin^n b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n \times \left(-\frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

이때 $t = -\frac{1}{n}$ 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0^-$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0^-} (1+t)^{\frac{1}{t} \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

답 ②

27

$e^x - xe^y = y$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$e^x - e^y - xe^y \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

이때 $x = 0, y = 1$ 을 대입하면

$$1 - e = \frac{dy}{dx}$$

따라서 곡선 $e^x - xe^y = y$ 위의 점 $(0, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = (1 - e)x + 1$$

따라서 $m = 1 - e, n = 1$ 이므로 $mn = 1 - e$

답 ②

28

$\overline{AP} = t$ 이고

$y' = \frac{2}{x}$ 이므로 곡선 $y = 2 \ln 2x + 2$ 위의 점 $P(t, 2 \ln 2t + 2)$ 에서의

접선의 방정식은

$$y = \frac{2}{t}(x - t) + 2 \ln 2t + 2 = \frac{2}{t}x + 2 \ln 2t$$

이때 $x = 0$ 을 대입하면 $y = 2 \ln 2t$

$$\text{즉, } \overline{AB} = 2 \ln 2t + 2 - 2 \ln 2t = 2$$

따라서 삼각형 APB의 넓이를 $S(t)$ 로 놓으면

$$S(t) = \frac{1}{2} \times t \times 2 = t$$

$$S(t) = t = 4 \text{에서 } t = 4$$

답 ④

29

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-1}{2t+1} \quad \dots\dots ㉠$$

㉠에 $t = a$ 를 대입하면

$$-\frac{1}{2a+1} = -\frac{1}{3} \text{에서 } a = 1$$

㉠에 $t = 2$ 를 대입하면

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{5}$$

$t = 2$ 일 때,

$$x = 2^2 + 2 + 1 = 7, \quad y = -2$$

따라서 점 $(7, -2)$ 를 지나고 기울기가 $-\frac{1}{5}$ 인 직선의 방정식은

$$y + 2 = -\frac{1}{5}(x - 7), \quad y = -\frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$$

이때 $x = 0$ 이면 $y = -\frac{3}{5}, y = 0$ 이면 $x = -3$ 이므로

점 Q에서 이 곡선에 접하는 접선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times |-3| \times \left| -\frac{3}{5} \right| = \frac{9}{10}$$

답 ⑤

30

$$f'(x) = 2xe^{-x} + (x^2 - 3)e^{-x} \times (-1)$$

$$= -(x^2 - 2x - 3)e^{-x} = 0$$

에서

$$x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) = 0$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	극소	/	극대	\

$$f(-1) = -2e, f(3) = \frac{6}{e^3} \text{이므로}$$

$$a = -2e, b = \frac{6}{e^3}$$

$$\text{따라서 } a^3b = (-8e^3) \times \frac{6}{e^3} = -48$$

답 ③

31

$$f'(x) = -\sin(\ln x) \times \frac{1}{x} = 0 \text{에서}$$

$$\ln x = n\pi \quad (n \text{은 자연수})$$

$$x = e^{n\pi}, \text{ 즉 } a_n = e^{n\pi}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{\pi}} \right)^n \\ &= \frac{\frac{1}{e^{\pi}}}{1 - \frac{1}{e^{\pi}}} = \frac{1}{e^{\pi} - 1} \end{aligned}$$

답 ②

32

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x(x^2 + n - 10) + e^x \times 2x \\ &= e^x(x^2 + 2x + n - 10) \end{aligned}$$

$$x^2 + 2x + n - 10 \geq 0 \text{이면}$$

$f'(x) \geq 0$ 이 되어 함수 $f(x)$ 는 극값을 갖지 않고 실수 전체의 집합에서 증가하므로 역함수가 존재한다.

$$x^2 + 2x + n - 10 = (x+1)^2 + n - 11 \geq 0 \text{에서}$$

$$n \geq 11$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 11이다.

답 11

33

함수 $f(x) = x^2 e^x$ 을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x$$

$$= e^x(x^2 + 2x) = 0$$

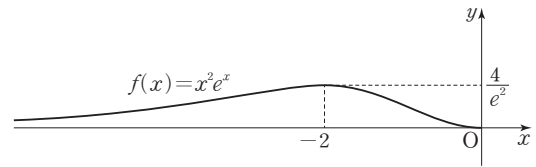
에서 $x=0$ 또는 $x=-2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	/	$\frac{4}{e^2}$	\	0

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$ 이므로 함수 $f(x) = x^2 e^x$ 의 그래프의 점근선은 $y=0$ 이다.

따라서 함수 $f(x) = x^2 e^x$ 의 그래프는 그림과 같다.



$$M = f(-2) = \frac{4}{e^2}, m = f(0) = 0$$

$$\text{따라서 } M + m = \frac{4}{e^2}$$

답 ④

34

$$\begin{aligned} \neg. F(x+2\pi) &= \sin(\sin(2\pi+x)) \\ &= \sin(\sin x) = F(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(x+\pi) &= \cos(\cos(\pi+x)) \\ &= \cos(-\cos x) \\ &= \cos(\cos x) = G(x) \end{aligned}$$

따라서 두 함수 $F(x)$, $G(x)$ 는 모두 주기함수이다. (참)

$$\neg. F(x) = \sin(\sin x) \text{에서}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \text{이므로}$$

$$-\sin 1 \leq F(x) \leq \sin 1$$

$$G(x) = \cos(\cos x) \text{에서}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \text{이므로}$$

$$\cos 1 \leq G(x) \leq 1$$

$$\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3} \text{이므로 } \sin 1 > \cos 1$$

따라서 함수 $F(x)$ 의 최댓값이 함수 $G(x)$ 의 최솟값보다 크다.

(거짓)

$$\neg. H(x) = \frac{F(x)}{G\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \text{로 놓으면}$$

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{\sin(\sin x)}{\cos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)} \\ &= \frac{\sin(\sin x)}{\cos(\sin x)} = \tan(\sin x) \end{aligned}$$

$$H'(x) = \sec^2(\sin x) \times \cos x$$

$$\sec^2(\sin x) > 0 \text{이므로}$$

$$H'(x) = \sec^2(\sin x) \times \cos x = 0 \text{에서 } \cos x = 0$$

$$H(2\pi+x) = \tan(\sin(2\pi+x)) = \tan(\sin x) = H(x)$$

이므로 함수 $H(x)$ 는 주기함수이다.

단한구간 $[0, 2\pi]$ 에서 함수 $H(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$...	$\frac{3}{2}\pi$...	2π
$H'(x)$		+	0	-	0	+	
$H(x)$	0	/	$\tan 1$	\	$-\tan 1$	/	0

함수 $H(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{2}$ 일 때 최댓값 $\tan 1$ 을 가지므로 $M = \tan 1$

$$\tan \frac{\pi}{4} < \tan 1 < \tan \frac{\pi}{3} \text{에서 } 1 < M < \sqrt{3} \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 \neg , \neg 이다.

답 ③

35

$f(x) = (\ln x)^2 - \ln x^2$ 이라 하자.

$f'(x) = 2 \ln x \times \frac{1}{x} - \frac{2}{x} = 0$ 에서

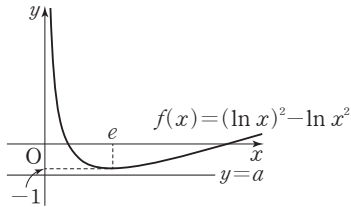
$\ln x = 1, x = e$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	e	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	-1	/

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같고 부등식

$(\ln x)^2 \geq \ln x^2 + a$ 가 항상 성립하려면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=a$ 와 접하거나 위쪽에 놓여야 한다.



따라서 $a \leq -1$ 이어야 하므로 실수 a 의 최댓값은 -1 이다.

답 ③

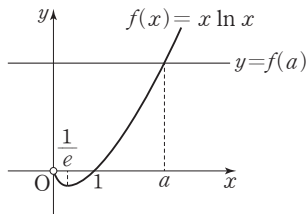
36

$f'(x) = \ln x + 1 = 0$ 에서 $x = \frac{1}{e}$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	$\frac{1}{e}$...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	(0)	\	$-\frac{1}{e}$	/

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$0 < a < \frac{1}{e}$ 또는 $\frac{1}{e} < a < 1$ 이면

함수 $f(x) = x \ln x$ 의 그래프와 직선 $y=f(a)$ 가 서로 다른 2개의 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=f(a)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2, 즉 $g(a)=2$

$a = \frac{1}{e}$ 이면

함수 $f(x) = x \ln x$ 의 그래프와 직선 $y=f(a)$ 가 접하므로 방정식 $f(x)=f(a)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1, 즉 $g(a)=1$

$a \geq 1$ 이면

함수 $f(x) = x \ln x$ 의 그래프와 직선 $y=f(a)$ 가 1개의 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=f(a)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 1, 즉 $g(a)=1$

따라서 함수 $g(a)$ 는 $a = \frac{1}{e}$ 과 $a=1$ 에서 불연속이므로 구하는 모든 실수 k 의 값의 합은 $\frac{1}{e} + 1$ 이다.

답 ①

37

$x = \ln(t+1)$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t+1}$$

$y = t - \ln(t+1)$ 에서

$$\frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{t+1} = \frac{t}{t+1}$$

따라서 점 P의 속도는 $\left(\frac{1}{t+1}, \frac{t}{t+1}\right)$ 이고

점 P의 속력을 $f(t)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{\left(\frac{1}{t+1}\right)^2 + \left(\frac{t}{t+1}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{t^2+1}}{t+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

에서

$$\sqrt{t^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(t+1), t^2+1 = \frac{1}{2}(t+1)^2$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

따라서 $t=1$

답 ②

38

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 - 2at, \frac{dy}{dt} = 2t + b$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 6t - 2a, \frac{d^2y}{dt^2} = 2$$

$t=3$ 일 때

점 P의 속도는 $(27-6a, 6+b)$

점 P의 가속도는 $(18-2a, 2)$

$$27-6a = 18-2a \text{에서 } a = \frac{9}{4}$$

$$6+b=2, b=-4$$

따라서 $ab=-9$

답 ①

39

$$\frac{dx}{dt} = 2, \frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{t^2}$$

점 P의 속력을 $f(t)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{2^2 + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{t^2} - 1\right)^2 + 4} \end{aligned}$$

따라서 속력 $f(t)$ 는 $\frac{1}{t^2}=1$, 즉 $t=1$ 일 때 최솟값 2를 가진다.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2}{t^3}$$

이므로 $t=1$ 일 때 점 P의 가속도의 크기는

$$\sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

답 ②

06

적분법

정답

본문 88~101쪽

01 ④	02 ⑤	03 ③	04 9	05 15
06 ②	07 ②	08 ①	09 ①	10 ③
11 ④	12 ①	13 ④	14 ③	15 ⑤
16 ④	17 ①	18 ③	19 ③	20 ②
21 ⑤	22 ②	23 ⑤	24 ④	25 ④
26 ③	27 ②	28 ②	29 ③	30 ⑤
31 ③	32 ③	33 ⑤	34 ②	35 ②
36 ①	37 24	38 8	39 ②	40 ⑤
41 ①	42 ③			

01

$$xf'(x) - f(x) = x^2 \times 2^x \text{에서}$$

$$\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 2^x$$

$$\left\{ \frac{f(x)}{x} \right\}' = 2^x \text{에서 } \frac{f(x)}{x} = \frac{2^x}{\ln 2} + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

$$\frac{f(1)}{1} = \frac{2}{\ln 2} + C = \frac{4}{\ln 2} \text{에서 } C = \frac{2}{\ln 2}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2}{\ln 2}$$

$$\frac{f(2)}{2} = \frac{2^2}{\ln 2} + \frac{2}{\ln 2} = \frac{6}{\ln 2} \text{에서}$$

$$f(2) = \frac{12}{\ln 2}$$

답 ④

02

$$f(x) = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$= \int (\csc^2 x - \sec^2 x) dx$$

$$= -\cot x - \tan x + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 - 1 + C = 1 \text{에서 } C = 3$$

$$f(x) = -\cot x - \tan x + 3$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \text{일 때, } \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \text{에서}$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{4}, \cot \alpha = \frac{4}{3}$$

$$\text{따라서 } f(\alpha) = -\frac{4}{3} - \frac{3}{4} + 3 = \frac{11}{12}$$

답 ⑤

03

$$f'(x) = (2^x - 2)(2^x - 4) = 0 \text{에서}$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

$$f(x) = \frac{4^x}{\ln 4} - 6 \times \frac{2^x}{\ln 2} + 8x + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

$$f(0) = \frac{1}{\ln 4} - 6 \times \frac{1}{\ln 2} + C = -\frac{11}{2 \ln 2} + C = -\frac{11}{2 \ln 2}$$

$$\text{에서 } C = 0$$

$$f(x) = \frac{4^x}{\ln 4} - 6 \times \frac{2^x}{\ln 2} + 8x$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$$\text{이때 } M = f(1) = \frac{4}{\ln 4} - 6 \times \frac{2}{\ln 2} + 8 \times 1 = -\frac{10}{\ln 2} + 8$$

$$m = f(2) = \frac{4^2}{\ln 4} - 6 \times \frac{2^2}{\ln 2} + 8 \times 2 = -\frac{16}{\ln 2} + 16$$

$$\text{따라서 } M - m = \frac{6}{\ln 2} - 8$$

답 ③

04

$$f(x) = \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx \text{에서}$$

$$\ln x = t \text{로 놓으면 } \frac{1}{x} = \frac{dt}{dx} \text{이므로}$$

$$f(x) = \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$$

$$= \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

$$f(1) = 0 + C = 0 \text{에서 } C = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{3} (\ln x)^3$$

$$\text{따라서 } f(e^3) = \frac{1}{3} \times 3^3 = 9$$

답 9

05

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = 4 \text{에서}$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - 3\} = 0 \text{에서 } f(2) = 3$$

$$\text{또한, } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 4 \text{에서 } f'(2) = 4$$

$$g(x) = \int x f''(x) dx$$

$$= x f'(x) - \int f'(x) dx$$

$$= x f'(x) - f(x) + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

$$g(2) = 2f'(2) - f(2) + C = 8 - 3 + C = 10 \text{에서}$$

$$C = 5$$

$$g(x) = x f'(x) - f(x) + 5$$

$g(3)=3f'(3)-f(3)+5$ 에서
 $3f'(3)=f(3)+g(3)-5=45$
 따라서 $f'(3)=15$

답 15

06

$f'(x)=e^x \cos x$ 이므로

$f(x)=\int e^x \cos x dx$ 에서

$u(x)=e^x, v'(x)=\cos x$ 로 놓으면

$u'(x)=e^x, v(x)=\sin x$

$f(x)=\int e^x \cos x dx$

$$=e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$\int e^x \sin x dx = e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x) dx$$

이므로

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$$f(0) = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times (0+1) + C = \frac{1}{2} \text{에서 } C=0$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) \text{이므로}$$

$$f(\pi) = \frac{1}{2}e^\pi\{0+(-1)\} = -\frac{1}{2}e^\pi$$

답 ②

07

$$f(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \int (x-1)e^x dx \right\}$$

$$= (x-1)e^x$$

$$\text{따라서 } f(0) = (0-1)e^0 = -1$$

답 ②

08

$xf(x) = \int f(x)dx + x^2 \ln x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + xf'(x) = f(x) + 2x \ln x + x$$

$$xf'(x) = 2x \ln x + x$$

$$f'(x) = 2 \ln x + 1$$

$$f(x) = \int (2 \ln x + 1) dx$$

$$= 2 \int \ln x dx + \int 1 dx$$

$$= 2x \ln x - x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$$f(1) = 2 \ln 1 - 1 + C = 0 \text{에서 } C=1$$

$$\text{따라서 } f(x) = 2x \ln x - x + 1 \text{이므로}$$

$$f(e) = 2e - e + 1 = e + 1$$

답 ①

09

$$f(x) = \int \frac{(x-1)(x-2)}{x^3} dx \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x^3}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	1	...	2	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x^3}$$

$$= \frac{x^2-3x+2}{x^3} = \frac{1}{x} - 3x^{-2} + 2x^{-3}$$

$$f(x) = \ln x + 3x^{-1} - x^{-2} + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(1) = 0 + 3 - 1 + C = 2 - \ln 2$ 에서

$$C = -\ln 2$$

따라서 $f(x) = \ln x + 3x^{-1} - x^{-2} - \ln 2$ 이므로 $f(x)$ 의 극솟값은

$$f(2) = \ln 2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{4} - \ln 2 = \frac{5}{4}$$

답 ①

10

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+x \cos^2 x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin^2 x + x \cos^2 x + 1) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2}$$

답 ③

11

$g(x) = f(x) + f(-x)$ 라 할 때,

$$g(-x) = f(-x) + f(x) = g(x) \text{이므로}$$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

$$\int_0^1 \{f(x) + f(-x)\} dx$$

$$= \int_{-1}^0 \{f(x) + f(-x)\} dx$$

$$= \int_{-1}^2 \{f(x) + f(-x)\} dx - \int_0^2 \{f(x) + f(-x)\} dx$$

$$= 12 - 16 = -4$$

$$\int_{-1}^1 \{f(x) + f(-x)\} dx$$

$$= 2 \int_0^1 \{f(x) + f(-x)\} dx$$

$$= 2 \times (-4) = -8$$

답 ④

12

$$\begin{aligned}
& \int_1^2 \frac{4^x}{2^x-1+2^{-x}} dx + \int_1^2 \frac{1}{4^x-2^x+1} dx \\
&= \int_1^2 \frac{8^x}{4^x-2^x+1} dx + \int_1^2 \frac{1}{4^x-2^x+1} dx \\
&= \int_1^2 \frac{8^x+1}{4^x-2^x+1} dx \\
&= \int_1^2 \frac{(2^x+1)(4^x-2^x+1)}{4^x-2^x+1} dx \\
&= \int_1^2 (2^x+1) dx \\
&= \left[\frac{2^x}{\ln 2} + x \right]_1^2 \\
&= \left(\frac{4}{\ln 2} + 2 \right) - \left(\frac{2}{\ln 2} + 1 \right) \\
&= \frac{2}{\ln 2} + 1
\end{aligned}$$

13

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos^2 x dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (1 - \sin^2 x) dx \\
&\sin x = t \text{로 놓으면 } \cos x = \frac{dt}{dx} \text{이고} \\
&x=0 \text{일 때 } t=0, x=\frac{\pi}{2} \text{일 때 } t=1 \text{이므로} \\
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (1 - \sin^2 x) dx \\
&= \int_0^1 (1 - t^2) dt \\
&= \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\
&= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

14

$$\begin{aligned}
& f(x) = x^2 - 2x + 2 \text{라 하면} \\
& f(x) > 0 \text{이고 } f'(x) = 2x - 2 \text{이므로} \\
& \int \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx = \ln(x^2-2x+2) + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)} \\
& \int_0^a \frac{|x-1|}{x^2-2x+2} dx \\
&= \int_0^1 \frac{|x-1|}{x^2-2x+2} dx + \int_1^a \frac{|x-1|}{x^2-2x+2} dx \\
&= \int_0^1 \frac{-(x-1)}{x^2-2x+2} dx + \int_1^a \frac{x-1}{x^2-2x+2} dx \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx + \frac{1}{2} \int_1^a \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx \\
&= -\frac{1}{2} \left[\ln(x^2-2x+2) \right]_0^1 + \frac{1}{2} \left[\ln(x^2-2x+2) \right]_1^a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}(0 - \ln 2) + \frac{1}{2}\{\ln(a^2-2a+2) - 0\} \\
&= \frac{1}{2} \ln\{2(a^2-2a+2)\} \\
&\frac{1}{2} \ln\{2(a^2-2a+2)\} = \ln 10 \text{에서} \\
&\ln\{2(a^2-2a+2)\} = 2 \ln 10 = \ln 100 \\
&a^2-2a+2=50 \\
&a^2-2a-48=0 \\
&(a+6)(a-8)=0 \\
&a > 1 \text{이므로 } a=8
\end{aligned}$$

답 ③

15

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t) \sin t dt = a \text{라 하면} \\
& f(x) = \cos x + a \\
& \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos t + a) \sin t dt = a \\
& \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin t \cos t dt + a \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin t dt = a \\
& \left[\frac{(\sin t)^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + a \left[-\cos t \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = a \\
& \left\{ \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - 0 \right\} + a \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = a \\
& \frac{1}{2}a = \frac{3}{8} \text{에서 } a = \frac{3}{4} \\
& \text{따라서 } f(x) = \cos x + \frac{3}{4} \text{이므로} \\
& f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} + \frac{3}{4} \\
&= 0 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

답 ⑤

16

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 x f(2x) dx = 4 \text{에서 } 2x=t \text{로 놓으면} \\
& 2 = \frac{dt}{dx} \text{이고, } x=-1 \text{일 때 } t=-2, x=1 \text{일 때 } t=2 \text{이므로} \\
& \int_{-2}^2 \frac{1}{4} t f(t) dt = 4 \text{에서 } \int_{-2}^2 t f(t) dt = 16 \\
& \int_{-2}^2 x^2 f'(x) dx = 40 \text{에서 } u(x) = x^2 \text{으로 놓으면 } u'(x) = 2x \text{이므로} \\
& \int_{-2}^2 x^2 f'(x) dx = \left[x^2 f(x) \right]_{-2}^2 - \int_{-2}^2 2x f(x) dx = 40 \\
& 4\{f(2) - f(-2)\} - 32 = 40 \\
& f(2) - f(-2) = 18 \\
& \text{따라서} \\
& \int_{-1}^1 f'(2x) dx = \left[\frac{1}{2} f(2x) \right]_{-1}^1 \\
&= \frac{1}{2} \{f(2) - f(-2)\} \\
&= 9
\end{aligned}$$

답 ④

답 ①

답 ④

17

$f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$f(g(x))=x$ 에서 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(g(x))g'(x)=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(x)=\sec^2 x=\frac{1}{\cos^2 x} \text{이므로}$$

$\textcircled{1}$ 에 의하여

$$\cos^2 g(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=g'(x)$$

$$\int_0^1 x \cos^2 g(x) dx = \int_0^1 x g'(x) dx$$

$$= \left[xg(x) \right]_0^1 - \int_0^1 g(x) dx$$

$$= \{1 \times g(1) - 0 \times g(0)\} - \left(\frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx \right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$$

$$= \left[-\ln(\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\ln \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2$$

답 ①

18

$n \geq 3$ 인 자연수 n 에 대하여

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx$$

$$= \left[\sin^{n-1} x (-\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x \cos x (-\cos x) dx$$

$$= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x (\sin^2 x - 1) dx$$

$$= (\boxed{n-1}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \text{에서}$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} \times I_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

이다.

위의 사실을 이용하면

$$I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} I_1 = \frac{8}{15} I_1$$

$$\text{또한 } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1 \text{이므로}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx = \boxed{\frac{8}{15}}$$

이다.

$$\text{따라서 } f(n) = n-1, g(n) = \frac{n-1}{n}, k = \frac{8}{15} \text{이므로}$$

$$f(4) \times g(5) \times k = 3 \times \frac{4}{5} \times \frac{8}{15} = \frac{32}{25}$$

답 ③

19

$$\int_e^x f(t) dt = x \ln x + a \text{의 양변에 } x=e \text{를 대입하면}$$

$$0 = e + a \text{에서 } a = -e$$

$$\text{즉, } \int_e^x f(t) dt = x \ln x - e \quad (x > 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = \ln x + 1$$

$$\text{따라서 } f(a^2) = f(e^2) = \ln e^2 + 1 = 3$$

답 ③

20

$$f'(x) = e^x \int_0^x (t-1) dt + e^x (x-1) - (x-1)e^x$$

$$= e^x \int_0^x (t-1) dt$$

$$= e^x \left[\frac{t^2}{2} - t \right]_0^x$$

$$= e^x \left(\frac{x^2}{2} - x \right)$$

$$= \frac{e^x}{2} \times x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	\cdots	0	\cdots	2	\cdots
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

따라서 $f(x)$ 의 극솟값은

$$f(2) = e^2 \int_0^2 (t-1) dt - \int_0^2 (t-1)e^t dt$$

$$= e^2 \left[\frac{t^2}{2} - t \right]_0^2 - \left\{ \left[(t-1)e^t \right]_0^2 - \int_0^2 e^t dt \right\}$$

$$= -\{e^2 - (-1)\} + \left[e^t \right]_0^2$$

$$= -2$$

답 ②

21

$$\textcircled{1}. f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt$$

$$= \int_0^x \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt$$

x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} - \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$= \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3} \text{ (참)}$$

$$\text{ㄴ. } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt \text{에서 } \frac{\pi}{2} - t = x \text{로 놓으면}$$

$$t = \frac{\pi}{4} \text{일 때 } x = \frac{\pi}{4}, t = \frac{\pi}{2} \text{일 때 } x = 0$$

$$-1 = \frac{dx}{dt} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt &= \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} (-dx) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt \text{ (참)} \end{aligned}$$

$$\text{ㄷ. } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}} = 0$$

$x = \frac{\pi}{4}$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로

$x = \frac{\pi}{4}$ 에서 극솟값이자 최솟값을 갖는다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx &= \left[\ln(\sin x + \cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln(0+1) \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉒} \end{aligned}$$

이므로 ㉑-㉒을 하면

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$$

함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \text{ (참)} \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

22

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_2^x f(t) dt = f(2) = 2$$

이므로 $f(2) = k \times (2^2 + 2)e^{-2} = 2$ 에서

$$k = \frac{e^2}{3}$$

$$f(x) = \frac{e^2}{3} \times (x^2 + x)e^{-x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^2}{3} \times \{2x + 1 - (x^2 + x)\}e^{-x} \\ &= \frac{e^2}{3} \times (-x^2 + x + 1)e^{-x} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } f'(2) = \frac{e^2}{3} \times (-4 + 2 + 1)e^{-2} = -\frac{1}{3}$$

답 ②

23

$f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{a-h}^{a+2h} f(t) dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+2h) - F(a-h)}{h} \\ &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+2h) - F(a)}{2h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a-h) - F(a)}{-h} \\ &= 2F'(a) + F'(a) \\ &= 2f(a) + f(a) \\ &= 3f(a) = 12 \\ \text{이므로 } f(a) &= 4 \end{aligned}$$

$$f(a) = \log_2 a + \log_2 (10-a) = 4 \text{에서}$$

$$a(10-a) = 2^4$$

$$a^2 - 10a + 16 = 0$$

$$(a-2)(a-8) = 0$$

$$a = 2 \text{ 또는 } a = 8$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 10이다.

답 ⑤

24

$f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^3 - 1} \int_{x-2}^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(x-2)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ x \rightarrow 1 \text{일 때 (분모)} &\rightarrow 0 \text{이고 극한값이 존재하므로} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \{F(x) - F(x-2)\} &= 0 \\ F(1) - F(-1) &= 0 \\ F(t) &= ae^t - be^{-t} + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)} \\ F(1) &= ae - \frac{b}{e} + C, F(-1) = \frac{a}{e} - be + C \\ F(1) - F(-1) &= (a+b)\left(e - \frac{1}{e}\right) = 0 \\ a+b &= 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉑} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(x-2)}{(x-1)(x^2+x+1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2+x+1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(x-2)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2+x+1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1) - F(x-2) + F(-1)}{x-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 + x + 1} \\
&\quad \times \left\{ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x-2) - F(-1)}{(x-2) - (-1)} \right\} \\
&= \frac{1}{3} \times \{f(1) - f(-1)\} \\
&= \frac{1}{3} \{ (ae + be^{-1}) - (ae^{-1} + be) \} \\
&= \frac{1}{3} (a-b) \left(e - \frac{1}{e} \right) \\
&= 4 \left(e - \frac{1}{e} \right)
\end{aligned}$$

에서 $a-b=12$ ㉠

㉠, ㉡를 연립하여 풀면 $a=6$, $b=-6$

따라서 $f(x) = 6e^x - 6e^{-x}$ 이므로

$$f(\ln 2) = 6 \times 2 - 6 \times \frac{1}{2} = 9$$

㉢ ④

25

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cos \frac{k\pi}{2n} &= \int_0^1 x \cos \frac{\pi}{2} x dx \\
&= \left[x \left(\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} x \right) \right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} x \right) dx \\
&= \frac{2}{\pi} - \left[-\frac{4}{\pi^2} \cos \frac{\pi}{2} x \right]_0^1 \\
&= \frac{2}{\pi} - \left(0 + \frac{4}{\pi^2} \right) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}
\end{aligned}$$

㉢ ④

26

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+4} + \frac{3}{n^2+9} + \cdots + \frac{n}{2n^2} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2} \\
&= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}
\end{aligned}$$

㉢ ③

27

$$y' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \text{이므로}$$

점 $P_k \left(x_k, \frac{1}{\sqrt{x_k}} \right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2} \times x_k^{-\frac{3}{2}} (x - x_k) + x_k^{-\frac{1}{2}}$$

$y=0$ 을 대입하면

$$\frac{1}{2} \times x_k^{-\frac{3}{2}} (x - x_k) = x_k^{-\frac{1}{2}} \text{에서 } x = 3x_k$$

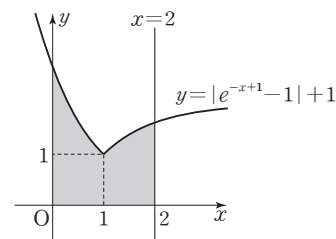
$$Q_k(3x_k, 0)$$

$$\begin{aligned}
S_k &= \frac{1}{2} \times 3x_k \times \frac{1}{\sqrt{x_k}} \\
&= \frac{3}{2} \times x_k^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \times \left(1 + \frac{3k}{n} \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{3}{2} \times \left(1 + \frac{3k}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{3k}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx \\
&= \frac{1}{2} \times \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 \\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

㉢ ②

28



$0 < x < 1$ 일 때 $e^{-x+1} > 1$ 이고, $x > 1$ 일 때 $e^{-x+1} < 1$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}
&\int_0^2 (|e^{-x+1} - 1| + 1) dx \\
&= \int_0^1 (e^{-x+1} - 1 + 1) dx + \int_1^2 (-e^{-x+1} + 1 + 1) dx \\
&= \int_0^1 e^{-x+1} dx + \int_1^2 (-e^{-x+1} + 2) dx \\
&= \left[-e^{-x+1} \right]_0^1 + \left[e^{-x+1} + 2x \right]_1^2 \\
&= -1 + e + (e^{-1} + 4) - (1 + 2) \\
&= e + \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

㉢ ②

29

$$f'(x) = xe^x$$

$f(g(x)) = x$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(g(x))g'(x) = 1$$

$$f'(g(x))g'(x) = g(x)e^{g(x)}g'(x) = 1$$

$$\text{에서 } \frac{1}{g(x)e^{g(x)}} = g'(x)$$

$$f(1) = 0, f(2) = e^2 \text{이므로}$$

$$g(0)=1, g(e^2)=2$$

$$\int_0^{e^2} \frac{x}{g(x)e^{g(x)}} dx$$

$$= \int_0^{e^2} xg'(x) dx$$

$$= \left[xg(x) \right]_0^{e^2} - \int_0^{e^2} g(x) dx$$

$$= \{e^2 \times g(e^2) - 0 \times g(0)\} - \left\{ 2e^2 - \int_1^2 f(x) dx \right\}$$

$$= \int_1^2 f(x) dx$$

$$= \int_1^2 (x-1)e^x dx$$

$$= \left[(x-1)e^x \right]_1^2 - \int_1^2 e^x dx$$

$$= (e^2 - 0) - \left[e^x \right]_1^2 = e$$

30

$$\text{ㄱ. } S_1 + S_2 = \int_0^\pi \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^\pi$$

$$= -\cos \pi - (-\cos 0)$$

$$= 2 \text{ (참)}$$

$$\text{ㄴ. } \frac{\frac{\pi}{3} + \pi}{2} = \frac{2}{3}\pi \text{ 이고}$$

$$\int_{\frac{2}{3}\pi}^\pi \sin x dx = \left[-\cos x \right]_{\frac{2}{3}\pi}^\pi$$

$$= -\cos \pi - \left(-\cos \frac{2}{3}\pi \right)$$

$$= -(-1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \text{ 이고 ㄱ에서 } S_1 + S_2 = 2 \text{ 이므로}$$

$$S_1 = S_2 = 1 \text{ (참)}$$

$$\text{ㄷ. ㄱ에서 } S_1 + S_2 = 2 \text{ 이고}$$

$$0 < \alpha < \pi \text{ 에서 } S_1 = 2S_2 \text{ 이면 } S_2 = \frac{2}{3} \text{ 이므로}$$

$$\int_{\frac{\alpha+\pi}{2}}^\pi \sin x dx = \frac{1}{3}$$

$$\left[-\cos x \right]_{\frac{\alpha+\pi}{2}}^\pi = -\cos \pi - \left\{ -\cos \left(\frac{\alpha+\pi}{2} \right) \right\}$$

$$= 1 - \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{에서 } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$$

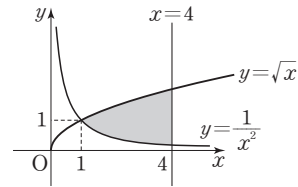
$$0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ 이므로}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

31

$$\sqrt{x} = \frac{1}{x^2} \text{ 에서 } x=1 \text{ 이므로 두 곡선의 교점의 좌표는 } (1, 1)$$



따라서 구하는 부분의 넓이는

$$\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{x} \right]_1^4$$

$$= \left(\frac{16}{3} + \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{2}{3} + 1 \right)$$

$$= \frac{47}{12}$$

답 ③

32

A의 넓이와 B의 넓이가 같으므로

$$\int_0^1 \{ \ln(x+1) - m(x-1) \} dx$$

$$= \left[(x+1) \ln(x+1) - x - \frac{m}{2} x^2 + mx \right]_0^1$$

$$= \left(2 \ln 2 - 1 - \frac{m}{2} + m \right) - 0 = 0$$

$$\frac{m}{2} = 1 - 2 \ln 2 \text{ 에서}$$

$$m = 2 - 4 \ln 2$$

답 ③

33

$$g(1) = \frac{\pi}{4} \text{ 이므로}$$

$$\int_0^1 g(x) dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \left[\tan x - x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 g(x) dx = \frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$S_1 = S_2 \text{ 이므로}$$

$$\int_0^1 \{ g(x) - k \} dx = 0 \text{ 에서}$$

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 k dx = \left[kx \right]_0^1 = k$$

$$\text{따라서 } k = \frac{\pi}{2} - 1$$

답 ⑤

34

물의 높이가 $t(\text{cm})$ 일 때의 수면의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$x^2 + x = \int_0^x S(t) dt \text{ 이므로}$$

$$\text{양변을 } x \text{ 에 대하여 미분하면 } 2x + 1 = S(x)$$

$$S(a) = 2 \times S(1) \text{ 이므로 } 2a + 1 = 2 \times 3 = 6$$

$$\text{따라서 } a = \frac{5}{2}$$

답 ②

35

x 축 위의 점 $(t, 0)$ ($0 \leq t \leq 2$)를 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\sqrt{\ln(t+2)}$ 인 정삼각형이므로 단면의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} \{\sqrt{\ln(t+2)}\}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \ln(t+2)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^2 \ln(t+2) dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[(t+2) \ln(t+2) \right]_0^2 - \int_0^2 1 dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[(t+2) \ln(t+2) - t \right]_0^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \{ (4 \ln 4 - 2) - (2 \ln 2 - 0) \} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (6 \ln 2 - 2) = \frac{\sqrt{3}}{2} (3 \ln 2 - 1) \end{aligned}$$

답 ②

36

x 축 위의 점 $(t, 0)$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$)를 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면은 한 변의 길이가 $\cos t + \sin t$ 인 정사각형이므로 단면의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = (\cos t + \sin t)^2 = 1 + 2 \sin t \cos t$$

따라서 입체도형의 부피 V 는

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \sin t \cos t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin t \cos t dt \end{aligned}$$

$$\sin t = s \text{라 하면 } \cos t = \frac{ds}{dt}$$

$$t=0 \text{일 때 } s=0 \text{이고, } t=\frac{\pi}{2} \text{일 때 } s=1 \text{이므로}$$

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt + \int_0^1 2s ds = \left[t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[s^2 \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} + 1$$

답 ①

37

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = t^2 - 1$$

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = 4t^2 + (t^2 - 1)^2$$

$$= 4t^2 + t^4 - 2t^2 + 1$$

$$= t^4 + 2t^2 + 1 = (t^2 + 1)^2$$

$t=1$ 에서 $t=4$ 까지 점 P 가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt &= \int_1^4 (t^2 + 1) dt \\ &= \left[\frac{1}{3} t^3 + t \right]_1^4 \\ &= \left(\frac{64}{3} + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} + 1 \right) = 24 \end{aligned}$$

답 24

38

$$\frac{dx}{dt} = \cos t - \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t + \sin t$$

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = (\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2 = 2$$

$t=0$ 에서 $t=2\pi$ 까지 점 P 가 움직인 거리는

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = \left[\sqrt{2} t \right]_0^{2\pi} = 2\sqrt{2}\pi$$

$$\text{따라서 } \frac{s^2}{\pi^2} = \frac{(2\sqrt{2}\pi)^2}{\pi^2} = 8$$

답 8

39

$$\frac{dx}{dt} = 2e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 2e^{2t} \sin t + e^{2t} \cos t$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 &= (2e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t)^2 + (2e^{2t} \sin t + e^{2t} \cos t)^2 \\ &= 5(e^{2t})^2 \end{aligned}$$

$t=0$ 에서 $t=\ln 5$ 까지 점 P 가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 5} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} dt &= \int_0^{\ln 5} \sqrt{5} e^{2t} dt \\ &= \left[\sqrt{5} \times \frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^{\ln 5} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} (25 - 1) = 12\sqrt{5} \end{aligned}$$

$t=\ln 5$ 에서 $t=\ln a$ 까지 점 P 가 움직인 거리는

$$\int_{\ln 5}^{\ln a} \sqrt{5} e^{2t} dt = \left[\sqrt{5} \times \frac{1}{2} e^{2t} \right]_{\ln 5}^{\ln a} = \frac{\sqrt{5}}{2} (a^2 - 5^2)$$

$$a^2 - 5^2 = 24 \text{에서 } a^2 = 49$$

$$a > 5 \text{이므로 } a = 7$$

답 ②

40

$f(x) = \ln(1-x^2)$ 이라 하면

$$f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{1-x^2} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2} \right)^2} \\ &= \frac{1+x^2}{1-x^2} = -1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(-1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) dx \\ &= \left[-x + \ln(1+x) - \ln(1-x) \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \ln \frac{3}{2} - \ln \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{3}{2} \right) \\ &= 2 \ln 3 - 1 \end{aligned}$$

답 ⑤

41

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x \text{ 라 하면}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x} \text{ 이므로}$$

$$1 + \{f'(x)\}^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}\right)^2 \\ = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}\right)^2$$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\int_1^e \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx = \int_1^e \sqrt{\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}\right)^2} dx \\ = \int_1^e \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}\right) dx \\ = \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\ln x\right]_1^e \\ = \left(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} \\ = \frac{e^2 + 1}{4}$$

42

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x} \text{ 이라 하면 } f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2}$$

$$\sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x^2}\right)^2} \\ = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x^2}$$

$x=1$ 에서 $x=t$ 까지 곡선 $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$ 의 길이 $l(t)$ 는

$$l(t) = \int_1^t \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx \\ = \int_1^t \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x^2}\right) dx$$

양변을 t 에 대하여 미분하면

$$l'(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2t^2}$$

$$l'(k) = \frac{13}{12} \text{ 에서 } \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2k^2} = \frac{13}{12}$$

$$k^2 + \frac{1}{k^2} = \frac{13}{6}, 6k^4 - 13k^2 + 6 = 0, (2k^2 - 3)(3k^2 - 2) = 0$$

$$k > 1 \text{ 이므로 } k^2 > 1 \text{ 에서 } k^2 = \frac{3}{2}$$

답 ①

확률과 통계



경우의 수

정답

본문 103~115쪽

01 ②	02 ①	03 ③	04 240	05 ④
06 ③	07 ⑤	08 ③	09 10	10 ④
11 ①	12 ②	13 630	14 ③	15 ④
16 ⑤	17 312	18 ①	19 ①	20 13
21 80	22 ④	23 ②	24 ①	25 ②
26 ④	27 30	28 ①	29 476	30 ⑤
31 ③	32 ⑤	33 ⑤	34 42	35 ④
36 ⑤	37 ①	38 33	39 15	40 16
41 ③	42 ①	43 ⑤	44 100	45 ⑤

01

A, B를 하나로 보고 붙어 있는 4군데의 의자 중 한 곳에 앉힌 후 나머지 6명을 자유롭게 앉히면 된다.

이때 A, B를 붙어 있는 2개의 의자에 나란히 앉히는 경우의 수는 2이므로 구하는 경우의 수는 $2 \times 6!$ 이다.

답 ②

02

2학년 2명이 마주 보고 앉는 경우의 수는 2학년 2명 중 1명의 자리를 정하면 나머지 1명은 마주 보는 자리로 결정하면 되므로 5명이 원형 탁자에 둘러앉는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$(5-1)! = 4! = 24$$

답 ①

03

승지와 하희 사이에 적어도 2명 이상이 앉는 방법은 승지와 하희를 앉힌 후 승지의 오른쪽과 왼쪽에 각각 2명과 4명, 3명과 3명, 4명과 2명을 배치하는 방법이 있다.

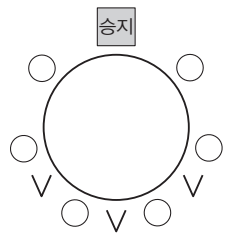
즉, 승지를 앉힌 후 하희를 제외한 6명을 앉힌 후 각각의 경우에 하희를 승지에서부터 오른쪽으로 2개의 자리 또는 3개의 자리 또는 4개의 자리를 건너뛰고 앉히는 경우의 수와 같으므로

$$6! \times 3$$

답 ③

다른 풀이

구하는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 승지와 하희가 이웃하여 앉는 경우와 승지와 하희 사이에 1명이 앉는 경우를 빼면 된다.



답 ③

(i) 전체 경우의 수는 $(8-1)! = 7!$

(ii) 승지와 하희가 이웃하여 앉는 경우의 수는

승지와 하희를 묶는 방법은 2가지이고 이 묶음을 1명으로 보고 7명을 원형으로 앉히면 되므로

$$(7-1)! \times 2 = 6! \times 2$$

(iii) 승지와 하희 사이에 1명이 앉는 경우의 수는

승지와 하희 사이 앉는 사람을 선택하는 방법이 6가지이고 앞에서 선택한 1명과 승지, 하희를 묶는 방법이 2가지이고 이 묶음을 1명으로 보고 6명을 원형으로 앉히면 되므로

$$(6-1)! \times 6 \times 2 = 5! \times 2$$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여

$$7! - (6! \times 2 + 6! \times 2) = 6! \times 3$$

04

부채꼴 세 곳을 칠할 색 3가지를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

이 각각에 대하여 3가지 색으로 부채꼴 세 곳을 칠하는 경우의 수는

$$(3-1)! = 2$$

이 각각에 대하여 남은 3가지 색으로 남은 원 세 곳을 칠하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$20 \times 2 \times 6 = 240$$

답 240

다른 풀이

6개의 영역에 서로 다른 6가지 색을 모두 사용하여 칠하는 경우의 수는

$$6!$$

회전하였을 때 같은 것이 3가지씩 있으므로 경우의 수는 $\frac{6!}{3} = 240$

05

3명은 각각 4편의 영화에서 중복을 허락하여 한 편을 선택하면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

답 ④

06

어떤 다섯 자리의 자연수의 각 자리 숫자의 배열을 거꾸로 나열하여 처음과 같은 자연수가 되려면 만의 자리 숫자와 일의 자리 숫자가 같고, 천의 자리 숫자와 십의 자리 숫자가 같으면 된다.

그러므로 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 세 개의 숫자를 택해 일렬로 나열하여 세 자리의 자연수를 만드는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$$

답 ③

07

학생 A에게 과자와 초콜릿을 각각 1개씩 주는 경우의 수는

$$8 \times 4 = 32$$

남은 서로 다른 종류의 과자 7개를 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 7개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_7$$

이 각각에 대하여 남은 서로 다른 종류의 초콜릿 3개를 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_3$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$32 \times {}_2\Pi_7 \times {}_2\Pi_3 = 2^5 \times 2^7 \times 2^3 = 2^{15}$$

답 ⑤

08

중복을 허락하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

$$4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$$

각 자리의 숫자가 모두 다른 네 자리의 자연수의 개수는

$$4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$$

따라서 각 자리에 있는 숫자 중 적어도 두 숫자가 같은 네 자리의 자연수의 개수는

$$500 - 96 = 404$$

답 ③

09

카드를 일렬로 1장, 2장, 3장, ..., n 장 배열할 때, 두 종류의 카드를 사용하여 만들 수 있는 기호의 개수는 각각

$${}_2\Pi_1, {}_2\Pi_2, \dots, {}_2\Pi_n$$

이므로 $f(n) = {}_2\Pi_1 + {}_2\Pi_2 + \dots + {}_2\Pi_n$ 이 성립한다.

$f(n) \geq 2000$ 이므로

$${}_2\Pi_1 + {}_2\Pi_2 + \dots + {}_2\Pi_n \geq 2000$$

$$2^1 + 2^2 + \dots + 2^n \geq 2000$$

$$\frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} \geq 2000, 2^n \geq 1001$$

$$\text{즉, } 2^n \geq 2^{10} > 1001, n \geq 10$$

따라서 $f(n) \geq 2000$ 을 만족시키는 n 의 최솟값은 10이다.

답 10

10

$f(1)=1$ 이면 $f(f(1))=f(1)=1$ 이 되어 조건 (가) $f(f(1))=2$ 를 만족시키지 않으므로 $f(1) \neq 1$ 이다.

따라서 $f(1)=2$ 인 경우와 $f(1)=3$ 인 경우로 나누면 다음과 같다.

(i) $f(1)=2$ 이면

조건 (가)에 의하여

$$f(f(1))=f(2)=2$$

조건 (나)에 의하여 $f(3), f(4), f(5)$ 의 값은 모두 1, 2 중 하나이거나 2, 3 중 하나이어야 한다.

두 가지 경우 모두 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복순열의 수이므로

$$2 \times {}_2\Pi_3 = 2 \times 2^3 = 16$$

그런데 $f(3)=f(4)=f(5)=2$ 인 경우가 2번 중복되므로 이 경우 함수 f 의 개수는

$$16-1=15$$

(ii) $f(1)=3$ 이면

조건 (가)에 의하여

$$f(f(1))=f(3)=2$$

이고 조건 (나)에 의하여 함수 f 의 치역은 $\{2, 3\}$ 이므로

$f(2), f(4), f(5)$ 의 값은 모두 2, 3 중 하나이어야 한다.

