



[www.ebsi.co.kr](http://www.ebsi.co.kr)

수능특강 수학영역 **미적분**



# 정답과 풀이

## 01 수열의 극한

유제

본문 5~11쪽

1 ①      2 ④      3 ③      4 ②      5 6  
6 ③      7 2      8 ②

### Level 1 기초 연습

본문 12쪽

1 ①      2 ⑤      3 ③      4 ⑤      5 ①

### Level 2 기본 연습

본문 13쪽

1 ④      2 ①      3 11      4 ①      5 36

### Level 3 실력 완성

본문 14쪽

1 ⑤      2 ①      3 ④      4 29

## 03 여러 가지 함수의 미분

유제

본문 29~37쪽

1 ④      2 ②      3 ⑤      4 ②      5 ③  
6 ③      7 ②      8 ③      9 ①      10 ②

### Level 1 기초 연습

본문 38~39쪽

1 ④      2 ③      3 ③      4 1      5 ④  
6 ⑤      7 2      8 ⑤      9 ⑤      10 16

### Level 2 기본 연습

본문 40~41쪽

1 ⑤      2 ②      3 ②      4 24      5 ④  
6 ①      7 ④      8 6

### Level 3 실력 완성

본문 42쪽

1 ①      2 18      3 ④

## 02 급수

유제

본문 17~23쪽

1 ③      2 ②      3 1      4 ③      5 17  
6 ③      7 ④

### Level 1 기초 연습

본문 24쪽

1 ①      2 ③      3 ①      4 ③      5 ②

### Level 2 기본 연습

본문 25쪽

1 ③      2 ③      3 ④      4 ②

### Level 3 실력 완성

본문 26쪽

1 3      2 8      3 ④      4 ①

## 04 여러 가지 미분법

유제

본문 45~53쪽

1 ④      2 ①      3 ②      4 ⑤      5 ④  
6 ②      7 ④      8 ①      9 ②      10 ③

### Level 1 기초 연습

본문 54쪽

1 ②      2 ①      3 ③      4 ②      5 ②

### Level 2 기본 연습

본문 55쪽

1 ①      2 ⑤      3 ④      4 4

### Level 3 실력 완성

본문 56쪽

1 ⑤      2 ②      3 ⑤

## 05 도함수의 활용

유제

본문 59~69쪽

1 ④      2 ③      3 ②      4 ①      5 ④  
 6 4      7 4      8 ④      9 ②      10 ①  
 11 5

### Level 1 기초 연습

본문 70쪽

1 ④      2 ②      3 ③      4 ③      5 ①

### Level 2 기본 연습

본문 71쪽

1 ①      2 ③      3 ⑤      4 ⑤

### Level 3 실력 완성

본문 72쪽

1 4      2 ①      3 ⑤

## 07 정적분의 활용

유제

본문 89~97쪽

1 ②      2 9      3 ④      4 9      5 ②  
 6 23      7 ②      8 12

### Level 1 기초 연습

본문 98~99쪽

1 ③      2 ②      3 ①      4 4      5 ②  
 6 ②      7 9      8 ②      9 ③      10 ②

### Level 2 기본 연습

본문 100~101쪽

1 ②      2 ③      3 21      4 ④      5 105  
 6 ①      7 16      8 ⑤

### Level 3 실력 완성

본문 102쪽

1 ④      2 9      3 5      4 6

## 06 여러 가지 적분법

유제

본문 75~81쪽

1 14      2 ⑤      3 ③      4 ④      5 8  
 6 ⑤      7 ③      8 ⑤

### Level 1 기초 연습

본문 82~83쪽

1 ④      2 ②      3 ①      4 ④      5 7  
 6 ③      7 ②      8 ①

### Level 2 기본 연습

본문 84~85쪽

1 ③      2 32      3 ①      4 256      5 ②  
 6 12      7 ⑤      8 ③

### Level 3 실력 완성

본문 86쪽

1 ①      2 ②      3 16



## 01 수열의 극한

유제

본문 5~11쪽

1 ①	2 ④	3 ③	4 ②	5 6
6 ③	7 2	8 ②		

- 1  $n \geq 100$ 일 때,  
 $a_{100} = 100^0 + 1$   
 $a_{101} = 101^{-1} + 1 = \frac{1}{101} + 1$   
 $a_{102} = 102^{-2} + 1 = \frac{1}{102^2} + 1$   
 $\vdots$   
 그러므로 수열  $\{a_n\}$ 은 1에 수렴한다.  
 따라서  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

답 ①

- 2 수열  $\{a_n\}$ 이 수렴하므로  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k$  ( $k$ 는 상수)라 하면  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = k, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = k$   
 그러므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \times \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n}$ 에서  
 $k+2 = k \times k$   
 $k^2 - k - 2 = 0$   
 $(k+1)(k-2) = 0$   
 $k = -1$  또는  $k = 2$   
 따라서 모든  $k$ 의 값의 합은 1이다.

답 ④

- 3  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - n)$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + an} - n)(\sqrt{n^2 + an} + n)}{\sqrt{n^2 + an} + n}$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an}{\sqrt{n^2 + an} + n}$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{1 + a \times \frac{1}{n}} + 1}$   
 $= \frac{a}{2} = 3$   
 따라서  $a = 6$

답 ③

$$\begin{aligned} 4 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} - 2n}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 2}{1 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 2}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1 - 2}{1 + 0} = -1 \end{aligned}$$

답 ②

- 5  $n+2 < (2n+1)a_n < 6n+5$ 에서  
 $\frac{n+2}{2n+1} < a_n < \frac{6n+5}{2n+1}$   
 이때

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+5}{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{5}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{6 + 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = 3 \end{aligned}$$

그러므로

$$\frac{1}{2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 3$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} \leq k \leq 3$$

따라서 가능한 자연수  $k$ 는 1, 2, 3으로 모든  $k$ 의 값의 합은 6이다.

답 6

- 6  $\frac{2n+3}{n+1} \leq 2a_n \leq a_n + \frac{n+4}{n+1}$ 이므로

$$\frac{2n+3}{n+1} \leq 2a_n \text{에서}$$

$$a_n \geq \frac{2n+3}{2(n+1)} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2a_n \leq a_n + \frac{n+4}{n+1} \text{에서}$$

$$a_n \leq \frac{n+4}{n+1} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$\frac{2n+3}{2(n+1)} \leq a_n \leq \frac{n+4}{n+1}$$

이때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{2 + \frac{2}{n}} = \frac{2 + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{2 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+4}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1+4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{1+\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = 1$$

이므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

답 ③

$$\begin{aligned} 7 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{6}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} + \frac{1}{6^n}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{3^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \times 3^n + 1}{\frac{1}{4} \times 3^n + \frac{4}{3} \times 2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{1}{4} + \frac{4}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{1}{4} + \frac{4}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n} \\ &= 2 \end{aligned}$$

답 2

8 등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항이 2이고 공비가 3이므로  
 $a_n = 2 \times 3^{n-1}$   
 또  $S_n = \frac{2(3^n - 1)}{3 - 1} = 3^n - 1$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_n + a_{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 1}{2 \times 3^{n-1} + 2 \times 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 1}{\frac{2}{3} \times 3^n + 2 \times 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3} + 2} \\ &= \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{8}{3}} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

답 ②

## Level 1 기초 연습

본문 12쪽

1 ①      2 ⑤      3 ③      4 ⑤      5 ①

$$\begin{aligned} 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{4n^2+3n}+n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+1} \\ &= \frac{1+\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4+\frac{3}{n}}+1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

답 ①

$$\begin{aligned} 2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-n)^3 + n^3}{n^2 + 2n + 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-n^3 + 3n^2 - 3n + 1) + n^3}{n^2 + 2n + 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 3n + 1}{n^2 + 2n + 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} \\ &= \frac{3 - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{1 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = 3 \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} 3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+2}-n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n^2+2}-n)(\sqrt{n^2+2}+n)}{\sqrt{n^2+2}+n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+2}+n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1} \\ &= \frac{2}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1} = 1 \end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned} 4 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2+2} \sum_{k=1}^n k + \frac{1}{n^3+3} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n^2+2} \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^3+3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n^2+2} + \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3+3} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n^2}} + \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{1 + \frac{3}{n^3}} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2}} + \frac{1}{6} \times \frac{\left(1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\right)\left(2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\right)}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^3}} \\
&= \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned}
5 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1} \times 3^{n+1}}{6^{n+1} + 5^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{-1} \times 2^n \times 3 \times 3^n}{6 \times 6^n + 5^n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{-1} \times 3}{6 + \left(\frac{5}{6}\right)^n} = \frac{2^{-1} \times 3}{6 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n} \\
&= \frac{2^{-1} \times 3}{6} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

답 ①

## Level 2 기본 연습

본문 13쪽

1 ④      2 ①      3 11      4 ①      5 36

1 (i)  $p=1$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n + 2}{n^3 + n + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^3}} = 0$$

이때  $q$ 는 자연수이므로 만족시키지 않는다.(ii)  $p=2$ 일 때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + n + 2}{n^3 + n^2 + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{4}{n^3}} = 3$$

그러므로  $q=3$ (iii)  $p \geq 3$ 일 때분자의 차수는  $p+1$ , 분모의 차수는  $p$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^{p+1} + n + 2}{n^p + n^3 + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \frac{n}{n^p} + \frac{2}{n^p}}{1 + \frac{n^3}{n^p} + \frac{4}{n^p}} = \infty$$

이때  $q$ 는 자연수이므로 만족시키지 않는다.(i), (ii), (iii)에서  $p=2, q=3$ 이므로 $p+q=2+3=5$ 

답 ④

2  $a_n + b_n = c_n$ 이라 하면  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$ 또  $(a_n)^2 - (b_n)^2 = d_n$ 이라 하면  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 3$ 이때  $c_n = a_n + b_n \neq 0$ 이므로

$$\frac{d_n}{c_n} = \frac{(a_n + b_n)(a_n - b_n)}{a_n + b_n} = a_n - b_n$$

두 수열  $\{c_n\}, \{d_n\}$ 이 모두 수렴하고, 수열  $\{c_n\}$ 의 극한값이 0이 아니므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{c_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} d_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} c_n} = \frac{3}{1} = 3$$

 $a_n - b_n = e_n$ 이라 하면  $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 3$ 이므로

$$a_n = \frac{c_n + e_n}{2}, \quad b_n = \frac{c_n - e_n}{2}$$

두 수열  $\{c_n\}, \{e_n\}$ 이 모두 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n + e_n}{2} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} c_n + \lim_{n \rightarrow \infty} e_n}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n - e_n}{2} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} c_n - \lim_{n \rightarrow \infty} e_n}{2} \\
&= \frac{1 - 3}{2} = -1
\end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{2}{-1} = -2$$

답 ①

## 참고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n)^2 - (b_n)^2}{a_n + b_n} = \frac{3}{1} = 3 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n + b_n) + (a_n - b_n)}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n + b_n) - (a_n - b_n)}{2} = \frac{1 - 3}{2} = -1$$

3 조건 (가)에서 수열  $\left\{\frac{f(n)}{n^2+1}\right\}$ 이 0이 아닌 극한값 2를 가지므로  $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.그러므로  $f(x) = 2x^2 + ax + b$  ( $a, b$ 는 상수)라 하면조건 (나)에서  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+3)f\left(\frac{1}{n}\right) = 3$ 이므로

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+3)f\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+3) \left\{ 2 \left(\frac{1}{n}\right)^2 + a \times \frac{1}{n} + b \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2 \times \frac{2n+3}{n^2} + a \times \frac{2n+3}{n} + b(2n+3) \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2 \left(\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right) + a \left(2 + \frac{3}{n}\right) + b(2n+3) \right\}
\end{aligned}$$

$b \neq 0$ 이면 위의 극한값은 존재하지 않으므로 이 극한값이 존재하려면  $b=0$ 이어야 한다.

이때 위의 식은

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2 \left( \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} \right) + a \left( 2 + \frac{3}{n} \right) \right\} \\ = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} \right) + a \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{3}{n} \right) = 2a = 3 \end{aligned}$$

$$\text{그러므로 } a = \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } f(x) = 2x^2 + \frac{3}{2}x \text{ 이므로}$$

$$f(2) = 8 + 3 = 11$$

11

#### 4 $a_n + n < a_{n+1} < a_n + n + 1$ 에서

$$n < a_{n+1} - a_n < n + 1 \text{ 이므로}$$

$$1 < a_2 - a_1 < 2$$

$$2 < a_3 - a_2 < 3$$

$$3 < a_4 - a_3 < 4$$

⋮

$$n-1 < a_n - a_{n-1} < n$$

위의 식을 변끼리 더하면

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) < a_n - a_1 < 2 + 3 + 4 + \cdots + n$$

이때 등차수열의 합을 이용하면

$$\frac{(n-1) \times n}{2} < a_n - 1 < \frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

$$1 + \frac{(n-1) \times n}{2} < a_n < 1 + \frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

$$\frac{1}{n^2+1} + \frac{(n-1) \times n}{2(n^2+1)} < \frac{a_n}{n^2+1}$$

$$< \frac{1}{n^2+1} + \frac{(n-1)(n+2)}{2(n^2+1)}$$

한편,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n^2+1} + \frac{n(n-1)}{2(n^2+1)} \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{2(n^2+1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)}$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} + \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{2 \left( 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \right)}$$

$$= 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

또

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n^2+1} + \frac{(n-1)(n+2)}{2(n^2+1)} \right\} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(n+2)}{2(n^2+1)} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( 1 - \frac{1}{n} \right) \left( 1 + \frac{2}{n} \right)}{2 \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)} \\ = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} + \frac{\left( 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) \left( 1 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right)}{2 \left( 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \right)} \\ = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2+1} = \frac{1}{2}$$

1

$$\begin{aligned} 5 \quad \frac{2^{-n+1} \times k^n + 3^n}{4^n + \left( \frac{1}{3} \right)^{-2n+1}} &= \frac{2 \times 2^{-n} \times k^n + 3^n}{4^n + \frac{1}{3} \times 9^n} = \frac{2 \times \left( \frac{k}{2} \right)^n + 3^n}{4^n + \frac{1}{3} \times 9^n} \\ &= \frac{2 \times \left( \frac{k}{18} \right)^n + \left( \frac{1}{3} \right)^n}{\left( \frac{4}{9} \right)^n + \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

이 수열이 수렴하기 위해서는

$$-18 < k \leq 18$$

따라서 정수  $k$ 는  $-17, -16, \dots, 18$ 로 그 개수는 36이다.

36

#### Level 3 실력 완성

본문 14쪽

1 ⑤

2 ①

3 ④

4 29

#### 1 (i) $a=0$ 일 때

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n}}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = 0 \end{aligned}$$



(ii)  $a \neq 0$ 일 때

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + 2n}{n^2 + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + 2 \times \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{a + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = a\end{aligned}$$

한편,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n) - b}{a_n - a} = a + 3$ 에서  $a_n = t$ 로 놓으면

$n \rightarrow \infty$ 일 때,  $t \rightarrow a$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - b}{t - a} = a + 3 \quad \cdots \textcircled{L}$$

$t \rightarrow a$ 일 때, (분모)  $\rightarrow 0$ 이므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{t \rightarrow a} \{f(t) - b\} = 0$$

그러므로  $b = \lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$

이때  $f'(x) = 2x + 1$ 이므로  $\textcircled{L}$ 은

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = f'(a) = 2a + 1 = a + 3$$

이때  $a = 2$ 이고  $b = f(2) = 6$

(i), (ii)에 의하여

$$a + b = 2 + 6 = 8$$

답 ⑤

2 직선 OP의 기울기는

$$\frac{n^2 - 0}{n - 0} = n$$

그러므로 직선 OP와 평행한 직선  $l_n$ 의 방정식은

$y = nx + k$  (단,  $k$ 는 상수)

이때 이 직선이 곡선  $y = x^2$ 과 접해야 하므로 방정식  $x^2 = nx + k$ , 즉  $x^2 - nx - k = 0$ 은 중근을 가져야 한다.

이 방정식의 판별식을  $D$ 라 하면

$$D = (-n)^2 - 4k = 0 \text{이므로}$$

$$k = -\frac{n^2}{4}$$

그러므로 구하는 직선  $l_n$ 의 방정식은

$$y = nx - \frac{n^2}{4}$$

이때 점  $P(n, n^2)$ 과 직선  $nx - y - \frac{n^2}{4} = 0$  사이의 거리

$d_n$ 은

$$\begin{aligned}d_n &= \frac{\left| n^2 - n^2 - \frac{n^2}{4} \right|}{\sqrt{n^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{\frac{n^2}{4}}{4\sqrt{n^2 + 1}}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{4(n+1)\sqrt{n^2+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4\left(1 + \frac{1}{n}\right)\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \\ &= \frac{1}{4\left(1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\right) \times \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 ①

3 중심이 B인 원이 선분 AC

와 접하는 점을 E라 하면

$$\angle AEB = \frac{\pi}{2}$$

$\angle EAB = \alpha$ 라 하고

$\overline{BE} = x$ 라 하면

직각삼각형 ABC에서

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2 + n + 1}} \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

또 직각삼각형 ABE에서

$$\sin \alpha = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \frac{x}{n} \quad \cdots \textcircled{2}$$

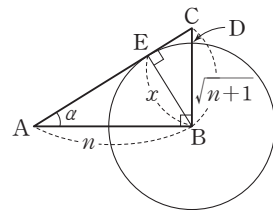
$\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ 에서

$$\frac{x}{n} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2 + n + 1}}$$

$$x = \frac{n\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2 + n + 1}}$$

그러므로

$$\begin{aligned}l_n &= \overline{BC} - \overline{BE} \\ &= \sqrt{n+1} - \frac{n\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2 + n + 1}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}(\sqrt{n^2 + n + 1} - n)}{\sqrt{n^2 + n + 1}}\end{aligned}$$





이때

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (l_n \times n^a) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1}(\sqrt{n^2+n+1}-n)}{\sqrt{n^2+n+1}} \times n^a \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+n+1}} \times n^a \times (\sqrt{n^2+n+1}-n) \right\} \end{aligned}$$

위의 식에서

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n+1}-n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+n+1}-n)(\sqrt{n^2+n+1}+n)}{\sqrt{n^2+n+1}+n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} \\ &= \frac{1+\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

로 수렴한다.

그러므로 극한값  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+n+1}} \times n^a \right)$ 이 0이 아닌 값으

로 수렴하기 위해서는  $a = \frac{1}{2}$ 이어야 하고, 이때 극한값은

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+n+1}} \times n^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2+n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} = 1 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} b &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+n+1}} \times n^{\frac{1}{2}} \times (\sqrt{n^2+n+1}-n) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+n+1}} \times n^{\frac{1}{2}} \right) \times \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n+1}-n) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

이므로

$$a+b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

④

$$4 \quad a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^{n+1} + 3^{n+1}}{2 \times k^n + 2^{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k \times k^n + 3 \times 3^n}{2 \times k^n + 2 \times 4^n}$$

분모에  $4^n$ 을 포함하고 있으므로 자연수  $k$ 는 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i)  $0 < k < 4$ 일 때

$$0 < \frac{k}{4} < 1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k \times \left(\frac{k}{4}\right)^n + 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2 \times \left(\frac{k}{4}\right)^n + 2} \\ &= \frac{k \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{4}\right)^n + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{4}\right)^n + 2} = 0 \end{aligned}$$

(ii)  $k = 4$ 일 때

$$\begin{aligned} a_4 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \times 4^n + 3 \times 3^n}{2 \times 4^n + 2 \times 4^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2 + 2} \\ &= \frac{4 + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n}{4} = 1 \end{aligned}$$

(iii)  $k > 4$ 일 때

$$0 < \frac{4}{k} < 1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k + 3 \times \left(\frac{3}{k}\right)^n}{2 + 2 \times \left(\frac{4}{k}\right)^n} \\ &= \frac{k + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{k}\right)^n}{2 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{k}\right)^n} = \frac{k}{2} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{11} a_k &= \sum_{k=1}^3 a_k + a_4 + \sum_{k=5}^{11} a_k \\ &= 0 + 1 + \sum_{k=5}^{11} \frac{k}{2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} (5 + 6 + \cdots + 11) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \times \frac{7 \times (5 + 11)}{2} \\ &= 29 \end{aligned}$$

29



## 02 급수

유제

본문 17~23쪽

- 1 ③      2 ②      3 1      4 ③      5 17  
6 ③      7 ④

1  $a_1=2$ 이므로

$$a_1=S_1=\frac{a \times 1^2+1}{1^2+1}=\frac{a+1}{2}=2 \text{에서}$$

$$a=3$$

이때

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+n}{n^2+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{3+\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{1+\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = 3 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 + 3 = 6$$

답 ③

2 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 제  $n$ 항까지의 부분합을  $S_n$ 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

그러므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

급수  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 의 제  $n$ 항까지의 부분합을  $S'_n$ 이라 하면

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \text{이므로} \\ S'_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

그러므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \times \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

답 ②

3 수열  $\{S_n\}$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{na_n + \sqrt{4n^2+n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{a_n + \sqrt{4+\frac{1}{n}}} \\ &= \frac{2+3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4+\frac{1}{n}}} \\ &= \frac{2+3 \times 0}{0+\sqrt{4+0}} = 1 \end{aligned}$$

답 1

$$\begin{aligned} 4 \quad &\text{급수 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right) \text{에서 } b_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} \\ &\text{이라 하고, 이 급수의 제 } n \text{항까지의 부분합을 } S_n \text{이라 하면} \\ S_n &= \left(\frac{\sqrt{1}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{4}}{5}\right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{\sqrt{n-1}}{n} - \frac{\sqrt{n}}{n+1}\right) + \left(\frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{1 + \frac{2}{n}}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{1 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{n+1} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right) = 3 \text{에서}$$

$$\frac{a_n}{2} + b_n = c_n \text{이라 하면 } \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 3 \text{이고}$$

$$a_n = 2(c_n - b_n) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} 2(c_n - b_n) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 2 \times 3 - 2 \times \frac{1}{2} = 5 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \times \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

답 ③

5  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ 에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n + 2) = 3 \text{에서 } b_n + 2 = c_n \text{이라 하면 } \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 3 \text{이고}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + 3b_n + p)$ 가 수렴하므로

$$2a_n + 3b_n + p = d_n \text{이라 하면}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$$

한편,  $d_n = 2a_n + 3(c_n - 2) + p$ 이므로  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ 에서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} d_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + 3c_n - 6 + p) \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} c_n - 6 + p \\ &= -6 + p = 0 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } p = 6$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} d_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + 3b_n + 6) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + 3c_n) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 3 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \\ &= 2 \times 1 + 3 \times 3 = 11 \end{aligned}$$

따라서  $p = 6$ ,  $q = 11$ 이므로

$$p + q = 17$$

답 17

6  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(a_n + 2) = \sum_{n=1}^{\infty} \{(a_n)^2 + 2a_n\} \quad \dots\dots \textcircled{1}$

수열  $\{a_n\}$ 이 첫째항이 3이고 공비가  $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$a_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{그러므로 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}} = 6$$

$$\text{또 } (a_n)^2 = 9 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 = \frac{9}{1 - \frac{1}{4}} = 12$$

따라서  $\textcircled{1}$ 은

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \{(a_n)^2 + 2a_n\} &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \\ &= 12 + 2 \times 6 \\ &= 24 \end{aligned}$$