이때 함수 f 의 개수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복순열의 수이므로

$${}_2\Pi_3=2^3=8$$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$15+8=23$$

답 ④

11

홀수 1, 3, 5는 1, 3, 5의 순으로 나열되어야 하므로

1, 3, 5는 같은 문자 A로 두고, A, A, A, 2, 4, 6을 일렬로 나열한 후 문자 A자리에 앞에서부터 1, 3, 5를 차례로 바꾸어 넣으면 홀수끼리는 크기가 작은 수가 앞에 오게 되므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!}=6 \times 5 \times 4=120$$

답 ①

12

c 와 d 를 하나의 문자 A로 생각하면 c, d 를 서로 이웃하게 나열하는 방법은 2가지이고 여섯 개의 문자 a, a, a, b, b, A 를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{6!}{3!2!}=60$ 이므로 c 와 d 가 서로 이웃하도록 나열하는 경우의 수는

$$2 \times 60=120$$

$$\vee \square \vee \square \vee \square \vee \square \vee \square \vee$$

이 각각에 대하여 문자 e 를 d 와 서로 이웃하지 않도록 나열하려면 \vee 표시한 7곳 중 d 가 놓인 곳의 옆 \vee 표시를 제외한 6곳 중 하나에 e 를 놓아야 하므로 이 경우의 수는 6

따라서 구하는 경우의 수는

$$120 \times 6=720$$

답 ②

13

구하는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 양쪽 끝에 있는 문자가 서로 같은 경우의 수를 빼면 되므로 다음과 같이 경우를 나누면 된다.

(i) 전체 경우의 수는

8개의 문자 a, a, a, a, b, c, d, d 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{4!2!}=\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{2}=840$$

(ii) 양쪽 끝에 모두 a 가 오는 경우

양쪽 끝에 a 를 놓고 나머지 6개의 문자 a, a, b, c, d, d 를 일렬로 나열하면 되므로

$$\frac{6!}{2!2!}=\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{2}=180$$

(iii) 양쪽 끝에 모두 d 가 오는 경우

양쪽 끝에 d 를 놓고 나머지 6개의 문자 a, a, a, a, b, c 를 일렬로 나열하면 되므로

$$\frac{6!}{4!}=6 \times 5=30$$

따라서 (i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$840-180-30=630$$

답 630

14

주사위를 4번 던져 나온 눈의 수를 각각 k_1, k_2, k_3, k_4 (k_1, k_2, k_3, k_4

는 1부터 6까지의 자연수)라 하면 점 P는 $\frac{\pi}{k_1}, \frac{\pi}{k_2}, \frac{\pi}{k_3}, \frac{\pi}{k_4}$ 만큼씩 4

번 시계 반대 방향으로 회전하게 된다. $P_4=P_0$ 이 되기 위해서는

$$\frac{\pi}{k_1}+\frac{\pi}{k_2}+\frac{\pi}{k_3}+\frac{\pi}{k_4}=2\pi \text{ 또는 } \frac{\pi}{k_1}+\frac{\pi}{k_2}+\frac{\pi}{k_3}+\frac{\pi}{k_4}=4\pi$$

이어야 하므로 k_1, k_2, k_3, k_4 는 다음과 같은 경우로 나누면 된다.

$$(i) \frac{\pi}{k_1}+\frac{\pi}{k_2}+\frac{\pi}{k_3}+\frac{\pi}{k_4}=2\pi \text{ 일 때,}$$

가능한 순서쌍 (k_1, k_2, k_3, k_4)는

$$(2, 2, 2, 2), (1, 3, 3, 3), (1, 2, 4, 4), (1, 2, 3, 6)$$

이므로 이 경우의 수는

$$\frac{4!}{4!}+\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!}+4!=1+4+12+24=41$$

$$(ii) \frac{\pi}{k_1}+\frac{\pi}{k_2}+\frac{\pi}{k_3}+\frac{\pi}{k_4}=4\pi \text{ 일 때,}$$

가능한 순서쌍 (k_1, k_2, k_3, k_4)는

$$(1, 1, 1, 1)$$

이므로 이 경우의 수는

$$\frac{4!}{4!}=1$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$41+1=42$$

답 ③

15

$$2+2+2+2+2+2=12$$

$$2+2+2+2+4=12$$

$$2+2+4+4=12$$

$$2+2+8=12$$

$$4+4+4=12$$

$$4+8=12$$

이므로 각 자리 수의 합이 12인 자연수는 다음과 같은 경우가 있다.

(i) 각 자리 수가 모두 2이거나 4인 경우

구하는 자연수는 222222, 444이므로 2

(ii) 각 자리 수가 2, 2, 2, 2, 4인 경우

$$\text{구하는 자연수의 개수는 } \frac{5!}{4!}=5$$

(iii) 각 자리 수가 2, 2, 4, 4인 경우

$$\text{구하는 자연수의 개수는 } \frac{4!}{2!2!}=6$$

(iv) 각 자리 수가 2, 2, 8인 경우

$$\text{구하는 자연수의 개수는 } \frac{3!}{2!}=3$$

(v) 각 자리 수가 4, 8인 경우

구하는 자연수의 개수는 $2! = 2$

따라서 (i)~(v)에서 구하는 자연수의 개수는

$$2 + 5 + 6 + 3 + 2 = 18$$

답 ④

16

조건 (가)에서 6개의 숫자 중 짝수와 홀수가 각각 3개이므로 택한 5개의 숫자 중 짝수가 2개인 경우와 홀수가 2개인 경우가 있다.

(i) 짝수가 2개인 경우

2, 4, 6 중 2개의 짝수를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2 = 3$

홀수 자리를 정해 놓으면 조건 (나)에 의하여 각각의 자리에 들어갈 숫자는 유일하게 결정되므로 3개의 홀수를 똑같은 문자 a , 2개의 짝수를 b , c 라 하면

b , c 중 하나를 선택해 마지막 자리에 놓고 남은 하나를 a , a , a 와

함께 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{4!}{3!} \times 2 = 8$

그러므로 짝수가 2개일 때 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$3 \times 8 = 24$$

(ii) 홀수가 2개인 경우

1, 3, 5 중 2개의 홀수를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2 = 3$

홀수 자리를 정해 놓으면 조건 (나)에 의하여 각각의 자리에 들어갈 숫자는 유일하게 결정되므로 2개의 홀수를 똑같은 문자 a 라 하면 2, 4, 6 중 2개의 짝수와 a , a 를 일렬로 나열하고 마지막 자리에

남는 짝수를 놓으면 되므로 이 경우의 수는 $\frac{4!}{2!} \times 3 = 36$

그러므로 홀수가 2개일 때 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$3 \times 36 = 108$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 + 108 = 132$$

답 ⑤

17

(i) 올라가는 경우의 수

1단을 x 회, 2단을 y 회 이용하여 6단의 계단을 모두 올라갔다면 방정식 $x + 2y = 6$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x , y 의 순서쌍

(x, y) 는

$(6, 0)$, $(4, 1)$, $(2, 2)$, $(0, 3)$

이고 각각의 경우에 계단을 오르는 경우의 수는

$$\frac{6!}{6!} + \frac{5!}{4!1!} + \frac{4!}{2!2!} + \frac{3!}{3!}$$

이므로 계단을 올라가는 경우의 수는

$$1 + 5 + 6 + 1 = 13$$

(ii) 내려오는 경우의 수

1단을 x 회, 2단을 y 회, 3단을 z 회 이용하여 6단의 계단을 모두 내려왔다면 방정식 $x + 2y + 3z = 6$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x , y , z 의 순서쌍 (x, y, z) 는

$(6, 0, 0)$, $(4, 1, 0)$, $(2, 2, 0)$, $(0, 3, 0)$,

$(3, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 0, 2)$

이고 각각의 경우에 계단을 내려오는 경우의 수는

$$\frac{6!}{6!} + \frac{5!}{4!1!} + \frac{4!}{2!2!} + \frac{3!}{3!} +$$

$$\frac{4!}{3!1!} + \frac{3!}{1!1!1!} + \frac{2!}{2!}$$

이므로 계단을 내려오는 경우의 수는

$$1 + 5 + 6 + 1 + 4 + 6 + 1 = 24$$

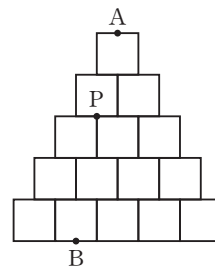
따라서 (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$13 \times 24 = 312$$

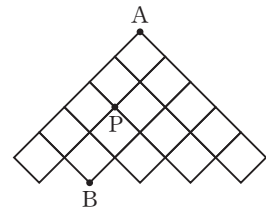
답 312

18

문제에 주어진 그림을 다시 나타내면 [그림 1]과 같고 [그림 1]을 다시 나타내면 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

따라서 $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 최단거리로 가는 경우의 수는

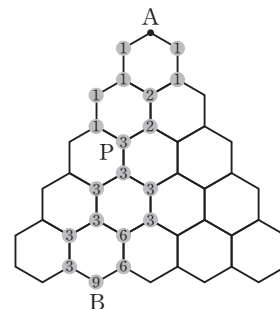
$$\frac{3!}{2!1!} \times \frac{3!}{2!1!} = 3 \times 3 = 9$$

답 ①

다른 풀이

주어진 도로망에서 A지점에서 P지점을 거쳐 B지점까지 갈 때 각 지점에 최단거리로 가는 경우의 수는 위쪽에 이웃한 두 지점의 최단거리로 가는 경우의 수의 합이거나 또는 바로 위쪽의 지점의 최단거리로 가는 경우의 수와 같다.

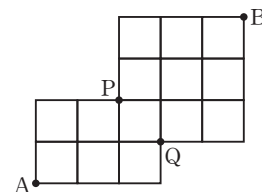
이를 이용하여 각 지점에 최단거리로 가는 경우의 수를 나타내면 다음과 같다.



따라서 $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 최단거리로 가는 경우의 수는 9이다.

19

문제에서 주어진 그림을 다시 나타내면 그림과 같다.



이때 A지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 경로는 다음과 같이 두 가지가 있다.

(i) $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 최단거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!2!} \times \frac{5!}{3!2!} = 6 \times 10 = 60$$

(ii) $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 최단거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!1!} \times \frac{5!}{3!2!} = 4 \times 10 = 40$$

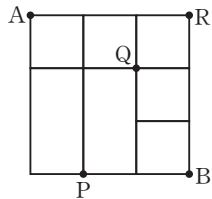
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$60 + 40 = 100$$

답 ①

20

주어진 도로망을 다음 그림과 같이 나타낼 수 있고 구하는 최단거리로 가는 경우의 수는 다음 그림에서 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수와 같다.



(i) $A \rightarrow P \rightarrow B$ 까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times 1 = 3$$

(ii) $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times \frac{3!}{2!} = 9$$

(iii) $A \rightarrow R \rightarrow B$ 까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$$1 \times 1 = 1$$

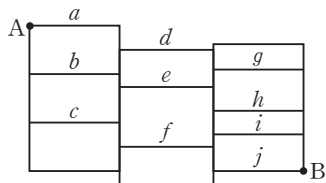
(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$3 + 9 + 1 = 13$$

답 13

다른 풀이

주어진 도로망에서 최단거리가 되기 위해서는 가로 방향 도로를 움직일 때는 항상 오른쪽으로 움직여야 하므로 그림과 같이 표시된 가로 방향의 도로 중에서 택하여 움직이는 경우로 나누면 된다.



(i) a 를 지나는 경우

$a \rightarrow d$ 를 이용하여 B로 가는 경우는 마지막 g, h, i, j 중에 하나를 택하여 이동하는 4가지

$a \rightarrow e$ 를 이용하여 B로 가는 경우는 마지막 h, i, j 중에 하나를 택하여 이동하는 3가지

$a \rightarrow f$ 를 이용하여 B로 가는 경우는 j 를 거쳐 이동하는 1가지
그러므로 점 A를 출발하여 a 를 지나 점 B로 가는 경우의 수는

$$4 + 3 + 1 = 8$$

(ii) b 를 지나는 경우

$b \rightarrow e$ 를 이용하여 B로 가는 경우는 마지막 h, i, j 중에 하나를 택하여 이동하는 3가지

$b \rightarrow f$ 를 이용하여 B로 가는 경우는 j 를 거쳐 이동하는 1가지
그러므로 점 A를 출발하여 b 를 지나 점 B로 가는 경우의 수는

$$3 + 1 = 4$$

(iii) c 를 지나는 경우

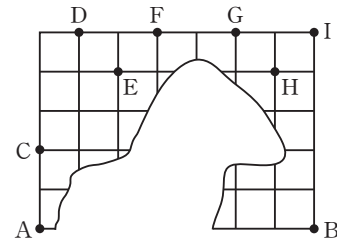
$c \rightarrow f \rightarrow j$ 를 이동하는 1가지

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$8 + 4 + 1 = 13$$

21

주어진 도로망에 C, D, E, F, G, H, I지점을 정하여 다시 나타내면 그림과 같다.



A지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 A지점에서 출발하여 G지점까지 최단거리로 가는 경우의 수에 G지점에서 출발하여 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수를 곱한 것과 같다.

(i) $A \rightarrow G$ 로 가는 경우

A지점에서 출발하여 D지점을 거쳐 G지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow G$ 로 가는 경우이므로

$$1 \times \frac{4!}{3!} \times 1 \times 1 = 4$$

A지점에서 출발하여 E지점을 거쳐 G지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G$ 로 가는 경우이므로

$$1 \times \frac{4!}{2!2!} \times 2! \times 1 = 12$$

그러므로 A지점을 출발하여 G지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$$4 + 12 = 16$$

(ii) $G \rightarrow B$ 로 가는 경우

G지점에서 출발하여 I지점을 거쳐 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 $G \rightarrow I \rightarrow B$ 로 가는 경우이므로

$$1 \times 1 = 1$$

G지점에서 출발하여 H지점을 거쳐 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 $G \rightarrow H \rightarrow B$ 로 가는 경우이므로

$$2 \times 2 = 4$$

그러므로 G지점을 출발하여 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는

$$1 + 4 = 5$$

따라서 (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$16 \times 5 = 80$$

답 80

22

3명의 학생 모두 적어도 한 자루의 연필과 적어도 한 권의 공책을 받도록 나누어 주어야 하므로 구하는 경우의 수는 연필 7자루와 공책 3권을 3명의 학생에게 중복을 허락하여 나누어 주는 경우의 수와 같다.

즉, 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 7개를 택하고 동시에 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$\begin{aligned} {}_3H_7 \times {}_3H_3 &= {}_{3+7-1}C_7 \times {}_{3+3-1}C_3 = {}_9C_7 \times {}_5C_3 \\ &= {}_9C_2 \times {}_5C_2 = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 360 \end{aligned}$$

답 ④

다른 풀이

(i) 3명의 학생이 받는 연필의 개수를 각각 a, b, c 라 하자.

모든 학생이 적어도 한 자루의 연필을 받도록 나누어 주는 경우의 수는 방정식 $a+b+c=10$ (a, b, c 는 자연수)를 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같다.

이때 $a=a'+1, b=b'+1, c=c'+1$ (a', b', c' 은 음이 아닌 정수)라 하면 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 방정식

$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)=10$, 즉 $a'+b'+c'=7$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c' 의 모든 순서쌍 (a', b', c')의 개수와 같다.

즉, 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_7 = {}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36$$

(ii) 3명의 학생이 받는 공책의 개수를 각각 d, e, f 라 하자.

모든 학생이 적어도 한 권의 공책을 받도록 나누어 주는 경우의 수는 방정식 $d+e+f=6$ (d, e, f 는 자연수)를 만족시키는 모든 순서쌍 (d, e, f)의 개수와 같다.

이때 $d=d'+1, e=e'+1, f=f'+1$ (d', e', f' 은 음이 아닌 정수)라 하면 모든 순서쌍 (d, e, f)의 개수는 방정식

$(d'+1)+(e'+1)+(f'+1)=6$, 즉 $d'+e'+f'=3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 d', e', f' 의 모든 순서쌍 (d', e', f')의 개수와 같다.

즉, 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

(i), (ii)에 의하여 동시에 일어나는 사건이므로 구하는 경우의 수는

$$36 \times 10 = 360$$

23

세 명의 회장 후보를 A, B, C라 할 때, 각각의 회원은 A, B, C 중 서로 다른 2명에게 무기명 투표하므로 이 중 한 명은 표를 받지 못한다.

따라서 구하는 경우의 수는 12명의 동아리 회원이 각각 세 명의 후보 중 투표하지 않을 1명을 택하는 경우의 수와 같다.

즉, 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 12개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_3H_{12} = {}_{3+12-1}C_{12} = {}_{14}C_{12} = {}_{14}C_2 = \frac{14 \times 13}{2 \times 1} = 91$$

답 ②

24

2, 3, 5, 7이 모두 소수이므로 중복을 허락하여 3개를 택해 만들어진 수는 모두 서로 다른 자연수가 된다.

따라서 만들어지는 자연수의 개수는

$${}_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

이들 20개의 자연수를 모두 곱할 때, 곱해지는 소수의 개수는

$3 \times 20 = 60$ 이므로 네 개의 소수 2, 3, 5, 7은 각각 15개씩 곱해지게 된다.

따라서 $2^{15} \times 3^{15} \times 5^{15} \times 7^{15} = (2 \times 3 \times 5 \times 7)^{15} = 210^{15}$ 이므로

$$n = 15$$

답 ①

25

$(a+b+c+d)^8$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 네 문자 a, b, c, d 에서 중복을 허락하여 8개를 택하는 중복조합의 수이므로

$${}_4H_8 = {}_{4+8-1}C_8 = {}_{11}C_8 = {}_{11}C_3 = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$$

이때 한 개의 문자만 있는 항은 a^8, b^8, c^8, d^8 의 4개이므로 구하는 항의 개수는

$$165 - 4 = 161$$

답 ②

다른 풀이

$(a+b+c+d)^8$ 의 전개식에서 각 항을 $a^x b^y c^z d^w$ 이라 하면 서로 다른 항의 개수는 방정식 $x+y+z+w=8$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w 의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수와 같다. 즉, 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_8 = {}_{4+8-1}C_8 = {}_{11}C_8 = {}_{11}C_3 = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$$

이때 한 개의 문자만 있는 항은 a^8, b^8, c^8, d^8 의 4개이므로 구하는 항의 개수는 $165 - 4 = 161$

26

$a+3 \leq b+2 \leq c+1 \leq d$ 에서

$a'=a+3, b'=b+2, c'=c+1$ 이라 하면

$4 \leq a' \leq b' \leq c' \leq d \leq 12$ 이다.

4부터 12까지의 자연수 중에서 중복을 허락하여 네 수 a', b', c', d 를 택하면 네 수 a, b, c, d 는 주어진 조건을 만족시킨다.

따라서 구하는 경우의 수는

$${}_9H_4 = {}_{9+4-1}C_4 = {}_{12}C_4 = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$$

답 ④

27

조건 (가), (나)에 의하여 $4 \leq f(1) \leq f(2) \leq f(3) = 5$ 를 만족시켜야 한다.

즉, 4, 5 중 중복을 허락하여 2개를 택한 후 $f(1) \leq f(2)$ 를 만족시키도록 대응시켜주면 되므로 $f(1), f(2)$ 가 가질 수 있는 값의 경우의 수는

$${}_2H_2 = {}_{2+2-1}C_2 = {}_3C_2 = 3$$

이때 각각의 경우에 $f(4), f(5)$ 가 가질 수 있는 값은

조건 (가), (나)에 의하여 $5 \leq f(4) \leq f(5) \leq 8$ 을 만족시켜야 한다.

즉, 5, 6, 7, 8 중 중복을 허락하여 2개를 택한 후 $f(4) \leq f(5)$ 를 만족시키도록 대응시켜주면 되므로 $f(4)$, $f(5)$ 가 가질 수 있는 값의 경우의 수는

$${}_4H_2 = {}_{4+2-1}C_2 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 10 = 30$$

답 30

28

직선 l 위의 점 A, B, C, D, E에서 두 점을 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

각 경우마다 조건을 만족시키는 두 선분을 그리는 방법의 수는 직선 l 위에서 택한 점의 순서에 따라 직선 m 에서 택하는 점의 순서가 정해져 있고 직선 m 에서 한 점을 동시에 택할 수 있으므로 직선 m 위의 점 F, G, H, I 중 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 즉,

$${}_4H_2 = {}_{4+2-1}C_2 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$10 \times 10 = 100$$

답 ①

29

조건 (가)에서 집합 A 의 원소를 a, b, c ($a < b < c$)라 하면

조건 (나)에서

$$a+k \leq b, b+k \leq c$$

가 성립하므로

$$a+2k \leq b+k \leq c$$

이다. 이때

$$a' = a+2k, b' = b+k \text{라 하면}$$

$$1+2k \leq a' \leq b' \leq c \leq 20 \text{이다.}$$

$1+2k$ 부터 20까지의 자연수 중에서 중복을 허락하여 세 개의 수 a', b', c 를 택하면 세 수 a, b, c 는 주어진 조건을 만족시킨다.

그러므로 a_k 는

$$a_k = {}_{20-(2k+1)+1}H_3 = {}_{20-2k}H_3 = {}_{20-2k+3-1}C_3 = {}_{22-2k}C_3$$

따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^9 \frac{a_k}{10-k} &= \frac{{}_{20}C_3}{9} + \frac{{}_{18}C_3}{8} + \frac{{}_{16}C_3}{7} + \cdots + \frac{{}_4C_3}{1} \\ &= \sum_{k=1}^9 \frac{{}_{2k+2}C_3}{k} = \sum_{k=1}^9 \frac{2k(2k+1)(2k+2)}{3 \times 2 \times 1 \times k} \\ &= \frac{2}{3} \sum_{k=1}^9 (2k+1)(k+1) \\ &= \frac{2}{3} \sum_{k=1}^9 (2k^2 + 3k + 1) \\ &= \frac{2}{3} \left(2 \times \frac{9 \times 10 \times 19}{6} + 3 \times \frac{9 \times 10}{2} + 9 \right) \\ &= 380 + 90 + 6 = 476 \end{aligned}$$

답 476

30

-2 이상의 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는

$$x=l-2, y=m-2, z=n-2 \quad (l, m, n \text{은 음이 아닌 정수})$$

로 놓으면

$$x+y+z=l+m+n-6=3$$

$$l+m+n=9$$

를 만족시키는 음이 아닌 정수 l, m, n 의 모든 순서쌍 (l, m, n) 의 개수와 같다.

즉, 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_9 = {}_{3+9-1}C_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = \frac{11 \times 10}{2 \times 1} = 55$$

답 ⑤

31

$x=2a+1, y=2b+1, z=2c+1, w=2d+1$ (a, b, c, d 는 음이 아닌 정수)로 놓으면

$$8x+y+z+w=2(8a+b+c+d)+11=31$$

$$8a+b+c+d=10$$

그러므로 $a=0, a=1$ 일 때로 나누어 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수를 구하면 다음과 같다.

(i) $a=0$ 일 때

주어진 방정식을 만족시키는 모든 순서쌍 $(0, b, c, d)$ 의 개수는 방정식 $b+c+d=10$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c, d 의 모든 순서쌍 (b, c, d) 의 개수와 같다.

즉, 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_{10} = {}_{3+10-1}C_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = \frac{12 \times 11}{2 \times 1} = 66$$

(ii) $a=1$ 일 때

주어진 방정식을 만족시키는 모든 순서쌍 $(1, b, c, d)$ 의 개수는 방정식 $b+c+d=2$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c, d 의 모든 순서쌍 (b, c, d) 의 개수와 같다.

즉, 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_{3+2-1}C_2 = {}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

(i), (ii)에서 구하는 모든 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는

$$66+6=72$$

답 ③

32

조건 (가)에서

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)+1 \\ &= x^4 - (a+b+c+d)x^3 + \cdots + abcd + 1 \end{aligned}$$

이므로 조건 (나)에 의하여 $a+b+c+d=9$

$$a'=a-1, b'=b-1, c'=c-1, d'=d-1$$

(a', b', c', d' 은 음이 아닌 정수)

로 놓으면 구하는 경우의 수는

$$a' + b' + c' + d' = a + b + c + d - 4 = 5$$

를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d' 의 모든 순서쌍 (a', b', c', d') 의 개수와 같다.

즉, 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_5 = {}_{4+5-1}C_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 56이다.

답 ⑤

33

공역 B 의 원소 0, 1, 2, 3에 대응하는 정의역 A 의 원소의 개수를 각각 a, b, c, d 라 하면 $a + b + c + d = 6$ 이 성립한다.

조건 (가)에 의하여 치역의 원소에 대응하는 정의역 A 의 원소의 개수가 결정이 되면 정의역 A 의 각 원소에 대응하는 공역 B 의 원소가 하나씩 결정되어 함수가 유일하게 정해지므로 함수 f 의 개수는

$a + b + c + d = 6$ 을 만족시키는 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$ 의 모든 정수의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수와 같다.

조건 (나)에 의하여 $c \geq 2$ 이므로 조건 (가)와 (나)를 만족시키는 함수 f 의 개수는 방정식

$a + b + c + d = 6$ 을 만족시키는 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 2, d \geq 0$ 의 모든 정수의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수와 같다.

이때 $c = c' + 2$ 라 하면 구하는 함수 f 의 개수는 방정식

$a + b + c' + d = 4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c', d 의 모든 순서쌍 (a, b, c', d) 의 개수와 같다.

즉, 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_4 = {}_{4+4-1}C_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

답 ⑤

34

카드의 종류의 변화가 3번 나타나도록 12장의 카드를 나열하려면

$(\spadesuit, \heartsuit, \spadesuit, \heartsuit)$ 또는 $(\heartsuit, \spadesuit, \heartsuit, \spadesuit)$ 인 형태에서 나머지 6장의 카드 (\spadesuit) 는 카드 (\spadesuit) 가 있는 자리에, 나머지 2장의 카드 (\heartsuit) 는 카드 (\heartsuit) 가 있는 자리에 놓으면 된다.

(i) $(\spadesuit, \heartsuit, \spadesuit, \heartsuit)$ 의 형태로 카드를 나열하는 경우

먼저 카드 (\spadesuit) 를 나열하는 경우의 수를 구하면 다음과 같다.

카드 (\spadesuit) 가 놓인 두 부분의 카드 (\spadesuit) 의 개수를 각각 x, y 라 하면 방정식 $x + y = 8$ 을 만족시키는 $x \geq 1, y \geq 1$ 의 모든 자연수의 순서쌍 (x, y) 의 개수와 같다.

이때 $x = X + 1, y = Y + 1$ 이라 하면 모든 자연수의 순서쌍 (x, y) 의 개수는 방정식 $X + Y = 6$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y 의 모든 순서쌍 (X, Y) 의 개수와 같다.

즉, 서로 다른 2개에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_6 = {}_{2+6-1}C_6 = {}_7C_6 = {}_7C_1 = 7$$

카드 (\heartsuit) 를 나열하는 경우의 수를 구하면 다음과 같다.

카드 (\heartsuit) 가 놓인 두 부분의 카드 (\heartsuit) 의 개수를 각각 a, b 라 하면 방정식 $a + b = 4$ 를 만족시키는 $a \geq 1, b \geq 1$ 의 모든 자연수의 순서쌍 (a, b) 의 개수와 같다.

이때 $a = A + 1, b = B + 1$ 이라 하면 모든 자연수의 순서쌍 (a, b) 의 개수는 방정식 $A + B = 2$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B 의 모든 순서쌍 (A, B) 의 개수와 같다.

즉, 서로 다른 2개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_2 = {}_{2+2-1}C_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

따라서 $(\spadesuit, \heartsuit, \spadesuit, \heartsuit)$ 의 형태로 카드를 나열하는 경우의 수는

$$7 \times 3 = 21$$

(ii) $(\heartsuit, \spadesuit, \heartsuit, \spadesuit)$ 의 형태로 카드를 나열하는 경우도 같은 방법으로

$${}_2H_2 \times {}_2H_6 = 3 \times 7 = 21$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$21 + 21 = 42$$

답 42

35

$(x+2)^6$ 의 전개식의 일반항은 ${}_6C_r 2^{6-r} x^r$ ($r=0, 1, \dots, 6$)이다.

x^4 의 계수는 $r=4$ 일 때이므로

$${}_6C_4 \times 2^2 = {}_6C_2 \times 2^2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times 4 = 60$$

답 ④

36

$(x-4)^n$ 의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r (-4)^{n-r} x^r$ ($r=0, 1, \dots, n$)이다.

상수항은 $r=0$ 일 때이므로

$${}_nC_0 \times (-4)^n = -1024$$

$$(-4)^n = (-4)^5, n=5$$

따라서 x 의 계수는 $r=1$ 일 때이므로

$${}_5C_1 (-4)^{5-1} = 5 \times 4^4 = 5 \times 16 \times 16 = 1280$$

답 ⑤

37

$(2+x)^5$ 과 $(1-x)^2$ 의 전개식의 일반항은 각각

$${}_5C_r 2^{5-r} x^r \quad (r=0, 1, \dots, 5), \quad {}_2C_k (-1)^k x^k \quad (k=0, 1, 2)$$

이므로 주어진 다항식의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r \times {}_2C_k 2^{5-r} (-1)^k x^{k+r}$$

이다. 이때 방정식 $k+r=4$ 를 만족시키는 $0 \leq r \leq 5, 0 \leq k \leq 2$ 인 음이 아닌 정수 r, k 의 순서쌍 (r, k) 를 구하면

$(4, 0), (3, 1), (2, 2)$

이고 이 경우의 r, k 에 대한 x^4 의 계수를 구하면

$${}_5C_4 \times {}_2C_0 2^1 (-1)^0 = 10,$$

$${}_5C_3 \times {}_2C_1 2^2 (-1)^1 = -80,$$

$${}_5C_2 \times {}_2C_2 2^3 (-1)^2 = 80$$

따라서 구하는 값은

$$10 + (-80) + 80 = 10$$

답 ①

38

$(x^2 + \frac{7}{x})^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r(x^2)^{n-r}\left(\frac{7}{x}\right)^r = {}nC_r 7^r x^{2n-2r} x^{-r} = {}nC_r 7^r x^{2n-3r} \quad (r=0, 1, \dots, n)$$

이므로 x^5 의 계수가 0이 되지 않으려면 자연수 n 에 대하여 $2n-3r=5$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 r 가 존재해야 한다.

즉, $r = \frac{2n-5}{3}$ 에서 자연수 k 에 대하여

(i) $n=3k, n=3k-1$ 이면

각각 $r=2k-\frac{5}{3}, r=2k-\frac{7}{3}$ 이 되어 r 가 정수가 아니므로 성립하지 않는다.

(ii) $n=3k-2$ 이면 $r=2k-3$ 에서 $r \geq 0$ 이므로 k 는 2 이상의 자연수이다.

따라서 조건에 맞는 100 이하의 자연수 n 은 $k=2, 3, 4, \dots, 34$ 일 때 4, 7, 10, \dots , 100이고 그 개수는 33이다.

답 33

39

$(x+1)^n$ 의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r x^r$ ($r=0, 1, \dots, n$)이므로 연속하는 세 항의 계수는

$${}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = 105,$$

$${}_nC_{k+1} = \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} = 455$$

$${}_nC_{k+2} = \frac{n!}{(n-k-2)!(k+2)!} = 1365$$

로 놓을 수 있다.

$$\frac{{}_nC_k}{{}_nC_{k+1}} = \frac{k+1}{n-k} = \frac{105}{455} = \frac{3}{13}$$

$$13k+13=3n-3k, 16k+13=3n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{{}_nC_{k+1}}{{}_nC_{k+2}} = \frac{k+2}{n-k-1} = \frac{455}{1365} = \frac{1}{3}$$

$$3k+6=n-k-1, 4k+7=n \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $k=2, n=15$

답 15

40

$(1+x)^m$ 과 $(1+x^2)^n$ 의 전개식의 일반항은 각각

$${}_mC_r x^r \quad (r=0, 1, \dots, m), \quad {}_nC_k x^{2k} \quad (k=0, 1, \dots, n)$$

이므로 주어진 다항식의 전개식의 일반항은 ${}_mC_r \times {}_nC_k x^{r+2k}$ 이다.

이때 x^2 의 계수는 방정식

$$r+2k=2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

를 만족시키는 음이 아닌 정수 r, k 에 의하여 결정된다.

(i) $m=1$ 인 경우

$m \geq r$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에 의하여 $r=0, k=1$

x^2 의 계수는 8이므로

$${}_mC_0 \times {}_nC_1 = 1 \times n = 8 \text{에서 } n=8$$

따라서 x^3 의 계수는 ${}_mC_r \times {}_nC_k x^{r+2k}$ 에서 방정식 $r+2k=3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 r, k 가 $r=1, k=1$ 일 때이므로

$${}_1C_1 \times {}_8C_1 = 1 \times 8 = 8$$

(ii) $m \geq 2$ 인 경우

$m \geq r$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에 의하여 $r=2, k=0$ 또는 $r=0, k=1$

$${}_mC_2 \times {}_nC_0 + {}_mC_0 \times {}_nC_1 = \frac{m(m-1)}{2} + n = 8$$

$$m(m-1) + 2n = 16$$

또한, m, n 이 자연수라는 조건에 의하여

$$0 \leq m(m-1) \leq 14$$

이므로 $m=2, n=7$ 또는 $m=3, n=5$ 또는 $m=4, n=2$ 이다.

따라서 x^3 의 계수는 ${}_mC_r \times {}_nC_k x^{r+2k}$ 에서 방정식 $r+2k=3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 r, k 가 $r=3, k=0$ 과 $r=1, k=1$ 일 때이므로

x^3 의 계수를 구하면

$m=2$ 일 때, $n=7$ 이므로 x^3 의 계수는

$${}_2C_1 \times {}_7C_1 = 2 \times 7 = 14$$

$m=3$ 일 때, $n=5$ 이므로 x^3 의 계수는

$${}_3C_3 \times {}_5C_0 + {}_3C_1 \times {}_5C_1 = 1 \times 1 + 3 \times 5 = 16$$

$m=4$ 일 때, $n=2$ 이므로 x^3 의 계수는

$${}_4C_3 \times {}_2C_0 + {}_4C_1 \times {}_2C_1 = 4 \times 1 + 4 \times 2 = 12$$

따라서 (i), (ii)에 의하여 x^3 의 계수의 최댓값은 16이다.

답 16

41

$$\sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}C_k = 2^{2n}, \quad \sum_{k=0}^n {}_nC_k = 2^n \text{이므로}$$

$$\frac{1}{256} \left(\sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}C_k - \sum_{k=0}^n {}_nC_k \right) = \frac{1}{256} (2^{2n} - 2^n) = 255$$

$$(2^n)^2 - 2^n - 256 \times 255 = 0$$

$$(2^n + 255)(2^n - 256) = 0$$

$$2^n > 0 \text{이므로 } 2^n = 256 = 2^8$$

따라서 $n=8$

답 ③

42

$$f(n) = \sum_{r=0}^n {}_nC_r 2^{-r} = \sum_{r=0}^n {}_nC_r \times 1^{n-r} \times \left(\frac{1}{2}\right)^r$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

이므로

$$\sum_{k=1}^5 f(k) = \sum_{k=1}^5 \left(\frac{3}{2}\right)^k = \frac{\frac{3}{2} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^5 - 1 \right]}{\frac{3}{2} - 1}$$

$$= \frac{729}{32} - 3 = \frac{633}{32}$$

답 ①

43

$$\sum_{k=0}^6 ({}_6C_k + {}_{6+k}C_6) = \sum_{k=0}^6 ({}_6C_k + {}_{6+k}C_k)$$

$$= 2 \sum_{k=0}^6 {}_6C_k$$

$$= 2({}_6C_0 + {}_6C_1 + {}_6C_2 + \dots + {}_6C_6)$$

$$= 2({}_7C_0 + {}_7C_1 + {}_7C_2 + \dots + {}_7C_6)$$

$$\begin{aligned}
&= 2({}_8C_1 + {}_8C_2 + \cdots + {}_{12}C_6) \\
&= \cdots = 2({}_{12}C_5 + {}_{12}C_6) \\
&= 2 \times {}_{13}C_6 \\
&= {}_{13}C_6 + {}_{13}C_6 \\
&= {}_{13}C_6 + {}_{13}C_7 = {}_{14}C_7
\end{aligned}$$

답 ⑤

44

이항정리를 이용하여 $(1+x)^{101}$ 을 전개하면

$$(1+x)^{101} = {}_{101}C_0 + {}_{101}C_1 x + {}_{101}C_2 x^2 + \cdots + {}_{101}C_{101} x^{101}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$2^{101} = {}_{101}C_0 + {}_{101}C_1 + {}_{101}C_2 + \cdots + {}_{101}C_{50} + {}_{101}C_{51} + {}_{101}C_{52} + \cdots + {}_{101}C_{101}$$

이고

$${}_{101}C_r = {}_{101}C_{101-r} \text{ 이므로}$$

$$2^{101} = ({}_{101}C_0 + {}_{101}C_1 + {}_{101}C_2 + \cdots + {}_{101}C_{50}) + ({}_{101}C_{50} + {}_{101}C_{49} + \cdots + {}_{101}C_0)$$

에서

$${}_{101}C_0 + {}_{101}C_1 + {}_{101}C_2 + \cdots + {}_{101}C_{50} = 2^{100}$$

따라서

$$\log_2 ({}_{101}C_0 + {}_{101}C_1 + {}_{101}C_2 + \cdots + {}_{101}C_{50}) = \log_2 2^{100} = 100$$

답 100

45

두 다항식의 곱

$$(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n} x^{2n} + a_{2n+1} x^{2n+1}) \times (a_{2n+1} + a_{2n} x + \cdots + a_1 x^{2n} + a_0 x^{2n+1})$$

에서 x^{2n+1} 의 계수는

$$a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_{2n+1}^2 \quad \cdots (*)$$

이다.

이항정리에 의하여

$$(1+x)^{2n+1} = {}_{2n+1}C_0 + {}_{2n+1}C_1 x + \cdots + {}_{2n+1}C_{2n+1} x^{2n+1}$$

$$(x+1)^{2n+1} = {}_{2n+1}C_0 x^{2n+1} + {}_{2n+1}C_1 x^{2n} + \cdots + {}_{2n+1}C_{2n+1}$$

등식 $(1+x)^{2n+1}(x+1)^{2n+1} = (1+x)^{4n+2}$ 의 좌변에서

(*)에 의하여 x^{2n+1} 의 계수는

$$({}_{2n+1}C_0)^2 + ({}_{2n+1}C_1)^2 + ({}_{2n+1}C_2)^2 + \cdots + ({}_{2n+1}C_{2n+1})^2$$

이고 ${}_{2n+1}C_k = {}_{2n+1}C_{2n+1-k}$ 이므로

$$({}_{2n+1}C_0)^2 + ({}_{2n+1}C_1)^2 + ({}_{2n+1}C_2)^2 + \cdots + ({}_{2n+1}C_{2n+1})^2$$

$$= 2 \times \{({}_{2n+1}C_0)^2 + ({}_{2n+1}C_1)^2 + ({}_{2n+1}C_2)^2 + \cdots + ({}_{2n+1}C_n)^2\}$$

이고, 우변 $(1+x)^{4n+2}$ 에서 x^{2n+1} 의 계수는

$${}_{4n+2}C_{2n+1}$$

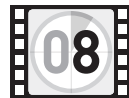
이다.

따라서

$$({}_{2n+1}C_0)^2 + ({}_{2n+1}C_1)^2 + ({}_{2n+1}C_2)^2 + \cdots + ({}_{2n+1}C_n)^2 = \frac{{}_{4n+2}C_{2n+1}}{2}$$

이다.

답 ⑤



확률

정답

본문 118~129쪽

01 ④	02 ①	03 ③	04 ④	05 ①
06 ②	07 ③	08 17	09 ③	10 ⑤
11 ④	12 ③	13 ④	14 ③	15 ①
16 ②	17 ①	18 ⑤	19 ⑤	20 ④
21 ⑤	22 56	23 ②	24 ④	25 ③
26 ④	27 84	28 200	29 ③	30 ②
31 ②	32 ①	33 19	34 ③	35 ①
36 23	37 ②	38 ④	39 ①	

01

9개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_9C_2$$

이때 꺼낸 2개의 공의 색깔이 같은 경우는 흰 공 또는 검은 공 또는 빨간 공에서 각각 2개를 꺼내는 경우이므로 그 경우의 수는

$${}_3C_2 + {}_2C_2 + {}_4C_2$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{{}_3C_2 + {}_2C_2 + {}_4C_2}{{}_9C_2} = \frac{3+1+6}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

답 ④

02

$y=0$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나므로

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0$$

$$(x-a)(x-b) = 0, x=a \text{ 또는 } x=b$$

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점을 P, Q라 하면 두 점 P, Q의 좌표는 차례로 $(a, 0)$, $(b, 0)$ 또는 $(b, 0)$, $(a, 0)$ 이다.

그러므로 $\overline{PQ} = |a-b| = 3$ 이 성립한다.

$|a-b|=3$ 이 되는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

(i) $a > b$ 일 때

$(4, 1)$, $(5, 2)$, $(6, 3)$ 으로 3이다.

(ii) $a < b$ 일 때

$(1, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 6)$ 으로 3이다.

따라서 $|a-b|=3$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 의 개수는 총 6이고

전체 순서쌍의 개수는 $6 \times 6 = 36$ 이므로 구하는 확률은

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

답 ①

03

10장의 카드 중 2장의 카드를 동시에 택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_2 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

이때 카드에 적혀 있는 두 수 중 큰 수가 작은 수의 2배보다 큰 경우는

두 수를 각각 a, b ($a < b$)라 할 때, $2a < b$ 인 순서쌍 (a, b) 의 개수는
 $(1, 3), (1, 4), \dots, (1, 10) \Rightarrow 8$ 가지
 $(2, 5), (2, 6), \dots, (2, 10) \Rightarrow 6$ 가지
 $(3, 7), (3, 8), (3, 9), (3, 10) \Rightarrow 4$ 가지
 $(4, 9), (4, 10) \Rightarrow 2$ 가지
 로 총 20가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{20}{45} = \frac{4}{9}$

답 ③

04

숫자 0이 백의 자리에 올 수 없으므로 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 3개의 숫자를 일렬로 나열하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 $5 \times {}_5P_2 = 5 \times 5 \times 4 = 100$

이때 340보다 큰 짝수가 되는 경우는 다음과 같이 세 가지가 있다.

(i) 백의 자리가 3인 경우

34□, 35□의 꼴이므로

342, 350, 352, 354로 4개

(ii) 백의 자리가 4인 경우

4□0, 4□2의 꼴이므로 각각 4개씩 총 8개

(iii) 백의 자리가 5인 경우

5□0, 5□2, 5□4의 꼴이므로 각각 4개씩 총 12개

(i), (ii), (iii)에서 340보다 큰 짝수가 되는 경우의 수는

$$4 + 8 + 12 = 24$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{100} = \frac{6}{25}$

답 ④

05

한 개의 주사위를 5번 던져 나오는 경우의 수는

$${}_6P_5 = 6^5$$

이때 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 가 서로 다른 4개의 수로 이루어진 경우는 다음과 같이 구한다.

1, 2, 3, 4, 5, 6에서 서로 다른 4개의 수를 고르는 방법의 수는

$${}_6C_4 = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

고른 4종류의 수 중 1종류의 숫자는 2개, 나머지 3종류의 숫자는 1개로 정하는 방법의 수는 4

이 5개의 수를 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 에 대응시키는 방법의 수는 $\frac{5!}{2!}$ 이다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{6^5} \times 15 \times 4 \times \frac{5!}{2!} = \frac{25}{54}$$

답 ①

06

X 에서 Y 로의 함수의 개수는 ${}_3P_4 = 3^4 = 81$ 이므로 X 에서 Y 로의 함수 중 임의로 서로 다른 2개의 함수를 택하는 방법의 수는

$${}_{81}C_2 = \frac{81 \times 80}{2} = 3240$$

이때 두 함수의 치역이 서로소인 경우는 다음과 같이 세 가지가 있다.

(i) 두 함수 중 한 함수의 치역이 $\{a\}$ 인 경우: 1가지

치역 $\{a\}$ 와 서로소인 치역은 $\{b\}, \{c\}, \{b, c\}$ 이므로 2개의 함수를 택하는 방법의 수는

$$1 \times {}_2P_4 = 2^4 = 16$$

(ii) 두 함수 중 한 함수의 치역이 $\{b\}$ 인 경우: 1가지

치역 $\{b\}$ 와 서로소인 치역은 중복되는 경우를 제외하면 $\{c\}, \{a, c\}$ 이므로 2개의 함수를 택하는 방법의 수는

$$1 \times ({}_2P_4 - 1) = 2^4 - 1 = 15$$

(iii) 두 함수 중 한 함수의 치역이 $\{c\}$ 인 경우: 1가지

치역 $\{c\}$ 와 서로소인 치역은 중복되는 경우를 제외하면 $\{a, b\}$ 이므로 2개의 함수를 택하는 방법의 수는

$$1 \times ({}_2P_4 - 2) = 2^4 - 2 = 14$$

(i), (ii), (iii)에서 택한 두 함수의 치역이 서로소인 경우의 수는

$$16 + 15 + 14 = 45$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{45}{3240} = \frac{1}{72}$

답 ②

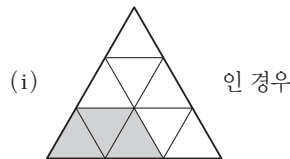
07

고정된 벽면에 움직이지 않도록 삼각형을 고정해 놓았으므로 삼각형은 회전하지도 뒤집히지도 않는다.

9개의 작은 정삼각형에서 3개를 택하는 경우의 수는

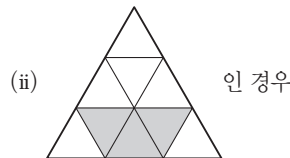
$${}_9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

이때 색칠한 3개의 정삼각형이 사다리꼴이 되려면 연속된 3개의 삼각형을 색칠하는 경우이므로 다음과 같이 세 가지 경우가 있다.



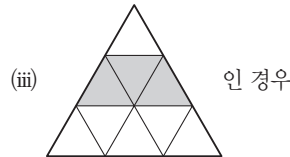
(i) 인 경우

큰 정삼각형 한 변에 대해 2가지씩 나오므로 6가지



(ii) 인 경우

큰 정삼각형 한 변에 대해 1가지씩 나오므로 3가지



(iii) 인 경우

큰 정삼각형 한 꼭짓점에 대해 1가지씩 나오므로 3가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{84} = \frac{1}{7}$

답 ③

08

두 개의 주사위 A, B를 동시에 4번 던져 나오는 눈의 수를 차례로 각각 a_1, a_2, a_3, a_4 와 b_1, b_2, b_3, b_4 라 하자.

4번 던져 x, y 좌표가 모두 3만큼 증가해야 하므로
 $(f(a_1), f(b_1)), (f(a_2), f(b_2)), (f(a_3), f(b_3)), (f(a_4), f(b_4))$
 는

$(0, 0), (1, 1), (1, 1), (1, 1)$ 또는 $(0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 1)$

이고 이들의 순서를 바꿔도 되므로 각각 $\frac{4!}{3!}=4$ (가지)와

$\frac{4!}{2!}=12$ (가지)의 총 16가지 경우에 점 P_4 의 좌표가 $(3, 3)$ 이 된다.