답 ③

7  $a_n = \frac{1}{2^n} \sin \frac{n\pi}{2}$ 이므로

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2^2} \times 0 = 0$$

$$a_3 = \frac{1}{2^3} \times (-1) = -\frac{1}{2^3}$$

$$a_4 = \frac{1}{2^4} \times 0 = 0$$

$$a_5 = \frac{1}{2^5} \times 1 = \frac{1}{2^5}$$

$\vdots$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2^3}\right) + \frac{1}{2^5} + \left(-\frac{1}{2^7}\right) + \dots \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

답 ④

### Level 1 기초 연습

본문 24쪽

1 ①

2 ③

3 ①

4 ③

5 ②

$$\begin{aligned} 1 \quad a_n &= \sum_{k=1}^n (k+1)^2 - \sum_{k=1}^n (k^2 + 1) \\ &= \sum_{k=1}^n (k^2 + 2k + 1) - \sum_{k=1}^n (k^2 + 1) \\ &= \sum_{k=1}^n \{(k^2 + 2k + 1) - (k^2 + 1)\} \\ &= 2 \sum_{k=1}^n k = n(n+1) \end{aligned}$$



이때 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 의 제  $n$ 항까지의 부분합을  $S_n$ 이라 하면

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \end{aligned}$$

답 ①

2  $\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2b_n) = 4$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n - 2b_n) = 0$$

이때  $3a_n - 2b_n = c_n$ 이라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$

따라서  $b_n = \frac{3a_n - c_n}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n - c_n}{2} \\ &= \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \\ &= \frac{3}{2} \times 2 - \frac{1}{2} \times 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

답 ③

3  $\sum_{n=1}^{\infty} 3a_n = 6$ 에서

$$3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 6, \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2$$

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 3$ 에서  $a_n + b_n = c_n$ 이라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 3 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \\ &= 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

답 ①

4  $a_n = \frac{1}{2^n}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

$$b_n = \frac{1}{3^n} \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{또 } a_n b_n = \left(\frac{1}{6}\right)^n \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n) = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{1}{5}$$

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \times \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n) &= 1 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

답 ③

5  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{-n} - 9^{-n+1}}{2^{-n} + 3^{-n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-2n} - 3^{-2n+2}}{2^{-n} + 3^{-n+1}}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^{-n} + 3^{-n+1})(2^{-n} - 3^{-n+1})}{2^{-n} + 3^{-n+1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n} - 3^{-n+1})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

이때

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

이므로  $\textcircled{7}$ 은

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= 1 - \frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ②

## Level 2 기본 연습

본문 25쪽

1 ③      2 ③      3 ④      4 ②

$$\begin{aligned}
 1 \quad a_n &= \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
 &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\
 &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}
 \end{aligned}$$

이때 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 제  $n$ 항까지의 부분합을  $S_n$ 이라 하면

$$\begin{aligned}
 S_n &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \\
 &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}
 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\
 &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

답 ③

$$2 \quad a_n = \frac{n^2 + 3n + 3}{n^2 + 3n + 2} - a \text{라 하면 급수 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{이 } b \text{에 수렴한다.}$$

그러므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 3n + 3}{n^2 + 3n + 2} - a \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n + 3}{n^2 + 3n + 2} - a \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} - a \\
 &= \frac{1 + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{1 + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} - a \\
 &= 1 - a = 0
 \end{aligned}$$

에서  $a = 1$

이때

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{n^2 + 3n + 3}{n^2 + 3n + 2} - 1 = \frac{1}{n^2 + 3n + 2} \\
 &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}
 \end{aligned}$$

이므로 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 제  $n$ 항까지의 부분합을  $S_n$ 이라 하면

$$\begin{aligned}
 S_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \\
 &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}
 \end{aligned}$$

이때

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{이므로 } b = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } a + b = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

답 ③

$$3 \quad \sum_{k=1}^n \left(b_k + \frac{k^2}{n^3}\right) = \frac{n}{n+1} \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^n b_k + \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^n b_k + \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n}{n+1}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n b_k &= \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{n}{n+1} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}
 \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6} \\
 &= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 3b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 3 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\
 &= 2 + 3 \times \frac{2}{3} = 4
 \end{aligned}$$

답 ④

$$4 \quad \text{수열 } \{a_n\} \text{이 등비수열이므로 } a_n = ar^{n-1} \text{이라 하면}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3^n + 4^{n-1}} = 2 \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ar^{n-1}}{3^n + 4^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{r} \times \left(\frac{r}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{4}} \quad \cdots \cdots ㉠$$



이 값이 0이 아닌 값을 가지려면  $r=4$

이때

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{4}}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{a}{4}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{4}} = a = 2$$

따라서  $a_n = 2 \times 4^{n-1}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \times 4^{n-1}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

답 ②

참고

$-1 < \frac{r}{4} < 1$ 이면 ㉠의 극한값은 0

$\frac{r}{4} > 1$ 이면 ㉠은  $\infty$ 로 발산

$\frac{r}{4} \leq -1$ 이면 ㉠은 진동

### Level 3 실력 완성

본문 26쪽

1 3      2 8      3 ④      4 ①

1 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ 라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} = S$$

이때

$$S_{n+1} + S_n = 2n + a_1 - \frac{pn^2 + 1}{n+1} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

에서 좌변의 극한은

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + S_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n + \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1}$$

$$= S + S = 2S \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

또 우변의 극한은

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2n + a_1 - \frac{pn^2 + 1}{n+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n + a_1)(n+1) - pn^2 - 1}{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{2n^2 + (a_1 + 2)n + a_1\} - pn^2 - 1}{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-p)n^2 + (a_1 + 2)n + a_1 - 1}{n+1} \end{aligned}$$

이 극한값이 존재하려면  $p=2$ 이어야 한다.

이때 극한값은

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_1 + 2)n + a_1 - 1}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_1 + 2) + \frac{a_1 - 1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{(a_1 + 2) + (a_1 - 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} \\ &= a_1 + 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉢} \end{aligned}$$

한편, ㉠에  $n=1$ 을 대입하면

$$S_2 + S_1 = 2 + a_1 - \frac{2 \times 1^2 + 1}{1+1}$$

$$2a_1 + a_2 = a_1 + \frac{1}{2}$$

$$a_1 + a_2 = \frac{1}{2}$$

한편,  $a_2 = -\frac{1}{2}$ 이므로  $a_1 = 1$

㉡, ㉢에서

$$2S = 3, S = \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } p \times \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

답 3

2  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 3) = 5$ 이므로  $b_n = a_n - 3$ 이라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 5$$

이때  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + 3) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + 3 \\ &= 0 + 3 = 3 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_n - 3n + \sum_{k=1}^n a_k \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ a_n - 3n + \sum_{k=1}^n (b_k + 3) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_n - 3n + \sum_{k=1}^n b_k + 3n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_n + \sum_{k=1}^n b_k \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \\ &= 3 + 5 = 8 \end{aligned}$$

답 8

3 급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 제  $n$ 항까지의 부분합을  $S_n$ 이라 하고,

급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ 의 제  $n$ 항까지의 부분합을  $T_n$ 이라 하면

$$T_n = S_n - a_1 + a_{n+1}$$

급수  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 0$$

이때

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - a_1 + a_{n+1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - a_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \\ &= 3 - a_1 \end{aligned}$$

그러므로  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2a_{n+1}) = 1$ 에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = 1$$

$$3 + 2(3 - a_1) = 1$$

따라서  $a_1 = 4$

답 ④

4 삼각형  $A_1B_1C_1$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{B_1C_1} &= \sqrt{\overline{A_1B_1}^2 + \overline{C_1A_1}^2 - 2 \times \overline{A_1B_1} \times \overline{C_1A_1} \times \cos \frac{\pi}{3}} \\ &= \sqrt{2^2 + 1^2 - 2 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

이때 원  $O_1$ 의 반지름의 길이를  $r$ 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{A_1B_1} \times \overline{C_1A_1} \times \sin \frac{\pi}{3} \\ = \frac{1}{2} \times (\overline{A_1B_1} + \overline{B_1C_1} + \overline{C_1A_1}) \times r \end{aligned}$$

에서

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} (2 + \sqrt{3} + 1) \times r$$

이므로

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} \\ &= \frac{3\sqrt{3} - 3}{6} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned} l_1 &= 2 \times \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \pi \\ &= (\sqrt{3} - 1) \pi \end{aligned}$$

원  $O_1$ 에 내접하는 삼각형이  $A_2B_2C_2$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{B_2C_2} &= 2 \times \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \times \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

이때 수열  $\{l_n\}$ 은 등비수열이고,

$$\begin{aligned} \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{B_1C_1}} &= \frac{\frac{3 - \sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{aligned}$$

이므로 수열  $\{l_n\}$ 의 공비는  $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} l_n &= \frac{(\sqrt{3} - 1)\pi}{1 - \frac{\sqrt{3} - 1}{2}} = \frac{2(\sqrt{3} - 1)\pi}{3 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi \end{aligned}$$

답 ①

다른 풀이

$\angle A_1 = \frac{\pi}{3}$ 이고,  $\overline{A_1B_1} = 2$ ,  $\overline{C_1A_1} = 1$ 이므로

$$\angle C_1 = \frac{\pi}{2}$$

이때  $\overline{B_1C_1} = \sqrt{3}$

또 위에서  $r = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

이때 삼각형  $A_2B_2C_2$ 에서  $\angle C_2 = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{A_2B_2} &= 2 \times r = 2 \times \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \\ &= \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

그러므로 수열  $\{l_n\}$ 의 공비는

$$\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$



# 03 여러 가지 함수의 미분

유제

본문 29~37쪽

1 ④	2 ②	3 ⑤	4 ②	5 ③
6 ③	7 ②	8 ③	9 ①	10 ②

1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{4x} - 1}{4x} \times \frac{4}{x+2} \right) \dots\dots ㉠$

이때  $\frac{e^{4x} - 1}{4x}$ 에서  $4x = t$ 로 놓으면  $x \rightarrow 0$ 일 때  $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{4x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

또  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x+2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 4}{\lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} 2} = 2$

따라서 ㉠은

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{4x} - 1}{4x} \times \frac{4}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{4x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x+2} = 1 \times 2 = 2$$

답 ④

2  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 3x + 1)}{3x^2 + 6x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2 + 3x)}{3x^2 + 6x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1 + x^2 + 3x)}{x^2 + 3x} \times \frac{x^2 + 3x}{3x^2 + 6x} \right\} \dots\dots ㉡$$

이때  $\frac{\ln(1 + x^2 + 3x)}{x^2 + 3x}$ 에서  $x^2 + 3x = t$ 로 놓으면  $x \rightarrow 0$ 일 때  $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2 + 3x)}{x^2 + 3x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + t)}{t} = 1$$

또

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{3x^2 + 6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{3x+6} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} 3}{3 \lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} 6} = \frac{1}{2}$$

따라서 ㉡은

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1 + x^2 + 3x)}{x^2 + 3x} \times \frac{x^2 + 3x}{3x^2 + 6x} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2 + 3x)}{x^2 + 3x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{3x^2 + 6x} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

답 ②

3  $f(x) = \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$ 이므로

$$f'(x) = \frac{1}{2x}$$

그러므로

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{f'(k)} = \sum_{k=1}^{10} 2k = 2 \sum_{k=1}^{10} k = 2 \times \frac{10(10+1)}{2} = 110$$

또

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-3h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{f(a-3h) - f(a)}{-h} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + 3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-3h) - f(a)}{-3h} \\ &= f'(a) + 3f'(a) \\ &= 4f'(a) \\ &= 4 \times \frac{1}{2a} = \frac{2}{a} \end{aligned}$$

따라서  $\frac{2}{a} = 110$ 이므로

$$a = \frac{1}{55}$$

답 ⑤

4  $f(x) = \ln 2 \times \ln x \times \log_4 x + (\ln x)^2$

$$= \ln 2 \times \ln x \times \frac{\ln x}{\ln 4} + (\ln x)^2$$

$$= \ln 2 \times \ln x \times \frac{\ln x}{2 \ln 2} + (\ln x)^2$$

$$= \frac{3}{2} \times \ln x \times \ln x$$

이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2} \times (\ln x)' \times \ln x + \frac{3}{2} \times \ln x \times (\ln x)' \\ &= \frac{3}{x} \times \ln x \end{aligned}$$

따라서  $f'(e) = \frac{3}{e}$

답 ②

5  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

이때  $0 < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ 이고  $\sin \alpha < 0$ 이므로  $\cos \alpha < 0$



그러므로

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서

$$\begin{aligned}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) &= \cos \alpha \cos \frac{\pi}{3} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \times \frac{1}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3 - \sqrt{6}}{6}\end{aligned}$$

답 ③

- 6  $2 \cos \alpha = \sin \alpha$ 이고, 이때  $\cos \alpha \neq 0$ 이므로 양변을  $\cos \alpha$ 로 나누면

$$2 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ 즉 } \tan \alpha = 2$$

한편,  $\tan(\alpha + \beta) = 3$ 이므로

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{2 + \tan \beta}{1 - 2 \tan \beta} = 3\end{aligned}$$

$$2 + \tan \beta = 3 - 6 \tan \beta, 7 \tan \beta = 1$$

$$\text{따라서 } \tan \beta = \frac{1}{7}$$

답 ③

$$\begin{aligned}7 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + 2x)}{(e^{2x} - 1)(x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(x^2 + 2x)}{x^2 + 2x} \times \frac{2x}{e^{2x} - 1} \times \frac{x^2 + 2x}{2x(x + 2)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + 2x)}{x^2 + 2x} \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x}} \times \frac{1}{2} \\ &= 1 \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}8 \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{이므로} \\ \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan^2 \theta - \sin^2 \theta}{\theta^k} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \theta \times (1 - \cos^2 \theta)}{\theta^k \cos^2 \theta} \\ = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^4 \theta}{\theta^k \cos^2 \theta} = a\end{aligned}$$

에서  $k > 4$ 이면 발산하고  $k < 4$ 이면 0으로 수렴한다.

이때  $a$ 는 0이 아닌 상수이므로  $k = 4$ 이고, 극한값은

$$\begin{aligned}a &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \left( \frac{\sin \theta}{\theta} \right)^4 \times \frac{1}{\cos^2 \theta} \right\} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \theta}{\theta} \right)^4 \times \lim_{\theta \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) = 1\end{aligned}$$

따라서  $k + a = 4 + 1 = 5$

답 ③

다른 풀이

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan^2 \theta - \sin^2 \theta}{\theta^k} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(\tan \theta - \sin \theta)(\tan \theta + \sin \theta)}{\theta^k} \quad \dots\dots ㉠\end{aligned}$$

이때 이 극한값이 0이 아닌 상수이어야 한다.

$$\text{한편, } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = 1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta + \sin \theta}{\theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta} + \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \\ &= 1 + 1 = 2\end{aligned}$$

또 자연수  $l$ 에 대하여

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta - \sin \theta}{\theta^l} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \sin \theta}{\theta^l} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta \times (1 - \cos \theta)}{\theta^l \cos \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta \times (1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{\theta^l \cos \theta \times (1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \theta}{\theta^l \cos \theta \times (1 + \cos \theta)}\end{aligned}$$

이 극한값이 0이 아닌 상수이어야 하므로  $l = 3$ 이어야 한다.

이때

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \theta}{\theta^3 \cos \theta \times (1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \theta}{\theta} \right)^3 \times \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \theta \times (1 + \cos \theta)} \\ &= 1^3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

따라서  $k = l + 1$ 이고  $l = 3$ 이므로 ㉠에서  $k = 4$ 이고,

극한값은

$$\begin{aligned}a &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(\tan \theta - \sin \theta)(\tan \theta + \sin \theta)}{\theta^4} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta + \sin \theta}{\theta} \times \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta - \sin \theta}{\theta^3} \\ &= 2 \times \frac{1}{2} = 1\end{aligned}$$

이므로

$$k + a = 4 + 1 = 5$$

- 9  $f(\pi) = -1$ 이므로

$$\begin{aligned}f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + 1}{x - \pi} &= f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} \\ &= f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'(\pi)\end{aligned}$$



한편,  $f'(x) = -\sin x + \cos x$ 이므로

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'(\pi) &= \left(-\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2}\right) + (-\sin \pi + \cos \pi) \\ &= (-1 + 0) + \{-0 + (-1)\} \\ &= -2 \end{aligned}$$

답 ①

10  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - a}{x - \frac{\pi}{4}} = b$ 에서  $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이고 극한

값이 존재하므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

한편, 두 함수  $y = x$ ,  $y = \cos x$ 는 연속함수이므로 함수  $y = x \cos x$ 는 연속함수이다.

그러므로  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \{f(x) - a\} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) - a = 0$ 에서

$$a = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}\pi$$

이때 주어진 식은

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - a}{x - \frac{\pi}{4}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} \\ &= f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

이때  $f'(x) = \cos x - x \sin x$ 이므로

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \cos \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}\pi = b \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} a + b &= \frac{\sqrt{2}}{8}\pi + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{8}\pi\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

답 ②

# Level 1 기초 연습

본문 38~39쪽

- |     |     |     |     |       |
|-----|-----|-----|-----|-------|
| 1 ④ | 2 ③ | 3 ③ | 4 1 | 5 ④   |
| 6 ⑤ | 7 2 | 8 ⑤ | 9 ⑤ | 10 16 |

$$\begin{aligned} 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^{-x} - 2}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1) + (e^{-x} - 1)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{-x} - 1}{-x} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \right\} \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

답 ④

$$\begin{aligned} 2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^{2x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)}{\ln(1+3x)} \times \frac{\ln(1+3x)}{3x} \times \frac{3x}{e^{2x} - 1} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\ln(1+3x)} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{3x} \\ &\quad \times \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2x}{e^{2x} - 1} \times \frac{3}{2} \right) \\ &= 2 \times 1 \times \left(1 \times \frac{3}{2}\right) \\ &= 3 \end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned} 3 \quad f(x) &= (x-1)^2 e^x \text{에서} \\ f'(x) &= 2(x-1)e^x + (x-1)^2 e^x \\ &= \{2(x-1) + (x-1)^2\} e^x \\ &= \{(2x-2) + (x^2-2x+1)\} e^x \\ &= (x^2-1)e^x \\ \text{따라서 } f'(2) &= (2^2-1)e^2 = 3e^2 \end{aligned}$$

답 ③

4  $f(x) = x^2 \ln x$ 라 하면  $f(1) = 0$ 이므로 주어진 식은

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 \ln x}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 \ln x - 0}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x \\ &= x(2 \ln x + 1) \end{aligned}$$

따라서  $f'(1) = 1 \times (0 + 1) = 1$

답 1

## 다른 풀이

$x-1=t$ 로 놓으면  $x \rightarrow 1$ 일 때  $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 \ln x}{x-1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^2 \ln(1+t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^2 \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \\ &= 1^2 \times 1 = 1\end{aligned}$$

- 5 곡선  $y = \ln x$ 와 직선  $y = n$ 이 만나는 점  $P_n$ 의  $x$ 좌표는  $\ln x = n$ 에서  $x = e^n$

$$y = \ln x \text{에서 } y' = \frac{1}{x} \text{이므로}$$

$$f(n) = \frac{1}{e^n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

$$0 < \frac{1}{e} < 1 \text{이므로 등비급수 } \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{은 수렴한다.}$$

$$\text{따라서 } \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{\frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}$$

답 ④

- 6  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ 에서

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{에서 } \cos \alpha < 0 \text{이므로 } \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{에서 } \cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } \cos \beta > 0 \text{이므로}$$

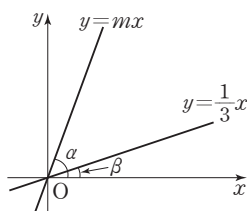
$$\cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} - \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \times \frac{\sqrt{6}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{4\sqrt{3}}{9} = \frac{5\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

답 ⑤

7



두 직선  $y = mx$ ,  $y = \frac{1}{3}x$ 가  $x$ 축의 양의 방향과 이루는 각의

크기를 각각  $\alpha$ ,  $\beta$ 라 하면  $\alpha > \beta$ 이고

$$\tan \alpha = m, \tan \beta = \frac{1}{3}$$

두 직선이 이루는 예각의 크기가  $\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$$

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned}\tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{m - \frac{1}{3}}{1 + m \times \frac{1}{3}} \\ &= \frac{3m - 1}{3 + m}\end{aligned}$$

이고,  $\tan(\alpha - \beta) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ 이므로

$$\frac{3m - 1}{3 + m} = 1 \text{에서}$$

$$3m - 1 = 3 + m, 2m = 4$$

따라서  $m = 2$

답 2

- 8  $x - \frac{\pi}{2} = t$ 로 놓으면  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 일 때  $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x - \pi)}{x - \frac{\pi}{2}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2t}{2t} \times 2\right) \\ &= 1 \times 2 = 2\end{aligned}$$

답 ⑤

- 9  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x + \tan(2x)^2}{\ln(1+2x^2)}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan^2 x + \tan(2x)^2}{x^2} \times \frac{x^2}{\ln(1+2x^2)} \right\} \dots\dots ⑦$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x + \tan(2x)^2}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan^2 x}{x^2} + \frac{\tan(2x)^2}{x^2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan x}{x} \right)^2 + \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan 4x}{4x^2} \times 4 \right) \\ &= 1^2 + 1 \times 4 = 5\end{aligned}$$

이고,



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln(1+2x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+2x^2)}{2x^2} \times 2} \\ &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+2x^2)}{2x^2} \times 2 \right\}} \\ &= \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

따라서 ㉠에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x + \tan(2x)^2}{\ln(1+2x^2)} = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

답 ⑤

10  $f(x) = a \sin x \cos x + b$ 라 하면

점  $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$ 이 곡선  $y=f(x)$  위의 점이므로

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= a \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} + b \\ &= a \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} + b \\ &= \frac{\sqrt{3}a}{4} + b\end{aligned}$$

즉,  $\frac{\sqrt{3}a}{4} + b = \frac{1}{2}$ 에서

$$\sqrt{3}a + 4b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편,

$$\begin{aligned}f'(x) &= a \cos x \times \cos x + a \sin x \times (-\sin x) \\ &= a(\cos^2 x - \sin^2 x)\end{aligned}$$

이고, 점  $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$ 에서의 접선의 기울기가  $\sqrt{3}$ 이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= a\left(\cos^2 \frac{\pi}{3} - \sin^2 \frac{\pi}{3}\right) \\ &= a\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] \\ &= a\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = -\frac{a}{2}\end{aligned}$$

즉,  $-\frac{a}{2} = \sqrt{3}$ 에서

$$a = -2\sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$\sqrt{3} \times (-2\sqrt{3}) + 4b = 2$$

$$4b = 8 \text{에서 } b = 2$$

$$\text{따라서 } a^2 + b^2 = (-2\sqrt{3})^2 + 2^2 = 16$$

답 16

## Level 2 기본 연습

본문 40~41쪽

1 ⑤	2 ②	3 ②	4 24	5 ④
6 ①	7 ④	8 6		

1 함수  $f(x)$ 가  $x=0$ 에서 미분가능하므로

$x=0$ 에서 연속이다.