주사위 A, B를 총 4번씩 던지므로 전체 경우의 수는 $6^4 \times 6^4$

$(f(a_n), f(b_n))$ 에서 $(0, 0), (1, 1), (1, 1), (1, 1)$ 이 되는 경우의
 수는 $4 \times 3^4 \times 3^4$ 이고, $(0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 1)$ 이 되는 경우의
 수는 $12 \times 3^4 \times 3^4$ 이므로 점 P_4 의 좌표가 $(3, 3)$ 이 되는 경우의 수는

$16 \times 3^4 \times 3^4$ 이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{16 \times 3^4 \times 3^4}{6^4 \times 6^4} = \frac{1}{16}$ 이므로

$p+q=16+1=17$

답 17

09

전체집합 U 에 대하여

$$\begin{aligned} A \cup B^c &= U \cap (A \cup B^c) \\ &= (A \cup A^c) \cap (A \cup B^c) \\ &= A \cup (A^c \cap B^c) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} P(A \cup B^c) &= P(A) + P(A^c \cap B^c) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

답 ③

10

물리 I 을 선택하는 사건을 A, 지구과학 I 을 선택하는 사건을 B라 하면

$$P(A \cap B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}, P(A^c \cap B) = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$$

이때 $A^c \cap B = B - (A \cap B)$ 이므로

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{3}{16} = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

답 ⑤

11

1부터 6까지 자연수 중 서로 다른 네 개의 수를 임의로 택해 네 자리의
 자연수를 만드는 경우의 수는 ${}_6P_4=360$

일의 자리 수를 a , 십의 자리 수를 b , 백의 자리 수를 c , 천의 자리 수를
 d 라 할 때, $ab=2$ 를 만족시키는 사건을 A, $bc=6$ 을 만족시키는 사건
 을 B라 하자.

사건 A에서 $ab=2$ 를 만족시키는 a, b 의 값을 정하는 경우는 $a=1,$
 $b=2$ 또는 $a=2, b=1$ 로 2가지이다.

이 각각에 대하여 c, d 의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$ 이다.

그러므로 사건 A가 일어날 확률은

$$P(A) = \frac{2 \times 12}{360} = \frac{1}{15}$$

사건 B에서 $bc=6$ 을 만족시키는 b, c 의 값을 정하는 경우는 $b=1,$
 $c=6$ 또는 $b=2, c=3$ 또는 $b=3, c=2$ 또는 $b=6, c=1$ 로 4가지이다.
 이 각각에 대하여 a, d 의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$ 이다.

그러므로 사건 B가 일어날 확률은

$$P(B) = \frac{4 \times 12}{360} = \frac{2}{15}$$

한편 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 사건 $A \cap B$ 에서 $ab=2$ 와
 $bc=6$ 을 만족시키는 a, b, c 의 값을 정하는 경우는 $a=1, b=2, c=3$
 또는 $a=2, b=1, c=6$ 으로 2가지이다.

이 각각에 대하여 d 의 값을 정하는 경우의 수는 3이다.

그러므로 사건 $A \cap B$ 가 일어날 확률은

$$P(A \cap B) = \frac{2 \times 3}{360} = \frac{1}{60}$$

따라서 구하는 사건 A 또는 사건 B가 일어날 확률은 확률의 덧셈정리
 에 의하여

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{15} + \frac{2}{15} - \frac{1}{60} = \frac{11}{60} \end{aligned}$$

답 ④

12

두 사건 A와 B가 서로 배반사건이므로 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
 이다.

$P(A \cup B) = 1$ 에서

$P(A) + P(B) = 1$

$P(A) = 1 - P(B)$ ㉠

㉠을 $4P(A) - 3P(B) = 1$ 에 대입하면

$$4\{1 - P(B)\} - 3P(B) = 1$$

$$-7P(B) + 4 = 1$$

$$\text{따라서 } P(B) = \frac{3}{7}$$

답 ③

13

9개의 공이 들어 있는 상자에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우
 의 수는 ${}_9C_3$

흰 공의 개수가 3, 검은 공의 개수가 0인 사건을 A, 흰 공의 개수가 2,
 검은 공의 개수가 1인 사건을 B라 하자.

사건 A가 일어나는 경우의 수는 ${}_5C_3 \times {}_4C_0$ 이므로 사건 A가 일어날 확
 률은

$$P(A) = \frac{{}_5C_3 \times {}_4C_0}{{}_9C_3} = \frac{5}{42}$$

사건 B가 일어나는 경우의 수는 ${}_5C_2 \times {}_4C_1$ 이므로 사건 B가 일어날 확
 률은

$$P(B) = \frac{{}_5C_2 \times {}_4C_1}{{}_9C_3} = \frac{10}{21}$$

따라서 구하는 확률은 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이므로 확률의
 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{5}{42} + \frac{10}{21} = \frac{25}{42} \end{aligned}$$

답 ④

14

10장의 카드 중 3장의 카드를 택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

$a-b \leq 3$ 에서 $a-b=2$ 인 사건을 A , $a-b=3$ 인 사건을 B 라 하자.

3장의 카드에 적혀 있는 수를 순서쌍 (a, c, b) 로 나타내면

사건 A 가 일어나는 경우의 수는

$a > c > b$, $a=b+2$ 에서

$(b+2, b+1, b)$ ($b=0, 1, 2, 3, \dots, 7$)

8이므로 사건 A 가 일어날 확률은

$$P(A) = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

사건 B 가 일어나는 경우의 수는

$a > c > b$, $a=b+3$ 에서

$(b+3, b+1, b)$ 또는 $(b+3, b+2, b)$ ($b=0, 1, 2, 3, \dots, 6$)

$7 \times 2 = 14$ 이므로 사건 B 가 일어날 확률은

$$P(B) = \frac{14}{120} = \frac{7}{60}$$

따라서 구하는 확률은 두 사건 A 와 B 가 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{1}{15} + \frac{7}{60} \\ &= \frac{11}{60} \end{aligned}$$

답 ③

15

흰 공이 5개뿐이므로 승우와 주희가 같은 수의 흰 공을 꺼내는 경우는 각각 1개씩 또는 2개씩 뽑는 두 가지 경우이다.

승우와 주희가 각각 꺼낸 흰 공의 개수가 1인 사건을 A , 승우와 주희가 각각 꺼낸 흰 공의 개수가 2인 사건을 B 라 하자.

사건 A 가 일어나는 경우는

승우가 흰 공을 1개, 검은 공을 3개 꺼내고, 남은 공에 대하여 주희는 흰 공을 1개, 검은 공을 2개 꺼내는 경우이므로 사건 A 가 일어날 확률은

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{{}_5C_1 \times {}_5C_3}{{}_{10}C_4} \times \frac{{}_4C_1 \times {}_2C_2}{{}_6C_3} \\ &= \frac{5}{21} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{21} \end{aligned}$$

사건 B 가 일어나는 경우는

승우가 흰 공을 2개, 검은 공을 2개 꺼내고, 남은 공에 대하여 주희는 흰 공을 2개, 검은 공을 1개 꺼내는 경우이므로 사건 B 가 일어날 확률은

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{{}_5C_2 \times {}_5C_2}{{}_{10}C_4} \times \frac{{}_3C_2 \times {}_1C_1}{{}_6C_3} \\ &= \frac{10}{21} \times \frac{9}{20} = \frac{3}{14} \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은 두 사건 A 와 B 가 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{1}{21} + \frac{3}{14} = \frac{11}{42} \end{aligned}$$

답 ①

16

주어진 조건을 만족시키도록 3개의 문자카드 A, B, C 를 나열하는 경우는 A, B, C 또는 A, C, B 의 순서로 나열하는 경우이다. A, B, C 의 순서로 나열하는 사건을 A , A, C, B 의 순서로 나열하는 사건을 B 라 하자.

서로 다른 5개의 문자카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5!$ 이고 문자카드 A, B, C 를 모두 같은 문자카드로 취급하여 5개의 문자카드를 나열한 후 조건에 맞게 문자카드 A, B, C 를 같은 문자로 취급한 자리에 배열하면 되므로 사건 A, B 가 일어날 확률은 각각

$$\frac{5!}{3!} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

따라서 구하는 확률은 두 사건 A, B 가 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

답 ②

17

6개의 공이 들어 있는 주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_6C_3$

흰 공이 적어도 1개 포함되는 사건을 A 라 하면 사건 A 의 여사건 A^c 은 흰 공이 하나도 없는 사건이다.

즉, 사건 A^c 은 검은 공 2개, 노란 공 2개 중에서 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우이므로

$$P(A^c) = \frac{{}_4C_3}{{}_6C_3} = \frac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A^c) \\ &= 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

답 ①

18

여섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!} = 120$$

1이 2보다 왼쪽에 오거나 2가 3보다 왼쪽에 오도록 나열하는 사건을 A 라 하면 사건 A 의 여사건 A^c 은 1이 2보다 오른쪽에 오고 2가 3보다 오른쪽에 오도록 나열하는 사건이다.

즉, 사건 A^c 은 1, 2, 3의 순서가 정해져 있으므로 1, 2, 3을 모두 1로 생각하여 여섯 개의 숫자 1, 1, 1, 4, 4, 4를 일렬로 나열한 후, 첫 번째 1을 3으로 바꾸고 두 번째 1을 2로 바꾸면 된다.

이때 1, 1, 1, 4, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!3!} = 20$$

$$\text{이므로 } P(A^c) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A^c) \\ &= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

답 ⑤

19

한 개의 주사위를 세 번 던질 때 일어나는 모든 경우의 수는 6^3
세 수 a, b, c 중에서 하나의 수가 나머지 두 수 중 적어도 한 수의 약수
인 사건을 A 라 하면 사건 A 의 여사건 A^c 은 a, b, c 중 어느 것도 서로
약수가 되지 않는 사건이다.

즉, 사건 A^c 을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 는

$(2, 3, 5), (3, 4, 5), (4, 5, 6)$

의 3가지이고 각각의 경우에 순서를 고려하면 3!가지씩 있으므로

$$P(A^c) = \frac{3 \times 3!}{6^3} = \frac{1}{12}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) \\ = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

답 ⑤

20

5개의 공에서 중복을 허락하여 4개의 공을 꺼내 적혀 있는 수를 차례로
나열하는 모든 경우의 수는 5^4

$(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)=0$ 인 사건을 A 라 하면 사건 A 의 여
사건 A^c 은 $(a-b)(b-c)(c-d)(d-a) \neq 0$ 인 사건이다.

즉, 사건 A^c 은 $a \neq b, b \neq c, c \neq d, d \neq a$ 이고 이때 a 와 c 는 같아도 되
고 b 와 d 도 같아도 되므로 a 에 올 수 있는 수는 5가지이고, b 와 d 에는
 a 와 다른 수를 써야 하므로 다음 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) $b=d$ 인 경우

b 는 a 와 다른 수이므로 4가지, d 와 b 는 같은 수이므로 1가지, c 는
 b, d 와 다른 수이므로 4가지이다.

그러므로 조건을 만족시키는 경우의 수는 $4 \times 1 \times 4 = 16$

(ii) $b \neq d$ 인 경우

b 는 a 와 다른 수이므로 4가지, d 는 a, b 와 다른 수이므로 3가지, c
는 b, d 와 다른 수이므로 3가지이다.

그러므로 조건을 만족시키는 경우의 수는 $4 \times 3 \times 3 = 36$

(i), (ii)로부터 $(a-b)(b-c)(c-d)(d-a) \neq 0$ 일 확률은

$$P(A^c) = \frac{5 \times (16 + 36)}{5^4} = \frac{52}{125}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) \\ = 1 - \frac{52}{125} = \frac{73}{125}$$

답 ④

21

$f(2)=a, f(3)=b, f(4)=c, f(5)=d$ 라 하면 함숫값의 총합은 11
이고, $f(1)=3$ 이므로

$a+b+c+d=8$ (단, a, b, c, d 는 1 이상 5 이하의 자연수)

..... ㉠

$a=a'+1, b=b'+1, c=c'+1, d=d'+1$ 로 놓으면

$a'+b'+c'+d'=4$ (단, a', b', c', d' 은 0 이상 4 이하의 정수)

..... ㉡

함수 f 의 개수는 ㉡을 만족시키는 정수해의 개수와 같으므로

$${}_4H_4 = {}_{4+4-1}C_4 \\ = {}_7C_4 = {}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

함수 f 의 치역의 원소의 개수가 3 이상인 사건을 A 라 하면 사건 A 의
여사건 A^c 은 f 의 치역의 원소의 개수가 1 또는 2인 사건이다.

(i) f 의 치역의 원소의 개수가 1인 경우

$f(1)=3$ 이므로 a, b, c, d 의 값이 모두 3이어야 하는데 ㉠을 만족
시키지 않는다.

(ii) f 의 치역의 원소의 개수가 2인 경우

$f(1)=3$ 이므로 a, b, c, d 의 값 중 적어도 하나는 1, 2, 4, 5 중 하
나의 값을 갖고 나머지 값들은 3인 경우이다.

따라서 ㉠을 만족시키는 a, b, c, d 의 가능한 숫자 조합은 모두 2이
거나 3과 1이 각각 2개이므로 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$1 + \frac{4!}{2!2!} = 7$$

(i), (ii)에 의하여 $P(A^c) = \frac{7}{35} = \frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) \\ = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

답 ⑤

22

다섯 자리 자연수 N 의 숫자의 배열을 역으로 하여도 다섯 자리 자연수
 M 이 되기 때문에 0은 천, 백, 십의 자리에 위치해야 하고, 나머지 자
리에 1, 2, 3, 4를 배열하면 된다.

그러므로 가능한 자연수 N 의 개수는 $3 \times {}_4P_4 = 72$

$N+M$ 의 각 자리의 숫자 중 적어도 하나가 홀수인 사건을 A 라 하면 사
건 A 의 여사건 A^c 은 $N+M$ 의 모든 자리의 숫자가 짝수인 사건이다.

사건 A^c 에서 N 과 M 의 백의 자리의 숫자는 같은 수이므로 $N+M$ 의
백의 자리는 같은 두 수의 합이 되어 항상 짝수이다.

우선 0, 1, 2, 3, 4 중 두 수의 합이 짝수가 되려면

(짝수)+(짝수) 또는 (홀수)+(홀수)이고 N 의 일의 자리의 숫자가
0이 아니므로 다음의 두 가지가 가능하다.

(i) N 이 $\boxed{1}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{3}$ 또는 $\boxed{3}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{1}$ 인 경우

N 의 천, 백, 십의 자리에 0, 2, 4를 배열하면 되므로

가능한 N 의 개수는 $2 \times 3! = 12$

(ii) N 이 $\boxed{2}\boxed{}\boxed{0}\boxed{}\boxed{4}$ 또는 $\boxed{4}\boxed{}\boxed{0}\boxed{}\boxed{2}$ 인 경우

N 의 천과 십의 자리에 1, 3을 배열하면 되므로

가능한 N 의 개수는 $2 \times 2 = 4$

(i), (ii)에 의하여 사건 A^c 가 일어날 확률은

$$P(A^c) = \frac{12+4}{72} = \frac{2}{9}$$

이므로

$$p = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

따라서 $72p = 72 \times \frac{7}{9} = 56$

답 56

23

$$P(A) = \frac{2}{3} \text{에서}$$

$$P(A^c) = 1 - P(A) \\ = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

이므로

$$P(B|A^c) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)} = \frac{1}{4} \text{에서}$$

$$P(A^c \cap B) = \frac{1}{4} P(A^c) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

따라서

$$P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B) \\ = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

답 ②

24

$$P(A^c) = \frac{1}{4} \text{에서}$$

$$P(A) = 1 - P(A^c) \\ = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^c) \\ = \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{1}{8}$$

따라서

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{6}$$

답 ④

25

$$P(A) = \frac{4}{7} P(A \cup B) \text{에서}$$

$$P(A \cup B) = \frac{7}{4} P(A)$$

확률의 덧셈정리

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

에서

$$\frac{7}{4} P(A) = 2P(A) - P(A \cap B)$$

$$\frac{1}{4} P(A) = P(A \cap B)$$

$$\text{따라서 } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4} P(A)}{P(A)} = \frac{1}{4}$$

답 ③

26

조사에 참여한 100명의 학생 중에서 임의로 선택한 1명의 학생이 교복 자율화에 반대한 학생인 사건을 X , 선택한 1명의 학생이 2학년 학생인 사건을 Y 라 하면 구하는 확률은

$$P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)}$$

이다.

$$P(X) = \frac{72}{100} = \frac{18}{25}, P(X \cap Y) = \frac{44}{100} = \frac{11}{25}$$

따라서

$$P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} \\ = \frac{\frac{11}{25}}{\frac{18}{25}} = \frac{11}{18}$$

답 ④

27

조사에서 무게를 측정한 120개의 과일 중 임의로 선택한 1개의 과일이 사과인 사건을 X , 선택한 1개의 과일의 무게가 500 g 이상인 사건을 Y 라 하자.

(i) 조사에서 무게를 측정한 120개의 과일 중 임의로 선택한 1개의 과일이 사과일 때, 이 사과의 무게가 500 g 이상일 확률은

$$P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} \text{이다.}$$

$$P(X) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}, P(X \cap Y) = \frac{a}{120}$$

$$\text{따라서 } p_1 = P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{\frac{a}{120}}{\frac{1}{3}} = \frac{a}{40}$$

(ii) 조사에서 무게를 측정한 120개의 과일 중 임의로 선택한 1개의 과일의 무게가 500 g 미만일 때, 이 과일이 배일 확률은

$$P(X^c|Y^c) = \frac{P(X^c \cap Y^c)}{P(Y^c)} \text{이다.}$$

$$P(Y^c) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}, P(X^c \cap Y^c) = \frac{a}{120}$$

$$\text{따라서 } p_2 = P(X^c|Y^c) = \frac{P(X^c \cap Y^c)}{P(Y^c)} = \frac{\frac{a}{120}}{\frac{1}{3}} = \frac{a}{40}$$

(i), (ii)에 의하여

$$p_1 + p_2 = \frac{a}{40} + \frac{a}{40} = \frac{a}{20} \text{이고, } p_1 + p_2 = \frac{9}{10} \text{이므로}$$

$$\frac{a}{20} = \frac{9}{10} \text{에서 } a = 18$$

한편, 주어진 표에서 $a + b = 40$, $a + c = 80$ 이므로 $b = 22$, $c = 62$

따라서 $b + c = 22 + 62 = 84$

답 84

28

이 동호회의 회원 중 현 회장의 연임에 찬성한 남자 회원과 여자 회원의 비율은 3 : 2이고, 반대한 남자 회원과 여자 회원의 비율은 2 : 1이므로 두 자연수 a , b 에 대하여 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위 : 명)

성별	남자	여자	합계
찬반			
찬성	$3a$	$2a$	$5a$
반대	$2b$	b	$3b$
합계	$3a + 2b$	$2a + b$	320

이때 $5a+3b=320$ ㉠

이 동호회의 회원 중 임의로 뽑은 1명이 여자 회원일 때, 이 회원이 현 회장의 연임에 반대한 회원일 확률이 $\frac{1}{3}$ 이므로 여자 회원인 사건을 X , 반대한 회원인 사건을 Y 라 하면

$$P(X)=\frac{2a+b}{320}, P(X \cap Y)=\frac{b}{320}$$

따라서

$$P(Y|X)=\frac{P(X \cap Y)}{P(X)}=\frac{\frac{b}{320}}{\frac{2a+b}{320}}=\frac{1}{3}$$

이므로

$$a=b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡에서 $a=40, b=40$

따라서 이 동호회의 남자 회원의 수는

$$3a+2b=120+80=200$$

답 200

29

6명의 학생 모두를 임의로 일렬로 앉힐 때 두 학생 A, B가 이웃하여 앉는 사건을 X , 학생 C가 학생 A 또는 학생 B와 이웃하여 앉는 사건을 Y 라 하면 구하는 확률은

$$P(Y|X)=\frac{P(X \cap Y)}{P(X)}$$

이다.

6명의 학생을 일렬로 앉히는 경우의 수는 6!

(i) 두 학생 A, B가 이웃하여 앉는 경우는 두 학생 A, B를 (A, B) 또는 (B, A)로 묶어 하나로 생각하면

5명을 일렬로 앉히는 경우이므로 이 경우의 수는 $5! \times 2$

$$\text{따라서 } P(X)=\frac{5! \times 2}{6!}=\frac{1}{3}$$

(ii) 두 학생 A, B가 이웃하면서 학생 C가 학생 A 또는 학생 B와 이웃하여 앉는 경우는 세 학생 A, B, C를 (A, B, C) 또는 (B, A, C) 또는 (C, A, B) 또는 (C, B, A)로 묶어 하나로 생각하면

4명을 일렬로 앉히는 경우이므로 이 경우의 수는 $4! \times 4$

$$\text{따라서 } P(X \cap Y)=\frac{4! \times 4}{6!}=\frac{2}{15}$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$$P(Y|X)=\frac{P(X \cap Y)}{P(X)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{3}}=\frac{2}{5}$$

답 ③

30

집합 A 에서 임의로 선택한 한 개의 원소 (a, b) 가 $\frac{a^2}{\sqrt{b}}$ 의 값이

2^k (k 는 음이 아닌 정수)와 같이 표현된 사건을 X , $b < a$ 인 사건을 Y

라 하면 구하는 확률은 $P(Y|X)=\frac{P(X \cap Y)}{P(X)}$ 이다.

$\frac{a^2}{\sqrt{b}}$ 의 값이 2^k (k 는 음이 아닌 정수)와 같이 표현되려면 b 가 100 이하의 자연수이므로

$$b=2^{2n} \quad (n=0, 1, 2, 3) \text{ 또는 } b=3^4$$

이어야 한다.

(i) $b=2^0$ 일 때,

$\frac{a^2}{\sqrt{b}}=a^2$ 의 값이 2^k (k 는 음이 아닌 정수)와 같이 표현될 때 a 의 값은 $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$ 이므로 순서쌍 (a, b) 의 개수는 7

(ii) $b=2^2$ 일 때,

$\frac{a^2}{\sqrt{b}}=\frac{a^2}{2}$ 의 값이 2^k (k 는 음이 아닌 정수)와 같이 표현될 때 a 의 값은 $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$ 이므로 순서쌍 (a, b) 의 개수는 6

(iii) $b=2^4$ 일 때,

$\frac{a^2}{\sqrt{b}}=\frac{a^2}{2^2}$ 의 값이 2^k (k 는 음이 아닌 정수)와 같이 표현될 때 a 의 값은 $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$ 이므로 순서쌍 (a, b) 의 개수는 6

(iv) $b=2^6$ 일 때,

$\frac{a^2}{\sqrt{b}}=\frac{a^2}{2^3}$ 의 값이 2^k (k 는 음이 아닌 정수)와 같이 표현될 때 a 의 값은 $2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$ 이므로 순서쌍 (a, b) 의 개수는 5

(v) $b=3^4$ 일 때,

$\frac{a^2}{\sqrt{b}}=\frac{a^2}{9}$ 의 값이 2^k (k 는 음이 아닌 정수)와 같이 표현될 때 a 의 값은 3, 6, 12, 24, 48, 96이므로 순서쌍 (a, b) 의 개수는 6

한편, 집합 A 의 원소의 개수는 10000이므로 (i)~(v)에 의하여

$$P(X)=\frac{7+6+6+5+6}{10000 \cdot C_1}=\frac{30}{10000}=\frac{3}{1000}$$

$$P(X \cap Y)=\frac{6+4+2+0+1}{10000 \cdot C_1}=\frac{13}{10000}$$

따라서

$$P(Y|X)=\frac{P(X \cap Y)}{P(X)}=\frac{\frac{13}{10000}}{\frac{3}{1000}}=\frac{13}{30}$$

답 ②

참고

$\frac{a^2}{\sqrt{b}}=2^k$ 에서 $a^2=2^k \times b^{\frac{1}{2}}$ 이고 $a > 0$ 이므로

$a=2^{\frac{k}{2}} \times b^{\frac{1}{4}}$ (a, b 는 100 이하의 자연수, k 는 음이 아닌 정수)

(i) $b=2^{n-1}$ (n 은 자연수)이면

$$a=2^{\frac{k}{2}} \times 2^{\frac{n-1}{4}}=2^{\frac{2k+n-1}{4}}$$

이므로 n 이 홀수이면 어떤 음이 아닌 정수 k 에 대하여 a 의 값이 자연수가 될 수 있지만 n 이 짝수이면 모든 음이 아닌 정수 k 에 대하여 a 의 값이 자연수가 될 수 없다.

따라서 n 은 홀수이고 $b=2^{n-1}$ 의 값이 100 이하의 자연수가 되어야 하므로 n 의 값은 1, 3, 5, 7이 될 수 있다.

즉, b 의 값으로 가능한 값은 $2^0, 2^2, 2^4, 2^6$

(ii) $b=p^n$ (n 은 자연수, p 는 2가 아닌 소수)이면

$$a=2^{\frac{k}{2}} \times p^{\frac{n}{4}}$$

이므로 n 이 4의 배수이면 어떤 음이 아닌 정수 k 에 대하여 a 의 값이 자연수가 될 수 있지만 n 이 4의 배수가 아니면 모든 음이 아닌 정수 k 에 대하여 a 의 값이 자연수가 될 수 없다.

따라서 n 은 4의 배수이고 $b=p^n$ 의 값이 100 이하의 자연수가 되는 경우는 $p=3, n=4$ 뿐이다.

즉, b 의 값으로 가능한 값은 3^4

(iii) $b=2^n \times p^m$ (n, m 은 자연수, p 는 2가 아닌 소수)이면

$$a=2^{\frac{k}{2}} \times (2^n \times p^m)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2k+n}{4}} \times p^{\frac{m}{4}}$$

이므로 (i), (ii)에서와 같은 방법으로 n 은 짝수, m 은 4의 배수이어야 한다.

이때 $n=2, m=4, p=3$ 이면 $b=2^2 \times 3^4=324$ 이므로 조건을 만족시키는 100 이하의 자연수 b 는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 b 의 값으로 가능한 값은 $2^0, 2^2, 2^4, 2^6, 3^4$ 이다.

31

주머니에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 숫자를 차례로 a, b 라 하면 $a+b=4$ 에서 $a=1, b=3$ 또는 $a=2, b=2$ 또는 $a=3, b=1$ 이다.

주머니에서 첫 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자가 i ($i=1, 2, 3$)인 사건을 X_i , 주머니에서 두 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자가 j ($j=1, 2, 3$)인 사건을 Y_j 라 하자.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad P(X_1 \cap Y_3) &= P(X_1)P(Y_3|X_1) \\ &= \frac{{}_1C_1}{{}_6C_1} \times \frac{{}_3C_1}{{}_5C_1} = \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad P(X_2 \cap Y_2) &= P(X_2)P(Y_2|X_2) \\ &= \frac{{}_2C_1}{{}_6C_1} \times \frac{{}_1C_1}{{}_3C_1} = \frac{2}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad P(X_3 \cap Y_1) &= P(X_3)P(Y_1|X_3) \\ &= \frac{{}_3C_1}{{}_6C_1} \times \frac{{}_1C_1}{{}_3C_1} = \frac{3}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{4}{15}$$

답 ②

32

배드민턴 동호회의 전체 회원 중 임의로 1명을 선택할 때, 이 회원이 A 회사의 셔틀콕을 사용하는 회원인 사건을 X , 여성인 사건을 Y 라 하자. 전체 회원의 80%는 A 회사의 셔틀콕을 사용하므로

$$P(X) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$$

A 회사의 셔틀콕을 사용하는 회원의 40%가 여성이므로

$$P(Y|X) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$$

B 회사의 셔틀콕을 사용하는 회원의 60%가 여성이므로

$$P(Y|X^c) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

따라서 전체 회원 중 임의로 1명을 선택할 때, 이 회원이 여성일 확률은

$$\begin{aligned} P(Y) &= P(X \cap Y) + P(X^c \cap Y) \\ &= P(X)P(Y|X) + P(X^c)P(Y|X^c) \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} + \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{11}{25} \end{aligned}$$

답 ①

33

가위바위보 게임을 1번 하여 학생 A가 이기는 사건을 X , 가위바위보 게임의 결과에 따라 주사위를 던져서 나온 눈의 수의 합이 5인 사건을 Y 라 하자.

(i) 가위바위보 게임을 1번 하여 학생 A가 이기는 경우의 수는 두 학생 A, B가 각각 가위, 보 또는 바위, 가위 또는 보, 바위인 3이므로

$$P(X) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

주사위를 2번 던져서 나온 눈의 수의 합이 5인 경우의 수는 두 주사위에서 나온 눈의 수가 각각 1, 4 또는 2, 3 또는 3, 2 또는 4, 1인 4이므로

$$P(Y|X) = \frac{4}{6^2} = \frac{1}{9}$$

$$\text{따라서 } P(X \cap Y) = P(X)P(Y|X) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$$

(ii) 가위바위보 게임을 1번 하여 학생 A가 비기거나 지는 사건은 X^c 이므로

$$P(X^c) = 1 - P(X) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

주사위를 3번 던져서 나온 눈의 수의 합이 5인 경우의 수는 세 주사위에서 나온 눈의 수가 각각 1, 1, 3 또는 1, 3, 1 또는 3, 1, 1 또는 1, 2, 2 또는 2, 1, 2 또는 2, 2, 1인 6이므로

$$P(Y|X^c) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$$

$$\text{따라서 } P(X^c \cap Y) = P(X^c)P(Y|X^c) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{36} = \frac{1}{54}$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$$P(Y) = P(X \cap Y) + P(X^c \cap Y) = \frac{1}{27} + \frac{1}{54} = \frac{1}{18}$$

따라서 $p=18, q=1$ 이므로

$$p+q=18+1=19$$

답 19

34

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{2}{5}P(B)$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 에서

$$\frac{31}{40} = \frac{2}{5} + P(B) - \frac{2}{5}P(B)$$

$$\frac{3}{5}P(B) = \frac{3}{8}$$

$$\text{따라서 } P(B) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{8}$$

답 ③

35

두 주머니 A, B에서 각각 공을 임의로 2개씩 꺼낼 때, 나온 4개의 공 중 흰 공의 개수가 3이 되려면 주머니 A, B에서 꺼낸 공 중 흰 공의 개수가 1, 2 또는 2, 1이 되어야 한다.

(i) 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공이 흰 공 1개, 검은 공 1개인 사건을 X , 주머니 B에서 꺼낸 2개의 공이 흰 공 2개인 사건을 Y 라 하면 두 사건 X, Y 는 서로 독립이므로

$$\begin{aligned} P(X \cap Y) &= P(X)P(Y) \\ &= \frac{{}_2C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} \\ &= \frac{8}{15} \times \frac{3}{15} = \frac{8}{75} \end{aligned}$$

- (ii) 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공이 흰 공 2개인 사건을 Z , 주머니 B에서 꺼낸 2개의 공이 흰 공 1개, 검은 공 1개인 사건을 W 라 하면 두 사건 Z, W 는 서로 독립이므로

$$\begin{aligned} P(Z \cap W) &= P(Z)P(W) \\ &= \frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} \times \frac{{}_3C_1 \times {}_3C_1}{{}_6C_2} \\ &= \frac{1}{15} \times \frac{9}{15} = \frac{1}{25} \end{aligned}$$

- (i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{8}{75} + \frac{1}{25} = \frac{11}{75}$$

답 ①

36

$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 이므로

$$P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

이때 $P(A \cap B) \neq 0$ 이고, 집합 A 의 원소 중 소수는 2뿐이므로

$$A \cap B = \{2\} \text{ 이고, } P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

한편 두 사건 A 와 B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{ 에서}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{2}P(B), P(B) = \frac{1}{5}$$

따라서 $2 \in B$, $n(B) = 2$ 이고, $B \subset X$ 이어야 하므로 집합 B 로 가능한 집합은

$\{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{2, 11\}$

- (i) $B = \{2, 3\}$ 일 때,

자연수 n 은 6의 배수 중 소수 5, 7, 11을 약수로 갖지 않고, 100 이하이어야 하므로 n 은

6, 12, 18, 24, 36, 48, 54, 72, 78, 96이고, 그 개수는 10

- (ii) $B = \{2, 5\}$ 일 때,

자연수 n 은 10의 배수 중 소수 3, 7, 11을 약수로 갖지 않고, 100 이하이어야 하므로 n 은

10, 20, 40, 50, 80, 100이고, 그 개수는 6

- (iii) $B = \{2, 7\}$ 일 때,

자연수 n 은 14의 배수 중 소수 3, 5, 11을 약수로 갖지 않고, 100 이하이어야 하므로 n 은

14, 28, 56, 98이고, 그 개수는 4

- (iv) $B = \{2, 11\}$ 일 때,

자연수 n 은 22의 배수 중 소수 3, 5, 7을 약수로 갖지 않고, 100 이하이어야 하므로 n 은

22, 44, 88이고, 그 개수는 3

- (i)~(iv)에서 구하는 자연수 n 의 개수는

$$10 + 6 + 4 + 3 = 23$$

답 23

37

1개의 주사위를 던질 때 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 이고,

3의 배수가 아닌 눈이 나올 확률은 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 이다.

4개의 주사위를 동시에 던질 때 3의 배수의 눈이 나온 주사위의 개수를 m 이라 하면 3의 배수가 아닌 눈이 나온 주사위의 개수는 $4 - m$ 이므로 $m > 4 - m$ 에서 $m > 2$

이때 m 은 4 이하의 자연수이므로 $m = 3$ 또는 $m = 4$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} {}_4C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + {}_4C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 &= \frac{8}{3^4} + \frac{1}{3^4} \\ &= \frac{9}{3^4} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

답 ②

38

주머니에서 1개의 공을 꺼낼 때 홀수가 적혀 있는 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{1}{4}, \text{ 짝수가 적혀 있는 공을 꺼낼 확률은 } \frac{3}{4} \text{ 이다.}$$

주머니에서 나온 5개의 공에 적혀 있는 수의 합이 홀수가 되려면 홀수 5개 또는 홀수 3개, 짝수 2개 또는 홀수 1개, 짝수 4개를 꺼내야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} {}_5C_5 \left(\frac{1}{4}\right)^5 + {}_5C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + {}_5C_1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^4 &= \frac{1}{4^5} + \frac{90}{4^5} + \frac{405}{4^5} \\ &= \frac{496}{4^5} \\ &= \frac{31}{64} \end{aligned}$$

답 ④

39

한 개의 동전을 6번 던져 앞면이 나온 횟수를 a , 뒷면이 나온 횟수를 b 라 하면 점 A의 좌표는 $(a, 2b)$ 이므로

$$1 \leq 2b \leq a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

을 만족시켜야 한다.

$a + b = 6$, 즉 $b = 6 - a$ 를 ①에 대입하면

$$1 \leq 2(6 - a) \leq a$$

$$4 \leq a \leq \frac{11}{2}$$

이때 a 는 음이 아닌 정수이므로 $a = 4$ 또는 $a = 5$

- (i) $a = 4$, $b = 2$ 일 때 확률은

$${}_6C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{2^6}$$

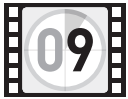
- (ii) $a = 5$, $b = 1$ 일 때 확률은

$${}_6C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{6}{2^6}$$

- (i), (ii)에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{15}{2^6} + \frac{6}{2^6} = \frac{21}{64}$$

답 ①



09 통계

정답

본문 132~144쪽

01 ①	02 ④	03 6	04 ④	05 16
06 ①	07 ⑤	08 ②	09 ⑤	10 ③
11 10	12 87	13 27	14 ⑤	15 52
16 ③	17 ③	18 ⑤	19 ④	20 ①
21 ②	22 ⑤	23 ②	24 ①	25 ③
26 ④	27 85	28 168	29 ②	30 ③
31 ②	32 ⑤	33 ⑤	34 ②	35 ①
36 16	37 ⑤	38 7	39 56	40 ④

01

$$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$$

$$=a+b+2a+2b$$

$$=3(a+b)$$

이때 확률변수 X 가 갖는 값에 대한 확률의 총합이 1이므로

$$3(a+b)=1 \text{에서 } a+b=\frac{1}{3} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$P(2 \leq X \leq 3)=P(X=2)+P(X=3) \text{에서}$$

$$P(X=2)+P(X=3)=P(X=1)+P(X=4)$$

$$b+2a=a+2b$$

$$a=b \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a=b=\frac{1}{6}$$

$$\text{따라서 } ab=\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

답 ①

02

$$P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$$

$$=\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{a}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{a}\right)$$

$$=\frac{5}{6}+\frac{6}{a}$$

이때 확률변수 X 가 갖는 값에 대한 확률의 총합이 1이므로

$$\frac{5}{6}+\frac{6}{a}=1 \text{에서 } \frac{6}{a}=\frac{1}{6}$$

따라서 $a=36$ 이고,

$$P(X=x)=\begin{cases} \frac{1}{6}-\frac{x}{36} & (x=-2, -1) \\ \frac{1}{6}+\frac{x}{36} & (x=0, 1, 2) \end{cases}$$

그러므로

$$P(-2 < X < 2)=P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)$$

$$=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{36}\right)+\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{36}\right)$$

$$=\frac{5}{9}$$

답 ④

03

다섯 개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!2!}=30$$

(i) 숫자 3 사이에 들어 있는 숫자의 개수가 1인 경우는 다음과 같다.

$$\textcircled{1} (3, 1, 3), 2, 2 \text{를 일렬로 나열하는 경우의 수는 } \frac{3!}{2!}=3$$

$$\textcircled{2} (3, 2, 3), 1, 2 \text{를 일렬로 나열하는 경우의 수는 } 3!=6$$

$$\text{따라서 } P(X=1)=\frac{3+6}{30}=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$$

(ii) 숫자 3 사이에 들어 있는 숫자의 개수가 3인 경우는 숫자 3 사이에

$$1, 2, 2 \text{를 나열하는 경우로 이 경우의 수는 } \frac{3!}{2!}=3$$

$$\text{따라서 } P(X=3)=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$$

(i), (ii)에 의하여

$$P(X=1)-P(X=3)=\frac{3}{10}-\frac{1}{10}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5} \text{이므로}$$

$$p=5, q=1 \text{이고 } p+q=5+1=6$$

답 6

참고

이산확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

04

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$

$$=a+b+3a+2b$$

이때 확률변수 X 가 갖는 값에 대한 확률의 총합이 1이므로

$$a+b+3a+2b=1 \text{에서}$$

$$4a+3b=1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$E(X)=0 \times a + 1 \times b + 2 \times 3a + 3 \times 2b$$

$$=b+6a+6b$$

$$=6a+7b$$

이때 $E(X)=2$ 이므로

$$6a+7b=2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a=\frac{1}{10}, b=\frac{1}{5}$$

따라서 이산확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

$$E(X^2)=0^2 \times \frac{1}{10} + 1^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{3}{10} + 3^2 \times \frac{2}{5}$$

$$=\frac{1}{5} + \frac{6}{5} + \frac{18}{5} = 5$$

이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=5-2^2=1$$

답 ④

05

$$\begin{aligned} P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \\ = a + b + a + b \\ = 2(a+b) \end{aligned}$$

이때 확률변수 X 가 갖는 값에 대한 확률의 총합이 1이므로

$$2(a+b) = 1 \text{에서 } a+b = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times a + 1^2 \times b + 2^2 \times a + 3^2 \times b \\ &= 4a + 10b \end{aligned}$$

이므로 $4a + 10b = 4$ 에서

$$2a + 5b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{3}$ 이므로

$$24a + 36b = 24 \times \frac{1}{6} + 36 \times \frac{1}{3} = 4 + 12 = 16$$

답 16

06

자연수 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 두 수를 임의로 선택한 후 일렬로 나열하여 만들 수 있는 두 자리의 자연수의 개수는 ${}_5P_2 = 20$

(i) $X=1$ 일 때,

$|a-b|=1$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는
(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)
로 8개이므로

$$P(X=1) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

(ii) $X=2$ 일 때,

$|a-b|=2$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는
(3, 1), (4, 2), (5, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 5)
로 6개이므로

$$P(X=2) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

(iii) $X=3$ 일 때,

$|a-b|=3$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는
(4, 1), (5, 2), (1, 4), (2, 5)
로 4개이므로

$$P(X=3) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

(iv) $X=4$ 일 때,

$|a-b|=4$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는
(5, 1), (1, 5)
로 2개이므로

$$P(X=4) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

(i)~(iv)에 의하여 이산확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$$E(X) = 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{1}{10} = 2$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{2}{5} + 2^2 \times \frac{3}{10} + 3^2 \times \frac{1}{5} + 4^2 \times \frac{1}{10} = 5$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 5 - 2^2 = 1$$

답 ①

07

두 수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는 $6^2 = 36$ 이다.

함수 $y = x^2 + 2ax + b$ 의 그래프와 x 축이 만나는 서로 다른 점의 개수는 이차방정식 $x^2 + 2ax + b = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

이차방정식 $x^2 + 2ax + b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - b$$

(i) $\frac{D}{4} = a^2 - b > 0$ 일 때

$X=2$ 이고, $a^2 > b$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 다음과 같다.

$a=1$ 이면 부등식 $a^2 > b$ 를 만족시키는 b 는 없다.

$a=2$ 이면 b 는 1, 2, 3

$a=3$ 이면 b 는 1, 2, 3, 4, 5, 6

$a=4$ 이면 b 는 1, 2, 3, 4, 5, 6

$a=5$ 이면 b 는 1, 2, 3, 4, 5, 6

$a=6$ 이면 b 는 1, 2, 3, 4, 5, 6

$$\text{따라서 } P(X=2) = \frac{27}{6^2} = \frac{3}{4}$$

(ii) $\frac{D}{4} = a^2 - b = 0$ 일 때

$X=1$ 이고, $a^2 = b$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 다음과 같다.

$a=1$ 이면 b 는 1

$a=2$ 이면 b 는 4

$$\text{따라서 } P(X=1) = \frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$$

(iii) $\frac{D}{4} = a^2 - b < 0$ 일 때

$X=0$ 이고, $a^2 < b$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 다음과 같다.

$a=1$ 이면 b 는 2, 3, 4, 5, 6

$a=2$ 이면 b 는 5, 6

$$\text{따라서 } P(X=0) = \frac{7}{6^2} = \frac{7}{36}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 이산확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{4}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{7}{36} + 1 \times \frac{1}{18} + 2 \times \frac{3}{4} = \frac{14}{9}$$

답 ⑤

08

주머니에서 임의로 두 개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_6C_2 = 15$

(i) $X=1$ 일 때

주머니에서 꺼낸 두 개의 공에 적혀 있는 수가

1, 2 또는 1, 3 또는 1, 4 또는 1, 5 또는 1, 6
일 때이므로

$$P(X=1) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

(ii) $X=2$ 일 때

주머니에서 꺼낸 두 개의 공에 적혀 있는 수가
2, 3 또는 2, 4 또는 2, 5 또는 2, 6

일 때이므로

$$P(X=2) = \frac{4}{15}$$

(iii) $X=3$ 일 때

주머니에서 꺼낸 두 개의 공에 적혀 있는 수가
3, 4 또는 3, 5 또는 3, 6

일 때이므로

$$P(X=3) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

(iv) $X=4$ 일 때

주머니에서 꺼낸 두 개의 공에 적혀 있는 수가
4, 5 또는 4, 6

일 때이므로

$$P(X=4) = \frac{2}{15}$$

(v) $X=5$ 일 때

주머니에서 꺼낸 두 개의 공에 적혀 있는 수가
5, 6

일 때이므로

$$P(X=5) = \frac{1}{15}$$

(i)~(v)에 의하여 이산확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{4}{15} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{2}{15} + 5 \times \frac{1}{15} = \frac{7}{3}$$

답 ②

09

$a=1, 2, 3$ 일 때, $f(a)=1$ 이므로

$$P(X=1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$a=4, 5$ 일 때, $f(a)=2$ 이므로

$$P(X=2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$a=6$ 일 때, $f(a)=3$ 이므로

$$P(X=3) = \frac{1}{6}$$

따라서 이산확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{3}{2} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{10}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

답 ⑤

10

이산확률변수 X 의 확률분포를

$$P(X=x_i) = p_i \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

이라 하자.

$$E((X-2)^2)$$

$$= E(X^2 - 4X + 4)$$

$$= (x_1^2 - 4x_1 + 4)p_1 + (x_2^2 - 4x_2 + 4)p_2 + \dots + (x_n^2 - 4x_n + 4)p_n$$

$$= (x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \dots + x_n^2 p_n) - 4(x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n) + 4(p_1 + p_2 + \dots + p_n)$$

$$= E(X^2) - 4E(X) + 4$$

이고, $E((X-2)^2) = 13$ 이므로

$$E(X^2) - 4E(X) + 4 = 13 \text{에서}$$

$$E(X^2) - 4E(X) = 9 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

한편, $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 4$ 에서

$$E(X^2) = \{E(X)\}^2 + 4$$

이므로 이를 ①에 대입하면

$$\{E(X)\}^2 + 4 - 4E(X) = 9$$

$$\{E(X)\}^2 - 4E(X) - 5 = 0$$

$$\{E(X) + 1\} \{E(X) - 5\} = 0$$

$$E(X) = -1 \text{ 또는 } E(X) = 5$$

이때 $x_i > 0$ 이고 $0 \leq p_i \leq 1 \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$ 이므로 $E(X) > 0$

따라서 $E(X) = 5$ 이고,

$$E(3X-2) = 3E(X) - 2 = 3 \times 5 - 2 = 13$$

답 ③

다른 풀이

$$E((X-2)^2) = V(X-2) + \{E(X-2)\}^2$$

$$= V(X) + \{E(X) - 2\}^2$$

이때 $E((X-2)^2) = 13$, $V(X) = 4$ 이므로

$$13 = 4 + \{E(X) - 2\}^2, \quad \{E(X) + 1\} \{E(X) - 5\} = 0$$

$$E(X) > 0 \text{이므로 } E(X) = 5$$

$$\text{따라서 } E(3X-2) = 3E(X) - 2 = 3 \times 5 - 2 = 13$$

11

3개의 구슬을 임의로 이 케이스의 칸에 한 개씩 넣는 경우의 수는

$${}_{12}C_3 = 220$$

1부터 12까지의 자연수를 3으로 나눈 나머지에 따라 세 집합 A_0 , A_1 , A_2 를 다음과 같이 정하자.

$$A_0 = \{3, 6, 9, 12\}, A_1 = \{1, 4, 7, 10\}, A_2 = \{2, 5, 8, 11\}$$

(i) $X=0$ 일 때

세 구슬을 넣은 칸에 적혀 있는 수의 합을 3으로 나눈 나머지가 0인 경우이다.

이 경우는 집합 A_0 에서 3개의 원소를 선택하거나 집합 A_1 에서 3개의 원소를 선택하거나 집합 A_2 에서 3개의 원소를 선택하거나 집합 A_0, A_1, A_2 에서 각각 1개의 원소를 선택하는 경우와 같으므로

$$P(X=0) = \frac{{}_4C_3 \times 3 + 4^3}{220} = \frac{76}{220} = \frac{19}{55}$$

(ii) $X=1$ 일 때

세 구슬을 넣은 칸에 적혀 있는 수의 합을 3으로 나눈 나머지가 1인 경우이다.