즉,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ 이어야 하므로

$$\frac{1}{3}(1-a) = 0 \text{에서 } a = 1$$

함수  $f(x)$ 가  $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

이어야 한다. 이때

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{3} \times \frac{e^{2x} - 1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{3} \times \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times 2 \right) \\ &= \frac{1}{3} \times 1 \times 2 = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+bx)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\ln(1+bx)}{bx} \times b \right\} \\ &= 1 \times b = b\end{aligned}$$

$$\text{이므로 } b = \frac{2}{3}$$

따라서  $f'(0) = \frac{2}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned}(a+b) \times f'(0) &= \left(1 + \frac{2}{3}\right) \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{5}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{9}\end{aligned}$$

답 ⑤

2  $2 \ln x = t$ , 즉  $\ln x = \frac{t}{2}$ 에서  $x = e^{\frac{t}{2}}$ 이므로

점 A의 좌표는  $(e^{\frac{t}{2}}, t)$

$\ln x = 2t$ 에서  $x = e^{2t}$ 이므로

점 B의 좌표는  $(e^{2t}, 2t)$

그러므로 직선 AB의 기울기  $f(t)$ 는

$$f(t) = \frac{2t - t}{e^{2t} - e^{\frac{t}{2}}} = \frac{t}{e^{2t} - e^{\frac{t}{2}}}$$

이때

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^{2t} - e^{\frac{t}{2}}}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{(e^{2t} - 1) - (e^{\frac{t}{2}} - 1)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left( \frac{e^{2t} - 1}{t} - \frac{e^{\frac{t}{2}} - 1}{t} \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left( \frac{e^{2t} - 1}{2t} \times 2 \right) - \lim_{t \rightarrow 0+} \left( \frac{e^{\frac{t}{2}} - 1}{\frac{t}{2}} \times \frac{1}{2} \right) \\
 &= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t}{e^{2t} - e^{\frac{t}{2}}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{\frac{e^{2t} - e^{\frac{t}{2}}}{t}} \\
 &= \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^{2t} - e^{\frac{t}{2}}}{t}} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

답 ②

3  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x^2 - 4} = b$ 에서  $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이고 극한값

이 존재하므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

함수  $f(x)$ 가 연속함수이므로  $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) - 4] = 0$ 에서

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

$$f(x) = (2^x + a) \log_4 x \text{에서}$$

$$f(2) = (4 + a) \log_4 2 = \frac{4+a}{2} = 4$$

$$4 + a = 8, a = 4$$

$$\text{즉, } f(x) = (2^x + 4) \log_4 x$$

이때

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{(x-2)(x+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \frac{1}{x+2} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} \\
 &= \frac{f'(2)}{4} = b \quad \dots\dots \textcircled{7}
 \end{aligned}$$

이고,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2^x \ln 2 \times \log_4 x + (2^x + 4) \times \frac{1}{x \ln 4} \\
 &= 2^x \ln 2 \times \frac{\ln x}{2 \ln 2} + (2^x + 4) \times \frac{1}{2x \ln 2} \\
 &= 2^{x-1} \ln x + \frac{1}{2 \ln 2} \times \frac{2^x + 4}{x}
 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 f'(2) &= 2 \times \ln 2 + \frac{1}{2 \ln 2} \times \frac{8}{2} \\
 &= 2 \ln 2 + \frac{2}{\ln 2} \quad \dots\dots \textcircled{8}
 \end{aligned}$$

따라서 ⑦, ⑧을 이용하면

$$\begin{aligned}
 ab &= 4 \times \frac{f'(2)}{4} = f'(2) \\
 &= 2 \ln 2 + \frac{2}{\ln 2}
 \end{aligned}$$

답 ②

4 조건 (가)에서  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x-2} = 0$ 이고  $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이

므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

함수  $g(x)$ 는 연속함수이므로

$$g(2) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$$

또 함수  $g(x)$ 는 미분가능하므로 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x-2} = g'(2) \text{이므로}$$

$$g'(2) = 0$$

$$g(x) = f(x)e^x \text{에서 } x=2 \text{를 대입하면}$$

$$g(2) = f(2) \times e^2 = 0 \text{이므로 } f(2) = 0$$

$$g'(x) = f'(x)e^x + f(x)e^x \text{에서 } x=2 \text{를 대입하면}$$

$$g'(2) = f'(2) \times e^2 + f(2) \times e^2 = f'(2) \times e^2 = 0 \text{이므로}$$

$$f'(2) = 0$$

$$\text{즉, } f(2) = f'(2) = 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = a(x-2)^2 \text{ (} a \text{는 } 0 \text{이 아닌 상수)} \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

로 놓을 수 있다. 조건 (나)에서

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(2x) - f(2x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)e^{2x} - f(2x)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)(e^{2x} - 1)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} f(2x) \times \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times 2 \right) \\
 &= 2f(0)
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 2f(0) = 12 \text{에서 } f(0) = 6$$

$$\textcircled{9} \text{에 } x=0 \text{을 대입하면 } f(0) = 4a = 6 \text{에서}$$

$$a = \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{3}{2}(x-2)^2 \text{이므로}$$

$$f(6) = \frac{3}{2} \times 4^2 = 24$$

답 24



- 5  $f(x) = -x^2 + 5x - 4$ 라 하면  $f'(x) = -2x + 5$   
 점 A의 x좌표를  $t$ 라 하면 점 A에서의 접선의 기울기가  
 $-1$ 이므로  $f'(t) = -1$ 에서  
 $-2t + 5 = -1, t = 3$   
 $f(3) = 2$ 이므로 점 A의 좌표는  $(3, 2)$ 이다.

$$\angle AOC = \theta \text{라 하면 } \tan \theta = \frac{2}{3}$$

점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 A에서의  
 접선의 기울기가  $-1$ 이므로  $\angle BAH = \frac{\pi}{4}$

이때  $\angle OAH = \angle AOC = \theta$ 이므로

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan \alpha$$

$$= \tan(\angle OAB)$$

$$= \tan(\angle BAH + \angle OAH)$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$$

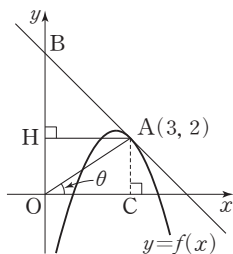
$$= \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \theta}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \times \tan \theta}$$

$$= \frac{1 + \frac{2}{3}}{1 - 1 \times \frac{2}{3}} = 5$$

$$\text{한편, } \tan \beta = \frac{OC}{AC} = \frac{3}{2}$$

따라서 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned} \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{5 - \frac{3}{2}}{1 + 5 \times \frac{3}{2}} = \frac{7}{17} \end{aligned}$$



답 ④

- 6 반원에 대한 원주각의 크기는 직각이므로

$$\angle ACB = \frac{\pi}{2}$$

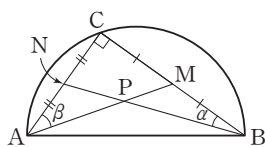
직각삼각형 CNB에서

$$\angle CBN = \alpha \text{라 하면 } \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{이므로}$$

$$\overline{BC} = 4a \ (a > 0) \text{으로 놓으면}$$

$$\overline{CN} = \sqrt{2}a$$

$$\begin{aligned} \overline{BN} &= \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{CN}^2} = \sqrt{16a^2 + 2a^2} \\ &= \sqrt{18a^2} = 3\sqrt{2}a \end{aligned}$$



$$\sin \alpha = \frac{\overline{CN}}{\overline{BN}} = \frac{\sqrt{2}a}{3\sqrt{2}a} = \frac{1}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{BN}} = \frac{4a}{3\sqrt{2}a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

직각삼각형 CAM에서

$$\overline{AC} = 2\overline{CN} = 2\sqrt{2}a, \overline{CM} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 2a \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \overline{AM} &= \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CM}^2} = \sqrt{(2\sqrt{2}a)^2 + (2a)^2} \\ &= \sqrt{12a^2} = 2\sqrt{3}a \end{aligned}$$

$\angle CAM = \beta$ 라 하면

$$\sin \beta = \frac{\overline{CM}}{\overline{AM}} = \frac{2a}{2\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos \beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AM}} = \frac{2\sqrt{2}a}{2\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

한편,

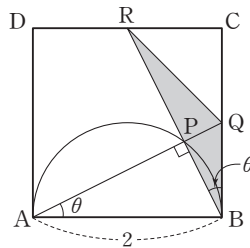
$$\begin{aligned} \angle APB &= \pi - (\angle PAB + \angle PBA) \\ &= \pi - \{(\angle CAB - \beta) + (\angle CBA - \alpha)\} \\ &= \pi - \{(\angle CAB + \angle CBA) - (\alpha + \beta)\} \\ &= \pi - \left\{\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right\} \\ &= \frac{\pi}{2} + (\alpha + \beta) \end{aligned}$$

따라서 삼각함수의 성질과 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned} \sin(\angle APB) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + (\alpha + \beta)\right) = \cos(\alpha + \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

답 ①

7



$$\text{삼각형 ABQ에서 } \frac{\overline{BQ}}{\overline{AB}} = \tan \theta \text{이므로}$$

$$\overline{BQ} = 2 \tan \theta$$

$$\angle APB = \frac{\pi}{2} \text{에서 } \angle PBC = \theta \text{이고,}$$

삼각형 BCR에서  $\frac{\overline{BC}}{\overline{BR}} = \cos \theta$ 이므로

$$\overline{BR} = \frac{2}{\cos \theta}$$

그러므로 삼각형 BQR의 넓이  $S(\theta)$ 는

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{BR} \times \overline{BQ} \times \sin(\angle QBR) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{\cos \theta} \times 2 \tan \theta \times \sin \theta \\ &= 2 \tan^2 \theta \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left( 2 \times \frac{\tan^2 \theta}{\theta^2} \right) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ 2 \times \left( \frac{\tan \theta}{\theta} \right)^2 \right\} \\ &= 2 \times 1^2 = 2 \end{aligned}$$

답 ④

## 8 $f(x) = x \sin x$ 에서

$$f'(x) = \sin x + x \cos x$$

함수  $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수  $g(x)$ 는  $x=0$ 에서 연속이어야 한다.

즉,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0)$ 이어야 한다.

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a(1 - \cos x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a(1 - \cos^2 x)}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left\{ a \times \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{1}{1 + \cos x} \right\} \\ &= a \times 1^2 \times \frac{1}{1 + 1} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x + x \cos x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sin x}{x} + \cos x \right) \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$g(0) = b$ 이므로  $\frac{a}{2} = 2 = b$ 에서

$$a = 4, b = 2$$

따라서  $a + b = 6$

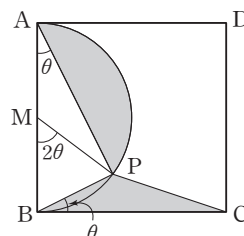
답 6

## Level 3 실력 완성

본문 42쪽

1 ①      2 18      3 ④

1



선분 AB의 중점을 M이라 하면  $\angle PMB = 2\theta$ 이므로  
부채꼴 AMP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1^2 \times (\pi - 2\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta$$

삼각형 AMP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin(\pi - 2\theta) = \frac{\sin 2\theta}{2}$$

$$\text{즉, } f(\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta - \frac{\sin 2\theta}{2}$$

한편,  $\angle ABP = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이므로  $\angle PBC = \theta$ 이고,

삼각형 ABP에서  $\overline{BP} = 2 \sin \theta$ 이므로

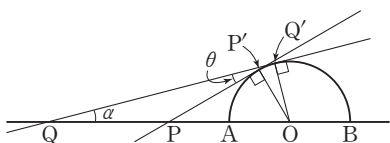
$$\begin{aligned} g(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{BP} \times \overline{BC} \times \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \sin \theta \times 2 \times \sin \theta \\ &= 2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{\theta \times \left\{ \frac{\pi}{2} - f(\theta) \right\}} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin^2 \theta}{\theta \times \left( \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin^2 \theta}{\theta^2 \times \left( 1 + \frac{\sin 2\theta}{2\theta} \right)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin^2 \theta}{\theta^2} \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \frac{\sin 2\theta}{2\theta}} \\ &= 2 \times \frac{1}{1 + 1} = 1 \end{aligned}$$

답 ①

2 그림과 같이 선분 AB의 중점을 O라 하고, 점 P를 지나는 직선과 반원이 접하는 점을 P', 점 Q를 지나는 직선과 반원이 접하는 점을 Q'이라 하자.



$\overline{AB}=2r$ 라 하면 선분  $AB$ 를 1 : 3으로 외분하는 점이  $P$ 이므로  $\overline{AP}=r$ 이고, 선분  $AB$ 를 3 : 5로 외분하는 점이  $Q$ 이므로  $\overline{AQ}=3r$ 이다.

$$\sin(\angle P'PO) = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$\angle P'PO = \frac{\pi}{6}$$

또  $\angle Q'QO = \alpha$ 라 하면

$$\sin \alpha = \frac{r}{4r} = \frac{1}{4}$$

이때  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}\end{aligned}$$

따라서  $\theta = \frac{\pi}{6} - \alpha$ 이므로

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sin \left( \frac{\pi}{6} - \alpha \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{6} \times \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{6} \times \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

따라서  $m=15$ ,  $n=3$ 이므로

$$m+n=15+3=18$$

**답** 18

### 3 (i) 삼각형 POB에서

$$\overline{OP} = \tan \theta$$

삼각형 CRO에서  $\overline{OR} = \tan \theta$ ,  $\angle CRO = \theta$ 이므로

$$\overline{OC} = \tan \theta \sin \theta$$

$f(\theta)$ 는 부채꼴 ROP의 넓이에서 삼각형 CRO의 넓이를 빼 것과 같으므로

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{1}{2} \times \tan^2 \theta \times \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \times \overline{\text{OR}} \times \overline{\text{OC}} \times \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \tan^2 \theta \times \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\tan^2 \theta}{2} \times \left( \frac{\pi}{2} - \theta - \sin \theta \cos \theta \right)$$

(ii)  $\overline{CE} = \overline{AC} = \overline{OA} - \overline{OC}$

$$= 1 - \tan \theta \sin \theta$$

삼각형 PCD에서

$$\begin{aligned}\overline{CD} &= \overline{PC} \times \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= (\overline{OP} - \overline{OC}) \times \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= (\tan \theta - \tan \theta \sin \theta) \times \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= \tan \theta \times (1 - \sin \theta) \times \frac{1}{\tan \theta} \\ &= 1 - \sin \theta\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\overline{DE} &= \overline{CE} - \overline{CD} \\ &= (1 - \tan \theta \sin \theta) - (1 - \sin \theta) \\ &= \sin \theta \times (1 - \tan \theta)\end{aligned}$$

 $\frac{z}{z_0}$ 

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{\text{DE}} \times \overline{\text{OC}} \\ &= \frac{1}{2} \times \sin \theta \times (1 - \tan \theta) \times \tan \theta \sin \theta \\ &= \frac{\sin^2 \theta \tan \theta (1 - \tan \theta)}{2} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서

$$\begin{aligned} & \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta \times f(\theta)}{g(\theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta \times \frac{\tan^2 \theta}{2} \times \left( \frac{\pi}{2} - \theta - \sin \theta \cos \theta \right)}{\frac{\sin^2 \theta \tan \theta \times (1 - \tan \theta)}{2}} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta \times \tan \theta \times \left( \frac{\pi}{2} - \theta - \sin \theta \cos \theta \right)}{\sin^2 \theta \times (1 - \tan \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\tan \theta}{\theta}}{\frac{\sin^2 \theta}{\theta^2}} \times \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\pi}{2} - \theta - \sin \theta \cos \theta}{1 - \tan \theta} \\ &= 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

답 ④



## 04 여러 가지 미분법

유제

본문 45~53쪽

1 ④	2 ①	3 ②	4 ⑤	5 ④
6 ②	7 ④	8 ①	9 ②	10 ③

1 함수  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (x^2+1) - (x-1) \times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(x^2+1) - (2x^2-2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

이므로

$$f'(1) = \frac{-1^2+2 \times 1+1}{(1^2+1)^2} = \frac{1}{2}$$

따라서 곡선  $y=f(x)$  위의 점  $(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는  $\frac{1}{2}$ 이다.

답 ④

2  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x)-a}{x-\frac{\pi}{4}} = b$ 에서  $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이고 극한

값이 존재하므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

함수  $f(x)$ 가  $x = \frac{\pi}{4}$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \{f(x) - a\} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) - a = 0$$

$$a = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\pi}{4}}{\tan \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}$$

이때 미분계수의 정의에 의하여

$$b = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x)-a}{x-\frac{\pi}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}} = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

이고,  $f(x) = \frac{x}{\tan x + \cot x}$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (\tan x + \cot x) - x \times (\sec^2 x - \csc^2 x)}{(\tan x + \cot x)^2} \\ &= \frac{(\tan x + \cot x) - x(\sec^2 x - \csc^2 x)}{(\tan x + \cot x)^2} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} b &= f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\left(\tan \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}(\sec^2 \frac{\pi}{4} - \csc^2 \frac{\pi}{4})}{\left(\tan \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{4}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서  $a = \frac{\pi}{8}$ ,  $b = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{8}} = \frac{4}{\pi}$$

답 ①

3  $\{\ln(1+x^2)\}' = \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2}$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)' \times \ln(1+x^2) + x \times \{\ln(1+x^2)\}' \\ &= \ln(1+x^2) + x \times \frac{2x}{1+x^2} \\ &= \ln(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2} \end{aligned}$$

따라서  $f'(1) = \ln 2 + \frac{2}{2} = 1 + \ln 2$

답 ②

4  $f(x) = \sin ax$ 에서  $f'(x) = a \cos ax$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)-a}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos ax - a}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (-a) \times \frac{1 - \cos ax}{x^2} \right\} \\ &= -a \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2} \quad \dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos ax)(1 + \cos ax)}{x^2(1 + \cos ax)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 ax}{x^2(1 + \cos ax)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left( \frac{\sin ax}{ax} \right)^2 \times a^2 \right\} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos ax} \\ &= 1^2 \times a^2 \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

이므로 ⑦에서



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - a}{x^2} &= -a \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2} \\ &= -a \times \frac{a^2}{2} \\ &= -\frac{a^3}{2} = -4\end{aligned}$$

즉,  $a^3=8$ 에서  $a$ 가 실수이므로  $a=2$

따라서  $f(x)=\sin 2x$ 이므로

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \sin \frac{2}{3}\pi \\ &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

답 ⑤

5  $x=1-e^{-t}$ 에서  $\frac{dx}{dt} = -(-e^{-t}) = e^{-t}$ ,  
 $y=e^{2t}+1$ 에서  $\frac{dy}{dt} = e^{2t} \times (2t)' = 2e^{2t}$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2e^{2t}}{e^{-t}} \\ &= 2e^{3t} \quad \dots\dots ㉠\end{aligned}$$

따라서  $t=\ln 2$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 ㉠에

$t=\ln 2$ 를 대입한 값과 같으므로

$$2e^{3 \ln 2} = 2e^{\ln 2^3} = 2 \times 2^3 = 16$$

답 ④

6  $x=\ln \sqrt{t}=\ln t^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2} \ln t$ 에서  $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2t}$ ,

$y=\frac{1}{2}t^2-at$ 에서  $\frac{dy}{dt}=t-a$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t-a}{\frac{1}{2t}} \\ &= 2t(t-a) = 2t^2 - 2at \quad \dots\dots ㉠\end{aligned}$$

$t=3$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 ㉠에  $t=3$ 을

대입한 값과 같으므로

$$2 \times 3^2 - 2 \times a \times 3 = 18 - 6a = 6$$

$$6a = 12$$

따라서  $a=2$

답 ②

7  $x \ln y + 2x = 6$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$\ln y + \frac{x}{y} \times \frac{dy}{dx} + 2 = 0$$

$$\frac{x}{y} \times \frac{dy}{dx} = -(2 + \ln y)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(2 + \ln y)}{x} \quad (\text{단, } x \neq 0) \quad \dots\dots ㉠$$

따라서 곡선 위의 점  $(2, e)$ 에서의 접선의 기울기는 ㉠에  $x=2, y=e$ 를 대입한 값과 같고, 직선  $y=mx$ 가 이 접선과 평행하므로

$$m = -\frac{e \times (2+1)}{2} = -\frac{3}{2}e$$

답 ④

8  $\cos(x+y) + \sin(x-y) = 1$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$-\sin(x+y) \times \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) + \cos(x-y) \times \left(1 - \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\begin{aligned}\{\cos(x-y) + \sin(x+y)\} \frac{dy}{dx} \\ = \cos(x-y) - \sin(x+y)\end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x-y) - \sin(x+y)}{\cos(x-y) + \sin(x+y)}$$

$$(\text{단, } \cos(x-y) + \sin(x+y) \neq 0) \quad \dots\dots ㉠$$

따라서 곡선 위의 점  $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서의 접선의 기울기는 ㉠에

$x=\pi, y=\frac{\pi}{2}$ 를 대입한 값과 같으므로

$$\frac{\cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{3}{2}\pi}{\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{3}{2}\pi} = \frac{0 - (-1)}{0 + (-1)} = -1$$

답 ①

9  $f(x) = xe^{-x}$ 에서

$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x})$$

$$= (1-x)e^{-x}$$

$$f''(x) = (-1) \times e^{-x} + (1-x) \times (-e^{-x})$$

$$= (x-2)e^{-x}$$

$$\text{따라서 } f''(1) = (1-2)e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

답 ②

10 함수  $g(x)$ 가 함수  $f(x)$ 의 역함수이므로

$$f(g(x)) = x$$

이 식의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f'(g(x))g'(x)=1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편,  $f'(x)=2+\sin x$ 이고

$$g(\pi)=\frac{\pi}{2} \text{에서 } f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi \text{이므로}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2+\sin \frac{\pi}{2}=3$$

따라서  $\textcircled{7}$ 에  $x=\pi$ 를 대입하면

$$g'(\pi)=\frac{1}{f'(g(\pi))}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{3}$$

**답** ③

### Level 1 기초 연습

본문 54쪽

1 ②      2 ①      3 ③      4 ②      5 ②

$$\begin{aligned} 1 \quad f'(x) &= \frac{e^x \times x^2 - (e^x - 1) \times 2x}{x^4} \\ &= \frac{(x-2)e^x + 2}{x^3} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } f'(2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

**답** ②

$$\begin{aligned} 2 \quad y &= \sqrt[3]{x^2+4} = (x^2+4)^{\frac{1}{3}} \text{이므로} \\ y' &= \frac{1}{3}(x^2+4)^{-\frac{2}{3}} \times 2x \\ &= \frac{2}{3}x(x^2+4)^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{2}{3}x \times \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+4)^2}} \\ &= \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+4)^2}} \end{aligned}$$

따라서 곡선 위의 점 (2, 2)에서의 접선의 기울기는

$$\begin{aligned} \frac{2 \times 2}{3\sqrt[3]{(2^2+4)^2}} &= \frac{4}{3 \times \sqrt[3]{64}} = \frac{4}{3 \times 4} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

**다른 풀이**

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{x^2+4} = (x^2+4)^{\frac{1}{3}} \text{에서 양변을 세제곱하면} \\ y^3 &= x^2+4 \end{aligned}$$

양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$3y^2 \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\text{즉, } \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2} \text{ (단, } y \neq 0 \text{)} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