이 경우는 집합 A_0 에서 2개, A_1 에서 1개의 원소를 선택하거나 집합 A_1 에서 2개, A_2 에서 1개의 원소를 선택하거나 집합 A_0 에서 1개, A_2 에서 2개의 원소를 선택하는 경우와 같으므로

$$P(X=1) = \frac{{}_4C_2 \times {}_4C_1 \times 3}{220} = \frac{72}{220} = \frac{18}{55}$$

(iii) $X=2$ 일 때

세 구슬을 넣은 칸에 적혀 있는 수의 합을 3으로 나눈 나머지가 2인 경우이다.

이 경우는 집합 A_0 에서 2개, A_2 에서 1개의 원소를 선택하거나 집합 A_0 에서 1개, A_1 에서 2개의 원소를 선택하거나 집합 A_1 에서 1개, A_2 에서 2개의 원소를 선택하는 경우와 같으므로

$$P(X=2) = \frac{{}_4C_2 \times {}_4C_1 \times 3}{220} = \frac{72}{220} = \frac{18}{55}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 이산확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{19}{55}$	$\frac{18}{55}$	$\frac{18}{55}$	1

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{19}{55} + 1^2 \times \frac{18}{55} + 2^2 \times \frac{18}{55} = \frac{18}{11}$$

이므로

$$E\left(\frac{11}{3}X^2 + 4\right) = \frac{11}{3}E(X^2) + 4 = \frac{11}{3} \times \frac{18}{11} + 4 = 6 + 4 = 10$$

☞ 10

12

1부터 10까지의 자연수 중에서 3의 배수는 3개, 3의 배수가 아닌 수는 7개이다.

학생 A가 주머니에서 임의로 꺼낸 3개의 공에 적힌 수 중 3의 배수인 수의 개수를 확률변수 Y 라 하자.

$$P(Y=0) = \frac{{}_7C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{7}{24}$$

$$P(Y=1) = \frac{{}_3C_1 \times {}_7C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{21}{40}$$

$$P(Y=2) = \frac{{}_3C_2 \times {}_7C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{7}{40}$$

$$P(Y=3) = \frac{{}_3C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{120}$$

따라서 이산확률변수 Y 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	0	1	2	3	합계
$P(Y=y)$	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$	1

$$E(Y) = 0 \times \frac{7}{24} + 1 \times \frac{21}{40} + 2 \times \frac{7}{40} + 3 \times \frac{1}{120} = \frac{9}{10}$$

한편, 학생 A가 주머니에서 임의로 꺼낸 3개의 공에 적힌 수 중 3의 배수인 수의 개수가 y 이면 3의 배수가 아닌 수의 개수는 $3-y$ 이므로 학생 A가 받은 점수 x 는

$$x = 10y + 4(3-y), x = 6y + 12 \quad (y=0, 1, 2, 3)$$

따라서 두 확률변수 X, Y 사이의 관계는 $X = 6Y + 12$ 이므로

$$E(X) = E(6Y + 12)$$

$$= 6E(Y) + 12 = 6 \times \frac{9}{10} + 12 = \frac{87}{5}$$

$$E(5X) = 5E(X) = 5 \times \frac{87}{5} = 87$$

☞ 87

13

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(n, \frac{2}{3}\right)$ 를 따르므로

$$E(X) = \frac{2}{3}n$$

이때 $E(X) = 24$ 이므로

$$\frac{2}{3}n = 24 \text{에서 } n = 36$$

확률변수 Y 가 이항분포 $B\left(36^2, \frac{1}{4}\right)$ 를 따르므로

$$V(Y) = 36^2 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 243$$

$$\text{따라서 } V\left(\frac{1}{3}Y + 2\right) = \frac{1}{3^2}V(Y) = \frac{1}{9} \times 243 = 27$$

☞ 27

14

동전 3개를 동시에 던지는 1번의 시행에서 앞면이 2개, 뒷면이 1개 나올 확률은

$${}_3C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

그러므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(64, \frac{3}{8}\right)$ 을 따른다.

$$V(X) = 64 \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = 15$$

☞ ⑤

15

서로 다른 4개의 주사위에서 나오는 눈의 수의 최댓값과 최솟값의 곱이 12가 되려면 최댓값이 4, 최솟값이 3 또는 최댓값이 6, 최솟값이 2이어야 한다.

(i) 최댓값이 4, 최솟값이 3인 경우

4개의 각 주사위에서 나올 수 있는 눈의 수는 3, 4이고, 이 중에서 모두 3의 눈이 나오거나 모두 4의 눈이 나오는 경우를 제외하면 된다.

따라서 최댓값이 4, 최솟값이 3인 경우의 수는

$$2^4 - 2 = 16 - 2 = 14$$

(ii) 최댓값이 6, 최솟값이 2인 경우

① 4개의 주사위에서 나온 눈의 수의 종류가 4개인 경우

2, 6을 제외한 2개의 수를 3, 4, 5에서 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2=3$$

선택한 4개의 수를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!=24$

따라서 이 경우의 수는 $3 \times 24=72$

② 4개의 주사위에서 나온 눈의 수의 종류가 3개인 경우

2, 6을 제외한 1개의 수를 3, 4, 5에서 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1=3$$

2, 6과 선택한 1개의 수 중 2번 나오는 수를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1=3$$

선택한 4개의 수를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

따라서 이 경우의 수는 $3 \times 3 \times 12=108$

③ 4개의 주사위에서 나온 눈의 수의 종류가 2개인 경우

4개의 각 주사위에서 나올 수 있는 눈의 수는 2, 6이고, 이 중에서 모두 2의 눈이 나오거나 모두 6의 눈이 나오는 경우를 제외하면 되므로 이 경우의 수는 $2^4-2=16-2=14$

따라서 ①, ②, ③에서 최댓값이 6, 최솟값이 2인 경우의 수는

$$72+108+14=194$$

(i), (ii)에 의하여 서로 다른 4개의 주사위를 동시에 던지는 1번의 시행에서 최댓값과 최솟값의 곱이 12가 될 확률은

$$\frac{14+194}{6^4}=\frac{208}{6^4}=\frac{13}{81}$$

그러므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(324, \frac{13}{81}\right)$ 을 따른다.

$$\text{따라서 } E(X)=324 \times \frac{13}{81}=52$$

답 52

다른 풀이

(ii) 최댓값이 6, 최솟값이 2인 경우

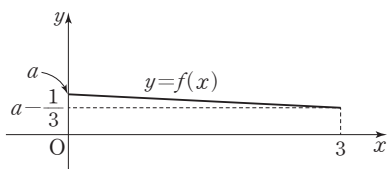
최댓값이 6, 최솟값이 2가 되려면 4번의 주사위를 던지는 시행에서 주사위의 눈의 수 1을 제외한 2, 3, 4, 5, 6이 나오는 경우에서 6이 나오지 않거나 2가 나오지 않는 경우를 빼면 된다.

즉, 4번의 시행에서 전체 경우의 수 5^4 중에서 6이 나오지 않는 경우의 수는 4^4 , 2가 나오지 않는 경우의 수는 4^4 , 2와 6이 모두 나오지 않는 경우의 수는 3^4 이므로 최댓값이 6, 최솟값이 2인 경우의 수는

$$5^4 - (4^4 + 4^4 - 3^4) = 625 - (256 + 256 - 81) = 194$$

16

X 의 확률밀도함수 $f(x)=a-\frac{1}{9}x$ 의 그래프는 그림과 같다.



확률밀도함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \left\{ a + \left(a - \frac{1}{3} \right) \right\} \times 3 \\ = 3a - \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

따라서 $3a=\frac{3}{2}$ 에서 $a=\frac{1}{2}$ 이고, $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{9}x$ 이므로

$$P(0 \leq X \leq 2a) = P(0 \leq X \leq 1)$$

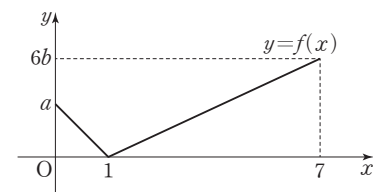
$$= \frac{1}{2} \{ f(0) + f(1) \} \times 1$$

$$= \frac{1}{2} \times \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{9} \right) \right\} = \frac{4}{9}$$

답 ③

17

X 의 확률밀도함수 $f(x)=\begin{cases} a(1-x) & (0 \leq x < 1) \\ b(x-1) & (1 \leq x \leq 7) \end{cases}$ 의 그래프는 그림과 같다.



확률밀도함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=0$, $x=7$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times 1 \times a + \frac{1}{2} \times 6 \times 6b$$

$$= \frac{a}{2} + 18b = 1$$

$$a + 36b = 2 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$P(0 \leq X \leq 1) = \frac{a}{2} = \frac{1}{10} \text{이므로 } a = \frac{1}{5} \text{이고,}$$

$$\text{㉠에서 } \frac{1}{5} + 36b = 2, \quad 36b = \frac{9}{5}, \quad b = \frac{1}{20}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(1-x) & (0 \leq x < 1) \\ \frac{1}{20}(x-1) & (1 \leq x \leq 7) \end{cases} \text{이므로}$$

$$P\left(1 \leq X \leq \frac{a}{b}\right) = P(1 \leq X \leq 4)$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times f(4)$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{3}{20} = \frac{9}{40}$$

답 ③

18

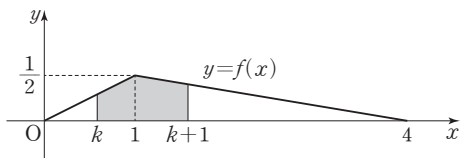
확률밀도함수의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times 4 \times a = 1 \text{에서 } a = \frac{1}{2}$$

따라서 X 의 확률밀도함수를 $f(x)$ 라 하면

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & (0 \leq x < 1) \\ -\frac{1}{6}x + \frac{2}{3} & (1 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

이고, $0 < k < 1$ 이므로 $P(k \leq X \leq k+1)$ 의 값은 다음 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같다.



$$P(k \leq X \leq k+1)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \times \left\{ f(k) + \frac{1}{2} \right\} \times (1-k) + \frac{1}{2} \times \left\{ \frac{1}{2} + f(k+1) \right\} \times k \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \right) \times (1-k) + \frac{1}{2} \times \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{6}(k+1) + \frac{2}{3} \right\} \times k \\ &= -\frac{1}{4} \times (k+1)(k-1) + \frac{k}{2} \left(1 - \frac{k}{6} \right) \\ &= -\frac{1}{3}k^2 + \frac{1}{2}k + \frac{1}{4} \\ &= -\frac{1}{3} \left(k - \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{7}{16} \end{aligned}$$

따라서 $P(k \leq X \leq k+1)$ 의 값은 $k = \frac{3}{4}$ 일 때 최댓값 $\frac{7}{16}$ 을 갖는다.

답 ⑤

19

정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 확률변수 X 의 확률밀도함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이므로

$$P(X \leq 12) = P(X \geq 18) \text{에서}$$

$$m = \frac{12+18}{2} = 15$$

확률변수 X 가 정규분포 $N(15, \sigma^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-15}{\sigma}$ 라 하면

확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} P(X \geq 18) &= P\left(\frac{X-15}{\sigma} \geq \frac{18-15}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{3}{\sigma}\right) \\ &= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{3}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

이므로

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{3}{\sigma}\right) = 0.0228 \text{에서}$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{3}{\sigma}\right) = 0.4772$$

한편 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{3}{\sigma} = 2 \text{에서 } \sigma = \frac{3}{2}$$

따라서

$$\begin{aligned} P(13.5 \leq X \leq 17.25) &= P\left(\frac{13.5-15}{\frac{3}{2}} \leq Z \leq \frac{17.25-15}{\frac{3}{2}}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 1.5) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.3413 + 0.4332 \\ &= 0.7745 \end{aligned}$$

답 ④

20

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따를 때 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 이라 하면

확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(X \geq m) - P(X \leq 3)$$

$$= P\left(\frac{X-m}{\sigma} \geq \frac{m-m}{\sigma}\right) - P\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{3-m}{\sigma}\right)$$

$$= P(Z \geq 0) - P\left(Z \leq \frac{3-m}{\sigma}\right)$$

$$= 0.5 - P\left(Z \leq \frac{3-m}{\sigma}\right)$$

이므로

$$0.5 - P\left(Z \leq \frac{3-m}{\sigma}\right) = 0.3413$$

에서

$$P\left(Z \leq \frac{3-m}{\sigma}\right) = 0.1587$$

$$P\left(Z \geq \frac{m-3}{\sigma}\right) = 0.1587$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-3}{\sigma}\right) = 0.1587$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-3}{\sigma}\right) = 0.3413$$

한편 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로 $\frac{m-3}{\sigma} = 1$

따라서

$$\begin{aligned} P(X \geq 3m-6) &= P\left(\frac{X-m}{\sigma} \geq \frac{3m-6-m}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{X-m}{\sigma} \geq 2 \times \frac{m-3}{\sigma}\right) \\ &= P(Z \geq 2) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 - 0.4772 \\ &= 0.0228 \end{aligned}$$

답 ①

21

조건 (가) $P(X \leq 3) + P(X \leq 15) = 1$ 에서

$$P(X \leq 3) + 1 - P(X \geq 15) = 1$$

$$P(X \leq 3) = P(X \geq 15)$$

따라서 $E(X) = m = \frac{3+15}{2} = 9$ 이므로 확률변수 X 는 정규분포

$N(9, \sigma^2)$ 을 따르고

$Z = \frac{X-9}{\sigma}$ 라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

조건 (나) $P(X \geq m-4) - P(|X-7| \leq 6) = 0.0668$ 에서

$$P(X \geq m-4) = P(X \geq 5)$$

$$= P\left(\frac{X-9}{\sigma} \geq \frac{5-9}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \geq -\frac{4}{\sigma}\right)$$

$$P(|X-7| \leq 6) = P(1 \leq X \leq 13)$$

$$= P\left(\frac{1-9}{\sigma} \leq \frac{X-9}{\sigma} \leq \frac{13-9}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(-\frac{8}{\sigma} \leq Z \leq \frac{4}{\sigma}\right)$$

이므로

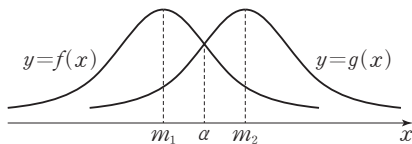
$$\begin{aligned}
 & P(X \geq m-4) - P(|X-7| \leq 6) \\
 &= P\left(Z \geq -\frac{4}{\sigma}\right) - P\left(-\frac{8}{\sigma} \leq Z \leq \frac{4}{\sigma}\right) \\
 &= \left\{0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{4}{\sigma}\right)\right\} - \left\{P\left(0 \leq Z \leq \frac{8}{\sigma}\right) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{4}{\sigma}\right)\right\} \\
 &= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{8}{\sigma}\right) \\
 &= 0.0668 \\
 &\text{따라서 } P\left(0 \leq Z \leq \frac{8}{\sigma}\right) = 0.4332 \text{이고 주어진 표준정규분포표에서} \\
 &P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332 \text{이므로} \\
 &\frac{8}{\sigma} = 1.5, \text{ 즉 } \sigma = \frac{16}{3}
 \end{aligned}$$

②

22

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 평행이동하면 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 일치하므로 $\sigma(X)=\sigma(Y)$ 이다.
조건 (나)에서 $f(a)=g(a)$ ($m_1 < a < m_2$)를 만족시키므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

$$\text{따라서 } \frac{m_1+m_2}{2} = a$$



한편 $\sigma(X)=\sigma(Y)=\sigma$ 라 하고, $Z_1 = \frac{X-m_1}{\sigma}$, $Z_2 = \frac{Y-m_2}{\sigma}$ 라 하

면 두 확률변수 Z_1, Z_2 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned}
 & P(m_1 \leq X \leq a) + P(a \leq Y \leq m_2) \\
 &= P\left(0 \leq Z_1 \leq \frac{a-m_1}{\sigma}\right) + P\left(\frac{a-m_2}{\sigma} \leq Z_2 \leq 0\right) \\
 &= P\left(0 \leq Z_1 \leq \frac{\frac{m_1+m_2}{2} - m_1}{\sigma}\right) + P\left(\frac{\frac{m_1+m_2}{2} - m_2}{\sigma} \leq Z_2 \leq 0\right) \\
 &= P\left(0 \leq Z_1 \leq \frac{m_2-m_1}{2\sigma}\right) + P\left(\frac{m_1-m_2}{2\sigma} \leq Z_2 \leq 0\right) \\
 &= P\left(0 \leq Z_1 \leq \frac{m_2-m_1}{2\sigma}\right) + P\left(0 \leq Z_2 \leq \frac{m_2-m_1}{2\sigma}\right) \\
 &= 2P\left(0 \leq Z_1 \leq \frac{m_2-m_1}{2\sigma}\right)
 \end{aligned}$$

이때 $P(m_1 \leq X \leq a) + P(a \leq Y \leq m_2) = 0.5468$ 이므로

$$2P\left(0 \leq Z_1 \leq \frac{m_2-m_1}{2\sigma}\right) = 0.5468$$

$$P\left(0 \leq Z_1 \leq \frac{m_2-m_1}{2\sigma}\right) = 0.2734$$

주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z_1 \leq 0.75) = 0.2734$ 이므로

$$\frac{m_2-m_1}{2\sigma} = 0.75$$

$$\text{즉, } \frac{m_2-m_1}{\sigma} = 1.5$$

따라서

$$\begin{aligned}
 & P(m_1 \leq X \leq m_2) \\
 &= P\left(0 \leq Z_1 \leq \frac{m_2-m_1}{\sigma}\right) \\
 &= P(0 \leq Z_1 \leq 1.5) \\
 &= 0.4332
 \end{aligned}$$

⑤

23

확률변수 X, Y 는 정규분포를 따르고 $E(X)=E(Y)=m$ 이므로 두 확률밀도함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이다.

$$m = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(10, 2.5^2)$, $N(10, 5^2)$ 을 따르므로 $Z_1 = \frac{X-10}{2.5}$, $Z_2 = \frac{Y-10}{5}$ 이라 하면 두 확률변수 Z_1, Z_2 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

이때 곡선 $y=f(x)$ 와 두 직선 $x=7$, $x=12$ 및 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 이라 하면

$$\begin{aligned}
 S_1 &= P(7 \leq X \leq 12) \\
 &= P\left(\frac{7-10}{2.5} \leq \frac{X-10}{2.5} \leq \frac{12-10}{2.5}\right) \\
 &= P(-1.2 \leq Z_1 \leq 0.8) \\
 &= P(-1.2 \leq Z_1 \leq 0) + P(0 \leq Z_1 \leq 0.8) \\
 &= P(0 \leq Z_1 \leq 1.2) + P(0 \leq Z_1 \leq 0.8) \\
 &= 0.3849 + 0.2881 = 0.673
 \end{aligned}$$

또한 곡선 $y=g(x)$ 와 두 직선 $x=7$, $x=12$ 및 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하면

$$\begin{aligned}
 S_2 &= P(7 \leq Y \leq 12) \\
 &= P\left(\frac{7-10}{5} \leq \frac{Y-10}{5} \leq \frac{12-10}{5}\right) \\
 &= P(-0.6 \leq Z_2 \leq 0.4) \\
 &= P(-0.6 \leq Z_2 \leq 0) + P(0 \leq Z_2 \leq 0.4) \\
 &= P(0 \leq Z_2 \leq 0.6) + P(0 \leq Z_2 \leq 0.4) \\
 &= 0.2257 + 0.1554 = 0.3811
 \end{aligned}$$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 두 직선 $x=7$, $x=12$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하면

$$S = S_1 - S_2 = 0.673 - 0.3811 = 0.2919$$

②

24

이 회사에서 제작한 기념품 1개의 무게를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(1.6, 0.3^2)$ 을 따르고, $Z = \frac{X-1.6}{0.3}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 0.85) &= P\left(\frac{X-1.6}{0.3} \leq \frac{0.85-1.6}{0.3}\right) \\
 &= P(Z \leq -2.5) \\
 &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2.5) \\
 &= 0.5 - 0.4938 \\
 &= 0.0062
 \end{aligned}$$

①

25

이 만두 회사에서 만든 만두 1개의 무게를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(82, 8^2)$ 을 따르고, $Z = \frac{X-82}{8}$ 라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq 98) &= P\left(\frac{a-82}{8} \leq \frac{X-82}{8} \leq \frac{98-82}{8}\right) \\ &= P\left(\frac{a-82}{8} \leq Z \leq 2\right) \\ &= 0.1359 \end{aligned}$$

이므로 $0 < \frac{a-82}{8} < 2$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned} P\left(\frac{a-82}{8} \leq Z \leq 2\right) &= P(0 \leq Z \leq 2) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-82}{8}\right) \\ &= 0.4772 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-82}{8}\right) \\ &= 0.1359 \end{aligned}$$

에서

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-82}{8}\right) = 0.3413$$

이고 주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로

$$\frac{a-82}{8} = 1, \text{ 즉 } a = 90$$

③

26

이 자격시험에 응시한 수험생의 점수를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(62, \sigma^2)$ 을 따르고, $Z = \frac{X-62}{\sigma}$ 라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

이 자격시험에서 상위 15%에 해당하는 점수가 67.2점이므로

$$P(X \geq 67.2) = 0.15 \text{이다.}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 67.2) &= P\left(\frac{X-62}{\sigma} \geq \frac{67.2-62}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{5.2}{\sigma}\right) \\ &= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{5.2}{\sigma}\right) \\ &= 0.15 \end{aligned}$$

에서

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{5.2}{\sigma}\right) = 0.35$$

이고 $P(0 \leq Z \leq 1.04) = 0.35$ 이므로 $\frac{5.2}{\sigma} = 1.04$, 즉 $\sigma = \frac{5.2}{1.04} = 5$

한편, 이 자격시험에서 상위 10%에 해당하는 점수를 a 점이라 하면

$$P(X \geq a) = 0.1 \text{이다.}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq a) &= P\left(\frac{X-62}{5} \geq \frac{a-62}{5}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{a-62}{5}\right) \\ &= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-62}{5}\right) \\ &= 0.1 \end{aligned}$$

에서

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-62}{5}\right) = 0.4$$

이고 $P(0 \leq Z \leq 1.28) = 0.4$ 이므로 $\frac{a-62}{5} = 1.28$, 즉

$$a = 5 \times 1.28 + 62 = 68.4$$

④

27

이 회사에서 생산된 제품 1개의 무게를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(m, 6^2)$ 을 따르고, $Z = \frac{X-m}{6}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} P(X \geq a) &= P\left(\frac{X-m}{6} \geq \frac{a-m}{6}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{a-m}{6}\right) \\ &= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-m}{6}\right) \\ &= 0.0062 \end{aligned}$$

에서

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-m}{6}\right) = 0.4938$$

이고 주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 2.5) = 0.4938$ 이므로

$$\frac{a-m}{6} = 2.5, \text{ 즉 } a-m = 15 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 이 회사에서 생산되는 제품의 무게가 x 일 때 이 제품의 가격 y 는

$$y = \frac{5}{2}x \text{로 정해지므로 가격이 } a \text{인 제품의 무게 } x \text{는 } a = \frac{5}{2}x \text{에서}$$

$$x = \frac{2}{5}a \text{이다.}$$

따라서 이 회사에서 생산된 제품 중 임의로 1개를 선택할 때 가격이 a

이하일 확률은 $P\left(X \leq \frac{2}{5}a\right)$ 와 같고,

$$\begin{aligned} P\left(X \leq \frac{2}{5}a\right) &= P\left(\frac{X-m}{6} \leq \frac{\frac{2}{5}a-m}{6}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{2a-5m}{30}\right) \\ &= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{5m-2a}{30}\right) \\ &= 0.0062 \end{aligned}$$

에서

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{5m-2a}{30}\right) = 0.4938$$

이고 주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 2.5) = 0.4938$ 이므로

$$\frac{5m-2a}{30} = 2.5, \text{ 즉 } 5m-2a = 75 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = 50$, $m = 35$

$$\text{따라서 } a+m = 50+35 = 85$$

85

28

이 고등학교 3학년 학생들의 확률과 통계 과목의 점수를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따른다.

이 고등학교 3학년 학생 중에서 확률과 통계 과목의 점수가 64점 미만인 학생의 비율이 30%이므로

$$P(X < 64) = 0.3 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

확률과 통계 과목의 점수가 64점 이상 72점 이하인 학생의 비율이 40 %이므로

$$P(64 \leq X \leq 72) = 0.4 \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

㉑, ㉒에서

$$P(X \leq 72) = P(X < 64) + P(64 \leq X \leq 72) = 0.3 + 0.4 = 0.7$$

이므로

$$P(X > 72) = 1 - P(X \leq 72) = 1 - 0.7 = 0.3$$

즉, $P(X < 64) = P(X > 72)$ 이므로

$$m = \frac{64 + 72}{2} = 68$$

한편, $Z = \frac{X - 68}{\sigma}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을

따르므로

$$\begin{aligned} P(X \leq 72) &= 0.5 + P(68 \leq X \leq 72) \\ &= 0.5 + P\left(\frac{68 - 68}{\sigma} \leq \frac{X - 68}{\sigma} \leq \frac{72 - 68}{\sigma}\right) \\ &= 0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{4}{\sigma}\right) = 0.7 \end{aligned}$$

즉, $P\left(0 \leq Z \leq \frac{4}{\sigma}\right) = 0.2$ 이고, $P(0 \leq Z \leq 0.52) = 0.2$ 이므로

$$\frac{4}{\sigma} = 0.52 = \frac{13}{25} \text{에서 } \sigma = \frac{100}{13}$$

$$\text{따라서 } m + 13\sigma = 68 + 13 \times \frac{100}{13} = 68 + 100 = 168$$

답 168

29

5개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_5C_2$

주머니에서 임의로 꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 곱이 4의 배수가 되는 경우는

$$1 \times 4, 2 \times 4, 3 \times 4, 4 \times 5$$

로 그 경우의 수가 4이므로 이 확률은

$$\frac{4}{{}_5C_2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

이와 같은 시행을 600번 반복할 때, 꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 곱이 4의 배수가 되는 횟수를 확률변수 X 라 하면 X 는 이항분포 $B\left(600, \frac{2}{5}\right)$

를 따른다.

확률변수 X 의 평균과 분산은 각각

$$E(X) = 600 \times \frac{2}{5} = 240$$

$$V(X) = 600 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = 12^2$$

이고, 600은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(240, 12^2)$ 을 따른다.

또한, $Z = \frac{X - 240}{12}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을

따르므로

$$\begin{aligned} P(216 \leq X \leq 252) &= P\left(\frac{216 - 240}{12} \leq \frac{X - 240}{12} \leq \frac{252 - 240}{12}\right) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 1) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 2) \end{aligned}$$

$$= 0.3413 + 0.4772$$

$$= 0.8185$$

답 ②

30

두 개의 동전을 동시에 던질 때, 두 개의 동전이 모두 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$ 이므로 두 개의 동전을 동시에 던지는 시행을 192번 반복할 때,

두 개의 동전이 모두 앞면이 나온 횟수인 확률변수 X 는 이항분포

$B\left(192, \frac{1}{4}\right)$ 을 따른다.

ㄱ. 확률변수 X 의 평균과 분산은 각각

$$E(X) = 192 \times \frac{1}{4} = 48$$

$$V(X) = 192 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 6^2 \text{ (참)}$$

ㄴ. $P(X = x) = {}_{192}C_x \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{192-x} \quad (x = 0, 1, 2, \dots, 192)$ 이므로

$$\begin{aligned} P(X = 95) &= {}_{192}C_{95} \left(\frac{1}{4}\right)^{95} \left(\frac{3}{4}\right)^{97} \\ &= {}_{192}C_{95} \frac{3^{97}}{4^{192}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 97) &= {}_{192}C_{97} \left(\frac{1}{4}\right)^{97} \left(\frac{3}{4}\right)^{95} \\ &= {}_{192}C_{95} \frac{3^{95}}{4^{192}} \end{aligned}$$

따라서 $P(X = 95) > P(X = 97)$ (거짓)

ㄷ. 192는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포

$N(48, 6^2)$ 을 따른다.

또한, $Z = \frac{X - 48}{6}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(X \leq 39) &= P\left(\frac{X - 48}{6} \leq \frac{39 - 48}{6}\right) \\ &= P(Z \leq -1.5) \\ &= P(Z \geq 1.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 60) &= P\left(\frac{X - 48}{6} \geq \frac{60 - 48}{6}\right) \\ &= P(Z \geq 2) \end{aligned}$$

따라서 $P(X \leq 39) > P(X \geq 60)$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

31

모집단의 모평균이 $m = 3$, 모표준편차가 $\sigma = 2$ 이므로

$$E(\bar{X}) = m = 3, \quad V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{4}{n}$$

따라서

$$E\left(\frac{1}{2}\bar{X} - 1\right) = \frac{1}{2}E(\bar{X}) - 1 = \frac{1}{2} \times 3 - 1 = \frac{1}{2}$$

$$V\left(\frac{1}{2}\bar{X} - 1\right) = \frac{1}{4}V(\bar{X}) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{n} = \frac{1}{n}$$

이므로

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{9}{16} \text{에서 } \frac{1}{n} = \frac{1}{16}$$

$$n = 16$$

답 ②

32

$$E(X) = -1 \times \frac{1}{5} + 0 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{3}{5} = 1$$

$$E(X^2) = (-1)^2 \times \frac{1}{5} + 0^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{3}{5} = \frac{13}{5}$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{13}{5} - 1^2 = \frac{8}{5}$$

이때 모집단에서 크기가 16인 표본의 표본평균이 \bar{X} 이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{1}{16} \times V(X) = \frac{1}{16} \times \frac{8}{5} = \frac{1}{10}$$

따라서

$$V(5\bar{X} - 2) = 25V(\bar{X}) = 25 \times \frac{1}{10} = \frac{5}{2}$$

답 ⑤

33

$$P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

$$= a + a + b = 2a + b$$

이때 확률변수 X 가 갖는 값에 대한 확률의 총합이 1이므로

$$2a + b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

모집단에서 크기 2인 표본을 X_1, X_2 라 하자.

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2} = 2 \text{가 되는 순서쌍 } (X_1, X_2) \text{는}$$

$(1, 3), (2, 2), (3, 1)$ 이므로

$$P(\bar{X}=2) = ab + a^2 + ba = a^2 + 2ab$$

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2} = \frac{5}{2} \text{가 되는 순서쌍 } (X_1, X_2) \text{는}$$

$(2, 3), (3, 2)$ 이므로

$$P\left(\bar{X} = \frac{5}{2}\right) = ab + ba = 2ab$$

$$\text{이때 } P(\bar{X}=2) = \frac{5}{4} P\left(\bar{X} = \frac{5}{2}\right) \text{에서}$$

$$a^2 + 2ab = \frac{5}{4} \times 2ab, a(2a - b) = 0$$

$$a \neq 0 \text{이므로 } 2a - b = 0, b = 2a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$$

따라서 이산확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$$

$$E(\bar{X}) = E(X) = \frac{9}{4}$$

답 ⑤

34

이 지역의 1인 가구의 하루 음식물 쓰레기 배출량을 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(400, 80^2)$ 을 따른다.

이 지역의 1인 가구 중에서 임의추출한 16가구의 하루 음식물 쓰레기 배출량의 표본평균을 \bar{X} 라 하면

$$E(\bar{X}) = 400, \sigma(\bar{X}) = \frac{80}{\sqrt{16}} = 20$$

이므로 확률변수 \bar{X} 는 정규분포 $N(400, 20^2)$ 을 따른다.

이때 $Z = \frac{\bar{X} - 400}{20}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$

을 따르므로

$$P(390 \leq \bar{X} \leq 420)$$

$$= P\left(\frac{390 - 400}{20} \leq \frac{\bar{X} - 400}{20} \leq \frac{420 - 400}{20}\right)$$

$$= P(-0.5 \leq Z \leq 1)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 0.5) + P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.1915 + 0.3413$$

$$= 0.5328$$

답 ②

35

이 음료회사에서 생산되는 A 음료 1개의 용량을 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(m, 6^2)$ 을 따르고, A 음료 중 임의추출한 9개 음료의 용량의 표본평균을 \bar{X} 라 하면

$$E(\bar{X}) = m, \sigma(\bar{X}) = \frac{6}{\sqrt{9}} = 2$$

이므로 확률변수 \bar{X} 는 정규분포 $N(m, 2^2)$ 을 따른다.

이때 $Z_1 = \frac{\bar{X} - m}{2}$ 으로 놓으면 확률변수 Z_1 은 표준정규분포 $N(0, 1)$

을 따르므로

$$P(\bar{X} \geq 2m) = P\left(\frac{\bar{X} - m}{2} \geq \frac{2m - m}{2}\right)$$

$$= P\left(Z_1 \geq \frac{m}{2}\right)$$

또한, 이 음료회사에서 생산되는 B 음료 1개의 용량을 확률변수 Y 라 하면 Y 는 정규분포 $N(m+250, 12^2)$ 을 따르고, B 음료 중 임의추출한 16개 음료의 용량의 표본평균을 \bar{Y} 라 하면

$$E(\bar{Y}) = m + 250, \sigma(\bar{Y}) = \frac{12}{\sqrt{16}} = 3$$

이므로 확률변수 \bar{Y} 는 정규분포 $N(m+250, 3^2)$ 을 따른다.

이때 $Z_2 = \frac{\bar{Y} - m - 250}{3}$ 으로 놓으면 확률변수 Z_2 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(\bar{Y} \leq 2m) = P\left(\frac{\bar{Y} - m - 250}{3} \leq \frac{2m - m - 250}{3}\right)$$

$$= P\left(Z_2 \leq \frac{m - 250}{3}\right)$$

이때 $P(\bar{X} \geq 2m) = P(\bar{Y} \leq 2m)$ 에서

$$P\left(Z_1 \geq \frac{m}{2}\right) = P\left(Z_2 \leq \frac{m - 250}{3}\right)$$

$$P\left(Z \geq \frac{m}{2}\right) = P\left(Z \leq \frac{m - 250}{3}\right)$$

(단, Z 는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.)

이므로

$$\frac{m}{2} = -\frac{m - 250}{3}, 3m = -2m + 500, 5m = 500$$

따라서 $m = 100$

답 ①

36

이 고등학교 학생들의 1인당 하루에 섭취하는 음식의 칼로리를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(2600, 400^2)$ 을 따른다.

이 고등학교 학생 중에서 임의추출한 n 명이 하루에 섭취하는 음식의 칼로리의 표본평균이 \bar{X} 이므로 $E(\bar{X})=2600, \sigma(\bar{X})=\frac{400}{\sqrt{n}}$

확률변수 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(2600, \left(\frac{400}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

이때 $Z=\frac{\bar{X}-2600}{\frac{400}{\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \geq 2700) &= P\left(\frac{\bar{X}-2600}{\frac{400}{\sqrt{n}}} \geq \frac{2700-2600}{\frac{400}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) \\ &= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) = 0.1587 \end{aligned}$$

에서 $P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) = 0.3413$

이고 주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{4} = 1$$

따라서 $\sqrt{n}=4$ 이고 $n=16$

답 16

37

이 회사에서 생산되는 서틀콕의 무게 X 는 정규분포 $N(4.8, 0.4^2)$ 을 따른다.

이때 $Z_1=\frac{X-4.8}{0.4}$ 로 놓으면 확률변수 Z_1 은 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(X \geq 4a) = P\left(\frac{X-4.8}{0.4} \geq \frac{4a-4.8}{0.4}\right) = P(Z_1 \geq 10a-12)$$

한편 이 회사에서 생산된 서틀콕 중에서 임의추출한 16개의 무게의 표본평균이 \bar{X} 이므로 $E(\bar{X})=4.8, \sigma(\bar{X})=\frac{0.4}{\sqrt{16}}=0.1$

확률변수 \bar{X} 는 정규분포 $N(4.8, 0.1^2)$ 을 따른다.

이때 $Z_2=\frac{\bar{X}-4.8}{0.1}$ 로 놓으면 확률변수 Z_2 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(\bar{X} \leq 6-a) = P\left(\frac{\bar{X}-4.8}{0.1} \leq \frac{6-a-4.8}{0.1}\right) = P(Z_2 \leq 12-10a)$$

따라서

$$\begin{aligned} &P(X \geq 4a) + P(\bar{X} \leq 6-a) \\ &= P(Z_1 \geq 10a-12) + P(Z_2 \leq 12-10a) \\ &= P(Z \geq 10a-12) + P(Z \leq 12-10a) \\ &= 0.1336 \quad (\text{단, } Z \text{는 표준정규분포를 따르는 확률변수이다.}) \end{aligned}$$

이므로 $2P(Z \geq 10a-12) = 0.1336$

$$P(Z \geq 10a-12) = 0.0668$$

$$0.5 - P(0 \leq Z \leq 10a-12) = 0.0668$$

$$P(0 \leq Z \leq 10a-12) = 0.4332$$

이고 주어진 표준정규분포표에서 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 이므로

$$10a-12=1.5$$

따라서 $a=1.35$

답 ⑤

38

모표준편차 $\sigma=6$ 이고, 표본의 크기 $n=9$, 표본평균 $\bar{x}=42$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$42 - 1.96 \times \frac{6}{\sqrt{9}} \leq m \leq 42 + 1.96 \times \frac{6}{\sqrt{9}}$$

$$42 - 1.96 \times 2 \leq m \leq 42 + 1.96 \times 2$$

$$38.08 \leq m \leq 45.92$$

따라서 신뢰구간에 속하는 자연수는 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45이고 그 개수는 7

답 7

39

표본의 크기 $n=49$, 표본표준편차 $s=20$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{20}{\sqrt{49}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{20}{\sqrt{49}}$$

$$\text{따라서 } c = 1.96 \times \frac{20}{\sqrt{49}} = 1.96 \times \frac{20}{7} = 5.6 \text{이므로}$$

$$10c = 10 \times 5.6 = 56$$

답 56

40

(i) 모표준편차 σ , 표본의 크기 $n=49$, 표본평균 $\bar{x}=4.3$ 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$4.3 - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{49}} \leq m \leq 4.3 + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{49}}$$

이므로

$$a = 4.3 - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{49}} = 4.3 - 0.28\sigma$$

$$b = 4.3 + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{49}} = 4.3 + 0.28\sigma$$

$$\text{따라서 } b - 2a = 0.84\sigma - 4.3$$

(ii) 모표준편차 σ , 표본의 크기 $n=36$, 표본평균 $\bar{x}=5.6$ 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$5.6 - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{36}} \leq m \leq 5.6 + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{36}}$$

이므로

$$c = 5.6 - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{36}} = 5.6 - 0.43\sigma$$

$$d = 5.6 + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{36}} = 5.6 + 0.43\sigma$$

$$\text{따라서 } d - 2c = 1.29\sigma - 5.6$$

이때 $b - 2a = d - 2c$ 이므로

$$0.84\sigma - 4.3 = 1.29\sigma - 5.6 \text{에서 } 0.45\sigma = 1.3$$

$$\text{따라서 } \sigma = \frac{1.3}{0.45} = \frac{130}{45} = \frac{26}{9}$$

답 ④

실전 모의고사

실전 모의고사 1회

본문 146~153쪽

01 ②	02 ④	03 ⑤	04 ③	05 ②
06 ③	07 ①	08 ①	09 ③	10 ①
11 ④	12 ②	13 ④	14 ③	15 ⑤
16 ②	17 ①	18 ①	19 ②	20 ③
21 ④	22 35	23 8	24 7	25 22
26 81	27 30	28 24	29 34	30 256

01

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{8} \times 27^{\frac{1}{3}} &= \sqrt[3]{2^3} \times (3^3)^{\frac{1}{3}} \\
 &= (\sqrt[3]{2})^3 \times 3^{3 \times \frac{1}{3}} \\
 &= 2 \times 3 \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

답 ②

02

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 로 놓으면
 $a_7 = a_6 + 3$ 에서 $d = a_7 - a_6 = 3$
따라서 $a_3 = a_1 + 2d = 2 + 2 \times 3 = 8$

03

분모와 분자를 4^n 으로 나누면

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 3}{4^{n-1} + 3^{1-n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{4^n}}{\frac{1}{4} + \frac{3^{1-n}}{4^n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{1}{4} + 3 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n} \\
 &= \frac{1 + 3 \times 0}{\frac{1}{4} + 3 \times 0} \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

답 ⑤

04

$(A \cap B^c) \cup B = A \cup B$ 이고, $(A \cap B^c) \cap B = \emptyset$ 이므로
 $P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(B)$
 $= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3+4}{12} = \frac{7}{12}$

답 ③

05

$$\log_3 xy = -4 \text{에서 } \log_3 x + \log_3 y = 4 \quad \cdots \cdots ㉠$$

$$(\log_3 x)(\log_3 y) = \frac{15}{4} \quad \cdots \cdots ㉡$$

 $\log_3 x = X, \log_3 y = Y$ 로 놓으면㉠에서 $X + Y = 4$ 이므로 $Y = 4 - X$

$$㉡ \text{에서 } XY = \frac{15}{4}$$

 $Y = 4 - X$ 를 $XY = \frac{15}{4}$ 에 대입하면

$$X(4 - X) = \frac{15}{4}$$

$$4X^2 - 16X + 15 = 0$$

$$(2X - 3)(2X - 5) = 0$$

$$X = \frac{3}{2} \text{ 또는 } X = \frac{5}{2}$$

$$X = \frac{3}{2} \text{이면 } Y = 4 - X = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$X = \frac{5}{2} \text{이면 } Y = 4 - X = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\log_3 x = \frac{3}{2}, \log_3 y = \frac{5}{2} \text{ 또는 } \log_3 x = \frac{5}{2}, \log_3 y = \frac{3}{2}$$

$$x = 3\sqrt{3}, y = 9\sqrt{3} \text{ 또는 } x = 9\sqrt{3}, y = 3\sqrt{3}$$

따라서 $\alpha = 3\sqrt{3}, \beta = 9\sqrt{3}$ 또는 $\alpha = 9\sqrt{3}, \beta = 3\sqrt{3}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \alpha^2 + \beta^2 &= (9\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3})^2 \\
 &= 243 + 27 = 270
 \end{aligned}$$

답 ②

06

곡선 $y = e^x - 1$ 과 직선 $y = (e - 1)x$ 가 만나는 두 점의 x 좌표는 각각 0, 1이고, 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $(e - 1)x \geq e^x - 1$ 이므로
곡선 $y = e^x - 1$ 과 직선 $y = (e - 1)x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \{(e - 1)x - (e^x - 1)\} dx &= \int_0^1 \{(e - 1)x - e^x + 1\} dx \\
 &= \left[\frac{e - 1}{2} x^2 - e^x + x \right]_0^1 \\
 &= \frac{e - 1}{2} - e + 1 - (-1) \\
 &= \frac{-e + 3}{2}
 \end{aligned}$$

답 ③

07

 $x^3 + y^3 - 2xy + a = 0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - 2y - 2x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(-2x + 3y^2) \frac{dy}{dx} = -3x^2 + 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 + 2y}{-2x + 3y^2} \quad (\text{단, } -2x + 3y^2 \neq 0)$$

곡선 $x^3 + y^3 - 2xy + a = 0$ 위의 점 $(1, b)$ 를 접점으로 하는 접선의 기울기가 $\frac{1}{10}$ 이므로

$$\frac{-3 + 2b}{-2 + 3b^2} = \frac{1}{10}$$

$$3b^2 - 20b + 28 = 0$$

$$(b-2)(3b-14)=0$$

$$b < 4 \text{ 이므로 } b=2$$

또, 점 $(1, 2)$ 가 곡선 $x^3 + y^3 - 2xy + a = 0$ 위의 점이므로

$$1^3 + 2^3 - 2 \times 1 \times 2 + a = 0$$

$$a = -5$$

$$\text{따라서 } a+b = -5+2 = -3$$

답 ①

08

$$V\left(\frac{1}{3}X+1\right) = \frac{1}{3} \text{에서}$$

$$\frac{1}{9}V(X) = \frac{1}{3} \text{이므로 } V(X) = 3$$

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ 을 따르므로

$$V(X) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 3 \text{에서}$$

$$n = 12$$

$$\text{따라서 } E(X) = n \times \frac{1}{2} = 12 \times \frac{1}{2} = 6 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^n x^2 {}_n C_x \left(\frac{1}{2}\right)^n &= \sum_{x=0}^{12} x^2 {}_{12} C_x \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \\ &= E(X^2) \\ &= V(X) + \{E(X)\}^2 \\ &= 3 + 6^2 \\ &= 3 + 36 = 39 \end{aligned}$$

답 ①

09

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-2}{x^3-1} = 1 \text{에서}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{g(x)-2\} = 0 \text{이어야 하므로}$$

$$g(1) = 2 \quad \dots\dots ㉠$$

이 값을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-2}{x^3-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \times \frac{1}{x^2+x+1} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2+x+1} \\ &= g'(1) \times \frac{1}{3} = 1 \end{aligned}$$

$$g'(1) = 3 \quad \dots\dots ㉡$$

또, 함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$f(g(x)) = x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(g(x))g'(x) = 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

$x=1$ 을 대입하면

$$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))}$$

$$\textcircled{1} \text{과 } \textcircled{2} \text{으로부터 } 3 = \frac{1}{f'(2)}$$

$$\text{따라서 } f'(2) = \frac{1}{3}$$

답 ③

10

한 개의 주사위를 세 번 던져서 차례로 나오는 눈의 수 a, b, c 가

$a > b > c$ 를 만족시키는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_6 C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} = 20$$

한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$$6^3 = 216$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{20}{216} = \frac{5}{54}$$

답 ①

다른 풀이

한 개의 주사위를 세 번 던져서 차례로 나오는 눈의 수 a, b, c 가

$a > b > c$ 를 만족시키는 경우를 표로 나타내면 다음과 같으므로

a	b	c
3	2	1
4	3	2, 1
	2	1
5	4	3, 2, 1
	3	2, 1
	2	1
6	5	4, 3, 2, 1
	4	3, 2, 1
	3	2, 1
	2	1

그 경우의 수는 $1+3+6+10=20$

한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$$6^3 = 216$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{20}{216} = \frac{5}{54}$$

11

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n}{n(n+1)} - 3 \right\} \text{이 수렴하므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{a_n}{n(n+1)} - 3 \right\} = 0 \text{이어야 한다.}$$

$$\text{즉, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n(n+1)} = 3 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2a_n}{2n + 3a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n^2}{n(n+1)} + 2 \times \frac{a_n}{n(n+1)}}{\frac{2n}{n(n+1)} + 3 \times \frac{a_n}{n(n+1)}} \\ &= \frac{3+2 \times 3}{0+3 \times 3} = 1 \end{aligned}$$

답 ④

12

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(p, \log_3 p)$, $(q, \log_3 q)$ ($0 < p < q$)라 하면 조건 (가)에서 선분 AB의 중점 M의 y좌표는 0이므로

$$\frac{\log_3 p + \log_3 q}{2} = 0 \text{에서}$$

$$\log_3 pq = 0, pq = 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

조건 (나)에서 두 직선 OA, OB의 기울기의 곱은 -1이어야 하므로

$$\frac{\log_3 p}{p} \times \frac{\log_3 q}{q} = \frac{\log_3 p \times \log_3 q}{pq} = -1$$

$$\log_3 p \times \log_3 q = -pq \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦과 ⑧에서

$$\log_3 p \times \log_3 \frac{1}{p} = -1, (\log_3 p)^2 = 1$$

$$\log_3 p = \pm 1$$

즉, $p = \frac{1}{3}$ 일 때, $q = 3$ 이다.

따라서 $A\left(\frac{1}{3}, -1\right)$, $B(3, 1)$ 이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} &= \frac{1}{2} \times \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + (-1)^2} \times \sqrt{3^2 + 1^2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{3} \times \sqrt{10} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

답 ②

13

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$n=1$ 일 때,

$$\sum_{k=1}^2 a_k = a_1 + a_2 = a_1 + (a_1 + d) = 15$$

$$\text{이므로 } 2a_1 + d = 15 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$n=2$ 일 때,

$$\sum_{k=1}^4 a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$= 15 + a_3 + a_4$$

$$= 15 + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d)$$

$$= 15 + 2a_1 + 5d = 42$$

$$\text{이므로 } 2a_1 + 5d = 42 \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

⑨, ⑩을 연립하여 풀면

$$a_1 = 6, d = 3$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10} a_{2k} = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20}$$

$$= 9 + 15 + 21 + \dots + 63$$

$$= \frac{10(9+63)}{2}$$

$$= 360$$

답 ④

14

(i) $x=0$ 일 때,

조건 (가)에서 $|y| + z = 4$

$y' = |y|$ 로 놓으면 $y' \geq 1$ 이고,

$y' - 1 = y''$ 으로 놓으면 $y'' \geq 0$ 이므로

$$y'' + 1 + z = 4, \text{ 즉 } y'' + z = 3 \quad (y'' \geq 0, z \geq 0) \quad \dots\dots \textcircled{11}$$

방정식 ⑪을 만족시키는 y'' , z 의 순서쌍 (y'', z) 의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수

$${}_2H_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

와 같으므로 조건을 만족시키는 $0, y, z$ 의 순서쌍 $(0, y, z)$ 의 개수는

$$2 \times 4 = 8$$

(ii) $x=1$ 일 때,

조건 (가)에서 $|y| + z = 3$

$y' = |y|$ 로 놓으면 $y' \geq 1$ 이고,

$y' - 1 = y''$ 으로 놓으면 $y'' \geq 0$ 이므로

$$y'' + 1 + z = 3, \text{ 즉 } y'' + z = 2 \quad (y'' \geq 0, z \geq 0) \quad \dots\dots \textcircled{12}$$

방정식 ⑫을 만족시키는 y'' , z 의 순서쌍 (y'', z) 의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수

$${}_2H_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

과 같으므로 조건을 만족시키는 $1, y, z$ 의 순서쌍 $(1, y, z)$ 의 개수는

$$2 \times 3 = 6$$

(iii) $x \geq 2$ 일 때,

조건 (가), (나)를 만족시키는 정수 x, y, z 는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍

(x, y, z) 의 개수는

$$8 + 6 = 14$$

답 ③

다른 풀이

조건을 만족시키는 세 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	y	z
0	± 1	3
	± 2	2
	± 3	1
	± 4	0
1	± 1	2
	± 2	1
	± 3	0

따라서 조건을 만족시키는 세 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는

$$2 \times 4 + 2 \times 3 = 14$$

15

이 농장에서 재배한 사과 1개의 무게를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규 분포 $N(470, 20^2)$ 을 따른다.

무게가 450 g 이상 510 g 이하인 사과를 골드애플로 선별할 확률은

$$P(450 \leq X \leq 510) = P\left(\frac{450-470}{20} \leq Z \leq \frac{510-470}{20}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= P(-1 \leq Z \leq 2) \\
 &= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\
 &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 2) \\
 &= 0.82
 \end{aligned}$$

따라서 골드애플로 선별되어 A 마트에 납품한 사과의 개수는
 $300000 \times 0.82 = 246000$

답 ⑤

16

조건 (나)에 의하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-1}{x-3} = 1 \text{ 이므로 } f(3)=1, f'(3)=1 \text{ 이고,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)-2}{x-5} = \frac{1}{3} \text{ 이므로 } f(5)=2, f'(5)=\frac{1}{3} \text{ 이다.}$$

조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 역함수이므로
 $f(3)=1$ 에서 $g(1)=3$, $f(5)=2$ 에서 $g(2)=5$ 이고,

$$f'(3)=1, f'(5)=\frac{1}{3} \text{ 에서 역함수의 미분법에 의하여}$$

$$g'(1)=\frac{1}{f'(3)}=1, g'(2)=\frac{1}{f'(5)}=3 \text{ 이다.}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 h(x) dx &= \int_1^2 \{g(x) + (x+1)g'(x) + xg''(x)\} dx \\
 &= \int_1^2 g(x) dx + \int_1^2 xg'(x) dx + \int_1^2 g'(x) dx \\
 &\quad + \int_1^2 xg''(x) dx \\
 &= \int_1^2 g(x) dx + [xg(x)]_1^2 - \int_1^2 g(x) dx + \int_1^2 g'(x) dx \\
 &\quad + [xg'(x)]_1^2 - \int_1^2 g'(x) dx \\
 &= [xg(x)]_1^2 + [xg'(x)]_1^2 \\
 &= 2g(2) - g(1) + 2g'(2) - g'(1) \\
 &= 2 \times 5 - 3 + 2 \times 3 - 1 \\
 &= 10 - 3 + 6 - 1 = 12
 \end{aligned}$$

답 ②

다른 풀이

조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 역함수이다.

조건 (나)에 의하여 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-1}{x-3} = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{f(x)-1} = 1 \text{ 에서 } f(x)=y \text{ 로 놓으면}$$

$$x=g(y) \text{ 이고 } x \rightarrow 3 \text{ 일 때, } y=f(x) \rightarrow 1 \text{ 이다.}$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{f(x)-1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{g(y)-3}{y-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)-2}{x-5} = \frac{1}{3} \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{f(x)-2} = 3 \text{ 에서 } f(x)=y \text{ 로 놓으면}$$

$$x=g(y) \text{ 이고 } x \rightarrow 5 \text{ 일 때, } y=f(x) \rightarrow 2 \text{ 이다.}$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{f(x)-2} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{g(y)-5}{y-2} = 3$$

함수 $g(x)$ 는 미분가능하므로

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{g(y)-3}{y-1} = 1 \text{ 에서 } g(1)=3, g'(1)=1 \text{ 이고,}$$

$$\lim_{y \rightarrow 2} \frac{g(y)-5}{y-2} = 3 \text{ 에서 } g(2)=5, g'(2)=3 \text{ 이다.}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 [x\{g(x)+g'(x)\}]' &= \{g(x)+g'(x)\} + x\{g'(x)+g''(x)\} \\
 &= g(x)+g'(x)+xg'(x)+xg''(x) \\
 &= g(x)+(x+1)g'(x)+xg''(x)
 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 h(x) dx &= \int_1^2 \{g(x) + (x+1)g'(x) + xg''(x)\} dx \\
 &= [x\{g(x)+g'(x)\}]_1^2 \\
 &= 2\{g(2)+g'(2)\} - \{g(1)+g'(1)\} \\
 &= 2(5+3) - (3+1) \\
 &= 2 \times 8 - 4 \\
 &= 16 - 4 = 12
 \end{aligned}$$

17

지원한 4명의 직원 A, B, C, D가 이 업무에 투입 가능한 요일을 표로 나타내면 다음과 같다.

	월	화	수	목	금	토	일
A	○	○					
B	○		○				
C				○		○	○
D				○	○	○	○

(i) A, B, C를 선발하여 서로 다른 요일에 투입하는 경우

A를 월요일에 투입하면 B는 수요일에만, C는 목요일, 토요일, 일요일에 가능하고,

A를 화요일에 투입하면 B는 월요일, 수요일에, C는 목요일, 토요일, 일요일에 가능하므로 그 경우의 수는

$$3 + 2 \times 3 = 3 + 6 = \boxed{9} \text{ 이다.}$$

(ii) A, B, D를 선발하여 서로 다른 요일에 투입하는 경우

A를 월요일에 투입하면 B는 수요일에만, D는 목요일, 금요일, 토요일, 일요일에 가능하고,

A를 화요일에 투입하면 B는 월요일, 수요일에, D는 목요일, 금요일, 토요일, 일요일에 가능하므로 그 경우의 수는

$$4 + 2 \times 4 = 4 + 8 = \boxed{12} \text{ 이다.}$$

(iii) A, C, D를 선발하여 서로 다른 요일에 투입하는 경우

A를 월요일 또는 화요일에 투입하면 C가 목요일, D는 금요일, 토요일, 일요일에 가능하고, C가 토요일, D는 목요일, 금요일, 토요일에 가능하므로 그 경우의 수는

$$2 \times 3 \times 3 = \boxed{18} \text{ 이다.}$$

(iv) B, C, D를 선발하여 서로 다른 요일에 투입하는 경우

B를 월요일 또는 수요일에 투입하면 C가 목요일, D는 금요일, 토요일, 일요일에 가능하고, C가 토요일, D는 목요일, 금요일, 토요일에 가능하고, C가 일요일, D는 목요일, 금요일, 토요일에 가능하므로 그 경우의 수는

$2 \times 3 \times 3 = 18$ 이다.

(i)~(iv)에서 이 업무를 수행하기 위하여 4명의 직원 중 임의로 3명을 선발하여 서로 다른 요일에 투입할 때, A가 투입될 확률은

$$\frac{9+12+18}{9+12+2 \times 18} = \frac{39}{57} = \frac{13}{19}$$

이다.

따라서 $p=9$, $q=12$, $r=18$ 이므로 $p+q+r=9+12+18=39$

답 ①

18

부채꼴 OAB의 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 θ 이므로 중심이 부채꼴 OAB의 내부에 있고, 두 선분 OA, OB에 접하며 호 AB와 한 점에서 만나는 원의 중심을 C, 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\overline{OC} + r = 1, \text{ 즉 } \overline{OC} = 1 - r \quad \cdots \cdots ㉠$$

점 C에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\angle COH = \frac{\theta}{2} \text{이므로}$$

$$r = \overline{OC} \sin \frac{\theta}{2} \quad \cdots \cdots ㉡$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } r = (1-r) \sin \frac{\theta}{2}$$

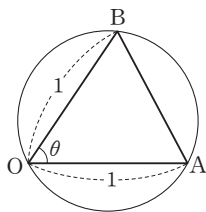
$$r \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \right) = \sin \frac{\theta}{2}$$

$$r = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{1 + \sin \frac{\theta}{2}}$$

따라서 이 원의 넓이 $S(\theta)$ 는

$$S(\theta) = \pi \left(\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{1 + \sin \frac{\theta}{2}} \right)^2 = \pi \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \right)^2}$$

그림과 같이 세 점 O, A, B를 지나는 원은 삼각형 OAB에 외접하는 원과 같다.



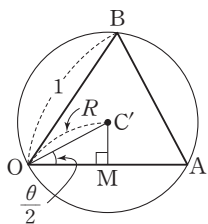
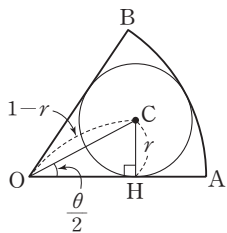
삼각형 OAB에 외접하는 원의 중심을 C' , 반지름의 길이를 R 라 하고, 중심 C' 에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= \frac{1}{2} \overline{OA} \\ &= \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

이고, $\angle C'OM = \frac{1}{2} \angle BOA = \frac{\theta}{2}$ 이므로 직각삼각형 OMC'에서

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{R}, \text{ 즉 } R = \frac{1}{2 \cos \frac{\theta}{2}}$$

이 원의 넓이 $T(\theta)$ 는



$$T(\theta) = \pi R^2 = \pi \frac{1}{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta^2 \times T(\theta)}{S(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta^2 \times \pi \frac{1}{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}}}{\pi \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \right)^2}} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta^2 \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \right)^2}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left(\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right)^2 \times \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \right)^2}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= 1^2 \times \frac{1^2}{1^2} = 1 \end{aligned}$$

답 ①

19

수열 $\{a_n\}$ 의 항 중에서 처음으로 $a_n=0$ 을 만족시키는 n 의 값을 m 이라 하자.

(i) $m \leq 5$ 인 경우

$$a_{m+1} = \frac{1}{2} a_m \text{ 이어야 하므로 } a_m = a_{m+1} = a_{m+2} = \cdots = 0$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_n \neq 0$ 인 항의 개수가 5보다 작다.

(ii) $m=6$ ($a_6=0$)인 경우

$$a_{m+1} = \frac{1}{2} a_m \text{ 인 경우 } m \geq 7 \text{ 인 모든 항은 } 0 \text{ 이고}$$

$$a_6 = \frac{1}{2} a_5 \text{ 또는 } a_6 = \frac{1}{2} (a_5 - 1) \text{ 이므로 } a_5 = 1 \text{ 이다.}$$

그러므로 조건 (가)로부터 얻은 수열 $\{a_n\}$ 과 $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 는 다음과 같다.

$\sum_{k=1}^{10} a_k$	$\{a_n\}$										
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	\cdots
31	16	8	4	2	1	0	0	0	0	0	\cdots
32	17										
34	18	9									
35	19										
38	20	10	5								
39	21										
41	22	11									
42	23										
46	24	12	6	3							
47	25										
49	26	13									
50	27										
53	28	14	7								
54	29										
56	30	15									
57	31										

위의 표에서 조건 (나)를 만족시키고 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 47$ 인 수열 $\{a_n\}$ 은

$$a_1 = 25, a_5 = 1 \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } a_1 + a_5 = 25 + 1 = 26$$

(iii) $m=7$ ($a_7=0$)인 경우

조건 (가)로부터 $a_6=1$ 이면 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 가 모두 0이 아니므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iv) $m \geq 8$ 인 경우 (iii)과 같은 결과를 얻는다.

따라서 (i)~(iv)로부터

$$a_1 + a_5 = 26$$

답 ②

20

조건 (다)에서 $f(x)$ 의 주기가 π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \text{에서 } b=2$$

조건 (가)에서 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ 이므로

$$a \cos 2\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + c = -1$$

$$-a + c = -1 \quad \cdots \text{㉠}$$

조건 (나)에서 $f(x)$ 의 최댓값은 3이고 $a > 0$ 이므로

$$a + c = 3 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$$a=2, c=1$$

그러므로

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \cos 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 \\ &= 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 \\ &= 2 \sin 2x + 1 \end{aligned}$$

ㄱ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 나타

낸 그림에서 ㉠ 부분과 ㉡ 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.

그러므로 구하는 넓이는

$$2 \times \left\{ \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \right\} = \pi$$

이다. (참)

$$\text{ㄴ. } g(x) = \cos^2 2x + 2(2 \sin 2x + 1)$$

$$= (1 - \sin^2 2x) + 4 \sin 2x + 2$$

$$= -\sin^2 2x + 4 \sin 2x + 3$$

$$= -(\sin 2x - 2)^2 + 7$$

그러므로 $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $\sin 2x = 1$ 일 때 최댓값 6을 갖는다. (거짓)

ㄷ. 방정식 $f(x) = k\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ 의 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$,

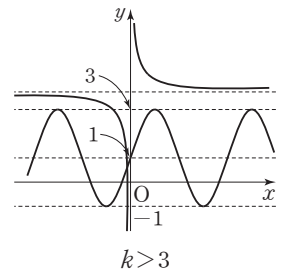
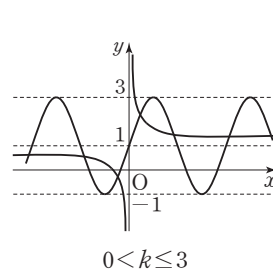
$y = k\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{k}{x} + k$ 의 그래프의 교점의 개수와 같다.

(i) $k=0$ 인 경우

두 함수 $y=f(x)$, $y=0$ (x 축)의 그래프의 교점은 무수히 많다.

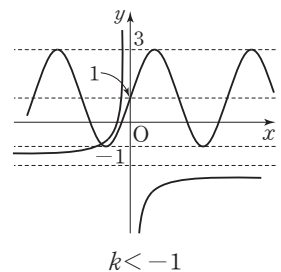
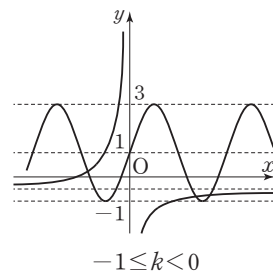
(ii) $k > 0$ 인 경우

그림과 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=k\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{k}{x} + k$ 의 그래프의 교점의 개수는 $0 < k \leq 3$ 일 때 무수히 많지만, $k > 3$ 일 때 무수히 많지 않다.



(iii) $k < 0$ 인 경우

그림과 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=k\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{k}{x} + k$ 의 그래프의 교점의 개수는 $-1 \leq k < 0$ 일 때 무수히 많지만, $k < -1$ 일 때 무수히 많지 않다.



(i), (ii), (iii)으로부터 방정식 $f(x) = k\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ 의 해가 무수히 많이

존재하도록 하는 정수 k 의 개수는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

21

$g(x)$ 는 미분가능한 함수이므로 $g(0)$, $g(4\pi)$, 극값들 중에서 최솟값이 존재한다.

(i) $g(0)$ 과 $g(4\pi)$ 의 값을 구하면 다음과 같다.

$$f(0) = 0 + \sin 0 - 1 = -1 \text{이므로}$$

$$g(0) = \int_{f(0)}^{f(0)+2} \{(t-0)^4 + (t-0)^2\} dt$$

$$= \int_{-1}^1 (t^4 + t^2) dt$$

$$= \left[\frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^3 \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) = \frac{16}{15}$$

$$\text{또, } f(4\pi) = 4\pi + \sin 4\pi - 1 = 4\pi - 1 \text{이므로}$$

$$g(4\pi) = \int_{4\pi-1}^{4\pi+1} \{(t-4\pi)^4 + (t-4\pi)^2\} dt$$

$$= \int_{-1}^1 (t^4 + t^2) dt$$

$$= \left[\frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^3 \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) = \frac{16}{15}$$

(ii) 함수 $g(x)$ 의 극값을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int_{f(x)}^{f(x)+2} \{(t-x)^4 + (t-x)^2\} dt \\
 &= \left[\frac{1}{5}(t-x)^5 + \frac{1}{3}(t-x)^3 \right]_{f(x)}^{f(x)+2} \\
 &= \left[\frac{1}{5}\{f(x)+2-x\}^5 + \frac{1}{3}\{f(x)+2-x\}^3 \right] \\
 &\quad - \left[\frac{1}{5}\{f(x)-x\}^5 + \frac{1}{3}\{f(x)-x\}^3 \right]
 \end{aligned}$$

이때 $f'(x) = \cos x + 1$ 이므로

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= [\{f(x)+2-x\}^4 + \{f(x)+2-x\}^2] \{f'(x)-1\} \\
 &\quad - [\{f(x)-x\}^4 + \{f(x)-x\}^2] \{f'(x)-1\} \\
 &= \{(\sin x+1)^4 + (\sin x+1)^2\} \cos x \\
 &\quad - \{(\sin x-1)^4 + (\sin x-1)^2\} \cos x \\
 &= \cos x [\{(\sin x+1)^4 - (\sin x-1)^4\} \\
 &\quad + \{(\sin x+1)^2 - (\sin x-1)^2\}] \\
 &= \cos x \{(\sin x+1)^2 - (\sin x-1)^2\} \\
 &\quad \times \{(\sin x+1)^2 + (\sin x-1)^2 + 1\} \\
 &= 4 \cos x \sin x (2 \sin^2 x + 3)
 \end{aligned}$$

$g'(x)=0$ 에서 $2 \sin^2 x + 3 \neq 0$ 이므로

$\cos x=0$ ㉠

또는 $\sin x=0$ ㉡

㉠을 풀면

$x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{2}\pi$ 또는 $x = \frac{7}{2}\pi$

이므로

$$\begin{aligned}
 g\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2} \left\{ \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \right\} dt \\
 &= \int_0^2 (t^4 + t^2) dt = \frac{136}{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g\left(\frac{3}{2}\pi\right) &= \int_{\frac{3}{2}\pi-2}^{\frac{3}{2}\pi} \left\{ \left(t - \frac{3}{2}\pi\right)^4 + \left(t - \frac{3}{2}\pi\right)^2 \right\} dt \\
 &= \int_{-2}^0 (t^4 + t^2) dt = \frac{136}{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g\left(\frac{5}{2}\pi\right) &= \int_{\frac{5}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi+2} \left\{ \left(t - \frac{5}{2}\pi\right)^4 + \left(t - \frac{5}{2}\pi\right)^2 \right\} dt \\
 &= \int_0^2 (t^4 + t^2) dt = \frac{136}{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g\left(\frac{7}{2}\pi\right) &= \int_{\frac{7}{2}\pi-2}^{\frac{7}{2}\pi} \left\{ \left(t - \frac{7}{2}\pi\right)^4 + \left(t - \frac{7}{2}\pi\right)^2 \right\} dt \\
 &= \int_{-2}^0 (t^4 + t^2) dt = \frac{136}{15}
 \end{aligned}$$

㉡을 풀면

$x = n\pi$ ($n=1, 2, 3$)

이므로

$$\begin{aligned}
 g(n\pi) &= \int_{n\pi-1}^{n\pi+1} \{(t-n\pi)^4 + (t-n\pi)^2\} dt \\
 &= \int_{-1}^1 (t^4 + t^2) dt = \frac{16}{15}
 \end{aligned}$$

(i), (ii)로부터 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$...	π	...	$\frac{3}{2}\pi$...	2π	...
$g'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\frac{16}{15}$	\nearrow	$\frac{136}{15}$	\searrow	$\frac{16}{15}$	\nearrow	$\frac{136}{15}$	\searrow	$\frac{16}{15}$	\nearrow

x	...	$\frac{5}{2}\pi$...	3π	...	$\frac{7}{2}\pi$...	4π
$g'(x)$	+	0	-	0	+	0	-	
$g(x)$	\nearrow	$\frac{136}{15}$	\searrow	$\frac{16}{15}$	\nearrow	$\frac{136}{15}$	\searrow	$\frac{16}{15}$

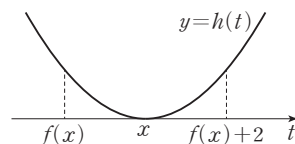
따라서 $g(x)$ 의 최솟값(극솟값)은 $\frac{16}{15}$ 이므로 x 에 대한 방정식

$g(x) = \frac{16}{15}$ 의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

답 ④

다른 풀이

$h(t) = (t-x)^4 + (t-x)^2$ 이라 하면 임의의 양수 α 에 대하여 $h(x-\alpha) = h(x+\alpha)$ 이므로 함수 $y = h(t)$ 의 그래프는 그림과 같이 $t=x$ 에 대하여 대칭이다.



또, 함수 $g(x)$ 의 적분구간에서 위 끝 $f(x)+2$ 와 아래 끝 $f(x)$ 의 차는

$$\{f(x)+2\} - f(x) = 2$$

이다.

그러므로 함수 $g(x)$ 는 적분구간의 위 끝 $f(x)+2$ 와 아래 끝 $f(x)$ 가 $t=x$ 에 대하여 대칭일 때 최솟값을 갖는다.

$$\text{즉, } \frac{f(x) + \{f(x)+2\}}{2} = x \text{에서}$$

$$f(x)+1=x, (x+\sin x-1)+1=x$$

$$\sin x=0$$

그러므로 $0 \leq x \leq 4\pi$ 에서 $x = n\pi$ ($n=0, 1, 2, 3, 4$)

따라서 구하는 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

22

$$\begin{aligned}
 \frac{{}_6P_3}{3!} + {}_5H_2 &= \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} + {}_6C_2 \\
 &= 20 + \frac{6 \times 5}{2!} \\
 &= 20 + 15 = 35
 \end{aligned}$$

답 35

다른 풀이

$$\frac{{}_6P_3}{3!} + {}_5H_2 = {}_6C_3 + {}_6C_2 = {}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3!} = 35$$

23

$\sin \theta + \cos \theta = -\sqrt{2}$ 에서 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = 2$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = 2$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$$

따라서

$$\left(\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} \right)^2 = \left(\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} \right)^2$$

$$= \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \right)^2 \\ = 8$$

8

24

$x = 2\sqrt{2}(e^{\frac{t}{2}} - 1)$, $y = e^t - 4t - 1$ 에서

$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2}e^{\frac{t}{2}}$, $\frac{dy}{dt} = e^t - 4$ 이므로

점 P의 시각 t 에서의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(\sqrt{2}e^{\frac{t}{2}})^2 + (e^t - 4)^2} = \sqrt{2e^t + e^{2t} - 8e^t + 16} \\ = \sqrt{e^{2t} - 6e^t + 16} \\ = \sqrt{(e^t - 3)^2 + 7}$$

따라서 $e^t = 3$, 즉 $t = \ln 3$ 일 때 점 P의 속력의 최솟값은 $\sqrt{7}$ 이므로 $m = \sqrt{7}$ 이고 $m^2 = 7$

7

25

$\sin(\pi - x) = \sin x$ 이고 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ 이므로

$$3 \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 3 \sin x - \sin x \\ = 2 \sin x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (6x + 5) \left\{ 3 \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \right\} dx \\ = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (6x + 5) \sin x \, dx$$

$f(x) = 6x + 5$, $g'(x) = \sin x$ 로 놓으면

$f'(x) = 6$, $g(x) = -\cos x$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (6x + 5) \sin x \, dx \\ = \left[(6x + 5)(-\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6(-\cos x) \, dx \\ = \{0 - (-5)\} + 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx \\ = 5 + 6 \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ = 5 + 6(1 - 0) \\ = 11$$

$$\text{따라서 } 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (6x + 5) \sin x \, dx = 2 \times 11 = 22$$

22

26

모표준편차가 4이고,

16명을 임의추출하여 구한 표본평균의 값이 \bar{x}_1 이므로

모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_1 - 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{16}} \leq m \leq \bar{x}_1 + 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{16}} \text{에서}$$

$$\bar{x}_1 - 1.96 \leq m \leq \bar{x}_1 + 1.96$$

이 신뢰구간은 $50 - a \leq m \leq 51.96$ 과 같으므로

$$\bar{x}_1 - 1.96 = 50 - a, \quad \bar{x}_1 + 1.96 = 51.96 \text{에서}$$

$$\bar{x}_1 = 50, \quad a = 1.96$$

모표준편차가 4이고,

n 명을 임의추출하여 구한 표본평균의 값이 \bar{x}_2 이므로

모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_2 - 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x}_2 + 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{9}{10} \bar{x}_1 \text{이므로 } \bar{x}_2 = \frac{9}{10} \bar{x}_1 = \frac{9}{10} \times 50 = 45 \text{이고,}$$

$$b = \frac{2}{3} a \text{이므로 } 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{n}} = \frac{2}{3} \times 1.96 \text{에서}$$

$$\sqrt{n} = 6, \text{ 즉 } n = 36 \text{이다.}$$

따라서 $n = 36$, $\bar{x}_2 = 45$ 이므로

$$n + \bar{x}_2 = 36 + 45 = 81$$

81

27

m 개의 흰색 상자 중에는 당첨 제비가 들어 있는 상자가 3개, 당첨 제비가 들어 있지 않은 상자가 $(m-3)$ 개이고, $(n-m)$ 개의 검은색 상자 중에는 당첨 제비가 들어 있는 상자가 5개, 당첨 제비가 들어 있지 않은 상자가 $(n-m-5)$ 개이다.

그러므로 전체 상자 중에는 당첨 제비가 들어 있는 상자가

$$3 + 5 = 8(\text{개}), \text{ 당첨 제비가 들어 있지 않은 상자가 } (n-8) \text{개이다.}$$

$$\text{이때 } P(A) = \frac{8}{n}, \quad P(B) = \frac{m}{n}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{n}$$

즉, 두 사건 A, B 가 서로 독립이면

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{이어야 하므로}$$

$$\frac{3}{n} = \frac{8}{n} \times \frac{m}{n} \text{에서 } \frac{m}{n} = \frac{3}{8}$$

따라서

$$\frac{m}{n} = \frac{3 \times 4}{8 \times 4} = \frac{3 \times 5}{8 \times 5} = \dots = \frac{3 \times 33}{8 \times 33}$$

이므로 두 자연수 m, n 의 모든 순서쌍 (m, n) 의 개수는 30이다.

30

28

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d ($d \neq 0$)이라 하자.

$$b_{2n} = b_{2n-1} + 2a_{2n} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$b_{2n+1} = b_{2n} - 2a_{2n+1} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①의 양변에 $n=1$ 을 대입하면 $b_1 = 2a_1$ 이므로

$$b_2 = b_1 + 2a_2 = 2a_1 + 2(a_1 + d) = 4a_1 + 2d$$

②의 양변에 $n=1$ 을 대입하면

$$b_3 = b_2 - 2a_3 = 4a_1 + 2d - 2(a_1 + 2d) = 2a_1 - 2d$$

①의 양변에 $n=2$ 를 대입하면

$$b_4 = b_3 + 2a_4 = 2a_1 - 2d + 2(a_1 + 3d) = 4a_1 + 4d$$

②의 양변에 $n=2$ 를 대입하면

$$b_5 = b_4 - 2a_5 = 4a_1 + 4d - 2(a_1 + 4d) = 2a_1 - 4d$$

①의 양변에 $n=3$ 을 대입하면

$$b_6 = b_5 + 2a_6 = 2a_1 - 4d + 2(a_1 + 5d) = 4a_1 + 6d$$

㉔의 양변에 $n=3$ 을 대입하면

$$b_7 = b_6 - 2a_7 = 4a_1 + 6d - 2(a_1 + 6d) = 2a_1 - 6d$$

㉕의 양변에 $n=4$ 를 대입하면

$$b_8 = b_7 + 2a_8 = 2a_1 - 6d + 2(a_1 + 7d) = 4a_1 + 8d$$

㉖의 양변에 $n=4$ 를 대입하면

$$b_9 = b_8 - 2a_9 = 4a_1 + 8d - 2(a_1 + 8d) = 2a_1 - 8d$$

㉗의 양변에 $n=5$ 를 대입하면

$$b_{10} = b_9 + 2a_{10} = 2a_1 - 8d + 2(a_1 + 9d) = 4a_1 + 10d$$

㉘의 양변에 $n=5$ 를 대입하면

$$b_{11} = b_{10} - 2a_{11} = 4a_1 + 10d - 2(a_1 + 10d) = 2a_1 - 10d$$

㉙의 양변에 $n=6$ 을 대입하면

$$b_{12} = b_{11} + 2a_{12} = 2a_1 - 10d + 2(a_1 + 11d) = 4a_1 + 12d$$

㉚의 양변에 $n=6$ 을 대입하면

$$b_{13} = b_{12} - 2a_{13} = 4a_1 + 12d - 2(a_1 + 12d) = 2a_1 - 12d$$

$b_{13} = a_{13}$ 에서

$$2a_1 - 12d = a_1 + 12d \text{ 이므로}$$

$$a_1 = 24d$$

$$b_{13} = 36 \text{ 이므로}$$

$$b_{13} = 2a_1 - 12d = 2 \times 24d - 12d = 48d - 12d = 36d = 36 \text{ 에서}$$

$$d = 1$$

$$\text{따라서 } a_1 = 24d = 24 \times 1 = 24$$

답 24

다른 풀이

$$b_{2n} = b_{2n-1} + 2a_{2n} \quad \dots\dots \text{㉑}$$

$$b_{2n+1} = b_{2n} - 2a_{2n+1} \quad \dots\dots \text{㉒}$$

㉑, ㉒의 양변에 각각 n 대신 1, 2, 3, 4, 5, 6을 차례로 대입하면

$$b_2 = b_1 + 2a_2$$

$$b_3 = b_2 - 2a_3$$

$$b_4 = b_3 + 2a_4$$

$$b_5 = b_4 - 2a_5$$

$$b_6 = b_5 + 2a_6$$

$$b_7 = b_6 - 2a_7$$

$$b_8 = b_7 + 2a_8$$

$$b_9 = b_8 - 2a_9$$

$$b_{10} = b_9 + 2a_{10}$$

$$b_{11} = b_{10} - 2a_{11}$$

$$b_{12} = b_{11} + 2a_{12}$$

$$b_{13} = b_{12} - 2a_{13}$$

위 식의 양변을 각각 더하면

$$b_{13} = b_1 + 2(a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \dots + a_{12} - a_{13})$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d ($d \neq 0$)이라 하면

$$b_{13} = b_1 + 2(-d - d - \dots - d) = b_1 + 2 \times (-6d) = b_1 - 12d \text{ 이고,}$$

$$b_1 = 2a_1 \text{ 이므로 } b_{13} = 2a_1 - 12d$$

$$b_{13} = a_{13} \text{ 에서}$$

$$2a_1 - 12d = a_1 + 12d \text{ 이므로 } a_1 = 24d$$

$$b_{13} = 36 \text{ 이므로}$$

$$b_{13} = 2a_1 - 12d = 2 \times 24d - 12d = 48d - 12d = 36d = 36 \text{ 에서}$$

$$d = 1$$

$$\text{따라서 } a_1 = 24d = 24 \times 1 = 24$$

29

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{2^2 + 3^2 - (\sqrt{10})^2}{2 \times 2 \times 3} = \frac{1}{4}$$

$$\text{이므로 } \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

또한, 삼각형 ABP에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AP}}{\sin B} = \frac{2}{\sin 60^\circ} \text{ 이므로}$$

$$\frac{\overline{AP}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\overline{AP} = \frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \sqrt{5}$$

또, 점 A에서 변 BP에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{BP} = \overline{BH} + \overline{HP}$$

$$= \overline{AB} \times \cos B + \overline{AP} \times \cos 60^\circ$$

$$= 2 \times \frac{1}{4} + \sqrt{5} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

$$\overline{PC} = \overline{BC} - \overline{BP}$$

$$= 3 - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

$$= \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5})$$

$$\overline{BP} : \overline{PC} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) : \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5})$$

$$= 1 : \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{2} = 2 : (-5 + 3\sqrt{5})$$

따라서 $a = -5$, $b = 3$ 이므로

$$a^2 + b^2 = (-5)^2 + 3^2 = 34$$

답 34

30

기울기가 t ($t > 0$)인 직선이 곡선 $y = f(x)$ 에 접할 때, 접점의 x 좌표와 y 좌표가 각각 $g(t)$ 와 $h(t)$ 이므로

$$f'(g(t)) = t \quad \dots\dots \text{㉑}$$

$$f(g(t)) = h(t) \quad \dots\dots \text{㉒}$$

원점에서 곡선 $y = f(x)$ 에 그은 접선의 기울기가 k 일 때, 곡선

$y = f(x)$ 위의 점의 좌표를 $(a, f(a))$ ($a > 0$)으로 놓으면 원점과

점 $(a, f(a))$ 를 지나는 직선의 기울기와 곡선 $y = f(x)$ 위의

점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기가 서로 같으므로

$$k = \frac{f(a)}{a} = f'(a)$$

$$f(x) = (\ln x)^2 \text{ 에서 } f(a) = (\ln a)^2 \text{ 이고,}$$

$$f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}, \quad f'(a) = \frac{2 \ln a}{a}$$

$$\text{이므로 } k = \frac{(\ln a)^2}{a} = \frac{2 \ln a}{a}$$

$$(\ln a)^2 = 2 \ln a, \quad \ln a(\ln a - 2) = 0$$

$$\ln a = 0 \text{ 또는 } \ln a = 2$$

$$\text{즉, } a = 1 \text{ 또는 } a = e^2$$

$a=1$ 이면

$k=f'(1)=\frac{2\ln 1}{1}=0$ 이므로 $g(t), h(t)$ 가 정의되지 않는다.

그러므로 $a=e^2$, 즉 $g(k)=e^2$ 이고,

$$k=f'(e^2)=\frac{2\ln e^2}{e^2}=\frac{4}{e^2}$$

㉠의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$f''(g(t))g'(t)=1$$

$$\text{이므로 } g'(t)=\frac{1}{f''(g(t))} \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

㉡의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$f'(g(t))g'(t)=h'(t) \text{이고, ㉠, ㉡에 의하여}$$

$$h'(t)=f'(g(t))g'(t)=tg'(t)$$

$$f'(x)=\frac{2\ln x}{x} \text{에서}$$

$$f''(x)=\frac{2\left(\frac{1}{x}\times x - \ln x \times 1\right)}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

이므로

$$g'(k)=\frac{1}{f''(g(k))}=\frac{1}{f''(e^2)}=\frac{1}{\frac{2(1-\ln e^2)}{e^4}}=-\frac{e^4}{2}$$

$$\text{따라서 } k^2 \times g'(k)=\frac{16}{e^4} \times \left(-\frac{e^4}{2}\right)=-8,$$

$$k \times h'(k)=k^2 \times g'(k)=-8 \text{이므로}$$

$$\{k^2 \times g'(k) + k \times h'(k)\}^2 = \{-8 + (-8)\}^2 \\ = (-16)^2 = 256$$

다른 풀이

기울기가 t ($t>0$)인 직선이 곡선 $y=f(x)$ 에 접할 때

접점의 x 좌표와 y 좌표가 각각 $g(t)$ 와 $h(t)$ 이므로

$$f'(g(t))=t \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$f(g(t))=h(t) \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

원점에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선의 기울기가 k 일 때,

곡선 $y=f(x)$ 위의 점의 좌표를 $(a, f(a))$ ($a>0$)으로 놓으면

원점과 점 $(a, f(a))$ 를 지나는 직선의 기울기와 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기가 서로 같으므로

$$k=\frac{f(a)}{a}=f'(a)$$

$$f(x)=(\ln x)^2 \text{에서 } f(a)=(\ln a)^2 \text{이고,}$$

$$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}, f'(a)=\frac{2\ln a}{a} \text{이므로}$$

$$k=\frac{(\ln a)^2}{a}=\frac{2\ln a}{a}$$

$$(\ln a)^2=2\ln a$$

$$\ln a(\ln a-2)=0$$

$$\ln a=0 \text{ 또는 } \ln a=2$$

$$a=1 \text{ 또는 } a=e^2$$

$$a=1 \text{이면 } k=f'(1)=\frac{2\ln 1}{1}=0 \text{이므로}$$

$g(t), h(t)$ 가 정의되지 않는다.

그러므로 $a=e^2$, 즉 $g(k)=e^2$ 이고,

$$k=f'(e^2)=\frac{2\ln e^2}{e^2}=\frac{4}{e^2}$$

㉠에서

$$f'(g(t))=\frac{2\ln(g(t))}{g(t)}=t \text{이므로}$$

$$2\ln(g(t))=tg(t) \quad \cdots \cdots \text{㉢}$$

㉢의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{2g'(t)}{g(t)}=g(t)+tg'(t) \quad \cdots \cdots \text{㉣}$$

㉣의 양변에 $t=k$ 를 대입하면

$$\frac{2g'(k)}{g(k)}=g(k)+kg'(k)$$

$$k=\frac{4}{e^2} \text{이고, } g(k)=e^2 \text{이므로}$$

$$\frac{2g'(k)}{e^2}=e^2+\frac{4}{e^2}g'(k) \text{이므로}$$

$$g'(k)=-\frac{e^4}{2}$$

㉡의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$h'(t)=f'(g(t))g'(t) \text{이므로}$$

$$h'(k)=f'(g(k))g'(k)=f'(e^2) \times \left(-\frac{e^4}{2}\right) \\ =\frac{2\ln e^2}{e^2} \times \left(-\frac{e^4}{2}\right)=-2e^2$$

$$\text{따라서 } k^2 \times g'(k)=\frac{16}{e^4} \times \left(-\frac{e^4}{2}\right)=-8,$$

$$k \times h'(k)=\frac{4}{e^2} \times (-2e^2)=-8 \text{이므로}$$

$$\{k^2 \times g'(k) + k \times h'(k)\}^2 = \{-8 + (-8)\}^2 \\ = (-16)^2 = 256$$

256

01 ①	02 ④	03 ②	04 ④	05 ⑤
06 ③	07 ③	08 ①	09 ①	10 ④
11 ②	12 ④	13 ⑤	14 ④	15 ②
16 ⑤	17 ②	18 ①	19 ③	20 ⑤
21 ⑤	22 55	23 6	24 19	25 32
26 100	27 736	28 135	29 10	30 7

01

$$(2^{-\frac{1}{2}})^6 = 2^{-\frac{1}{2} \times 6}$$

$$= 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

답 ①

02

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=3$, $a_4=8$ 인 등비수열이므로 공비를 r 라 하면

$$a_n = a_1 r^{n-1} \text{이므로}$$

$$a_4 = a_1 r^3$$

$$8 = 3r^3, r^3 = \frac{8}{3}$$

이때 $a_2 = a_1 r = 3r$, $a_3 = a_1 r^2 = 3r^2$ 이므로

$$a_2 a_3 = 9r^3 = 9 \times \frac{8}{3} = 24$$

답 ④

03

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n+1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{3+0} - 0 = \frac{1}{3}$$

답 ②

04

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^c)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

두 사건 A , B 가 서로 독립이므로

$$P(A)P(B) = P(A \cap B) \text{에서}$$

$$\frac{1}{4} P(B) = \frac{1}{20}$$

$$\text{따라서 } P(B) = \frac{1}{5}$$

답 ④

05

함수 $y=3^{x-1}+2$ 의 그래프는 함수 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $y=3^x$ 의 그래프의 점근선은 $y=0$ (x 축)이므로 함수 $y=3^{x-1}+2$ 의 그래프의 점근선은 $y=2$ 이다.

따라서 직선 $y=2$ 와 직선 $y=\frac{1}{4}x+1$ 이 만나는 점의 x 좌표는

$$2 = \frac{1}{4}x + 1 \text{에서 } \frac{1}{4}x = 1, \text{ 즉 } x=4$$

그러므로 $a=4$, $b=2$ 이고,

$$a+b=4+2=6$$

답 ⑤

06

$$11^{11} = (1+10)^{11}$$

$$= {}_{11}C_0 + {}_{11}C_1 \times 10 + {}_{11}C_2 \times 10^2 + {}_{11}C_3 \times 10^3 + \cdots + {}_{11}C_{11} \times 10^{11}$$

$$= 1 + 110 + 5500 + 165000 + \cdots$$

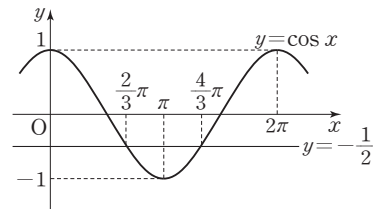
이므로 백의 자리 숫자는

$$1+5=6$$

답 ③

07

함수 $y=\cos x$ 의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$ 은 그림과 같다.



$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 부등식 $\cos x \leq -\frac{1}{2}$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{2}{3}\pi \leq x \leq \frac{4}{3}\pi$$

$$\text{즉, } \frac{8}{12}\pi \leq x \leq \frac{16}{12}\pi$$

따라서 부등식 $\cos \frac{n\pi}{12} \leq -\frac{1}{2}$ 을 만족시키는 24 이하의 자연수 n 은

8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16이고, 그 개수는 9

답 ③

08

$a_1=1$ 이고 $a_{n+1}=\frac{n}{n+3}a_n$ 이므로

$$a_2 = \frac{1}{4} a_1 = \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{2}{5} a_2 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$$a_4 = \frac{3}{6} a_3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$$

$$a_5 = \frac{4}{7} a_4 = \frac{4}{7} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{35}$$

답 ①

09

$g(-5)=a$ 라 하면 $f(a)=-5$ 이므로

$$a^3+a^2+a+1=-5 \text{에서 } a^3+a^2+a+6=0$$

$$(a+2)(a^2-a+3)=0$$

이때 a 가 실수이므로 $a=-2$

$$\text{즉, } g(-5)=-2$$

한편 $f(x)=x^3+x^2+x+1$ 에서 $f'(x)=3x^2+2x+1$ 이므로 역함수의 미분법에 의하여

$$\begin{aligned} g'(-5) &= \frac{1}{f'(g(-5))} \\ &= \frac{1}{f'(-2)} \\ &= \frac{1}{3 \times (-2)^2 + 2 \times (-2) + 1} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

답 ①

10

이 공장에서 생산된 컴퓨터 모니터 1개의 수명을 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(16000, 800^2)$ 을 따른다.

이 공장에서 생산된 컴퓨터 모니터 중에서 64개를 임의추출하여 얻은 컴퓨터 모니터의 수명의 표본평균을 \bar{X} 라 하면

$$E(\bar{X})=16000, \sigma(\bar{X})=\frac{800}{\sqrt{64}}=100 \text{이므로 확률변수 } \bar{X} \text{는 정규분포}$$

$N(16000, 100^2)$ 을 따른다.

이때 $Z=\frac{\bar{X}-16000}{100}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \leq 15900) &= P\left(Z \leq \frac{15900-16000}{100}\right) \\ &= P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 - 0.3413 = 0.1587 \end{aligned}$$

답 ④

11

$f(x)=xe^{x-1}$ 이라 하면

$$f'(x)=e^{x-1}+xe^{x-1}=(x+1)e^{x-1}$$

$$f'(1)=2$$

이므로 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 2이다.

$$g(x)=\frac{2x}{x+1} \text{라 하면}$$

$$g'(x)=\frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$g'(a)=\frac{2}{(a+1)^2}$$

이므로 점 (a, b) 에서의 접선의 기울기는 $\frac{2}{(a+1)^2}$ 이다.