따라서 곡선 위의 점 (2, 2)에서의 접선의 기울기는  $\textcircled{7}$ 에

$x=2, y=2$ 를 대입한 값과 같으므로

$$\frac{2 \times 2}{3 \times 2^2} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$3 \quad x = e^t \cos t \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= e^t \times \cos t + e^t \times (-\sin t) \\ &= e^t (\cos t - \sin t) \end{aligned}$$

$$y = e^t \sin t \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= e^t \times \sin t + e^t \times \cos t \\ &= e^t (\cos t + \sin t) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t (\cos t + \sin t)}{e^t (\cos t - \sin t)} \\ &= \frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t} \text{ (단, } \cos t - \sin t \neq 0 \text{)} \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$t=a$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는  $\textcircled{7}$ 에  $t=a$ 를 대입한 값과 같고, 그 값이  $-1$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a} &= -1 \text{에서} \\ \cos a + \sin a &= -(\cos a - \sin a) \\ \cos a &= 0 \\ 0 < t < \pi \text{이므로} \\ a &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

**답** ③

$$4 \quad \text{점 } (b, 2) \text{가 곡선 } y^3 - xy = a \text{ 위의 점이므로}$$

$$\begin{aligned} 8 - 2b &= a \\ a + 2b &= 8 \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$y^3 - xy = a$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$3y^2 \frac{dy}{dx} - \left(y + x \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$(3y^2 - x) \frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{3y^2 - x} \text{ (단, } 3y^2 - x \neq 0 \text{)} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

**답** ①



곡선 위의 점  $(b, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 ㉠에  $x=b$ ,  
 $y=2$ 를 대입한 값과 같고, 이 값이  $\frac{1}{3}$ 이므로

$$\frac{2}{12-b} = \frac{1}{3} \text{에서 } b=6$$

$b=6$ 을 ㉠에 대입하면

$$a=-4$$

$$\text{따라서 } a+b=-4+6=2$$

답 ②

5 함수  $g(x)$ 가 함수  $f(x)$ 의 역함수이므로

$$f(g(x))=x$$

이 식의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f'(g(x))g'(x)=1 \quad \dots\dots ㉠$$

한편,  $g(2)=1$ 이므로

$$f(1)=2$$

$$f'(x)=2^{\ln x} \times \ln 2 \times \frac{1}{x} + 1$$

$$= \frac{2^{\ln x} \times \ln 2}{x} + 1$$

이므로

$$f'(1)=1+\ln 2$$

따라서 ㉠에  $x=2$ 를 대입하면

$$g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}$$

$$=\frac{1}{f'(1)}$$

$$=\frac{1}{1+\ln 2}$$

답 ②

## Level 2 기본 연습

본문 55쪽

1 ①

2 ⑤

3 ④

4 4

1  $\ln \sqrt{x} = \ln x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln x$ 에서

$$f(x) = \frac{\ln \sqrt{x}}{x} = \frac{\ln x}{2x} \text{이므로}$$

$$f'(x) = \left( \frac{\ln x}{2x} \right)'$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \times 2x - \ln x \times 2}{(2x)^2}$$

$$= \frac{1 - \ln x}{2x^2}$$

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\sqrt{e}+h) - f(\sqrt{e})}{h} = f'(\sqrt{e})$$

$$= \frac{1 - \ln \sqrt{e}}{2 \times (\sqrt{e})^2}$$

$$= \frac{1}{4e}$$

$$\text{이고, } f(e) = \frac{\ln \sqrt{e}}{e} = \frac{1}{2e}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\sqrt{e}+h) - f(\sqrt{e})}{h} = kf(e) \text{에서}$$

$$\frac{1}{4e} = k \times \frac{1}{2e}$$

$$\text{따라서 } k = \frac{1}{2}$$

답 ①

2  $g(x) = \frac{1}{1+e^x}$ 에서

$$g'(x) = \frac{0 \times (1+e^x) - 1 \times e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$= -\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

$h(x) = g(f(x))$ 라 하면

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

따라서 곡선  $y=h(x)$  위의 점  $(1, h(1))$ 에서의 접선의  
 기울기는

$$h'(1) = g'(f(1))f'(1)$$

$$= g'(\ln 2) \times 3$$

$$= -\frac{e^{\ln 2}}{(1+e^{\ln 2})^2} \times 3$$

$$= -\frac{2}{(1+2)^2} \times 3$$

$$= -\frac{2}{9} \times 3$$

$$= -\frac{2}{3}$$

답 ⑤

3  $x=t-\sin t$ 에서  $\frac{dx}{dt} = 1-\cos t$ ,

$$y=1-\cos t \text{에서 } \frac{dy}{dt} = \sin t$$

이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\sin t}{1 - \cos t} \quad (\text{단, } 1 - \cos t \neq 0) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$t = \alpha$ 에 대응하는 점 P에서의 접선의 기울기는

$\textcircled{7}$ 에  $t = \alpha$ 를 대입한 값과 같으므로

$$p = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

$t = 2\pi - \alpha$ 에 대응하는 점 Q에서의 접선의 기울기는

$\textcircled{7}$ 에  $t = 2\pi - \alpha$ 를 대입한 값과 같으므로

$$q = \frac{\sin(2\pi - \alpha)}{1 - \cos(2\pi - \alpha)}$$

$$= \frac{-\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

$pq = -3$ 이므로

$$\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \times \left( -\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \right) = -3$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2} = 3$$

$$\sin^2 \alpha = 3(\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha + 1)$$

$$1 - \cos^2 \alpha = 3 \cos^2 \alpha - 6 \cos \alpha + 3$$

$$2 \cos^2 \alpha - 3 \cos \alpha + 1 = 0$$

$$(2 \cos \alpha - 1)(\cos \alpha - 1) = 0$$

$\cos \alpha \neq 1$ 이므로

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$0 < \alpha < \pi \text{이므로 } \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$\alpha = \frac{\pi}{3}$ 일 때,

$$P\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), Q\left(\frac{5}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

따라서 선분 PQ의 길이는

$$\left(\frac{5}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4}{3}\pi + \sqrt{3}$$

 ④

#### 4 함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$$f(g(x)) = x$$

이 식의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f'(g(x))g'(x) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$g(1) = a$ 라 하면

$$f(a) = 1$$

즉,  $4 \sin^2 a = 1$ 에서

$$\sin^2 a = \frac{1}{4}$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서  $\sin x > 0$ 이므로

$$\sin a = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{즉, } g(1) = \frac{\pi}{6}$$

한편,  $f(x) = 4 \sin^2 x$  ( $0 < x < \frac{\pi}{2}$ )에서

$$f'(x) = 4 \times 2 \sin x \times \cos x$$

$$= 8 \sin x \cos x$$

$\textcircled{7}$ 에  $x = 1$ 을 대입하면

$$f'(g(1))g'(1) = 1$$

$$\text{즉, } f'\left(\frac{\pi}{6}\right)g'(1) = 1 \text{이고,}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 8 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6}$$

$$= 8 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

이므로

$$g'(1) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}$$

따라서

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{g(1+h) - g(1)\} - \{g(1-h) - g(1)\}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1-h) - g(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1-h) - g(1)}{-h}$$

$$= g'(1) + g'(1)$$

$$= 2g'(1)$$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$

에서  $p = 3$ ,  $q = 1$ 이므로

$$p + q = 3 + 1 = 4$$

 4



## Level 3 실력 완성

본문 56쪽

1 ⑤      2 ②      3 ⑤

- 1 조건 (가)에서  $\lim_{x \rightarrow \ln 2} \frac{f(x)-5}{x-\ln 2} = 8$ 이고,  $x \rightarrow \ln 2$ 일 때  
(분모)  $\rightarrow 0$ 이므로 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

이때 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수  $f(x)$ 는 실수  
전체의 집합에서 연속이므로

$$f(\ln 2) = \lim_{x \rightarrow \ln 2} f(x) = 5$$

따라서 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \ln 2} \frac{f(x)-5}{x-\ln 2} = \lim_{x \rightarrow \ln 2} \frac{f(x)-f(\ln 2)}{x-\ln 2} \\ = f'(\ln 2) = 8$$

조건 (나)에서

$$\sqrt{4 + \{g(x)\}^2} = \frac{f(x)}{e^x} \quad \dots\dots ㉠$$

이므로 ㉠의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$\frac{2g(x)g'(x)}{2\sqrt{4 + \{g(x)\}^2}} = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} \\ \frac{g(x)g'(x)}{\sqrt{4 + \{g(x)\}^2}} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠에  $x = \ln 2$ 를 대입하면

$$\sqrt{4 + \{g(\ln 2)\}^2} = \frac{f(\ln 2)}{e^{\ln 2}} \\ = \frac{5}{2}$$

$\sqrt{4 + \{g(\ln 2)\}^2} = \frac{5}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$4 + \{g(\ln 2)\}^2 = \frac{25}{4}$$

$$\{g(\ln 2)\}^2 = \frac{9}{4}$$

모든 양수  $x$ 에 대하여  $g(x) > 0$ 이므로

$$g(\ln 2) = \frac{3}{2}$$

㉡에  $x = \ln 2$ 를 대입하면

$$\frac{g(\ln 2)g'(\ln 2)}{\sqrt{4 + \{g(\ln 2)\}^2}} = \frac{f'(\ln 2) - f(\ln 2)}{2}$$

$$\text{즉, } \frac{\frac{3}{2}g'(\ln 2)}{\sqrt{4 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{3}{2} \text{에서}$$

$$g'(\ln 2) = \frac{5}{2}$$

한편,  $h(x) = f(x)g(x)$ 에서

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

따라서

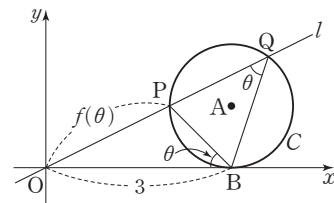
$$h'(\ln 2) = f'(\ln 2)g(\ln 2) + f(\ln 2)g'(\ln 2) \\ = 8 \times \frac{3}{2} + 5 \times \frac{5}{2} = \frac{49}{2}$$

답 ⑤

- 2 원  $C$ 가 점  $A(3, 1)$ 을 중심으로 하고  $x$ 축에 접하므로 원  $C$   
의 반지름의 길이는 1이고, 점  $B$ 의 좌표는  $(3, 0)$ 이다.

원의 접선과 현이 이루는 각의 성질에 의하여

$$\angle OBP = \angle BQO = \theta$$



원  $C$ 는 삼각형  $BQP$ 의 외접원이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BP}}{\sin \theta} = 2 \text{에서 } \overline{BP} = 2 \sin \theta$$

삼각형  $POB$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{OP}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BP}^2 - 2 \times \overline{OB} \times \overline{BP} \times \cos \theta \\ = 3^2 + (2 \sin \theta)^2 - 2 \times 3 \times 2 \sin \theta \times \cos \theta \\ = 4 \sin^2 \theta - 12 \sin \theta \cos \theta + 9$$

이므로

$$f(\theta) = \overline{OP} \\ = \sqrt{4 \sin^2 \theta - 12 \sin \theta \cos \theta + 9}$$

이고,

$$f'(\theta) = \frac{8 \sin \theta \cos \theta - 12(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{2\sqrt{4 \sin^2 \theta - 12 \sin \theta \cos \theta + 9}} \\ = \frac{4 \sin \theta \cos \theta - 6(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{\sqrt{4 \sin^2 \theta - 12 \sin \theta \cos \theta + 9}}$$

따라서

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} - 6\left(\cos^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\pi}{4} - 12 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} + 9}} \\ = \frac{4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 6\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{4 \times \frac{1}{2} - 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 9}} \\ = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

답 ②

**다른 풀이**

$$f(\theta) = \sqrt{4 \sin^2 \theta - 12 \sin \theta \cos \theta + 9} \text{에서}$$

$$\{f(\theta)\}^2 = 4 \sin^2 \theta - 12 \sin \theta \cos \theta + 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