이때 두 접선이 서로 평행하므로

$$\frac{2}{(a+1)^2}=2 \text{에서 } (a+1)^2=1$$

$$a=-2 \text{ 또는 } a=0$$

$$a < -1 \text{이므로 } a=-2$$

$$\text{한편, } b=g(a)=g(-2)=4$$

$$\text{따라서 } a+b=-2+4=2$$

답 ②

12

$$2x^5=\frac{1}{2}\sqrt[5]{x} \text{에서}$$

$$2x^5=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{5}}, x^{\frac{24}{5}}=\frac{1}{4}$$

$$x^{\frac{12}{5}}=\pm\frac{1}{2}, x=\pm\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{12}}$$

이때 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{12}}=a$ 라 하면 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} &2\left(\int_0^a \frac{1}{2}\sqrt[5]{x} dx - \int_0^a 2x^5 dx\right) \\ &=2\left(\left[\frac{5}{12}x^{\frac{6}{5}}\right]_0^a - \left[\frac{1}{3}x^6\right]_0^a\right) \\ &=\frac{5}{6}a^{\frac{6}{5}} - \frac{2}{3}a^6 \\ &=\frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{12} \times \frac{6}{5}} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{12} \times 6} \\ &=\frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} \\ &=\frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &=\frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

답 ④

13

$$a=\int_0^1 f(x)dx \text{라 하면}$$

$$f(x)=(x-1)e^x+a(x-2)e^x$$

$$=(a+1)xe^x-(2a+1)e^x$$

이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= (a+1)\int_0^1 xe^x dx - (2a+1)\int_0^1 e^x dx \\ &= (a+1)\left\{\left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx\right\} - (2a+1)\left[e^x\right]_0^1 \\ &= (a+1)\left\{\left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1\right\} - (2a+1)\left[e^x\right]_0^1 \\ &= (a+1)\{e-(e-1)\} - (2a+1)(e-1) \\ &= (3-2e)a - e + 2 \end{aligned}$$

따라서 $a=(3-2e)a - e + 2$ 에서 $2(e-1)a=2-e$ 이므로

$$a=\frac{2-e}{2(e-1)}$$

$$\text{즉, } \int_0^1 f(x)dx = \frac{2-e}{2(e-1)}$$

답 ⑤

14

$\overline{AB}=a$, $\angle CAB=\alpha$, $\angle DAB=\beta$ 라 하면

오른쪽 그림에서

$$\tan \alpha = \frac{3}{a}, \tan \beta = \frac{1}{a} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \tan(\angle CAD) &= \tan(\alpha - \beta) \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{3}{a} - \frac{1}{a}}{1 + \frac{3}{a} \cdot \frac{1}{a}} = \frac{2}{a + \frac{3}{a}} \end{aligned}$$

그런데 $a + \frac{3}{a} \geq 2\sqrt{3}$ 에서

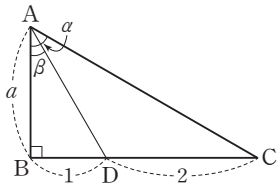
$$\tan(\angle CAD) \leq \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

이므로 $\angle CAD$ 의 크기가 최대가 되려면 $a = \frac{3}{a}$ 이어야 한다.

따라서 $a = \sqrt{3}$ 이므로

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{a^2 + 1} = 2$$

답 ④



15

이 고등학교 3학년 확률과 통계 과목에 응시한 전체 학생 중에서 임의로 1명을 선택할 때, 이 학생의 점수가 70점 이상인 사건을 A, 10번 문항에서 정답인 사건을 B라 하자.

확률과 통계 과목에 응시한 전체 학생의 40%가 70점 이상이므로

$$P(A) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$$

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

70점 미만인 학생의 60%가 10번 문항에서 오답이므로

$$P(B^c | A^c) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} \text{이고}$$

$$P(B^c | A^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(A^c)} \text{이므로}$$

$$\frac{P(A^c \cap B^c)}{P(A^c)} = \frac{3}{5} \text{에서}$$

$$P(A^c \cap B^c) = \frac{3}{5} P(A^c) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

이때 $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = \frac{9}{25}$ 이므로

$$P(A \cup B) = \frac{16}{25}$$

한편, 이 고등학교 3학년 확률과 통계 과목에 응시한 전체 학생 중에서 임의로 선택한 1명의 학생이 10번 문항에서 정답이었을 때, 이 학생의

점수가 70점 이상일 확률이 $\frac{7}{13}$ 이므로

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{7}{13}$$

$$P(B) = \frac{13}{7} P(A \cap B)$$

이때 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 이므로

$$\frac{16}{25} = \frac{2}{5} + \frac{13}{7} P(A \cap B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{6}{7} P(A \cap B) = \frac{6}{25}$$

$$P(A \cap B) = \frac{7}{25}$$

따라서 이 고등학교 3학년 확률과 통계 과목에 응시한 전체 학생 중에서 임의로 선택한 1명의 학생의 점수가 70점 이상이고 10번 문항에서 정답이었을 확률은 $\frac{7}{25}$

답 ②

16

점 P의 좌표가 $(2\sqrt{2}-1, 1)$ 에서

$$a(1 - \cos^3 bt) = 2\sqrt{2}-1 > 0, a \sin^3 bt = 1$$

이므로 $a > 0, \sin bt > 0$

또한 $1 = \sin^2 bt + \cos^2 bt \geq 2|\sin bt \cos bt|$ 에서

$$|\sin bt \cos bt| \leq \frac{1}{2}$$

(단, 등호는 $|\sin bt| = |\cos bt| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때 성립)

시각 t에서 점 P의 속도는

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (3ab \cos^2 bt \sin bt, 3ab \sin^2 bt \cos bt)$$

이고 $ab > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} &= \sqrt{9a^2 b^2 \sin^2 bt \cos^2 bt (\cos^2 bt + \sin^2 bt)} \\ &= 3ab |\sin bt \cos bt| \\ &\leq \frac{3}{2} ab \end{aligned}$$

이므로 등호성립 조건에 의하여 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) $\sin bt = \cos bt = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때,

$$a(1 - \cos^3 bt) = a \left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 \right] = 2\sqrt{2}-1$$

$$a \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 = 1 \text{에서 } a = 2\sqrt{2}$$

(ii) $\sin bt = -\cos bt = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때,

$$a(1 - \cos^3 bt) = a \left[1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 \right] = 2\sqrt{2}-1 \text{에서}$$

$$a = \frac{18\sqrt{2}-16}{7}$$

$$a \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 = 1 \text{에서 } a = 2\sqrt{2}$$

이므로 모순이다.

이때 점 P의 좌표가 $(2\sqrt{2}-1, 1)$ 일 때, 속력이 18이므로

$$\frac{3}{2} ab = 18, ab = 12$$

따라서 $a = 2\sqrt{2}, b = 3\sqrt{2}$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 8 + 18 = 26$$

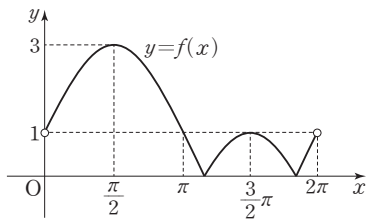
답 ⑤

17

함수 $f(x) = |2 \sin x + 1|$ ($0 < x < 2\pi$)의 그래프가 그림과 같고

$$\frac{1}{6} \leq \frac{b}{a} \leq 6 \text{이므로}$$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은
0, 1, 2, $\boxed{4}$ 이다.



(i) $X=0$ 일 때,

$\frac{b}{a} > 3$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 (1, 4), (1, 5), (1, 6)이므로

$$P(X=0) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

(ii) $X=1$ 일 때,

$\frac{b}{a} = 3$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 (1, 3), (2, 6)이므로

$$P(X=1) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

(iii) $X=2$ 일 때,

$1 \leq \frac{b}{a} < 3$, 즉 $a \leq b < 3a$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는

$a=1$ 이면 $b=1, 2$

$a=2$ 이면 $b=2, 3, 4, 5$

$a=3$ 이면 $b=3, 4, 5, 6$

$a=4$ 이면 $b=4, 5, 6$

$a=5$ 이면 $b=5, 6$

$a=6$ 이면 $b=6$

이므로

$$P(X=2) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

(iv) $X=4$ 일 때,

$0 < \frac{b}{a} < 1$, 즉 $0 < b < a$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는

$a=2$ 이면 $b=1$

$a=3$ 이면 $b=1, 2$

$a=4$ 이면 $b=1, 2, 3$

$a=5$ 이면 $b=1, 2, 3, 4$

$a=6$ 이면 $b=1, 2, 3, 4, 5$

이므로

$$P(X=4) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

따라서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면

X	0	1	2	$\boxed{4}$	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{12}$	1

이므로

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{12} + 1 \times \frac{1}{18} + 2 \times \frac{4}{9} + 4 \times \frac{5}{12} = \boxed{\frac{47}{18}}$$

따라서 $p=4$, $q=\frac{4}{9}$, $r=\frac{5}{12}$, $s=\frac{47}{18}$ 이므로

$$\frac{ps}{qr} = \frac{4 \times \frac{47}{18}}{\frac{4}{9} \times \frac{5}{12}} = \frac{282}{5}$$

답 ②

18

세 카드에 적혀 있는 숫자를 크지 않은 수부터 차례로 x, y, z 라 하면
중복을 허락하지 않을 때는

$$x < y < z, x + y + z = 98$$

중복을 허락할 때는

$$x \leq y \leq z, x + y + z = 98 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

의 해의 개수를 구하면 된다.

$x + y + z = 98$ 의 양의 정수해의 개수는

$x = a + 1, y = b + 1, z = c + 1$ (단, a, b, c 는 음이 아닌 정수)

로 놓으면 $a + b + c = 95$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

즉, 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 95개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$\begin{aligned} {}_3H_{95} &= {}_{3+95-1}C_{95} \\ &= {}_{97}C_{95} = {}_{97}C_2 \\ &= \frac{97 \times 96}{2 \times 1} = 97 \times 48 \end{aligned}$$

세 수의 합이 98일 때 세 수 모두 같은 경우는 없으므로

①에서 두 수가 같은 경우의 수는

(1, 1, 96), (2, 2, 94), \cdots , (32, 32, 34)

(32, 33, 33), (30, 34, 34), \cdots , (2, 48, 48)

의 48이고 순서를 고려하면 48×3 이다.

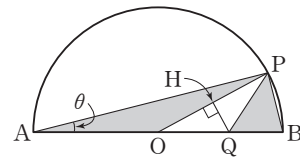
서로 다른 순서쌍의 경우의 수는 3!이므로

중복을 허락하지 않는 경우의 수는

$$\frac{97 \times 48 - 3 \times 48}{3!} = \frac{94 \times 48}{6} = 94 \times 8 = 752$$

답 ①

19



$\overline{OA} = \overline{OP} = 1$, 즉 삼각형 OPA는 이등변삼각형이므로 $\angle OPA = \theta$

또한, $\angle POA = \pi - 2\theta$

따라서 삼각형 OPA의 넓이 $S(\theta)$ 는

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin(\pi - 2\theta)$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2\theta \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 Q에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH} = \frac{1}{2}$ 이고 $\angle POQ = 2\theta$ 이므로 $\overline{OQ} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos 2\theta}$

$$\text{즉, } \overline{PQ} = \overline{OQ} = \frac{1}{2 \cos 2\theta}$$

또, $\angle APB = 90^\circ$, $\overline{AB} = 2$ 이므로 $\overline{PB} = 2 \sin \theta$

따라서 삼각형 PQB의 넓이 $T(\theta)$ 는

$$T(\theta) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2 \cos 2\theta} \times 2 \sin \theta \times \sin \left(\frac{\pi}{2} - 3\theta \right) \\ = \frac{\cos 3\theta}{2 \cos 2\theta} \times \sin \theta \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

⑦, ㉔에 의하여

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta) \times T(\theta)}{\theta^2} \\ = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} \sin 2\theta \times \frac{\cos 3\theta}{2 \cos 2\theta} \times \sin \theta}{\theta^2} \\ = \frac{1}{4} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin 2\theta}{2\theta} \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\cos 3\theta}{\cos 2\theta} \\ = \frac{1}{4} \times 2 \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

㉔ ③

20

ㄱ. $S_1 = a_1$ 이므로

$(10^{S_1} - 1)(10^{a_1} - 1) = 1$ 에서 $n=1$ 을 대입하면

$$(10^{a_1} - 1)^2 = 1, (10^{a_1} - 1)^2 - 1 = 0$$

$$(10^{a_1} - 1 + 1)(10^{a_1} - 1 - 1) = 0$$

$$10^{a_1} - 2 = 0, 10^{a_1} = 2$$

따라서 $a_1 = \log 2$ (참)

ㄴ. $n \geq 2$ 일 때, $a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로

$$(10^{S_n} - 1)(10^{S_n - S_{n-1}} - 1) = 1$$

$$10^{2S_n - S_{n-1}} - 10^{S_n} - 10^{S_n - S_{n-1}} = 0$$

$$10^{S_n - S_{n-1}} - 1 - 10^{-S_{n-1}} = 0$$

따라서 $10^{S_n} - 10^{S_{n-1}} = 1$ ($n \geq 2$) (참)

ㄷ. $k \geq 2$ 일 때, $10^{S_k} - 10^{S_{k-1}} = 1$ 에서 k 에 2, 3, 4, 5, 6을 대입하면

$$10^{S_2} - 10^{S_1} = 1$$

$$10^{S_3} - 10^{S_2} = 1$$

$$10^{S_4} - 10^{S_3} = 1$$

$$10^{S_5} - 10^{S_4} = 1$$

$$10^{S_6} - 10^{S_5} = 1$$

이때 양변을 각 변끼리 더하면

$$10^{S_6} - 10^{S_1} = 5$$

$$10^{S_6} - 10^{a_1} = 5$$

$$10^{S_6} - 10^{\log 2} = 5$$

$$10^{S_6} = 7$$

$$S_6 = \log 7$$

같은 방법으로

k 에 2, 3, 4, 5를 대입하여 양변을 각 변끼리 더하면

$$10^{S_5} - 10^{S_1} = 4$$

$$10^{S_5} - 10^{a_1} = 4$$

$$10^{S_5} - 10^{\log 2} = 4$$

$$10^{S_5} = 6$$

$$S_5 = \log 6$$

따라서 $n \geq 2$ 일 때, $a_n = S_n - S_5 = \log 7 - \log 6 = \log \frac{7}{6}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

㉔ ⑤

21

조건 (가) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) + 1}{x} = 0$ 에서

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} \{2f(x) + 1\} = 0$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로 $f(0) = -\frac{1}{2}$ 이고,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) + 1}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \left(-\frac{1}{2}\right)}{x} \\ = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2f'(0) = 0$$

에서 $f'(0) = 0$

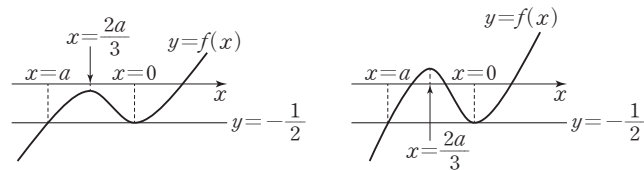
따라서 $f(0) = -\frac{1}{2}$, $f'(0) = 0$ 을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인

삼차함수 $f(x)$ 를 $f(x) = x^2(x-a) - \frac{1}{2}$ 로 놓으면

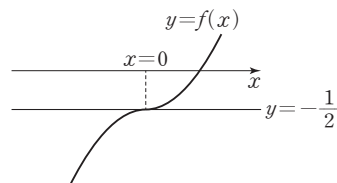
$$f'(x) = 2x(x-a) + x^2 = x(3x-2a)$$

이므로 실수 a 의 값에 따라 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

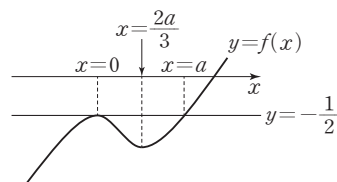
(i) $a < 0$ 일 때



(ii) $a = 0$ 일 때



(iii) $a > 0$ 일 때



한편

$$g(x) = f(x) \times e^{f(x) - |f(x)|} \\ = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq 0) \\ f(x) \times e^{2f(x)} & (f(x) < 0) \end{cases}$$

에서 $h(x) = f(x) \times e^{2f(x)}$ 이라 하면

$$h'(x) = f'(x) \times e^{2f(x)} + f(x) \times 2f'(x) \times e^{2f(x)} \\ = \{1 + 2f(x)\} \times f'(x) \times e^{2f(x)}$$

이므로

$$g'(x) = \begin{cases} f'(x) & (f(x) \geq 0) \\ \{1+2f(x)\} \times f'(x) \times e^{2f(x)} & (f(x) < 0) \end{cases}$$

이때 $f(x)=0$ 인 경우

참고와 같이 $f(x)=0$ 인 경우에도 미분가능하다.

따라서 $g'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$f(x) \geq 0$ 일 때 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값이고,

$f(x) < 0$ 일 때 $f'(x)=0$ 또는 $f(x)=-\frac{1}{2}$ 을 만족시키는 x 의 값이다.

(i) $a < 0$ 일 때,

함수 $g(x)$ 가 극대 또는 극소가 될 수 있는 x 의 값은 $a, \frac{2a}{3}, 0$ 이다.

이때 $a < 0$ 이므로 $\sum_{k=1}^n x_k$ 의 값은 5가 될 수 없다.

(ii) $a=0$ 일 때,

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...
$1+2f(x)$	-	0	+
$f'(x)$	+	0	+
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	\	극소	/

따라서 함수 $g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 값은 0으로 1개뿐이다. 즉, $x_1=0$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

(iii) $a > 0$ 일 때,

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	$\frac{2a}{3}$...	a	...
$1+2f(x)$	-	0	-	-	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+	+	+
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$	\	극소	/	극대	\	극소	/

따라서 함수 $g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 값은 $0, \frac{2a}{3}, a$ 로

3개이다. 즉, $x_1=0, x_2=\frac{2a}{3}, x_3=a$ 이므로

$$\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^3 x_k = 0 + \frac{2a}{3} + a = \frac{5a}{3}$$

$$\frac{5a}{3} = 5 \text{에서 } a=3$$

따라서 $f(x)=x^2(x-3)-\frac{1}{2}$ 이고, $f(-1)=-\frac{9}{2}, f(1)=-\frac{5}{2}$

이므로

$$f(-1) \times f(1) = \left(-\frac{9}{2}\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{45}{4}$$

답 ⑤

참고

$f(a)=0$ 이라 하면

(i) [그림 1]에서

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h) \times e^{2f(a+h)} - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h) \times e^{2f(a+h)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\{f(a+h)-f(a)\} \times e^{2f(a+h)}}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0-} e^{2f(a+h)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

이때 함수 $y=f(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

가 성립한다. 따라서

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} \text{이므로 함수}$$

$g(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하다.

또한, $x=a$ 좌우에서 $g'(x)$ 의 부호가 모두 양이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대 또는 극소가 되지 않는다.

(ii) [그림 2]에서 (i)과 같은 방법으로 생각하면

함수 $g(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하고, $x=a$ 좌우에서 $g'(x)$ 의 부호가 모두 음이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대 또는 극소가 되지 않음을 알 수 있다.

(iii) [그림 3]에서

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h) \times e^{2f(a+h)} - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h) \times e^{2f(a+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\{f(a+h)-f(a)\} \times e^{2f(a+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0-} e^{2f(a+h)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h) \times e^{2f(a+h)} - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h) \times e^{2f(a+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\{f(a+h)-f(a)\} \times e^{2f(a+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0+} e^{2f(a+h)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

이때 함수 $y=f(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

가 성립한다. 따라서

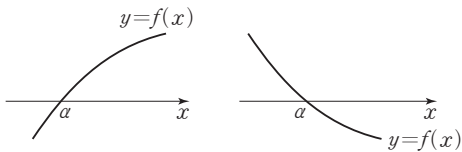
$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} \text{이므로 함수}$$

$g(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하다.

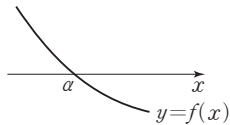
또한, $x=a$ 좌우에서 $g'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $g(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대가 된다.

(iv) [그림 4]에서 (iii)과 같은 방법으로 생각하면

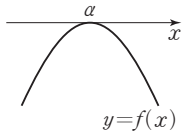
함수 $g(x)$ 는 $x=a$ 에서 미분가능하고, $x=a$ 좌우에서 $g'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $g(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소가 됨을 알 수 있다.



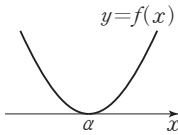
[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]



[그림 4]

22

$${}_9H_4 = {}_{9+4-1}C_4 = {}_{12}C_4 = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 55 \times 3^2$$

$${}_3\Pi_2 = 3^2 \text{이므로}$$

$$\frac{{}_9H_4}{{}_3\Pi_2} = \frac{55 \times 3^2}{3^2} = 55$$

답 55

23

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - x^2 + a}{x-2} = b \text{에서}$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 수렴하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x \rightarrow 2} (e^{x-2} - x^2 + a) = -3 + a = 0 \text{에서 } a = 3$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - x^2 + a}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - x^2 + 3}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(e^{x-2} - 1) - (x^2 - 4)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - 1}{x-2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x-2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} - \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 1 - 4 = -3 \end{aligned}$$

따라서 $b = -3$ 이므로 $a - b = 3 - (-3) = 6$

답 6

24

$$\text{각 항을 } x \text{에 대하여 미분하면 } \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(\tan y) = 0$$

$$\text{함수함수의 미분법에 의하여 } 2 - \sec^2 y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sec^2 y} = \frac{2}{1 + \tan^2 y} = \frac{2}{1 + 4x^2}$$

$$x=2 \text{일 때 } \frac{dy}{dx} \text{의 값은 } \frac{2}{1 + 4 \times 2^2} = \frac{2}{17}$$

따라서 $p=17$, $q=2$ 이므로 $p+q=17+2=19$

답 19

25

조건 (가)에서 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이고, 조건 (나)에서 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근이 존재하므로 함수

$f(x) = a \sin bx + 12 - 2a$ 의 최솟값은 0이다.

이때 $a > 0$ 이므로 함수 $f(x) = a \sin bx + 12 - 2a$ 의 최솟값은 $-a + 12 - 2a = 12 - 3a$ 이다.

따라서 $12 - 3a = 0$ 에서 $a = 4$

한편, 조건 (나)에서 $0 < x < 2\pi$ 일 때 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 8이므로 $0 < x < 2\pi$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축이 서로 다른 8개의 점에서 만난다.

이때 b 가 자연수이므로 함수 $f(x)$ 의 주기가 $\frac{\pi}{4}$ 이어야 한다.

따라서 $\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{4}$ 에서 $b=8$ 이므로 $ab = 4 \times 8 = 32$

답 32

26

한 개의 주사위를 던질 때, 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X 라 하면 X 는 이항분포 $B(720, \frac{1}{6})$ 을 따른다.

X 의 평균을 m , 표준편차를 σ 라 하면

$$m = 720 \times \frac{1}{6} = 120, \sigma^2 = 720 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 10^2$$

$n=720$ 은 충분히 크므로 확률변수 X 가 근사적으로 평균이 120, 표준편차가 10인 정규분포를 따르고 $Z = \frac{X-120}{10}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq 150) &= P\left(\frac{a-120}{10} \leq \frac{X-120}{10} \leq \frac{150-120}{10}\right) \\ &= P\left(\frac{a-120}{10} \leq Z \leq 3\right) \\ &= P\left(\frac{a-120}{10} \leq Z \leq 0\right) + P(0 \leq Z \leq 3) \\ &= P\left(0 \leq Z \leq \frac{120-a}{10}\right) + P(0 \leq Z \leq 3) \\ &= P\left(0 \leq Z \leq \frac{120-a}{10}\right) + 0.4987 = 0.9759 \end{aligned}$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{120-a}{10}\right) = 0.4772$$

그런데 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로 $\frac{120-a}{10} = 2$

따라서 $a=100$

답 100

27

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a ($a > 0$), 공비를 r ($0 < r < 1$, r 는 유리수)라 하고, $b_5 = a_5 = p$ (p 는 소수)라 하자.

(i) ① $b_6 = \frac{1}{pr}$ 이 자연수라 가정하면

어떤 자연수 m 에 대하여 $r = \frac{1}{mp}$ 이어야 한다.

따라서 $b_6 = m$, $b_8 = p^2 m^3$, $b_{10} = p^4 m^5$, ...이므로 수열 $\{b_n\}$ 의 항 중 자연수인 항이 무수히 많고, 그 합이 637이 될 수 없다.

그러므로 b_6 은 자연수가 아니다.

② $b_8 = \frac{1}{pr^3}$ 이 자연수라 가정하면

어떤 자연수 s 에 대하여 $r^3 = \frac{1}{ps}$, 즉 $r = \frac{1}{\sqrt[3]{ps}}$ 이어야 한다.

이때 $r = \frac{1}{\sqrt[3]{ps}}$ 은 유리수이므로 $s = p^2 t^3$ (t 는 자연수)라 할 수 있고, $r = \frac{1}{pt}$ 이다.

따라서 $b_{10} = p^4 t^5$, $b_{12} = p^6 t^7$, $b_{14} = p^8 t^9$, ...이므로 수열 $\{b_n\}$ 의 항 중 자연수인 항이 무수히 많고, 그 합이 637이 될 수 없다. 그러므로 b_8 은 자연수가 아니다.

③ ①, ②와 같은 방법으로 생각하면

b_{10} , b_{12} , b_{14} , ...도 자연수가 아님을 알 수 있다.

(ii) $b_7 = pr^2$, $b_9 = pr^4$, $b_{11} = pr^6$, ...에서

p 는 소수이고 $0 < r^2 < 1$, $0 < r^4 < 1$, $0 < r^6 < 1$, ...이므로 b_7 , b_9 , b_{11} , ...은 자연수가 아니다.

(iii) $b_2 = \frac{1}{a_2} = \frac{r^3}{p}$, $b_4 = \frac{1}{a_4} = \frac{r}{p}$ 에서

$0 < \frac{r^3}{p} < \frac{1}{p} < 1$, $0 < \frac{r}{p} < \frac{1}{p} < 1$ 이므로 b_2 , b_4 는 자연수가 아니다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 b_2 , b_4 , b_6 , b_7 , b_8 , ...은 자연수가 아니다.

b_1 , b_3 이 모두 자연수가 아니면 $b_5 = 637 = 7^2 \times 13$ 으로 소수가 아니다.

한편, $b_3 = \frac{p}{r^2}$ 가 자연수이면 어떤 자연수 t_1 에 대하여 $r = \frac{1}{t_1}$ 이므로

$b_1 = \frac{p}{r^4} = pt_1^4$ 으로 b_1 도 자연수이다.

$b_1 = \frac{p}{r^4}$ 가 자연수이면 어떤 자연수 t_2 에 대하여 $r = \frac{1}{t_2}$ 이므로

$b_3 = \frac{p}{r^2} = pt_2^2$ 으로 b_3 도 자연수이다.

따라서 b_1 , b_3 이 모두 자연수이므로

$b_1 + b_3 + b_5 = \frac{p}{r^4} + \frac{p}{r^2} + p = p\left(\frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^2} + 1\right)$

즉, $p\left(\frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^2} + 1\right) = 7^2 \times 13$

$p=7$ 일 때,

$\frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^2} + 1 = 91$ 에서 $\left(\frac{1}{r} + 3\right)\left(\frac{1}{r} - 3\right)\left(\frac{1}{r^2} + 10\right) = 0$

$0 < r < 1$ 이므로 $r = \frac{1}{3}$

$p=13$ 일 때,

$\frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^2} + 1 = 49$ 에서 $\frac{1}{r^2} = R$ 라 하면 $R^2 + R - 48 = 0$

$R = \frac{1}{r^2} = \frac{-1 \pm \sqrt{193}}{2}$ 이므로 r 가 유리수인 조건을 만족시키지 못한다.

따라서 $a_5 = 7$ 이고 $r = \frac{1}{3}$ 이므로 $a_{11} = a_5 \times r^6 = 7 \times \frac{1}{3^6} = \frac{7}{729}$

따라서 $\alpha = 729$, $\beta = 7$ 이므로 $\alpha + \beta = 729 + 7 = 736$

☞ 736

28

동전을 9번 던져 게임이 끝나려면 (0, 3), (1, 4), (2, 5)를 지나지 않고 (3, 6)에 도달하면 된다.

즉, (0, 3), (1, 4)를 지나지 않고 반드시 (3, 4)를 지나 바로 (3, 6)으로 올라가야 한다.

(3, 4)로 가는 최단경로의 수는 $\frac{7!}{3!4!} = 35$ 인데 그 중 (0, 3)을 지나

는 경우의 수는 $1 \times \frac{4!}{3!} = 4$ 이고, (1, 4)를 지나가는 경우의 수는

$\frac{5!}{4!} \times 1 = 5$ 이고, (0, 3)과 (1, 4)를 동시에 지나가는 경우의 수는 2이

므로 구하는 경우의 수는 $35 - 4 - 5 + 2 = 28$

한편, 동전의 앞면, 뒷면이 나올 확률은 모두 $\frac{1}{2}$ 로 같으므로 동전을 9

번 던져 게임이 끝날 확률은 $\frac{28}{2^9} = \frac{7}{128}$

따라서 $p=128$, $q=7$ 이므로 $p+q=135$

☞ 135

29

$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$

$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

이므로

$\sin C = \sin(\pi - (A+B)) = \sin(A+B)$

$= \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$= \frac{3}{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = \frac{\overline{AC}}{\sin B} = \frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2R_1$ 에서

$R_1 = \frac{\overline{AB}}{2 \sin C} = \frac{5}{2 \times \frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$ 이므로

$\overline{BC} = 2R_1 \sin A = 2R_1 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5} \times \frac{5\sqrt{5}}{4} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

$\overline{AC} = 2R_1 \sin B = 2R_1 \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{5\sqrt{5}}{4} = \frac{5}{2}$

따라서

$(\triangle ABC \text{의 넓이}) = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin A$

$= \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{5}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{15}{4}$ ㉠

내접원의 중심을 O라 하면

$(\triangle ABC \text{의 넓이})$

$= (\triangle AOB \text{의 넓이}) + (\triangle BOC \text{의 넓이}) + (\triangle COA \text{의 넓이})$

$= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times R_2 + \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times R_2 + \frac{1}{2} \times \overline{CA} \times R_2$

$= \frac{R_2}{2} (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA})$

$= \frac{R_2}{2} \left(5 + \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{2}\right)$

$= \frac{R_2}{2} \times \frac{15 + 3\sqrt{5}}{2}$

$= \frac{15 + 3\sqrt{5}}{4} R_2$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{15}{4} = \frac{15 + 3\sqrt{5}}{4} R_2$ 이므로 $R_2 = \frac{5}{5 + \sqrt{5}}$

따라서 $\frac{R_1}{R_2} = \frac{5\sqrt{5}}{4} \times \frac{5 + \sqrt{5}}{5} = \frac{5 + 5\sqrt{5}}{4}$ 이므로 $a=5$, $b=5$ 이고

$a+b=5+5=10$

☞ 10

30

(i) $g(k)$ 의 값을 구하자.

함수 $h(x)$ 의 최솟값이 $g(k)$ 이므로
 $h(0) = |g(k) - f(0)| = g(k)$ 에서
 $g(k) - f(0) = g(k)$ 또는 $g(k) - f(0) = -g(k)$
 이때 $f(0) = 2 + 3 - 4 = 1 \neq 0$ 이므로
 $g(k) - f(0) = -g(k), g(k) = \frac{f(0)}{2} = \frac{1}{2}$

(ii) $g'(k)$ 의 값을 구하자.

함수 $y = g(x+k) - f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나면 함수 $h(x)$ 의 최솟값은 0이다. 그러나 $h(x)$ 의 최솟값이 $g(k) = \frac{1}{2} \neq 0$ 이다.

따라서 $y = g(x+k) - f(x)$ 의 그래프는 x 축과 만나지 않는다.

두 함수 $g(x+k), f(x)$ 가 모두 연속함수이므로

$y = g(x+k) - f(x)$ 도 연속함수이고 그래프가 x 축과 만나지 않으므로 $g(x+k) - f(x) > 0$ 또는 $g(x+k) - f(x) < 0$ 이다.

$x=0$ 일 때 $g(x+k) - f(x)$ 의 값은 $g(k) - f(0) = \frac{1}{2} - 1 < 0$ 이므로

로 $g(x+k) - f(x) < 0$ 임을 알 수 있다.

따라서 $h(x) = |g(x+k) - f(x)| = f(x) - g(x+k)$ 이므로

$h'(x) = f'(x) - g'(x+k)$

$h'(0) = f'(0) - g'(k) = 0$ 에서

$g'(k) = f'(0)$ 이고 $f'(x) = 4e^{2x} - 3e^{-x}$ 이므로

$g'(k) = f'(0) = 4e^0 - 3e^0 = 1$

(iii) $g'(k - \frac{2}{3})$ 의 값을 구하자.

$g(x)$ 가 이차함수이므로 $g(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)으로 놓으면

$g'(x) = 2ax + b$ 이므로 $g(k) = ak^2 + bk + c = \frac{1}{2}$

$g'(k) = 2ak + b = 1$

$g(k+1) = a(k+1)^2 + b(k+1) + c$

$= (ak^2 + bk + c) + (2ak + b) + a = \frac{1}{2} + 1 + a = \frac{3}{2} + a$

$g(k-1) = a(k-1)^2 + b(k-1) + c$

$= (ak^2 + bk + c) - 2ak - b + a = \frac{1}{2} - 1 + a = -\frac{1}{2} + a$

$h(1) - h(-1) = (2e^2 + 3e^{-1} - 4) - \frac{3}{2} - a$

$- \left\{ (2e^{-2} + 3e - 4) + \frac{1}{2} - a \right\}$

$= 2e^2 - 3e + 3e^{-1} - 2e^{-2} - 2$

의 계산 결과 값이 양수이므로 $h(1) > h(-1)$ 이다.

또한 $h''(x) = f''(x) - g''(x+k) = 8e^{2x} + 3e^{-x} - 2a$ 이고 $a < 0$ 이므로 $h'(x)$ 는 증가함수이다.

그런데 $h'(0) = 0$ 이므로 $h(x)$ 는 극솟값을 1개 갖는다.

따라서 함수 $h(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 $x=1$ 일 때 최댓값

$h(1)$ 을 가지므로

$h(1) = f(1) - g(k+1) = \frac{2e^3 + 3}{e} - 4 - \left(\frac{3}{2} + a \right)$

$= \frac{2e^3 + 3}{e} - \frac{11}{2} - a = \frac{2e^3 - e + 3}{e}$

이므로 $-\frac{11}{2} - a = -1$ 에서 $a = -\frac{9}{2}$

따라서

$g'(k - \frac{2}{3}) = 2a(k - \frac{2}{3}) + b = 2ak + b - \frac{4a}{3} = 1 - \frac{4}{3} \times \left(-\frac{9}{2} \right) = 7$

답 7

실전 모의고사 3회

본문 162~169쪽

01 ④	02 ②	03 ①	04 ③	05 ②
06 ⑤	07 ①	08 ④	09 ③	10 ④
11 ④	12 ③	13 ①	14 ⑤	15 ④
16 ④	17 ③	18 ④	19 ③	20 ⑤
21 ③	22 16	23 6	24 101	25 3
26 18	27 15	28 5	29 385	30 8

01

$$\begin{aligned} \log_5 25 + \log_5 \sqrt{5} &= \log_5 5^2 + \log_5 5^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \times \log_5 5 + \frac{1}{2} \times \log_5 5 \\ &= 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

답 ④

02

세 수 $x, 5, y$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
 $xy = 5^2 = 25$

답 ②

03

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 + n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n} + \sqrt{n^2 + n}}{(n^2 + 3n) - (n^2 + n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n} + \sqrt{n^2 + n}}{2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{2} \\ &= \frac{1+1}{2} = 1 \end{aligned}$$

답 ①

04

두 사건 A 와 B^C 이 서로 배반사건이므로

$P(A \cap B^C) = 0$, 즉 $A \subset B$

$P(A^C \cap B) = P(B \cap A^C)$

$= P(B) - P(A)$

$= P(B) - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

따라서 $P(B) = \frac{1}{2}$

답 ③

05

$2n\theta - n\theta = n\theta = 2m\pi$ ($m=1, 2, 3, \dots$)이므로

$\theta = \frac{2m\pi}{n}$ ($m=1, 2, 3, \dots$)

$m=1$ 일 때 θ 는 최솟값을 가지므로 $a_n = \frac{2\pi}{n}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^5 \frac{\pi}{a_k} &= \sum_{k=1}^5 \left(\frac{k}{2\pi} \times \pi \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^5 k \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{5 \times 6}{2} = \frac{15}{2}\end{aligned}$$

답 ②

06

점 P의 시각 t 에서의 속도는

$$(e^t, e^t(\cos t + \sin t))$$

이므로 $t = \frac{\pi}{4}$ 일 때 속도는 $(e^{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}})$

따라서 구하는 속력은

$$\sqrt{e^{\frac{\pi}{2}} + 2e^{\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{4}}$$

답 ⑤

07

$(5^m)^x = 5^{mx} = 25 = 5^2$ 에서 $x = \frac{2}{m}$ 이므로

점 P의 x 좌표는 $\frac{2}{m}$,

$(5^n)^x = 5^{nx} = 25 = 5^2$ 에서 $x = \frac{2}{n}$ 이므로

점 Q의 x 좌표는 $\frac{2}{n}$ 이다.

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는 $\frac{2}{n} - \frac{2}{m} = \frac{2m-2n}{mn}$ 이고

$\frac{2m-2n}{mn} = 1$ 에서 $mn - 2m + 2n = 0$, $(m+2)(n-2) = -4$

m, n 은 자연수이고, $m > n$ 이므로 $m=2, n=1$

따라서 $m+n=2+1=3$

답 ①

08

$\left(x^k - \frac{2}{x}\right)^6$ 의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r (x^k)^r \left(-\frac{2}{x}\right)^{6-r} = {}_6C_r (-2)^{6-r} x^{kr+r-6} \quad (r=0, 1, 2, \dots, 6)$$

이때 상수항이 되려면 $kr+r-6=0$, $(k+1)r=6$ 이므로

가능한 k, r 의 순서쌍 (k, r) 은 $(1, 3), (2, 2), (5, 1)$ 이다.

이 중에서 상수항이 양수이므로 $k=2, r=2$

x^3 의 계수는 $2r+r-6=3$, $r=3$ 일 때이므로

$${}_6C_3 (-2)^3 = -160$$

답 ④

09

$y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ 에서 $x = y^n$ 이므로

$$S(t) = \int_0^t y^n dy, \quad S'(t) = t^n$$

$$S'(4) \times S'(8) = 4^n \times 8^n = 2^{2n} \times 2^{3n} = 2^{2n+3n} = 2^{5n}$$

$$2^{5n} = 2^{30} \text{이므로 } n=6$$

답 ③

10

$F(x) = \{f(x)\}^2$ 이라 하면

$$F'(x) = 2f(x)f'(x)$$

$$= 2x \sin \frac{\pi x}{2} \left(\sin \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi x}{2} \right)$$

$$g\left(\frac{1}{8}\right) = a \text{라 하면 } F(a) = \frac{1}{8}$$

즉, $\{f(a)\}^2 = \frac{1}{8}$ 에서

$$f(a) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (\text{구간 } [0, 1] \text{에서 } f(x) \geq 0)$$

$a = \frac{1}{2}$ 이므로

$$g'\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{F'\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2f\left(\frac{1}{2}\right)f'\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2 \times \frac{\sqrt{2}}{4} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}} = \frac{8}{4+\pi}$$

답 ④

11

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($r > 0$)이라 하면

조건 (나)에서 $-1 < r < 1$ 이므로 $0 < r < 1$

조건 (나)에서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$ 이므로 $\frac{a_1}{1-r} = 3$

$$r = 1 - \frac{a_1}{3}$$

$$0 < 1 - \frac{a_1}{3} < 1 \text{에서 } 0 < a_1 < 3$$

조건 (가)에서 a_1 은 자연수이므로

$$a_1 = 1 \text{일 때, } r = \frac{2}{3}$$

$$a_1 = 2 \text{일 때, } r = \frac{1}{3}$$

두 등비수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 은 공비가 양수이고 서로 다르므로

$$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \quad b_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \text{또는} \quad a_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \quad b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

따라서 $a_n b_n = 2 \times \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}$ 이고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{2}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{18}{7}$$

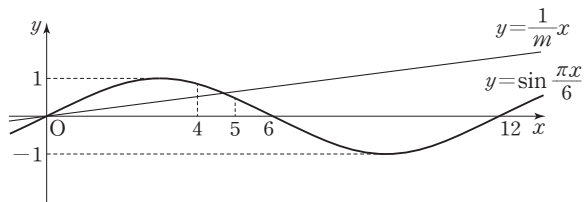
답 ④

12

삼각함수 $f(x) = \sin \frac{\pi x}{6}$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$ 이고

직선 $y = \frac{1}{m}x$ 는 원점을 지나고 기울기가 양수이다.

이때 부등식 $\sin \frac{\pi x}{6} > \frac{1}{m}x$ 를 만족시키는 모든 자연수 x 의 값의 합이 10이 되도록 하려면 그림과 같이 삼각함수 $f(x) = \sin \frac{\pi x}{6}$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{m}x$ 가 만나는 점의 x 좌표가 4보다 크고 5보다 작아야 한다.



즉, $x=4$ 일 때는 부등식이 성립하고 $\sin \frac{4\pi}{6} > \frac{1}{m} \times 4$, $\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{4}{m}$ 에서

$$m > \frac{8}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{64}{3}} = 4. \times \times \times$$

$x=5$ 일 때는 부등식이 성립하지 않으므로 $\sin \frac{5\pi}{6} \leq \frac{1}{m} \times 5$, $\frac{1}{2} \leq \frac{5}{m}$ 에서

$$m \leq 10$$

따라서 가능한 m 의 개수는 5, 6, 7, 8, 9, 10의 6이다.

답 ③

13

크기가 4인 표본의 표본평균을 \bar{x} , 크기가 9인 표본의 표본평균을 \bar{x}' 이라 하면

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2}, \bar{x}' = \frac{c+d}{2} \text{이므로 } \frac{a+b}{2} + 3.68 = \frac{c+d}{2} \text{에서}$$

$$\bar{x} + 3.68 = \bar{x}'$$

신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{4}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{4}}$$

신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$(\bar{x} + 3.68) - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{9}} \leq m \leq (\bar{x} + 3.68) + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{9}}$$

이때 $b=c$ 이므로

$$\bar{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{4}} = (\bar{x} + 3.68) - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{9}}$$

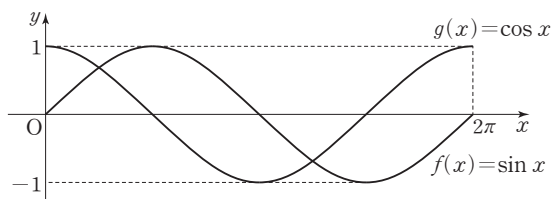
$$\bar{x} + 0.98\sigma = (\bar{x} + 3.68) - 0.86\sigma$$

$$1.84\sigma = 3.68 \text{이므로 } \sigma = 2$$

답 ①

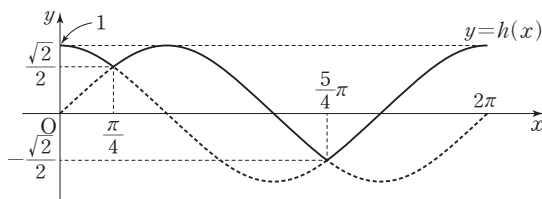
14

단구간 $[0, 2\pi]$ 에서 두 함수 $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ 의 그래프는 [그림 1]과 같으므로



[그림 1]

함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 [그림 2]와 같이 그려진다.



[그림 2]

a_1 은 방정식 $h(x) = -1$ 의 서로 다른 실근의 개수이므로 0

a_2 는 방정식 $h(x) = -\frac{1}{2}$ 의 서로 다른 실근의 개수이므로 2

a_3 은 방정식 $h(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수이므로 2

a_4 는 방정식 $h(x) = \frac{1}{2}$ 의 서로 다른 실근의 개수이므로 2

a_5 는 방정식 $h(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수이므로 3

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^5 a_k = 0 + 2 + 2 + 2 + 3 = 9$$

답 ⑤

15

$a * b$ 의 값이 0인 경우는 다음과 같다.

(i) 연산이 $-$, $a=b=3$ 인 경우

(ii) 연산이 \times , $a=0$ 인 경우

(iii) 연산이 \div , $a=0$ 인 경우

각 경우의 확률은 다음과 같다.

$$(i) \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$$

$$(ii) \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{16}$$

$$(iii) \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{16}$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{1}{64} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{9}{64}$$

답 ④

16

$a_1=0$ 이면 모든 항이 0이 되어 $a_6 = -26$ 인 것에 모순이다.

a_1 이 양수이면 a_2 는 음수, a_3 은 양수, a_4 는 음수 이렇게 앞항과 뒷항의 부호가 반대가 되고

반대로 a_1 이 음수이면 a_2 는 양수, a_3 는 음수, a_4 는 양수 이렇게 각 항의 부호가 반대가 된다.

이때 a_6 이 음수이므로 a_1 은 양수이고

$$a_2 = -2a_1$$

$$a_3 = -2a_2 + 1 = 4a_1 + 1$$

$$a_4 = -2a_3$$

$$= -2(4a_1 + 1) = -8a_1 - 2$$

$$a_5 = -2a_4 + 1$$

$$= -2(-8a_1 - 2) + 1 = 16a_1 + 5$$

$$a_6 = -2a_5$$

$$= -2(16a_1 + 5) = -32a_1 - 10$$

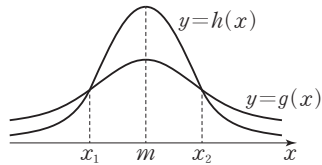
$$\text{즉, } -32a_1 - 10 = -26 \text{에서}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

답 ④

17

확률변수 X 의 확률밀도함수를 $g(x)$, 확률변수 \bar{X} 의 확률밀도함수를 $h(x)$ 라 하면 확률변수 \bar{X} 의 평균이 m , 표준편차가 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이므로 $y=g(x)$, $y=h(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



두 곡선 $y=g(x)$, $y=h(x)$ 의 교점의 x 좌표를 x_1 , x_2 ($x_1 < x_2$)라 하면 $x < x_1$ 일 때 $g(x) > h(x)$ 이고, $x_1 < x < x_2$ 일 때 $g(x) < h(x)$, $x > x_2$ 일 때 $g(x) > h(x)$ 이다.

$G(t) = P(X \geq t)$, $H(t) = P(\bar{X} \geq t)$ 라 하면 $F(t) = G(t) - H(t)$ 이다.

(i) $t \leq x_1$ 일 때

$$\begin{aligned} G(t) &= 1 - P(X \leq t), H(t) = 1 - P(\bar{X} \leq t), \\ F(t) &= P(\bar{X} \leq t) - P(X \leq t) \text{이므로 } F(t) < 0 \text{이고} \\ t \text{가 커질수록 } F(t) &\text{는 감소한다.} \\ \text{또한, } \lim_{t \rightarrow -\infty} P(\bar{X} \leq t) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} P(X \leq t) = 0 \text{이므로} \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) &= 0 \end{aligned}$$

(ii) $x_1 < t < m$ 일 때

$$\begin{aligned} G(t) &= 1 - P(X \leq t), H(t) = 1 - P(\bar{X} \leq t), \\ F(t) &= P(\bar{X} \leq t) - P(X \leq t) \text{이므로} \\ t \text{가 커질수록 } F(t) &\text{는 증가한다.} \end{aligned}$$

(iii) $t = m$ 일 때

$$G(m) = H(m) = \frac{1}{2} \text{이므로 } F(m) = 0$$

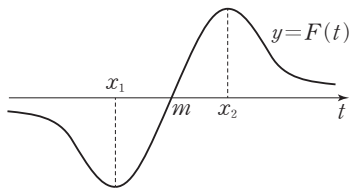
(iv) $m < t < x_2$ 일 때

$$\begin{aligned} \text{임의의 실수 } \alpha \text{에 대하여 } G(m+\alpha) + G(m-\alpha) &= 1, \\ H(m+\alpha) + H(m-\alpha) &= 1 \text{이므로} \\ \text{두 함수 } G(t), H(t) &\text{는 모두 점 } \left(m, \frac{1}{2}\right) \text{에 대하여 점대칭이다.} \\ \text{따라서 } t \text{가 커질수록 } F(t) &\text{는 증가한다.} \end{aligned}$$

(v) $t \geq x_2$ 일 때

$$\begin{aligned} \text{(iv)와 같은 이유로 인하여, } t \text{가 커질수록 } F(t) &\text{는 감소한다.} \\ \text{또한, } \lim_{t \rightarrow \infty} P(X \geq t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} P(\bar{X} \geq t) = 0 \text{이므로 } \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0 \end{aligned}$$

(i)~(v)에서 $y=F(t)$ 의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=F(t)$ 의 그래프가 직선 $y=k$ 와 한 점에서 만나도록 하는 서로 다른 실수 k 의 값은 $F(x_1)$, $F(m)$, $F(x_2)$ 로 그 개수는 3이다.

답 ③

18

조건 ㄱ을 만족시키도록 네 명의 학생에게 사탕을 나누어 주는 경우의

수는

$${}_4H_{8-4} = {}_7C_4 = \boxed{35} \text{이다.}$$

이 중에서 학생 A와 학생 B가 같은 개수의 사탕을 받는 경우의 수는

(i) 학생 A와 학생 B가 각각 1개씩 사탕을 받는 경우의 수는

$${}_2H_4 = {}_5C_4 = 5$$

(ii) 학생 A와 학생 B가 각각 2개씩 사탕을 받는 경우의 수는

$${}_2H_2 = {}_3C_2 = 3$$

(iii) 학생 A와 학생 B가 각각 3개씩 사탕을 받는 경우의 수는 1

(i), (ii), (iii)에서 학생 A와 학생 B가 같은 개수의 사탕을 받는 경우의 수는 $5+3+1=9$ 이다.

따라서 학생 A가 학생 B보다 더 적은 사탕을 받는 경우의 수는

$$\frac{35-9}{2} = \boxed{13}$$

마찬가지로 학생 C가 학생 D보다 더 많은 사탕을 받는 경우의 수도

$$\boxed{13}$$

네 명의 학생 A, B, C, D가 받는 사탕의 수를 각각 a, b, c, d 라 할 때 학생 A가 학생 B보다 더 적은 사탕을 받고 학생 C가 학생 D보다 더 많은 사탕을 받는 경우를 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 로 나타내면 $(1, 2, 4, 1), (1, 2, 3, 2), (1, 3, 3, 1), (1, 4, 2, 1), (2, 3, 2, 1)$ 뿐이므로 그 경우의 수는 5이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $13+13-5=\boxed{21}$ 이다.

그러므로 $p=35$, $q=13$, $r=21$ 이고 $p+q+r=35+13+21=69$

답 ④

19

$y'=e^x$ 이므로 점 $P(t, e^t)$ 에서의 접선의 기울기는 e^t 이고

접선의 방정식은 $y=e^t(x-t)+e^t$, $y=e^t x+(1-t)e^t$

$y=0$ 에서 $x=t-1$, 즉 점 R의 좌표는 $(t-1, 0)$

점 H의 좌표가 $(t, 0)$ 이므로 $\overline{HR}=1$

$\angle PRH=\theta$ 라 하면 $\tan \theta=e^t$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{e^t}{\sqrt{1+e^{2t}}}, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}$$

$$\overline{RQ} = \overline{HR} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}$$

$$\overline{HQ} = \overline{HR} \sin \theta = \frac{e^t}{\sqrt{1+e^{2t}}}$$

$$B(t) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}} \times \frac{e^t}{\sqrt{1+e^{2t}}} = \frac{e^t}{2(1+e^{2t})}$$

삼각형 PRH의 넓이는 $\frac{1}{2}e^t$ 이므로

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{1}{2}e^t - B(t) \\ &= \frac{1}{2}e^t - \frac{e^t}{2(1+e^{2t})} = \frac{e^{3t}}{2(1+e^{2t})} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} A(t)B(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{4t}}{4(1+e^{2t})^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{4\left(\frac{1}{e^{2t}}+1\right)^2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

답 ③

20

ㄱ. $f'(x) = \ln x + 1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{1}{e}$ 에서 극솟값을 가진다.

또한, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이므로 $g(t) < \frac{1}{e} < h(t)$ 이다. (참)

ㄴ. $0 < x < \frac{1}{e}$ 에서 $f'(x) < 0$, $x > \frac{1}{e}$ 에서 $f'(x) > 0$ 이고,

$g(t) < \frac{1}{e} < h(t)$ 이므로 $f'(g(t)) < 0$, $f'(h(t)) > 0$ 이고

$f'(g(t)) \times f'(h(t)) < 0$ 이다. (참)

ㄷ. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $A(g(t), f(g(t)))$ 에서의 접선의 기울기는

$\ln(g(t)) + 1$, $f(g(t)) = g(t) \times \ln(g(t)) = t$ 이므로

$l_1: y - f(g(t)) = \{\ln(g(t)) + 1\}(x - g(t))$

$y = \{\ln(g(t)) + 1\}x - g(t) \times \ln(g(t)) - g(t) + f(g(t))$,

$y = \{\ln(g(t)) + 1\}x - g(t)$

같은 방법으로

$l_2: y = \{\ln(h(t)) + 1\}x - h(t)$

$\{\ln(g(t)) + 1\}x - g(t) = \{\ln(h(t)) + 1\}x - h(t)$ 에서

$x = \frac{g(t) - h(t)}{\ln(g(t)) - \ln(h(t))}$

$\ln(g(t)) = \frac{t}{g(t)}$, $\ln(h(t)) = \frac{t}{h(t)}$ 이므로

$x = \frac{\frac{t}{g(t)} - \frac{t}{h(t)}}{\frac{t}{g(t)} - \frac{t}{h(t)}} = \frac{g(t) - h(t)}{g(t) \times h(t)} \times t = -\frac{g(t) \times h(t)}{t}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

21

$a > 0$, $b > 0$, $x \geq 0$ 이므로 $f(x)$ 의 부호는 $\sin x$ 의 부호와 일치한다.

자연수 n 에 대하여 $S_n = \left| \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(x) dx \right|$ 라 하면

(i) n 이 홀수인 경우

닫힌구간 $[(n-1)\pi, n\pi]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이므로

$$S_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(x) dx = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} a(x+b) \sin x dx$$

$$= \left[a(x+b) \times (-\cos x) \right]_{(n-1)\pi}^{n\pi} + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} a \cos x dx$$

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} a \cos x dx = 0 \text{이므로}$$

$$S_n = a(n\pi + b) \times (-\cos n\pi) - a\{(n-1)\pi + b\} \times \{-\cos(n-1)\pi\}$$

$$= a(n\pi + b) \times 1 - a\{(n-1)\pi + b\} \times (-1)$$

$$= a\{(2n-1)\pi + 2b\}$$

(ii) n 이 짝수인 경우

닫힌구간 $[(n-1)\pi, n\pi]$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이므로

$$S_n = -\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(x) dx = -\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} a(x+b) \sin x dx$$

$$= -\left[a(x+b) \times (-\cos x) \right]_{(n-1)\pi}^{n\pi} - \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} a \cos x dx$$

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} a \cos x dx = 0 \text{이므로}$$

$$S_n = -a(n\pi + b) \times (-\cos n\pi) + a\{(n-1)\pi + b\} \times \{-\cos(n-1)\pi\}$$

$$= -a(n\pi + b) \times (-1) + a\{(n-1)\pi + b\} \times 1$$

$$= a\{(2n-1)\pi + 2b\}$$

(i), (ii)에 의하여 $S_n = a\{(2n-1)\pi + 2b\}$

닫힌구간 $[3\pi, 4\pi]$ 에서

$$F(x) = S_1 - S_2 + S_3 + \int_{3\pi}^x f(t) dt \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

$$G(x) = S_1 + S_2 + S_3 - \int_{3\pi}^x f(t) dt \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

이므로 $\textcircled{㉑} + \textcircled{㉒}$ 을 하면 $F(x) + G(x) = 2(S_1 + S_3)$

$$G(x) = -F(x) + 2(S_1 + S_3)$$

조건 (가)에서 $G(x) = -F(x) + 24$ 이므로

$$S_1 + S_3 = (a\pi + 2ab) + (5a\pi + 2ab) = 6a\pi + 4ab = 12$$

$$3a\pi + 2ab = 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉓}$$

닫힌구간 $[6\pi, 7\pi]$ 에서

$$F(x) = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5 - S_6 + \int_{6\pi}^x f(t) dt \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$$G(x) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 - \int_{6\pi}^x f(t) dt \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

이므로 $\textcircled{㉔} - \textcircled{㉕}$ 을 하면 $F(x) - G(x) = -2(S_2 + S_4 + S_6)$

$$G(x) = F(x) + 2(S_2 + S_4 + S_6)$$

조건 (나)에서 $G(x) = F(x) + 60$ 이므로

$$S_2 + S_4 + S_6 = (3a\pi + 2ab) + (7a\pi + 2ab) + (11a\pi + 2ab) \\ = 21a\pi + 6ab = 30$$

$$7a\pi + 2ab = 10 \quad \dots\dots \textcircled{㉖}$$

$\textcircled{㉓}$, $\textcircled{㉖}$ 을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{\pi}$, $b = \frac{3}{2}\pi$

$$f(x) = a(x+b) \sin x = \frac{1}{\pi} \left(x + \frac{3}{2}\pi \right) \sin x \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \times \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi \right) \times \sin \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \times 2\pi \times 1 = 2$$

답 ③

22

$${}_5C_2 + {}_2H_5 = {}_5C_2 + {}_6C_5$$

$$= \frac{5 \times 4}{2 \times 1} + {}_6C_1$$

$$= 10 + 6 = 16$$

답 16

23

x 에 대한 방정식 $(2^x)^2 + a \times 2^x + a + 3 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 실수 a 의 조건은 $2^x = t$ ($t > 0$)이라 하면 t 에 대한 이차방정식 $t^2 + at + (a+3) = 0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 갖기 위한 실수 a 의 조건과 같다.

이차방정식 $t^2 + at + (a+3) = 0$ 의 판별식을 D , 두 근을 α , β 라 하면 $D > 0$, $\alpha + \beta > 0$, $\alpha\beta > 0$ 이다.

따라서 $a^2 - 4(a+3) = a^2 - 4a - 12 = (a-6)(a+2) > 0$, $-a > 0$,

$a+3 > 0$ 의 세 부등식을 동시에 만족시켜야 한다.

각 부등식을 풀면 $a < -2$ 또는 $a > 6$, $a < 0$, $a > -3$ 이므로
세 부등식을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는 $-3 < a < -2$ 이고
 $p = -3$, $q = -2$ 이므로 $pq = 6$

6

24

확률변수 X 의 확률질량함수가

$$P(X=x) = {}_{20}C_x \left(\frac{1}{5}\right)^x \left(\frac{4}{5}\right)^{20-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 20)$$

이므로 X 는 이항분포 $B\left(20, \frac{1}{5}\right)$ 을 따른다.

$$\text{따라서 } E(X) = 20 \times \frac{1}{5} = 4, \quad V(X) = 20 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$$

$$\begin{aligned} E(5X+1) + V(5X+1) &= 5E(X) + 1 + 25V(X) \\ &= 5 \times 4 + 1 + 25 \times \frac{16}{5} = 101 \end{aligned}$$

101

25

조건 (가)의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $f'(g(x))g'(x) = 3$ 이므로

$$\frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{3}g'(x)$$

또한, $x = \frac{1}{3}f(g(x))$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x}{f'(g(x))} dx &= \int_1^2 \left\{ \frac{1}{3}f(g(x)) \times \frac{1}{3}g'(x) \right\} dx \\ &= \frac{1}{9} \int_1^2 f(g(x))g'(x) dx \end{aligned}$$

$g(x) = t$ 로 놓으면

$$g'(x) = \frac{dt}{dx} \text{이고, } x=1 \text{일 때 } t=g(1), \quad x=2 \text{일 때 } t=g(2) \text{이므로}$$

$$\frac{1}{9} \int_1^2 f(g(x))g'(x) dx = \frac{1}{9} \int_{g(1)}^{g(2)} f(t) dt = \frac{1}{9} \times 27 = 3$$

3

26

$$h(x) = \frac{x}{e^{|x|} + 1} \text{로 놓으면}$$

모든 실수 x 에 대하여 $h(x) = -h(-x)$ 이므로

$$g(1) = \int_{-1}^1 \frac{t}{e^{|t|} + 1} dt = 0$$

$$F'(1) = f'(g(1))g'(1)$$

$$= f'(0)g'(1) = \frac{e+1}{2} \times \frac{1}{e+1} = \frac{1}{2}$$

$$G'(0) = g'(f(0))f'(0)$$

$$= g'(0)f'(0) = 0 \left(g'(x) = \frac{x}{e^{|x|} + 1} \text{이고 } g'(0) = 0 \right)$$

$$\text{따라서 } k = \frac{1}{2} \text{이므로 } 36k = 18$$

18

27

$\angle BCA = \pi - 4\theta$ 이므로 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\pi - 4\theta)} = \frac{\overline{AC}}{\sin \theta}$$

$$\overline{AB} = 3 \text{이므로 } \overline{AC} = \frac{3 \sin \theta}{\sin 4\theta}$$

$\angle ADC = 3\theta$ 이므로 삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 3\theta} = \frac{\overline{CD}}{\sin \theta}$$

$$f(\theta) = \overline{CD} = \frac{\sin \theta}{\sin 3\theta} \times \overline{AC} = \frac{\sin \theta}{\sin 3\theta} \times \frac{3 \sin \theta}{\sin 4\theta}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} f(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{3 \sin^2 \theta}{\sin 3\theta \sin 4\theta}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{3 \times \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2}}{\frac{\sin 3\theta}{\theta} \times \frac{\sin 4\theta}{\theta}}$$

$$= \frac{3 \times 1^2}{3 \times 4} = \frac{1}{4} = k$$

$$\text{따라서 } 60k = 60 \times \frac{1}{4} = 15$$

15

28

한 번의 시행을 할 때

빨간 *모양의 스티커가 붙어 있는 카드가 꺼내어지는 것을 a ,

파란 *모양의 스티커가 붙어 있는 카드가 꺼내어지는 것을 b ,

스티커가 붙어 있지 않은 카드가 꺼내어지는 것을 c 로 나타내고

한 번의 시행에서 a 와 b , b 와 c , c 와 a 가 나타나는 사건을 각각 A , B , C 라 하자.

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

이고, 두 번의 시행 후 빨간 *모양의 스티커가 세 개 붙어 있는 카드가 있으려면

'사건 A 와 사건 A ' 또는 '사건 A 와 사건 C ' 또는 '사건 C 와 사건 A ' 또는 '사건 C 와 사건 C '가 일어나야 하므로 그 확률은

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{9}$$

두 번의 시행 후 파란 *모양의 스티커가 세 개 붙어 있는 카드가 있으려면 '사건 A 와 사건 C ' 또는 '사건 C 와 사건 A ' 또는 '사건 B 와 사건 C ' 또는 '사건 C 와 사건 B '가 일어나야 하므로 그 확률은

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{9}$$

두 번의 시행 후 빨간 *모양의 스티커 세 개가 붙어 있는 카드도 있고 파란 *모양의 스티커 세 개가 붙어 있는 카드도 있으려면

'사건 A 와 사건 C ' 또는 '사건 C 와 사건 A '가 일어나야 하므로 그 확률은

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{9}$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{4}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{9} = \frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$p+q=5$$

5

29

첫째항이 양수이고 공비가 음수이므로 등비수열 $\{a_n\}$ 은 홀수 번째 항은 양수, 짝수 번째 항은 음수이다.

$$S_{2p+1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{2p} + a_{2p+1}$$

$$T_m = |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + \cdots + |a_{2m}| + a_{2m+1} + a_{2m+2} + \cdots + a_{2p} + a_{2p+1}$$

$$= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_{2m} + a_{2m+1} + a_{2m+2} + \cdots + a_{2p} + a_{2p+1}$$

이므로

$$S_{2p+1} - T_m = 2(a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m})$$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a ($a > 0$), 공비를 r ($r < 0$)이라 하자.

(i) $r = -1$ 일 때,

$$a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m} = (-a) + (-a) + \cdots + (-a) = -am$$

$$\sum_{m=1}^p (S_{2p+1} - T_m) = \sum_{m=1}^p (-2a)m = (-2a) \sum_{m=1}^p m$$

$$= (-2a) \times \frac{p(p+1)}{2} = -ap(p+1)$$

$$\left| \sum_{m=1}^p (S_{2p+1} - T_m) \right| = ap(p+1) = ap^2 + ap = 7p^2 + 7p$$

따라서 $a=7$, $r=-1$ 인 경우 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $r \neq -1$ 일 때,

$$a_2 + a_4 + \cdots + a_{2m} = ar + ar^3 + \cdots + ar^{2m-1} = \frac{ar(r^{2m}-1)}{r^2-1}$$

$$\sum_{m=1}^p (S_{2p+1} - T_m) = \sum_{m=1}^p \frac{2ar(r^{2m}-1)}{r^2-1}$$

$$= \frac{2ar}{r^2-1} \sum_{m=1}^p (r^{2m}-1)$$

$$= \frac{2ar}{r^2-1} \left\{ \frac{r^2(r^{2p}-1)}{r^2-1} - p \right\}$$

따라서 $r \neq -1$ 인 경우 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(i), (ii)에서 $a_n = 7 \times (-1)^{n-1}$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{10} \{(-1)^{k+1} \times k \times a_k\} = \sum_{k=1}^{10} \{(-1)^{k+1} \times k \times 7 \times (-1)^{k-1}\}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} 7k = 7 \sum_{k=1}^{10} k = 7 \times \frac{10 \times 11}{2} = 385$$

385

30

사차함수 $f(x)$ 가 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시키고

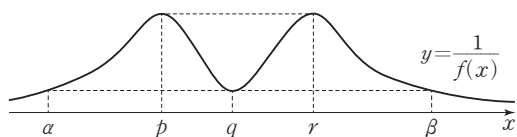
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{ 이므로}$$

함수 $\frac{1}{f(x)}$ 은 $x=p$, $x=q$, $x=r$ 에서 각각 극대, 극소, 극대가 되고

$$\frac{1}{f(p)} = \frac{1}{f(r)}$$
이다.

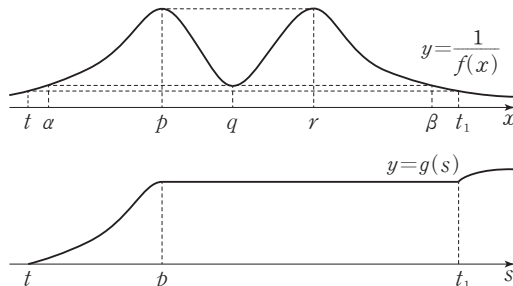
조건 (다)에 의하여 $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(q)}$ 을 만족시키는 x 의 값이

α, β ($\alpha < \beta$)이므로 함수 $y = \frac{1}{f(x)}$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



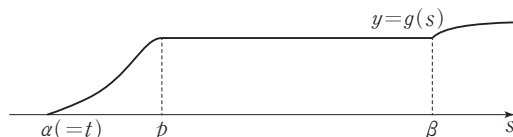
(i) $t < \alpha$ 일 때, $f(t) = f(t_1)$ ($t_1 > \beta$)인 실수 t_1 에 대하여 함수

$$y = \frac{1}{f(x)}$$
과 $y = g(s)$ 의 그래프는 다음과 같다.



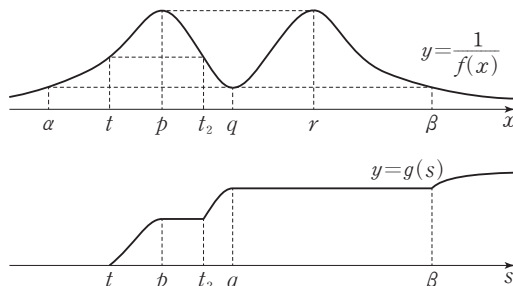
따라서 구간 (t, ∞) 에서 함수 $g(s)$ 는 $s=t_1$ 에서 미분가능하지 않으므로 $h(t)=1$

(ii) $t = \alpha$ 일 때, 함수 $y = g(s)$ 의 그래프는 다음과 같다.



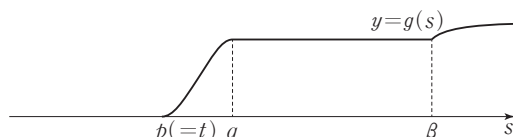
따라서 구간 (t, ∞) 에서 함수 $g(s)$ 는 $s=\beta$ 에서 미분가능하지 않으므로 $h(t)=1$

(iii) $\alpha < t < p$ 일 때, $f(t) = f(t_2)$ ($p < t_2 < q$)인 실수 t_2 에 대하여 두 함수 $y = \frac{1}{f(x)}$, $y = g(s)$ 의 그래프는 다음과 같다.



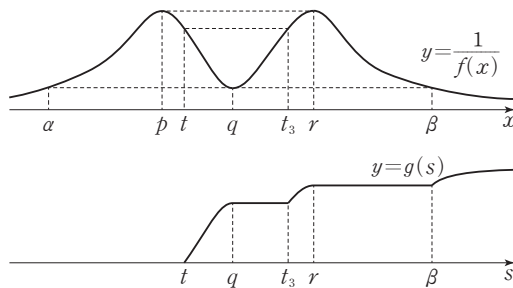
따라서 구간 (t, ∞) 에서 함수 $g(s)$ 는 $s=t_2$, $s=\beta$ 에서 미분가능하지 않으므로 $h(t)=2$

(iv) $t = p$ 일 때, 함수 $y = g(s)$ 의 그래프는 다음과 같다.



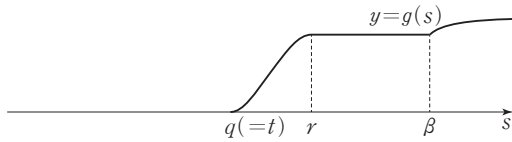
따라서 구간 (t, ∞) 에서 함수 $g(s)$ 는 $s=\beta$ 에서 미분가능하지 않으므로 $h(t)=1$

(v) $p < t < q$ 일 때, $f(t) = f(t_3)$ ($q < t_3 < r$)인 실수 t_3 에 대하여 두 함수 $y = \frac{1}{f(x)}$, $y = g(s)$ 의 그래프는 다음과 같다.



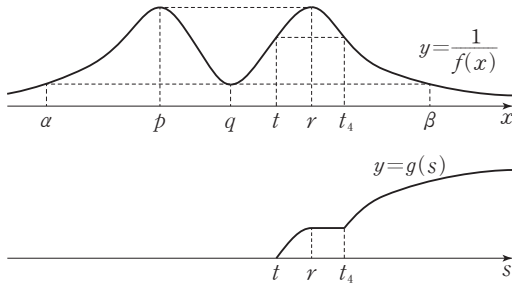
따라서 구간 (t, ∞) 에서 함수 $g(s)$ 는 $s=t_3$, $s=\beta$ 에서 미분가능하지 않으므로 $h(t)=2$

(vi) $t=q$ 일 때, 함수 $y=g(s)$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서 구간 (t, ∞) 에서 함수 $g(s)$ 는 $s=\beta$ 에서 미분가능하지 않으므로 $h(t)=1$

(vii) $q < t < r$ 일 때, $f(t)=f(t_4)$ ($r < t_4 < \beta$)인 실수 t_4 에 대하여 두 함수 $y=\frac{1}{f(x)}$, $y=g(s)$ 의 그래프는 다음과 같다.



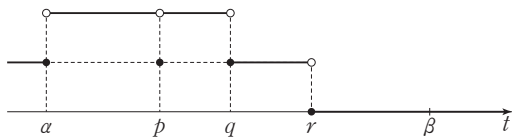
따라서 구간 (t, ∞) 에서 함수 $g(s)$ 는 $s=t_4$ 에서 미분가능하지 않으므로 $h(t)=1$

(viii) $t \geq r$ 일 때, 함수 $y=g(s)$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서 구간 (t, ∞) 에서 함수 $g(s)$ 는 미분가능하므로 $h(t)=0$

(i)~(viii)에 의하여 함수 $h(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



즉, 함수 $h(t)$ 는 $t=a, t=p, t=q, t=r$ 에서 불연속이므로

$a=a, p=1, q=b, r=5$ 이다.

방정식 $f(x)-f(p)=0$ 은 $x=p$ 일 때 성립하고 $f'(p)=0$ 이므로

$f(x)-f(p)$ 는 $(x-p)^2$ 을 인수로 가진다.

마찬가지로 하면 $f(x)-f(p)$ 는 $(x-r)^2$ 을 인수로 가진다.

따라서 $f(x)-f(p)=(x-p)^2(x-r)^2=(x-1)^2(x-5)^2$ (*)

$f'(x)=4(x-1)(x-3)(x-5)$ 이므로 $f'(3)=0$

즉, $b=3$

(*)에서 $x=a, x=3$ 을 대입하면

$$f(a)-f(p)=(a-1)^2(a-5)^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(3)-f(p)=16 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$f(a)=f(b)$ 이므로 $\textcircled{1}-\textcircled{2}$ 을 하면 $(a-1)^2(a-5)^2=16$

$$(a-1)(a-5)=4 \text{ 또는 } (a-1)(a-5)=-4$$

즉, $a=3 \pm 2\sqrt{2}$ 또는 $a=3$

이때 조건을 만족시키는 것은 $a=3-2\sqrt{2}$

그러므로 $(b-a)^2=8$

8

실전 모의고사 4회

본문 170~177쪽

01 ①	02 ①	03 ④	04 ②	05 ②
06 ④	07 ⑤	08 ③	09 ②	10 ④
11 ④	12 ③	13 ⑤	14 ⑤	15 ⑤
16 ②	17 ③	18 ②	19 ⑤	20 ①
21 ③	22 80	23 24	24 3	25 15
26 400	27 511	28 18	29 997	30 29

01

$$\begin{aligned} & \log_6 \frac{4}{9} + \log_{\sqrt{6}} 9 \\ &= \log_6 \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \log_{6^{\frac{1}{2}}} 9 \\ &= 2 \log_6 \frac{2}{3} + 2 \log_6 9 \\ &= 2 \left(\log_6 \frac{2}{3} + \log_6 9 \right) \\ &= 2 \log_6 \left(\frac{2}{3} \times 9 \right) \\ &= 2 \log_6 6 \\ &= 2 \end{aligned}$$

답 ①

다른 풀이

$$\begin{aligned} & \log_6 \frac{4}{9} + \log_{\sqrt{6}} 9 \\ &= \log_6 \frac{4}{9} + \log_{6^{\frac{1}{2}}} 9 \\ &= \log_6 \frac{4}{9} + 2 \log_6 9 \\ &= \log_6 \frac{4}{9} + \log_6 9^2 \\ &= \log_6 \left(\frac{4}{9} \times 9^2 \right) \\ &= \log_6 6^2 \\ &= 2 \log_6 6 = 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

02

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1=2, a_5=14$ 인 등차수열이므로 공차를 d 라 하면

$$a_n = a_1 + (n-1)d \text{이므로}$$

$$a_5 = a_1 + 4d = 2 + 4d = 14$$

$$4d = 12, d = 3$$

$$\text{따라서 } a_3 = a_1 + 2d = 2 + 6 = 8$$

답 ①

03

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면

$$a_n = a + (n-1) \times 2 = 2n + a - 2$$

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n &= \frac{n\{2a + (n-1) \times 2\}}{2} \\ &= n^2 + (a-1)n \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + (a-2)n}{n^2 + (a-1)n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{a-2}{n}}{1 + \frac{a-1}{n}} = 2$$

답 ④

04

$$P(A^c) = 1 - P(A) = \frac{1}{3}$$

이므로

$$P(A) = \frac{2}{3}$$

또,

$$P(B^c|A) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(A)} = \frac{1}{2}$$

이므로

$$P(A \cap B^c) = \frac{1}{2} P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

이므로

$$\frac{2}{3} = P(A \cap B) + \frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

답 ②

05

함수 $y = a^{-x}$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동시키면 $y = a^x$ 이다.

이것을 다시 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동하면

$$y = a^{x-2} + 3$$

이때 함수 $y = a^{x-2} + 3$ 의 그래프가 점 (4, 7)을 지나므로

$$7 = a^{4-2} + 3, a^2 = 4$$

따라서 $a = 2$ ($a > 0$)

답 ②

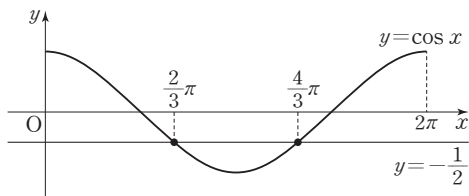
06

$$1 + 2 \cos x > 0, \cos x > -\frac{1}{2}$$

곡선 $y = \cos x$ 와 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 은 그림과 같이 $x = \frac{2}{3}\pi$ 와 $x = \frac{4}{3}\pi$ 에서 만나고

$$\frac{2}{3}\pi = 2, \times \times \times, \frac{4}{3}\pi = 4, \times \times \times, 2\pi = 6, \times \times \times \text{이므로}$$

부등식 $\cos x > -\frac{1}{2}$ 을 만족시키는 자연수 x 의 값은 1, 2, 5, 6이고 그 합은 14이다.



답 ④

07

$$36 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{1-2x} = 36 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1}$$

$$= 36 \times \frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{2x}$$

$$= 54 \times \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x\right\}^2$$

이므로 주어진 부등식에서 $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$ ($t > 0$)이라 하면

$$54t^2 + 11t - 8 \geq 0$$

$$(27t - 8)(2t + 1) \geq 0$$

$$t \geq \frac{8}{27}$$

$$\text{즉, } \left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \left(\frac{2}{3}\right)^3 \text{이므로 } x \leq 3$$

따라서 구하는 자연수 x 는 1, 2, 3이므로 그 합은

$$1 + 2 + 3 = 6$$

답 ⑤

08

$$f(x) = (\ln x)^2 + \int_1^e \frac{f(t)}{2t} dt \text{에서}$$

$$\int_1^e \frac{f(t)}{t} dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

라 하면 $f(x) = (\ln x)^2 + \frac{k}{2}$ 이다.

이를 ⑦에 대입하면

$$k = \int_1^e \frac{(\ln t)^2 + \frac{k}{2}}{t} dt \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\text{이때 } \int_1^e \frac{(\ln t)^2 + \frac{k}{2}}{t} dt \text{에서 } \ln t = s \text{라 하면 } \frac{1}{t} = \frac{ds}{dt} \text{이고}$$

$t = 1$ 일 때 $s = 0$, $t = e$ 일 때 $s = 1$ 이므로

$$\int_1^e \frac{(\ln t)^2 + \frac{k}{2}}{t} dt = \int_0^1 \left(s^2 + \frac{k}{2}\right) ds$$

$$= \left[\frac{1}{3}s^3 + \frac{ks}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{k}{2}$$

따라서 ⑧에서 $k = \frac{1}{3} + \frac{k}{2}$ 이므로

$$\frac{k}{2} = \frac{1}{3}, \text{ 즉 } k = \frac{2}{3}$$

답 ③

09

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{2^x - 1}{3 \ln(1+x-a)} = b \ln 2 \text{에서}$$

$x \rightarrow a$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } 2^a - 1 = 0 \text{에서 } a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{3 \ln(1+x)} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{2^x - 1}{x} \times \frac{x}{\ln(1+x)} \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \ln 2$$

$$\text{이때 } b = \frac{1}{3} \text{이므로 } a + b = \frac{1}{3}$$

답 ②

참고

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\log_a(1+x)} = \ln a$$

10

5명이 각각 한 가지를 임의로 선택하여 관람하는 경우의 수는

$${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$$

5명 중에서 1명만 혼자 관람하는 경우의 수는 다음과 같다.

(i) 남은 4명이 모두 같은 종목을 관람할 때

$$({}_5C_1 \times {}_4C_4) \times {}_3P_2 = 30$$

(ii) 남은 4명이 2명씩 같은 종목을 관람할 때

$$({}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}) \times {}_3P_3 = 90$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{30+90}{243} = \frac{120}{243} = \frac{40}{81}$$

답 ④

11

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-1}{x-3} = 1 \text{에서 } f(3)=1, f'(3)=1 \text{이고}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-a}{x-1} = b \text{에서 } g(1)=a, g'(1)=b \text{이다.}$$

함수 $f(3x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$g(f(3x)) = x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$g(f(3)) = 1$$

$$g(1) = 1$$

$$a = 1$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(3x))f'(3x) \times 3 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$g'(f(3))f'(3) \times 3 = 1$$

$$g'(1) \times 1 \times 3 = 1$$

$$g'(1) = \frac{1}{3}$$

$$b = \frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } a+b = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

답 ④

12

임의로 뽑은 192개의 과자 A 중에서 별사탕이 들어 있는 과자 A의 개수를 확률변수 X 라 하면 X 는 이항분포 $B(192, \frac{3}{4})$ 을 따르고

$$E(X) = 192 \times \frac{3}{4} = 144, V(X) = 192 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 36$$

이고 192는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(144, 6^2)$ 을 따르고 $Z = \frac{X-144}{6}$ 라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 150) &= P\left(\frac{X-144}{6} \geq \frac{150-144}{6}\right) \\ &= P(Z \geq 1) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 - 0.3413 = 0.1587 \end{aligned}$$

답 ③

13

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos \frac{kx-\pi}{2} \\ &= \cos \left(\frac{k}{2}x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{k}{2}x\right) \\ &= \sin \frac{k}{2}x \end{aligned}$$

에서 함수 $f(x)$ 의 주기가 $\frac{2\pi}{\frac{k}{2}} = \frac{4}{k}\pi$ 이므로

$$\alpha + \beta = \frac{2}{k}\pi, \gamma + \delta = \frac{6}{k}\pi$$

따라서 $\theta = \alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{8}{k}\pi$ 이므로

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\theta}{6}\right) &= \sin \left(\frac{k}{2} \times \frac{\theta}{6}\right) \\ &= \sin \left(\frac{k}{2} \times \frac{4}{3k}\pi\right) \\ &= \sin \frac{2}{3}\pi \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

답 ⑤

14

확률변수 X 의 값에 따른 각각의 확률을 구하자.

(i) $X=1$ 인 경우는 없다.

(ii) $X=2$ 인 경우는 2개씩 같은 색일 때이므로

4가지 색 중에서 2가지 색을 선택하고 선택된 2가지 색의 공 2개씩을 모두 선택하는 경우이다.

$$P(X=2) = \frac{{}_4C_2 \times {}_2C_2 \times {}_2C_2}{{}_8C_4} = \frac{6}{70} = \frac{3}{35}$$

(iii) $X=3$ 인 경우는 2개만 같은 색일 때이므로

4가지 색 중에서 3가지 색을 선택한 후 다시 3가지 색 중에서 2개 모두 뽑을 1가지 색을 선택한 다음, 나머지 2가지 색을 공 2개씩에서 1개씩을 선택하는 경우이다.

$$P(X=3) = \frac{{}_4C_3 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_8C_4} = \frac{48}{70} = \frac{24}{35}$$

(iv) $X=4$ 인 경우는 4가지 색이 모두 1개씩 선택되는 경우이다.

$$P(X=4) = \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_8C_4} = \frac{16}{70} = \frac{8}{35}$$

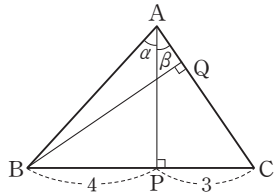
X	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{35}$	$\frac{24}{35}$	$\frac{8}{35}$	1

따라서 확률변수 X 의 평균은

$$2 \times \frac{3}{35} + 3 \times \frac{24}{35} + 4 \times \frac{8}{35} = \frac{6}{35} + \frac{72}{35} + \frac{32}{35} \\ = \frac{110}{35} = \frac{22}{7}$$

답 ⑤

15



$$4 = \overline{BP} = \overline{AP} \tan \alpha, 3 = \overline{CP} = \overline{AP} \tan \beta \text{에서} \\ \tan \alpha : \tan \beta = 4 : 3$$

$$\tan \alpha = 4k, \tan \beta = 3k \ (k > 0) \text{으로 놓으면}$$

$$7 = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$7 = \frac{7k}{1 - 12k^2}, 12k^2 + k - 1 = 0$$

$$(3k+1)(4k-1)=0 \text{에서 } k = \frac{1}{4}$$

$$\text{즉, } \tan \alpha = 1, \tan \beta = \frac{3}{4} \text{이고 } \overline{AP} = 4$$

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = 7 \text{이므로 } \sin(\alpha + \beta) = \frac{7}{\sqrt{50}}$$

$$\overline{BQ} = \overline{AB} \sin(\alpha + \beta) = 4\sqrt{2} \times \frac{7}{\sqrt{50}} = \frac{28}{5}$$

답 ⑤

다른 풀이

$$\tan \alpha = 1, \tan \beta = \frac{3}{4} \text{이고 } \overline{AP} = 4 \text{이므로}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{PC}^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

삼각형 ABC의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AP} = \frac{1}{2} \times \overline{BQ} \times \overline{AC}$$

이므로

$$\frac{1}{2} \times 7 \times 4 = \frac{1}{2} \times \overline{BQ} \times 5$$

$$\text{따라서 } \overline{BQ} = \frac{28}{5}$$

16

$$3 = 2^{\log_2 3} \text{이므로}$$

$$y = -3 \times 2^x$$

$$= -2^{\log_2 3} \times 2^x$$

$$= -2^{x + \log_2 3} \quad \dots\dots ㉠$$

함수 ㉠의 역함수를 구하면

$$x + \log_2 3 = \log_2(-y)$$

$$x = \log_2(-y) - \log_2 3$$

$$y = \log_2(-x) - \log_2 3$$

한편,

$$y = \log_2\left(-\frac{x-2}{8}\right) + 4$$

$$= \log_2\{-(x-2)\} - \log_2 8 + 4$$

$$= \log_2\{-(x-2)\} + 1$$

이므로

$$\text{함수 } y = \log_2\left(-\frac{x-2}{8}\right) + 4 \text{의 그래프는 함수 } y = \log_2(-x) - \log_2 3$$

의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 $1 + \log_2 3$ 만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{따라서 } m=2, n=1 + \log_2 3 = \log_2 6 \text{이므로}$$

$$2^{m+n} = 2^{2+\log_2 6} = 2^{\log_2 24} = 24$$

답 ②

17

대각선의 교점을 O라 하면

$$\angle A_0OB = \angle BOC = \dots = \angle HOA_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA_0}} = \frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{OA_3}}{\overline{OA_2}} = \dots = \frac{\overline{OA_n}}{\overline{OA_{n-1}}} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{OA_0} = 1 \text{이므로}$$

$$\overline{OA_1} = \overline{OA_0} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{OA_2} = \overline{OA_1} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\overline{OA_3} = \overline{OA_2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$$

⋮

$$\overline{OA_n} = \overline{OA_{n-1}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

또한

$$\frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{OA_0}} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2A_3}}{\overline{OA_2}} = \dots = \frac{\overline{A_{n-1}A_n}}{\overline{OA_{n-1}}} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이므로

$$l_1 = \overline{A_0A_1} = \overline{OA_0} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$l_2 = \overline{A_1A_2} = \overline{OA_1} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$l_3 = \overline{A_2A_3} = \overline{OA_2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$$

⋮

$$l_n = \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{OA_{n-1}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} + 1$$

답 ③

18

$$\text{두 곡선 } y = \sin x, y = \cos x \text{의 교점의 } x \text{좌표는 } x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5}{4}\pi \text{이고}$$

직선 $x=t\left(\frac{\pi}{4}\leq t\leq\frac{5}{4}\pi\right)$ 와 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$ 와의 교점을 각각 A, B라 하면 $A(t, \sin t)$, $B(t, \cos t)$ 이고
주어진 입체도형을 x 축에 수직이고 점 $(t, 0)$ 을 지나는 평면으로 자른 단면의 넓이는

$$\overline{AB}^2 = (\sin t - \cos t)^2 = 1 - 2 \sin t \cos t$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (1 - 2 \sin t \cos t) dt &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (1 - \sin 2t) dt \\ &= \left[t + \frac{1}{2} \cos 2t \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} = \pi \end{aligned}$$

답 ②

19

ㄱ. 주어진 식에 $n=1$ 을 대입하면 $\frac{\sum_{k=1}^1 a_k}{\sum_{k=1}^1 b_k} = \frac{3}{5}$

$$\text{즉, } \frac{a_1}{b_1} = \frac{3}{5} \text{ (참)}$$

$$\text{ㄴ. } \sum_{k=1}^{2m-1} a_k = \frac{(2m-1)(a_1 + a_{2m-1})}{2} = (2m-1)a_m$$

$$\text{마찬가지로 하면 } \sum_{k=1}^{2m-1} b_k = (2m-1)b_m$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{2m-1} a_k}{\sum_{k=1}^{2m-1} b_k} = \frac{2(2m-1)+1}{4(2m-1)+1} \text{이 성립하므로}$$

$$\frac{a_m}{b_m} = \frac{4m-1}{8m-3} \text{ (참)}$$

ㄷ. ㄴ에서 성립한 식에 $m=5$ 를 대입하면

$$\frac{a_5}{b_5} = \frac{19}{37}$$

$$\text{이때 } a_5=38 \text{이므로 } b_5=74$$

$$\sum_{k=1}^9 b_k = 9b_5 = 666 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

20

선택한 4장의 카드에 적혀 있는 자연수를 A, B, C, D ($A < B < C < D$)라 하자.

n 장의 카드에 적혀 있는 자연수를 작은 수에서 큰 수 순서로 차례로 나열할 때, 자연수 A 앞에 놓인 자연수의 개수를 a , 두 자연수 A와 B, B와 C, C와 D 사이에 놓인 자연수의 개수를 각각 b, c, d , 자연수 D 뒤에 놓인 자연수의 개수를 e 라 하면

$$a+b+c+d+e = \boxed{n-4}$$

이때 어느 두 수도 연속하지 않게 뽑으려면 두 자연수 A와 B, B와 C, C와 D 사이에 각각 적어도 한 개의 자연수가 있어야 하므로

$$a \geq 0, e \geq 0, b \geq 1, c \geq 1, d \geq 1$$

이어야 한다.

$b-1=x, c-1=y, d-1=z$ 로 놓으면 구하는 경우의 수는 방정식

$$a+e+x+y+z = \boxed{n-7}$$

을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, e, x, y, z 의 모든 순서쌍 (a, e, x, y, z) 의 개수와 같다.

따라서 카드에 적혀 있는 어느 두 수도 연속하지 않는 경우의 수는

$$\boxed{{}_5H_{n-7} = {}_{n-3}C_{n-7} = {}_{n-3}C_4}$$
이다.

$$\text{따라서 } f(n)=n-4, g(n)=n-7, h(n)={}_{n-3}C_4$$

$$\text{에서 } f(13)=9, g(13)=6, h(13)=\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4!}=210$$

$$\text{이므로 } f(13) + \frac{h(13)}{g(13)} = 9 + \frac{210}{6} = 44$$

답 ①

21

$$F'(x) = |f(x)| + a \text{이므로}$$

$$y=G(x) \text{일 때 } G'(x) = \frac{1}{F'(y)} = \frac{1}{|f(y)| + a} \text{이므로}$$

함수 $G'(x)$ 가 극대이면 함수 $|f(y)| + a$ 는 극소이다.

$$F(0)=0 \text{이므로 } G'(0) = \frac{1}{F'(0)} = \frac{1}{|f(0)| + a} = 1 \text{이고}$$

조건 (가)에서 함수 $G'(x)$ 가 $x=0$ 에서 극대이므로

함수 $|f(x)| + a$ 는 $x=0$ 에서 극소이고 극솟값 1을 가진다. ㉠

적당한 양수 a 가 존재해서 $F(a)=114$ 이면

$$G'(114) = \frac{1}{F'(a)} = \frac{1}{|f(a)| + a} = 1 \text{이고}$$

조건 (가)에서 함수 $G'(x)$ 가 $x=114$ 에서 극대이므로

함수 $|f(x)| + a$ 는 $x=a$ 에서 극소이고 극솟값 1을 가진다. ㉡

$f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

㉠과 ㉡이 성립하려면 $a=1$ 이고 $f(x)=x^2(x-a)$ 또는

$$f(x)=x(x-a)^2 \text{ ㉢}$$

어느 경우에도

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_0^a (|f(t)| + a) dt \\ &= \int_0^a (|f(t)| + 1) dt = \frac{1}{12} a^4 + a = 114 \end{aligned}$$

$$a^4 + 12a - 1368 = 0$$

$a=6$ 을 대입하면 식이 성립하므로 조립제법으로 식의 좌변을 인수분해 하면

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 6 & 1 & 0 & 0 & 12 & -1368 \\ & & 6 & 36 & 216 & 1368 \\ \hline & 1 & 6 & 36 & 228 & 0 \end{array}$$

$$\text{즉, } (a-6)(a^3+6a^2+36a+228)=0$$

이때 $a>0$ 이므로 만족시키는 a 는 6뿐이다.

$G'(x)$ 가 $x=b$ 에서 극소이고 어떤 상수 β 가 존재해서 $F(\beta)=b$ 이면

$$G'(b) = \frac{1}{F'(\beta)} = \frac{1}{|f(\beta)| + 1} = m \text{이고}$$

함수 $G'(x)$ 가 $x=b$ 에서 극소이므로

함수 $|f(x)| + 1$ 은 $x=\beta$ 에서 극대이고

$$\text{㉢에서 } f'(x)=x(3x-2a) \text{ 또는 } f'(x)=(x-a)(3x-a)$$

$$\text{즉, } \beta = \frac{2a}{3} \text{ 또는 } \beta = \frac{a}{3} \text{이고}$$

$$\text{어느 경우에도 } |f(\beta)| = \frac{4}{27} a^3 = 32$$

따라서 $m = -\frac{1}{33}$ 이므로

$$\frac{a}{m} = 33$$

답 ③

22

$${}_2H_3 = {}_{2+3-1}C_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

이므로

$$\frac{{}_6P_3}{3!} \times {}_2H_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \times 4 = 80$$

답 80

23

$$f(x) = (e^{2x} + 1)^3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3(e^{2x} + 1)^2 \times 2e^{2x}$$

이므로

$$f'(0) = 3(1+1)^2 \times 2 \\ = 3 \times 4 \times 2 = 24$$

답 24

24

$x - \frac{2}{\pi} \sin(xy) = 2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$1 - \frac{2}{\pi} y \cos(xy) - \frac{2}{\pi} x \cos(xy) \frac{dy}{dx} = 0$$

이때 $x=2, y=\frac{\pi}{2}$ 를 대입하면

$$1 + 1 + \frac{4}{\pi} \frac{dy}{dx} = 0, \frac{dy}{dx} = -\frac{\pi}{2}$$

따라서 $p=2, q=1$ 이므로 $p+q=2+1=3$

답 3

25

$a_2 = x$ 라 하면 조건 (나)에서 $a_{n+2} = a_n + (4n-3)$ 이므로

$$n=1\text{일 때, } a_3 = a_1 + (4 \times 1 - 3) = 3 + 1 = 4$$

$$n=2\text{일 때, } a_4 = a_2 + (4 \times 2 - 3) = x + 5$$

$$n=3\text{일 때, } a_5 = a_3 + (4 \times 3 - 3) = 4 + 9 = 13$$

$$n=4\text{일 때, } a_6 = a_4 + (4 \times 4 - 3) = (x+5) + 13 = x+18$$

$$a_6 = 20 \text{이므로 } x+18=20 \text{에서}$$

$$x=2$$

따라서 $a_2=2$ 이므로

$$a_2 + a_5 = 2 + 13 = 15$$

답 15

26

크기가 n 인 표본의 표준편차가 10이므로 표본의 평균을 \bar{x} 라 하면 모평균 m 의 신뢰도 95%인 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}}$$

이때 $b-a$ 의 값이 1.96 이하가 되어야 하므로

$$b-a = 2 \times 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \leq 1.96$$

$$\sqrt{n} \geq \frac{2 \times 10 \times 1.96}{1.96} = 20$$

따라서 $n \geq 400$ 이므로

n 의 최솟값은 400이다.

답 400

27

$$3^{n-1}a_1 + 3^{n-2}a_2 + 3^{n-3}a_3 + \cdots + a_n = 3^n - 2^n \quad \text{..... ㉠}$$

$$3^{n-2}a_1 + 3^{n-3}a_2 + 3^{n-4}a_3 + \cdots + a_{n-1} = 3^{n-1} - 2^{n-1} \quad (n \geq 2) \quad \text{..... ㉡}$$

㉠-㉡ $\times 3$ 을 하면

$$a_n = 2^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

㉠에 $n=1$ 을 대입하면 $a_1 = 3 - 2 = 1$ 이므로

$$a_n = 2^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^9 a_k = \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = 511$$

답 511

28

전체 회원이 200명이므로 봄철을 선택한 회원은 70명, 가을철을 선택한 회원은 130명이다.

이 배드민턴 동호회원 전체를 남자와 여자, 봄철과 가을철로 나누어 표로 나타내면 다음과 같다.

	봄철(B)	가을철(B^c)	합계
남자(A)	a	b	120
여자(A^c)	c	d	80
계	70	130	200

이 동호회원 중 임의로 뽑은 1명이 남자 회원인 사건을 A 라 하면 여자 회원인 사건은 A^c 이고, 봄철을 선택한 회원인 사건을 B 라 하면 가을철을 선택한 회원인 사건은 B^c 이다.

이때 임의로 뽑은 1명이 봄철을 선택한 남자 회원일 확률이 $\frac{1}{5}$ 이므로

$$P(B \cap A) = \frac{a}{200} = \frac{1}{5} \text{에서 } a=40$$

$$a+b=120 \text{에서 } b=80$$

$$b+d=130 \text{에서 } d=50$$

따라서 이 동호회원 중 임의로 뽑은 1명이 가을철을 선택한 회원일 때 이 회원이 여자 회원일 확률은

$$P(A^c | B^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)}$$

$$= \frac{\frac{50}{200}}{\frac{130}{200}} = \frac{5}{13}$$

따라서 $p=13, q=5$ 이므로

$$p+q=13+5=18$$

답 18

29

삼각형 ABC의 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{BC} = 2\overline{BH} = 2\overline{AB} \sin \frac{A}{2} = 12 \sin \frac{A}{2}$$

선분 BC의 길이와 $\sin D = \frac{3}{5}$ 이 일정하므로 점 D의 위치에 관계없이

삼각형 CDB에 외접하는 원은 유일하게 결정된다.

외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$2R = \frac{\overline{BC}}{\sin D}, R = \frac{5}{6}\overline{BC}$$

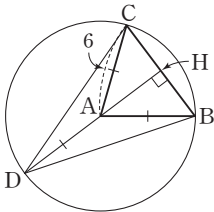
$$\text{이때 } \sin 2D = 2 \sin D \cos D = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25} = \sin A$$

$$\text{이므로 } A = 2D$$

$$\overline{BC} = 12 \sin \frac{A}{2} = 12 \sin D = \frac{36}{5}$$

$$R = 6$$

그림과 같이 점 D는 중심이 A이고 반지름의 길이가 6인 원 위의 움직이는 점이다.



삼각형 CDB의 넓이를 S라 하면 S는 선분 DH가 선분 BC의 수직이등분선이 될 때, 최대가 된다.

$$\overline{DH} = 6 + \overline{AH}$$

$$= 6 + 6 \cos \frac{A}{2}$$

$$= 6 + 6 \cos D = \frac{54}{5}$$

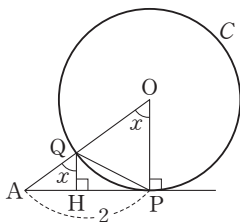
따라서 넓이 S의 최댓값은

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{DH} = \frac{18}{5} \overline{DH}$$

$$= \frac{18}{5} \times \frac{54}{5} = \frac{972}{25}$$

$$\text{이고 } p = 25, q = 972 \text{이므로 } p + q = 25 + 972 = 997$$

30



$$\overline{AP} = 2 \text{이므로}$$

점 Q에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하고,

$$\angle AOP = x \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right) \text{라 하면}$$

$$\tan x = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \text{이므로 } \overline{OP} = \frac{2}{\tan x}$$

$$\text{또, } \sin x = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} \text{이므로 } \overline{OA} = \frac{2}{\sin x}$$

$$\overline{OP} = \overline{OQ} \text{이므로}$$

$$\overline{AQ} = \overline{OA} - \overline{OP} = \frac{2}{\sin x} - \frac{2}{\tan x}$$

$$\triangle OAP \sim \triangle QAH \text{이므로 } \angle AOP = \angle AQH$$

$$\overline{QH} = \overline{AQ} \cos x$$

$$= \left(\frac{2}{\sin x} - \frac{2}{\tan x} \right) \cos x$$

$$= \frac{2(\cos x - \cos^2 x)}{\sin x}$$

삼각형 APQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times \overline{QH} = \overline{QH}$$

$$\text{이때 } f(x) = \overline{QH} \text{라 하면 } f(x) = \frac{2(\cos x - \cos^2 x)}{\sin x}$$

$$f'(x) = 2 \times \frac{(-\sin x + 2 \cos x \sin x) \sin x - (\cos x - \cos^2 x) \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= 2 \times \frac{2 \sin^2 x \cos x + \cos^3 x - 1}{\sin^2 x}$$

$$= 2 \times \frac{2(1 - \cos^2 x) \cos x + \cos^3 x - 1}{\sin^2 x}$$

$$= -2 \times \frac{\cos^3 x - 2 \cos x + 1}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{2}{\sin^2 x} (\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x - 1)$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{일 때 } 0 < \sin x < 1, 0 < \cos x < 1 \text{이므로}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 x 를 $x = a$ 라 하고 함수 $f(x)$ 의

증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	...	a	...	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	극대	↘	

$$\cos a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{일 때 } f(x) = \overline{QH}, \text{ 즉 삼각형 APQ의 넓이가 최대}$$

이다. 즉, 삼각형 APQ의 넓이가 최대일 때 원 C의 넓이는

$$\overline{OP}^2 \times \pi = \frac{4}{\tan^2 a} \times \pi$$

$$= 4 \times \frac{\cos^2 a}{\sin^2 a} \times \pi$$

$$= 4 \times \frac{\cos^2 a}{1 - \cos^2 a} \times \pi$$

$$= 4 \times \frac{\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2}{1 - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2} \times \pi$$

$$= 4 \times \frac{3 - \sqrt{5}}{-1 + \sqrt{5}} \times \pi$$

$$= \{(3 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})\} \pi = (-2 + 2\sqrt{5}) \pi$$

$$\text{따라서 } a = -2, b = 5 \text{이므로 } a^2 + b^2 = 4 + 25 = 29$$

답 997

답 29

01 ⑤	02 ①	03 ③	04 ⑤	05 ③
06 ④	07 ②	08 ②	09 ④	10 ②
11 ③	12 ③	13 ③	14 ②	15 ⑤
16 ③	17 ③	18 ①	19 ②	20 ③
21 ⑤	22 200	23 3	24 7	25 17
26 60	27 56	28 25	29 73	30 12

01

$$\begin{aligned}
 (2^{\log_5 3})^{\log_5 4} &= 2^{\log_5 3 \times \log_5 4} \\
 &= 2^{\frac{\log 3}{\log 2} \times \frac{\log 4}{\log 3}} \\
 &= 2^{\frac{\log 3}{\log 2} \times \frac{2 \log 2}{\log 3}} \\
 &= 2^2 = 4
 \end{aligned}$$

답 ⑤

02

등차중항의 성질에서

$$5 = \frac{x+8}{2} \text{이므로 } x=2$$

등비중항의 성질에서

$$xy=4^2 \text{이므로 } 2y=16 \text{에서 } y=8$$

따라서 $x+y=10$

답 ①

03

$$\begin{aligned}
 &\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+3n+4} - \sqrt{n^2-n+1}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+3n+4} - \sqrt{n^2-n+1})(\sqrt{n^2+3n+4} + \sqrt{n^2-n+1})}{\sqrt{n^2+3n+4} + \sqrt{n^2-n+1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3n+4 - (n^2-n+1)}{\sqrt{n^2+3n+4} + \sqrt{n^2-n+1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+3}{\sqrt{n^2+3n+4} + \sqrt{n^2-n+1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{3}{n}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} \\
 &= \frac{4+0}{1+1} = \frac{4}{2} = 2
 \end{aligned}$$

답 ③

04

두 사건 A와 B는 서로 독립이고, $P(A)=3P(B)$ 이므로

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 3\{P(B)\}^2$$

이때 $P(A \cap B) = \frac{4}{27}$ 이므로

$$3\{P(B)\}^2 = \frac{4}{27}, \{P(B)\}^2 = \frac{4}{81}$$

$$P(B) > 0 \text{이므로 } P(B) = \frac{2}{9} \text{이고 } P(A) = \frac{2}{3}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
 &= \frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \frac{4}{27} \\
 &= \frac{20}{27}
 \end{aligned}$$

답 ⑤

05

$$4^x=2 \text{에서 } x=\frac{1}{2} \text{이므로 } A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

$$2^{-x+3}=2 \text{에서 } x=2 \text{이므로 } B(2, 2)$$

$$4^x=2^{-x+3} \text{에서 } 2x=-x+3, x=1 \text{이므로 } C(1, 4)$$

$$\overline{AB} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \text{ 점 C와 직선 AB 사이의 거리는 2이므로}$$

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 2 = \frac{3}{2}$$

답 ③

06

함수 $f(x)=\ln(x^2+e-1)$ 의 역함수는 $g(x)$ 이므로

역함수의 미분법에 의하여

$$g'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)}$$

$$f(x)=\ln(x^2+e-1) \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+e-1)'}{x^2+e-1} = \frac{2x}{x^2+e-1} \text{이므로}$$

$$f'(1) = \frac{2}{e}$$

$$\text{따라서 } g'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{e}{2}$$

답 ④

07

2개의 동전과 3개의 주사위를 동시에 던질 때, 동전에서 앞면이 나온 횟수를 a, 주사위에서 3의 배수의 눈이 나온 횟수를 b라 하자.

$a+b=4$ 를 만족시키는 2 이하의 음이 아닌 정수 a, 3 이하의 음이 아닌 정수 b는

$a=1, b=3$ 또는 $a=2, b=2$ 이다.

1개의 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이고, 1개의 주사위를 던

질 때 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}
 &{}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times {}_3C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3 + {}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times {}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{27} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{9} \\
 &= \frac{2}{27}
 \end{aligned}$$

답 ②

08

$$a_2 = a_1 - 2 = 70 - 2 = 68$$

$$a_3 = \frac{1}{2} a_2 = \frac{1}{2} \times 68 = 34$$

$$a_4 = a_3 - 2 = 34 - 2 = 32$$

$$a_5 = \frac{1}{2} a_4 = \frac{1}{2} \times 32 = 16$$

$$a_6 = a_5 - 2 = 16 - 2 = 14$$

$$a_7 = \frac{1}{2} a_6 = \frac{1}{2} \times 14 = 7$$

따라서 $a_n < 10$ 을 만족시키는 n 의 최솟값은 7이다.

답 ②

09

$$\begin{aligned} & \int_1^e \left(\frac{x+1}{x} + \ln x \right) dx \\ &= \int_1^e 1 dx + \int_1^e \frac{1}{x} dx + \int_1^e \ln x dx \\ &= [x]_1^e + [\ln x]_1^e + [x \ln x]_1^e - \int_1^e \left(x \times \frac{1}{x} \right) dx \\ &= e - 1 + (\ln e - \ln 1) + (e \ln e - 1 \ln 1) - \int_1^e 1 dx \\ &= (e - 1) + (1 - 0) + (e - 0) - [x]_1^e \\ &= 2e - (e - 1) = e + 1 \end{aligned}$$

답 ④

10

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \frac{1}{(t+1)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{(t+1)^2} \text{이므로 점 P의 시각 } t (t > 0)$$

에서의 속력은

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2} &= \sqrt{\left\{ 1 + \frac{1}{(t+1)^2} \right\}^2 + \left\{ 1 - \frac{1}{(t+1)^2} \right\}^2} \\ &= \sqrt{2 \left\{ 1 + \frac{1}{(t+1)^4} \right\}} \end{aligned}$$

따라서 시각 $t = \alpha$ ($\alpha > 0$)에서의 점 P의 속력은 $\sqrt{2 \left\{ 1 + \frac{1}{(\alpha+1)^4} \right\}}$ 이

$$\text{므로 } \sqrt{2 \left\{ 1 + \frac{1}{(\alpha+1)^4} \right\}} = \frac{2\sqrt{5}}{3} \text{에서}$$

$$2 \left\{ 1 + \frac{1}{(\alpha+1)^4} \right\} = \frac{20}{9}, \quad (\alpha+1)^4 = 9$$

$$(\alpha+1-\sqrt{3})(\alpha+1+\sqrt{3})\{(\alpha+1)^2+3\}=0$$

이때 $\alpha > 0$ 이므로 $\alpha = \sqrt{3} - 1$

답 ②

11

(i) 조건 (가)에서

$f(2) \times f(6)$ 이 4의 배수인 경우는 다음과 같다.

㉠ $f(2) = 4$ 또는 $f(6) = 4$ 인 경우

$f(2) = 4$ 인 경우 $f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 5

$f(6) = 4$ 인 경우 $f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 5

$f(2) = 4, f(6) = 4$ 인 경우는 중복되므로

$f(2), f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$$5 + 5 - 1 = 9$$

㉡ $f(2) \neq 4, f(6) \neq 4$ 인 경우

$f(2)$ 와 $f(6)$ 의 값은 2 또는 6이므로 $f(2), f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$$2 \times 2 = 4$$

㉠, ㉡에서 $f(2) \times f(6)$ 이 4의 배수인 경우의 수는

$$9 + 4 = 13$$

(ii) 조건 (나)에서 $f(3), f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4,

5, 6에서 중복을 허락하여 3개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$$13 \times 35 = 455$$

답 ③

12

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \sin^2 x + \cos^2 2x - \cos 2x \\ &= \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 2x - \cos 2x \\ &= \cos^2 2x - \cos 2x + 1 \end{aligned}$$

$\cos 2x = t$ 로 놓으면

$-1 \leq t \leq 1$ 이고, $g(t) = t^2 - t + 1$ 이라 하면

$$g(t) = t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}$$

함수 $g(t)$ 는 $t = \frac{1}{2}$ 일 때, 최솟값 $\frac{3}{4}$ 을 가지므로

함수 $f(x)$ 는 $\cos 2x = \frac{1}{2}$ 일 때, 최솟값 $\frac{3}{4}$ 을 갖는다.

따라서 $\cos 2a = \frac{1}{2}, m = \frac{3}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos 2a + m &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{2+3}{4} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

답 ③

13

정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추

출하여 구한 표본평균 \bar{X} 는 정규분포 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ 을 따른다.

$$Z_1 = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, \quad Z_2 = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \text{이라 하면 두 확률변수 } Z_1, Z_2 \text{는 모두 표}$$

준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르는 확률변수 Z 에 대하여

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \geq m+8) &= P\left(\frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{(m+8) - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right) \\ &= P\left(Z_1 \geq \frac{8}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{8}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right) \\ P(\bar{X} \leq m-2) &= P\left(\frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{(m-2) - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right) \\ &= P\left(Z_2 \leq -\frac{2\sqrt{n}}{\sigma} \right) \\ &= P\left(Z \leq -\frac{2\sqrt{n}}{\sigma} \right) \end{aligned}$$

따라서

$$P\left(Z \geq \frac{8}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq -\frac{2\sqrt{n}}{\sigma}\right) \text{에서}$$

$$\frac{8}{\sigma} = \frac{2\sqrt{n}}{\sigma} \text{이므로 } \sqrt{n} = 4$$

$$n = 16$$

답 ③

14

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 두 곡선의 교점의 x 좌표를 α 라 하면

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = k \cos \alpha \text{에서 } \cos \alpha \neq 0 \text{이므로 } \sin \alpha = \frac{k}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cos x dx = \left[\sin^2 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} k \cos x dx = \frac{1}{2}$$

$$\left[\sin^2 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + k \left[\sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{k}{2}\right)^2 + k \left(1 - \frac{k}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{k^2}{4} + k - \frac{k^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$k^2 - 4k + 2 = 0$$

$$0 < k < \sqrt{2} \text{이므로}$$

$$k = 2 - \sqrt{2}$$

답 ②

15

$$x = 2t + \cos t - 1, y = \sin t \text{에서}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2 - \sin t, \frac{dy}{dt} = \cos t \text{이므로}$$

$$f(t) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t}{2 - \sin t} \text{이고,}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{(\cos t)' \times (2 - \sin t) - \cos t \times (2 - \sin t)'}{(2 - \sin t)^2} \\ &= \frac{-\sin t \times (2 - \sin t) - \cos t \times (-\cos t)}{(2 - \sin t)^2} \\ &= \frac{-2 \sin t + \sin^2 t + \cos^2 t}{(2 - \sin t)^2} \\ &= \frac{-2 \sin t + 1}{(2 - \sin t)^2} \end{aligned}$$

$$f'(t) = 0 \text{에서}$$

$$\sin t = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{\pi}{6} + 2(n-1)\pi \text{ (} n \text{은 자연수) 또는}$$

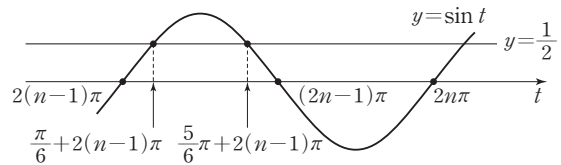
$$t = \frac{5\pi}{6} + 2(n-1)\pi \text{ (} n \text{은 자연수)}$$

$$t = \frac{\pi}{6} + 2(n-1)\pi \text{ (} n \text{은 자연수)인 } t \text{의 값의 좌우에서 } f'(t) \text{의 부호}$$

가 양(+)에서 음(-)으로 바뀌고,

$t = \frac{5\pi}{6} + 2(n-1)\pi$ (n 은 자연수)인 t 의 값의 좌우에서 $f'(t)$ 의 부호가 음(-)에서 양(+)으로 바뀐다.

따라서 함수 $f(t)$ 가 극대가 되도록 하는 t 의 값은 $t = \frac{\pi}{6} + 2(n-1)\pi$ (n 은 자연수)이다.



함수 $f(t)$ 가 극대가 되도록 하는 t 의 값을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n 번째 값은 a_n 이므로

$$a_1 = \frac{\pi}{6}, a_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi, a_3 = \frac{\pi}{6} + 4\pi, a_4 = \frac{\pi}{6} + 6\pi, a_5 = \frac{\pi}{6} + 8\pi,$$

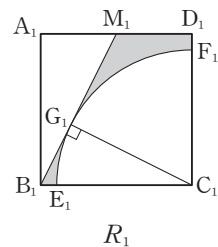
$$a_6 = \frac{\pi}{6} + 10\pi$$

따라서

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^6 a_k &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{6} + \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi \right) + \cdots + \left(\frac{\pi}{6} + 10\pi \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{6} \times 6 + 2\pi + 4\pi + 6\pi + 8\pi + 10\pi \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \times (\pi + 30\pi) \\ &= 31 \end{aligned}$$

답 ⑤

16



사분원 $C_1F_1E_1$ 과 선분 B_1M_1 이 만나는 점을 G_1 이라 하고,

$\angle M_1B_1C_1 = \theta$ 라 하면

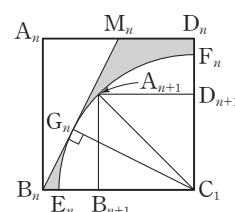
$$\tan \theta = 2 \text{이므로 } \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

이때 삼각형 $B_1C_1G_1$ 에서

$$\sin \theta = \frac{\overline{C_1G_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{C_1G_1}}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\overline{C_1G_1}}{2} \text{에서 } \overline{C_1G_1} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\text{따라서 } S_1 = 3 - \frac{1}{4} \times \frac{16}{5} \pi = 3 - \frac{4}{5} \pi$$



정사각형 $A_nB_nC_nD_n$ 의 한 변의 길이를 a_n 이라 하면

$$\overline{C_1 G_n} = \frac{2}{\sqrt{5}} a_n \text{이므로}$$

$$\overline{C_1 A_{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} a_n$$

$$\text{이때 } \overline{C_1 A_{n+1}} = \sqrt{2} a_{n+1} \text{이므로}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} a_n = \sqrt{2} a_{n+1}$$

$$a_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{10}} a_n$$

$$\text{즉, 두 정사각형 } A_n B_n C_n D_n, A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1} D_{n+1} \text{의 넓음비는 } 1 : \frac{2}{\sqrt{10}} \text{이}$$

$$\text{므로 넓이의 비는 } 1 : \frac{2}{5}$$

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3 - \frac{4}{5}\pi}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{15 - 4\pi}{3}$$

③

17

각 시행에서 나온 흰 공의 개수는 1 이상 3 이하이므로 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이다.

(i) $X=1$ 인 경우

한 번의 시행에서 꺼낸 흰 공의 개수가 3이므로

$$P(X=1) = \frac{{}_3C_3}{{}_5C_3} = \frac{1}{10}$$

(ii) $X=3$ 인 경우

첫 번째와 두 번째 시행에서 꺼낸 흰 공의 개수가 모두 1이고 세 번째 시행에서 흰 공을 1개 이상 꺼내면 꺼낸 흰 공의 개수의 합이 3 이상이 되므로

$$P(X=3) = \left(\frac{{}_3C_1 \times {}_2C_2}{{}_5C_3} \right)^2 \times 1 = \left(\frac{3}{10} \right)^2$$

(iii) $X=2$ 인 경우

여사건의 확률에 의하여

$$P(X=2) = 1 - \left\{ \frac{1}{10} + \left(\frac{3}{10} \right)^2 \right\} = \frac{81}{100}$$

따라서 확률변수 X 의 평균 $E(X)$ 는

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^3 \{k \times P(X=k)\} \\ &= 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{81}{100} + 3 \times \frac{9}{100} = \frac{199}{100} \end{aligned}$$

$$p = \frac{1}{10}, q = \frac{3}{10}, r = \frac{199}{100} \text{이므로}$$

$$p+q+r = \frac{239}{100}$$

③

18

1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 구슬 6개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 구슬을 꺼낼 때, 6의 약수를 꺼낼 확률은

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

162회의 시행에서 6의 약수가 적혀 있는 구슬을 꺼내는 횟수를 확률변

수 X 라 하면 X 는 이항분포 $B\left(162, \frac{2}{3}\right)$ 를 따른다.

$$E(X) = 162 \times \frac{2}{3} = 108, V(X) = 162 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = 36$$

162는 충분히 크므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(108, 6^2)$ 을 따른다.

6의 약수가 적혀 있는 구슬을 꺼내면 3점을 얻고,

6의 약수가 아닌 수가 적혀 있는 구슬을 꺼내면 2점을 잃으므로

162회의 시행에서 획득하는 점수는

$$3X - 2(162 - X) = 5X - 324 \text{이다.}$$

162회의 시행 후 획득한 점수가 201점 이상 246점 이하이면

$$201 \leq 5X - 324 \leq 246 \text{에서}$$

$$525 \leq 5X \leq 570 \text{이므로}$$

$$105 \leq X \leq 114$$

$Z = \frac{X-108}{6}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르

므로 0점에서 시작하여 162회의 시행 후 획득한 점수가 201점 이상 246점 이하일 확률은

$$P(105 \leq X \leq 114)$$

$$= P\left(\frac{105-108}{6} \leq \frac{X-108}{6} \leq \frac{114-108}{6}\right)$$

$$= P(-0.5 \leq Z \leq 1)$$

$$= P(-0.5 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 0.5) + P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.1915 + 0.3413$$

$$= 0.5328$$

①

19

$$S_{10} = \frac{a(r^{10}-1)}{r-1}$$

$$T_{10} = \frac{a\{(-r)^{10}-1\}}{-r-1} = \frac{a(r^{10}-1)}{-r-1}$$

$$T_{10} = 2S_{10} \text{에서}$$

$$\frac{a(r^{10}-1)}{-r-1} = 2 \times \frac{a(r^{10}-1)}{r-1}$$

$$\frac{1}{-r-1} = \frac{2}{r-1}, r-1 = -2r-2, 3r = -1$$

$$r = -\frac{1}{3}$$

$$T_{20} = \frac{a\{(-r)^{20}-1\}}{-r-1} = \frac{a(r^{20}-1)}{-r-1}$$

$$R_{10} = \frac{a^2\{(r^2)^{10}-1\}}{r^2-1} = \frac{a^2(r^{20}-1)}{(r+1)(r-1)}$$

$$T_{20} = 3R_{10} \text{에서}$$

$$\frac{a(r^{20}-1)}{-r-1} = 3 \times \frac{a^2(r^{20}-1)}{(r+1)(r-1)}$$

$$-1 = \frac{3a}{r-1} = \frac{3a}{-\frac{4}{3}}, \frac{4}{3} = 3a \text{에서 } a = \frac{4}{9}$$

$$\text{따라서 } a+r = \frac{4}{9} + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$$

②

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt, G(x) = \int_1^x tf(t)dt \text{이므로}$$

$$F'(x) = f(x), G'(x) = xf(x)$$

모든 실수 x 에 대하여 $e^{-xF(x)+G(x)} > 0$ 이므로 $f(x) > 0$ 이고,

$$\ln f(x) = -xF(x) + G(x) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

⑦의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -F(x) - xF'(x) + G'(x) \text{에서}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -F(x) - xf(x) + xf(x) = -F(x) \text{이므로}$$

$$f'(x) = -f(x)F(x) \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

ㄱ. $x < 1$ 일 때, $f(x) > 0$ 이므로

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt < 0 \text{이고, } f'(x) = -f(x)F(x) > 0 \text{이다.}$$

따라서 $x < 1$ 일 때, $f'(x) > 0$ 이므로 $x < 1$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가한다. (참)

ㄴ. $f'(x) = 0$ 에서 $f(x) = 0$ 또는 $F(x) = 0$

$f(x) > 0$ 이므로 $f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 는

$F(x) = 0$ 을 만족시키는 $x = 1$ 뿐이다.

㉔의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$f'(1) = -f(1)F(1) = -f(1) \int_1^1 f(t)dt = -f(1) \times 0 = 0$$

$x > 1$ 일 때, $f(x) > 0$ 이므로

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt > 0 \text{이고, } f'(x) = -f(x)F(x) < 0 \text{이다.}$$

따라서 $x > 1$ 일 때, $f'(x) < 0$ 이므로 $x > 1$ 에서 함수 $f(x)$ 는 감소한다.

함수 $f(x)$ 에서 $f'(1) = 0$ 이고, $x = 1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양(+)에서 음(-)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극대이다.

그러므로 함수 $f(x)$ 는 극솟값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. ㉔에서 $f'(x) = -F'(x)F(x)$ 이므로

$$f'(x) + F(x)F'(x) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

㉔의 양변을 x 에 대하여 부정적분하면

$$f(x) + \frac{1}{2}\{F(x)\}^2 = C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

$$x = 1 \text{을 대입하면 } f(1) + \frac{1}{2}\{F(1)\}^2 = C$$

$$f(1) = 1 \text{이고 } F(1) = \int_1^1 f(t)dt = 0 \text{이므로 } C = 1$$

$$\text{모든 실수 } x \text{에 대하여 } f(x) + \frac{1}{2}\{F(x)\}^2 = 1, \text{ 즉}$$

$$2f(x) + \{F(x)\}^2 = 2 \text{이므로 } 2f(2) + \{F(2)\}^2 = 2$$

$$f(2) = \frac{1}{2} \text{이므로 } \{F(2)\}^2 = 1$$

$$F(2) = \int_1^2 f(t)dt > 0 \text{이므로 } F(2) = 1 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

다른 풀이

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt, G(x) = \int_1^x tf(t)dt \text{이므로}$$

$$F'(x) = f(x), G'(x) = xf(x)$$

$$f(x) = e^{-xF(x)+G(x)} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

⑦의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-xF(x)+G(x)} \times \{-xF'(x) + G'(x)\}' \\ &= e^{-xF(x)+G(x)} \times \{-F(x) - xf(x) + xf(x)\} \\ &= -e^{-xF(x)+G(x)} \times F(x) \end{aligned}$$

$$f'(x) = -e^{-xF(x)+G(x)} \times F(x) \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

ㄱ. $x < 1$ 일 때,

$$-e^{-xF(x)+G(x)} < 0 \text{이고, } f(x) > 0 \text{이므로}$$

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt < 0 \text{이고, } f'(x) = -e^{-xF(x)+G(x)} \times F(x) > 0$$

이다.

따라서 $x < 1$ 일 때, $f'(x) > 0$ 이므로 $x < 1$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가한다. (참)

ㄴ. ㉔의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} f'(1) &= -e^{-1 \times F(1)+G(1)} \times F(1) \\ &= -e^{-F(1)+G(1)} \times \int_1^1 f(t)dt \\ &= -e^{-F(1)+G(1)} \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$x > 1$ 일 때,

$$-e^{-xF(x)+G(x)} < 0 \text{이고, } f(x) > 0 \text{이므로}$$

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt > 0 \text{이고, } f'(x) = -e^{-xF(x)+G(x)} \times F(x) < 0$$

이다.

따라서 $x > 1$ 일 때, $f'(x) < 0$ 이므로 $x > 1$ 에서 함수 $f(x)$ 는 감소한다.

함수 $f(x)$ 에서 $f'(1) = 0$ 이고, $x = 1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 양(+)에서 음(-)으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극대이다.

그러므로 함수 $f(x)$ 는 극솟값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄷ. ㉔에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-xF(x)+G(x)} \times F(x) \\ &= -f(x)F(x) \\ &= -F'(x)F(x) \end{aligned}$$

이므로

$$f'(x) + F(x)F'(x) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

㉔의 양변을 x 에 대하여 부정적분하면

$$f(x) + \frac{1}{2}\{F(x)\}^2 = C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

$x = 1$ 을 대입하면

$$f(1) + \frac{1}{2}\{F(1)\}^2 = C$$

$$f(1) = 1 \text{이고 } F(1) = \int_1^1 f(t)dt = 0 \text{이므로 } C = 1$$

$$\text{모든 실수 } x \text{에 대하여 } f(x) + \frac{1}{2}\{F(x)\}^2 = 1, \text{ 즉}$$

$$2f(x) + \{F(x)\}^2 = 2 \text{이므로}$$

$$2f(2) + \{F(2)\}^2 = 2$$

$$f(2) = \frac{1}{2} \text{이므로 } \{F(2)\}^2 = 1$$

$$F(2) = \int_1^2 f(x)dx > 0 \text{이므로 } F(2) = 1 \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

21

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x \text{에서}$$

$$f'(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x \\ = \{ax^2 + (2a + b)x + b + c\}e^x$$

이고,

$$f''(x) = (2ax + 2a + b)e^x + \{ax^2 + (2a + b)x + b + c\}e^x \\ = \{ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b + c\}e^x$$

$f''(x) = 0$ 에서 $e^x > 0$ 이므로

$$ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b + c = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

조건 (가)에 의하여 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 실근이 -2 와 1 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{4a + b}{a} = -1, \quad \frac{2a + 2b + c}{a} = -2 \text{이므로}$$

$$b = -3a, \quad c = 2a \text{이다.}$$

$$\text{그러므로 } f(x) = a(x^2 - 3x + 2)e^x, \quad f'(x) = a(x^2 - x - 1)e^x$$

조건 (나)에 의하여

$-1 \leq x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$f(x_2) - f(x_1) \geq -3(x_2 - x_1) \text{이고,}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq -3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이다.

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[x_1, x_2]$ 에서 연속이고, 열린구간 (x_1, x_2) 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \text{인 } c \text{가 열린구간 } (x_1, x_2) \text{에 적어도 하나 존재}$$

한다.

$-1 \leq x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 부등식 $\textcircled{2}$ 이 성립하므로 $c > -1$ 인 모든 실수 c 에 대하여 $f'(c) \geq -3$ 이다.

$$x > -1 \text{일 때, } f'(x) = a(x^2 - x - 1)e^x \geq -3 \text{이고,}$$

$$a > 0 \text{이므로 } x > -1 \text{일 때, } (x^2 - x - 1)e^x \geq -\frac{3}{a} \text{이다.}$$

$$g(x) = (x^2 - x - 1)e^x \text{으로 놓으면}$$

$$x > -1 \text{일 때, } g(x) = (x^2 - x - 1)e^x \geq -\frac{3}{a} \text{이므로}$$

$$x > -1 \text{일 때, 함수 } g(x) \text{의 최솟값은 } -\frac{3}{a} \text{보다 크거나 같아야 한다.}$$

$$g(x) = (x^2 - x - 1)e^x \text{에서}$$

$$g'(x) = (2x - 1)e^x + (x^2 - x - 1)e^x = (x^2 + x - 2)e^x \\ = (x + 2)(x - 1)e^x$$

$$g'(x) = 0 \text{에서 } e^x > 0 \text{이므로 } x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

$$x > -1 \text{일 때, 함수 } g(x) \text{에서 } g'(1) = 0 \text{이고,}$$

$$x = 1 \text{의 좌우에서 } g'(x) \text{의 부호가 음}(-) \text{에서 양}(+) \text{으로 바뀌므로}$$

함수 $g(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극소이면서 최소이다.

$$\text{함수 } g(x) \text{의 최솟값은 } x = 1 \text{일 때, } g(1) = -e \text{이므로}$$

$$g(1) = -e \geq -\frac{3}{a} \text{이어야 한다.}$$

$$a > 0 \text{이므로 } a \leq \frac{3}{e}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 a(x^2 - 3x + 2)e^x dx \\ = a \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)e^x dx$$

$$= a \left[\left[(x^2 - 3x + 2)e^x \right]_0^1 - \int_0^1 (2x - 3)e^x dx \right]$$

$$= a \left\{ 0 - 2 - \left[(2x - 3)e^x \right]_0^1 + \int_0^1 2e^x dx \right\}$$

$$= a \{ -2 - (-e + 3) + (2e - 2) \}$$

$$= a(3e - 7) \leq \frac{3}{e}(3e - 7)$$

$$= 9 - 21e^{-1}$$

$$\int_0^1 f(x) dx \leq 9 - 21e^{-1} \text{이므로 } \int_0^1 f(x) dx \text{의 최댓값은}$$

$$9 - 21e^{-1} = 9 - \frac{21}{e}$$

따라서 $p = 9$ 이고, $q = -21$ 이므로

$$p - q = 9 - (-21) = 30$$

답 ⑤

22

$${}_5P_2 \times {}_4H_2 = {}_5P_2 \times {}_5C_2$$

$$= (5 \times 4) \times \left(\frac{5 \times 4}{2 \times 1} \right) = 20 \times 10 = 200$$

답 200

23

진수 조건에서

$$x > 0, \quad 7x - 6 > 0 \text{이므로 } x > \frac{6}{7} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_2 x + \log_4 x = \log_4 (7x - 6) \text{에서}$$

$$\log_4 x^2 + \log_4 x = \log_4 (7x - 6)$$

$$\log_4 x^3 = \log_4 (7x - 6)$$

$$x^3 = 7x - 6, \quad x^3 - 7x + 6 = 0, \quad (x + 3)(x - 1)(x - 2) = 0$$

$$x = -3 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 방정식을 만족시키는 실수 x 의 값은

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 이 방정식을 만족시키는 모든 실수 x 의 값의 합은

$$1 + 2 = 3$$

답 3

24

$$a > 0 \text{이고, 함수 } f(x) \text{의 주기가 } \frac{\pi}{4} \text{이므로}$$

$$\frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{4} \text{에서 } a = 4, \quad \text{즉 } f(x) = 5 \tan 4x + b$$

$$\text{함수 } y = f(x) \text{의 그래프가 점 } \left(\frac{\pi}{16}, 8 \right) \text{을 지나므로}$$

$$8 = 5 \tan \frac{\pi}{4} + b \text{에서}$$

$$b = 8 - 5 \times 1 = 8 - 5 = 3$$

$$\text{따라서 } a + b = 4 + 3 = 7$$

답 7

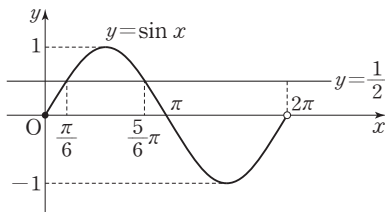
25

$$\begin{aligned} 2(\sin x + \cos x)^2 - 2(\sin x + \cos x) - 1 &= 0 \text{에서} \\ 2(\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x) - 2(\sin x + \cos x) - 1 &= 0 \\ 2(1 + 2 \sin x \cos x) - 2(\sin x + \cos x) - 1 &= 0 \\ 4 \sin x \cos x - 2(\sin x + \cos x) + 1 &= 0 \\ (2 \sin x - 1)(2 \cos x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos x = \frac{1}{2}$$

(i) $\sin x = \frac{1}{2}$ ($0 \leq x < 2\pi$)일 때,

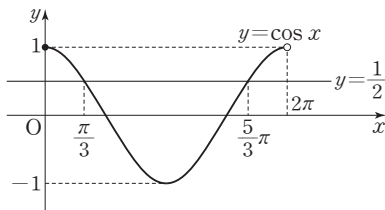
방정식 $\sin x = \frac{1}{2}$ 의 해는 함수 $y = \sin x$ ($0 \leq x < 2\pi$)의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 이 만나는 점의 x 좌표와 같다.



따라서 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5\pi}{6}$

(ii) $\cos x = \frac{1}{2}$ ($0 \leq x < 2\pi$)일 때,

방정식 $\cos x = \frac{1}{2}$ 의 해는 함수 $y = \cos x$ ($0 \leq x < 2\pi$)의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 이 만나는 점의 x 좌표와 같다.



따라서 $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{5\pi}{3}$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{\pi}{3}$ 또는

$x = \frac{5\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5\pi}{3}$ 이므로 최솟값 $m = \frac{\pi}{6}$, 최댓값 $M = \frac{5\pi}{3}$

따라서 $m + M = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$ 이므로 $a = 6$, $b = 11$ 이고

$$a + b = 6 + 11 = 17$$

답 17

26

5개의 우산을 하나씩 나누어 주는 경우의 수는

$$5! = 120$$

자신의 우산을 받을 학생 두 명을 정하는 경우의 수는 ${}_5C_2 = 10$

A, B, C의 우산이 각각 a, b, c 일 때, 이 세 학생이 각각 자신의 우산이 아닌 우산을 받는 경우는 다음과 같다.

학생	A	B	C
우산	b	c	a
	c	a	b

따라서 구하는 확률은 $p = \frac{10 \times 2}{120} = \frac{1}{6}$ 이므로

$$360p = 360 \times \frac{1}{6} = 60$$

답 60

27

$a = y - x$, $b = z - y$ 로 놓으면

조건 (가)에서 $a \geq 2$, $b \geq 3$ 이고,

$$a + b = (y - x) + (z - y) = z - x \text{이므로}$$

$$a + b + x = z \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

조건 (나)에서 $z \leq 10$ 이므로

$10 - z = c$ 로 놓으면 $z = 10 - c$ 이고, $c \geq 0$ 이므로

$$\textcircled{7} \text{에서 } a + b + c + x = 10 \quad (a \geq 2, b \geq 3, c \geq 0, x \geq 0) \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$a - 2 = a'$, $b - 3 = b'$ 으로 놓으면

$$a = a' + 2, b = b' + 3 \text{이므로}$$

$$\textcircled{8} \text{에서 } a' + 2 + b' + 3 + c + x = 10, \text{ 즉}$$

$$a' + b' + c + x = 5 \quad (a' \geq 0, b' \geq 0, c \geq 0, x \geq 0) \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$\textcircled{9}$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c, x 의 모든 순서쌍

(a', b', c, x) 의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3!} = 56$$

따라서 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 모든 순서쌍

(x, y, z) 의 개수는 56이다.

답 56

다른 풀이

조건 (가), (나)에서 $x + 5 \leq y + 3 \leq z \leq 10$ 이므로

x, y, z 의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

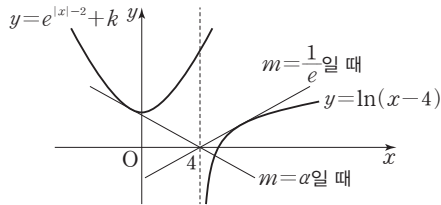
x	y	z
0	2	5, 6, 7, 8, 9, 10
	3	6, 7, 8, 9, 10
	4	7, 8, 9, 10
	5	8, 9, 10
	6	9, 10
	7	10
1	3	6, 7, 8, 9, 10
	4	7, 8, 9, 10
	5	8, 9, 10
	6	9, 10
	7	10
2	4	7, 8, 9, 10
	5	8, 9, 10
	6	9, 10
	7	10
3	5	8, 9, 10
	6	9, 10
	7	10
4	6	9, 10
	7	10
5	7	10

따라서 접선의 기울기는 $\frac{1}{e}$ 이고 접점의 좌표는 $(1, \frac{1}{e}+k)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{e}x + k \text{ 이므로 } k = -\frac{4}{e}$$

한편, $i(m) = g(m) + h(m)$ 이라 하면 k 의 값의 범위에 따라 함수 $i(m)$ 은 다음과 같다.

(i) $k > -\frac{1}{e^2}$ 일 때,



$m > \frac{1}{e}$ 이면 $i(m) = 0$,

$m = \frac{1}{e}$ 이면 $i(m) = 1$,

$0 < m < \frac{1}{e}$ 이면 $i(m) = 2$,

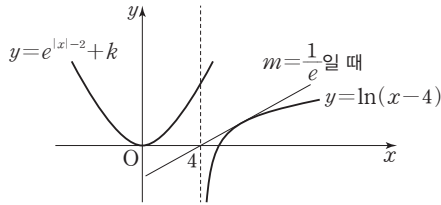
$\alpha < m \leq 0$ 이면 $i(m) = 1$,

$m = \alpha$ 이면 $i(m) = 2$,

$m < \alpha$ 이면 $i(m) = 3$

따라서 함수 $i(m)$ 은 $m = \alpha, m = 0, m = \frac{1}{e}$ 에서 불연속이다.

(ii) $k = -\frac{1}{e^2}$ 일 때,



$m > \frac{1}{e}$ 이면 $i(m) = 0$,

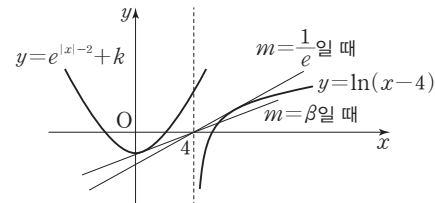
$m = \frac{1}{e}$ 이면 $i(m) = 1$,

$0 \leq m < \frac{1}{e}$ 이면 $i(m) = 2$,

$m < 0$ 이면 $i(m) = 3$

따라서 함수 $i(m)$ 은 $m = 0, m = \frac{1}{e}$ 에서 불연속이다.

(iii) $-\frac{4}{e} < k < -\frac{1}{e^2}$ 일 때,



$m > \frac{1}{e}$ 이면 $i(m) = 0$,

$m = \frac{1}{e}$ 이면 $i(m) = 1$,

$\beta < m < \frac{1}{e}$ 이면 $i(m) = 2$,

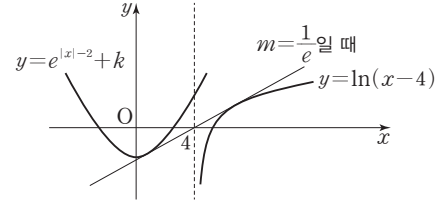
$m = \beta$ 이면 $i(m) = 3$,

$0 < m < \beta$ 이면 $i(m) = 4$,

$m \leq 0$ 이면 $i(m) = 3$

따라서 함수 $i(m)$ 은 $m = 0, m = \beta, m = \frac{1}{e}$ 에서 불연속이다.

(iv) $k = -\frac{4}{e}$ 일 때,



$m > \frac{1}{e}$ 이면 $i(m) = 0$,

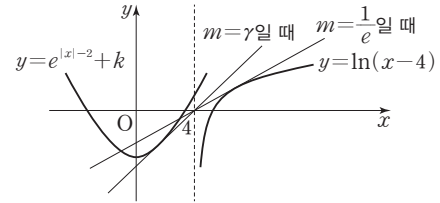
$m = \frac{1}{e}$ 이면 $i(m) = 2$,

$0 < m < \frac{1}{e}$ 이면 $i(m) = 4$,

$m \leq 0$ 이면 $i(m) = 3$

따라서 함수 $i(m)$ 은 $m = 0, m = \frac{1}{e}$ 에서 불연속이다.

(v) $-e^2 < k < -\frac{4}{e}$ 일 때,



$m > \gamma$ 이면 $i(m) = 0$,

$m = \gamma$ 이면 $i(m) = 1$,

$\frac{1}{e} < m < \gamma$ 이면 $i(m) = 2$,

$m = \frac{1}{e}$ 이면 $i(m) = 3$,

$0 < m < \frac{1}{e}$ 이면 $i(m) = 4$,

$m \leq 0$ 이면 $i(m) = 3$

따라서 함수 $i(m)$ 은 $m = 0, m = \frac{1}{e}, m = \gamma$ 에서 불연속이다.

(i)~(v)에서 함수 $i(m) = g(m) + h(m)$ 이 $m = a$ 에서 불연속인 a 의 개수가 2가 되도록 하는 실수 k 의 값은

$-\frac{1}{e^2}, -\frac{4}{e}$ 이므로 곱은 $\frac{4}{e^3}$ 이다.

따라서 $s = 3, t = 4$ 이므로

$$s \times t = 3 \times 4 = 12$$