㉠에  $\theta = \frac{\pi}{4}$ 를 대입하면

$$\left\{f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}^2 = 4 \times \frac{1}{2} - 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 9$$

$$= 2 - 6 + 9 = 5$$

$f(\theta) > 0$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{5}$$

㉠의 양변을  $\theta$ 에 대하여 미분하면

$$2f(\theta)f'(\theta)$$

$$= 8 \sin \theta \cos \theta - 12(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡에  $\theta = \frac{\pi}{4}$ 를 대입하면

$$2 \times \sqrt{5} \times f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 12\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$2 \times \sqrt{5} \times f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$$

$$\text{따라서 } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

**3** 조건 (가)에 의하여

$$f(x) = (x-1)^2(x-a) \quad (a \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 2(x-1)(x-a) + (x-1)^2$$

$$= 3x^2 - 2(a+2)x + 2a + 1$$

조건 (나)에 의하여 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f'(x) \geq 0$ 이어야  
하므로 이차방정식  $3x^2 - 2(a+2)x + 2a + 1 = 0$ 의 판별식  
을  $D$ 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a+2)^2 - 3(2a+1) \leq 0$$

$$a^2 - 2a + 1 \leq 0$$

$$(a-1)^2 \leq 0$$

$$\text{즉, } a = 1$$

따라서  $f(x) = (x-1)^3$ 이고,  $x > 1$ 에서  $f(x) > 0$ 이므로

$$\ln f(x) = \ln (x-1)^3$$

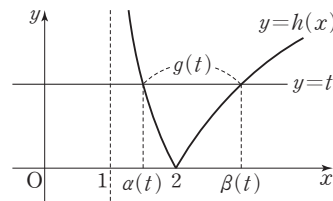
$$= 3 \ln (x-1)$$

$$h(x) = |\ln f(x)| \text{라 하면}$$

$$h(x) = |3 \ln (x-1)|$$

$$= \begin{cases} -3 \ln (x-1) & (1 < x < 2) \\ 3 \ln (x-1) & (x \geq 2) \end{cases}$$

이고, 함수  $y = h(x)$ 의 그래프와 직선  $y = t$ 는 그림과 같다.



양수  $t$ 에 대하여 방정식  $h(x) = t$ 를 만족시키는 실수  $x$ 를  
 $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  ( $\alpha(t) < \beta(t)$ )라 하자.

(i)  $-3 \ln (x-1) = t$ 에서

$$\ln (x-1) = -\frac{t}{3}$$

$$x = e^{-\frac{t}{3}} + 1$$

$$\text{즉, } \alpha(t) = e^{-\frac{t}{3}} + 1$$

(ii)  $3 \ln (x-1) = t$ 에서

$$\ln (x-1) = \frac{t}{3}$$

$$x = e^{\frac{t}{3}} + 1$$

$$\text{즉, } \beta(t) = e^{\frac{t}{3}} + 1$$

(i), (ii)에서

$$g(t) = \beta(t) - \alpha(t)$$

$$= e^{\frac{t}{3}} - e^{-\frac{t}{3}}$$

$$g'(t) = \frac{1}{3}e^{\frac{t}{3}} + \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}(e^{\frac{t}{3}} + e^{-\frac{t}{3}})$$

따라서

$$g'(3 \ln 2) = \frac{1}{3}(e^{\ln 2} + e^{-\ln 2})$$

$$= \frac{1}{3}\left(2 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{5}{2}$$

$$= \frac{5}{6}$$

답 ⑤



## 05 도함수의 활용

유제

본문 59~69쪽

1 ④	2 ③	3 ②	4 ①	5 ④
6 4	7 4	8 ④	9 ②	10 ①
11 5				

1  $y = \tan x$ 에서  $y' = \sec^2 x$ 곡선  $y = \tan x$  위의 점  $(t, \tan t)$  ( $0 < t < \frac{\pi}{2}$ )에서의

접선의 방정식은

$$y - \tan t = \sec^2 t \times (x - t) \quad \dots\dots ㉠$$

직선  $y = 2x + a$ 의 기울기가 2이므로

$$\sec^2 t = 2 \text{에서 } \cos^2 t = \frac{1}{2}$$

$$0 < t < \frac{\pi}{2} \text{에서 } \cos t > 0 \text{이므로}$$

$$\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}, t = \frac{\pi}{4}$$

$$t = \frac{\pi}{4} \text{를 ㉠에 대입하면}$$

$$y - 1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right), y = 2x + 1 - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{따라서 } a = 1 - \frac{\pi}{2}$$

답 ④

2  $x^2 - xy + 2y^2 = 8$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$2x - \left(y + x \frac{dy}{dx}\right) + 4y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(-x + 4y) \frac{dy}{dx} = -2x + y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x + y}{-x + 4y} \quad (\text{단, } -x + 4y \neq 0) \quad \dots\dots ㉠$$

곡선 위의 점  $(2, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 ㉠에  $x = 2$ , $y = 2$ 를 대입한 값과 같으므로

$$\frac{-2 \times 2 + 2}{-2 + 4 \times 2} = -\frac{1}{3}$$

즉, 구하는 접선의 방정식은

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 2), y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$$

따라서 직선  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$ , 즉  $x + 3y - 8 = 0$ 과 원점 사이의 거리는

$$\frac{|-8|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$$

답 ③

3  $f(x) = (x^2 + ax + a)e^x$ 에서

$$f'(x) = (2x + a)e^x + (x^2 + ax + a)e^x$$

$$= \{x^2 + (a+2)x + 2a\}e^x$$

함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하기 위해서는 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하고,  $e^x > 0$ 이므로

$$x^2 + (a+2)x + 2a \geq 0 \text{이어야 한다.}$$

이차방정식  $x^2 + (a+2)x + 2a = 0$ 의 판별식을  $D$ 라 하면

$$D = (a+2)^2 - 8a = (a-2)^2 \leq 0$$

따라서  $a = 2$ 

답 ②

4  $f(x) = a \sin \pi x + \cos \pi x$ 에서

$$f'(x) = a\pi \cos \pi x - \pi \sin \pi x$$

함수  $f(x)$ 가  $x = \frac{1}{3}$ 에서 극값을 가지므로

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = a\pi \cos \frac{\pi}{3} - \pi \sin \frac{\pi}{3} = \pi \left(\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \text{에서}$$

$$a = \sqrt{3}$$

$$\text{즉, } f(x) = \sqrt{3} \sin \pi x + \cos \pi x \text{이고,}$$

$$f'(x) = \pi(\sqrt{3} \cos \pi x - \sin \pi x)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \sqrt{3} \cos \pi x = \sin \pi x$$

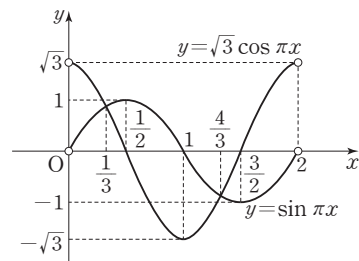
 $\cos \pi x = 0$ 이면 위 등식이 성립하지 않는다. 즉, $\cos \pi x \neq 0$ 이므로 위 식의 양변을  $\cos \pi x$ 로 나누면

$$\tan \pi x = \sqrt{3}$$

$$0 < x < 2 \text{에서 } 0 < \pi x < 2\pi \text{이므로}$$

$$\pi x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \pi x = \frac{4}{3}\pi$$

$$\text{따라서 } x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}$$



$0 < x < 2$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.



$x$	(0)	...	$\frac{1}{3}$	...	$\frac{4}{3}$	...	(2)
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=\frac{4}{3}$ 에서 극소이고, 극솟값은

$$\begin{aligned} f\left(\frac{4}{3}\right) &= \sqrt{3} \sin \frac{4}{3}\pi + \cos \frac{4}{3}\pi \\ &= \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \end{aligned}$$

답 ①

5  $f(x) = 2e^{2x} - e^{-x} + \frac{1}{2}$ 에서

$$f'(x) = 4e^{2x} + e^{-x}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 8e^{2x} - e^{-x} = \frac{8e^{3x} - 1}{e^x} \\ &= \frac{(2e^x - 1)(4e^{2x} + 2e^x + 1)}{e^x} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 0 \text{에서}$$

$$2e^x - 1 = 0, e^x = \frac{1}{2}, x = -\ln 2$$

$$x < -\ln 2 \text{에서 } f''(x) < 0, x > -\ln 2 \text{에서 } f''(x) > 0 \text{이고}$$

$$f(-\ln 2) = 2e^{-2\ln 2} - e^{\ln 2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{2} = -1$$

이므로 곡선  $y=f(x)$ 의 변곡점의 좌표는  $(-\ln 2, -1)$ 이다.

따라서  $a = -\ln 2, b = -1$ 이므로

$$ab = -\ln 2 \times (-1) = \ln 2$$

답 ④

6  $f(x) = \frac{ax}{x^2+1}$ 에서

$$f'(x) = \frac{a(x^2+1) - ax \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-a(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2ax(x^2+1)^2 + a(x^2-1) \times 2(x^2+1) \times 2x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{-2ax(x^2+1) + 4ax(x^2-1)}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{2ax(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

$$a > 0 \text{이므로 } f''(x) = 0 \text{에서}$$

$$x(x^2-3) = 0$$

$$x > 0 \text{이므로 } x^2-3 = 0, x = \sqrt{3}$$

$$0 < x < \sqrt{3} \text{에서 } f''(x) < 0 \text{이고, } x > \sqrt{3} \text{에서 } f''(x) > 0 \text{이}$$

므로 곡선  $y=f(x)$ 의 변곡점의 좌표는  $(\sqrt{3}, f(\sqrt{3}))$ 이다.

$$f'(\sqrt{3}) = \frac{-a \times (3-1)}{(3+1)^2} = -\frac{a}{8}$$

이고, 곡선  $y=f(x)$ 의 변곡점에서의 접선의 기울기가  $-\frac{1}{2}$

$$\text{이므로 } -\frac{a}{8} = -\frac{1}{2}$$

따라서  $a = 4$

답 4

7  $f(x) = x(\ln ax)^2$ 에서

$$f'(x) = (\ln ax)^2 + x \times 2 \ln ax \times \frac{a}{ax}$$

$$= (\ln ax)^2 + 2 \ln ax$$

$$f''(x) = 2 \ln ax \times \frac{a}{ax} + 2 \times \frac{a}{ax}$$

$$= \frac{2}{x} \ln ax + \frac{2}{x}$$

주어진 조건에서 함수  $y=f''(x)$ 가 연속함수이므로 사잇값 정리에 의하여  $f''(1) = 0$

$$f''(1) = 2 \ln a + 2 = 0$$

$$\ln a = -1 \text{에서 } a = \frac{1}{e}$$

따라서

$$f(x) = x \left( \ln \frac{x}{e} \right)^2 = x(\ln x - 1)^2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \ln \frac{x}{e} \right)^2 + 2 \ln \frac{x}{e} \\ &= (\ln x - 1)^2 + 2(\ln x - 1) \\ &= (\ln x - 1)(\ln x + 1) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{e^2} < x < e \text{에서 } -2 < \ln x < 1 \text{이므로}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \ln x = -1, x = \frac{1}{e}$$

단한구간  $\left[\frac{1}{e^2}, e\right]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	$\frac{1}{e^2}$	...	$\frac{1}{e}$	...	$e$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$\frac{9}{e^2}$	↗	극대	↘	0

$$f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e^2} \times (-2-1)^2 = \frac{9}{e^2}, f(e) = e \times (1-1)^2 = 0$$

이므로 함수  $f(x)$ 는  $x = \frac{1}{e}$ 에서 극대이면서 최대이고, 최댓값은



$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \times (-1-1)^2 = \frac{4}{e}$$

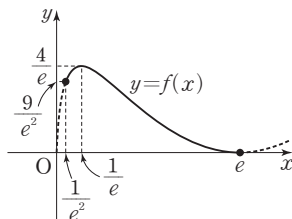
따라서 구하는 상수  $k$ 의 값은 4이다.

답 4

참고

단한구간  $\left[\frac{1}{e^2}, e\right]$ 에서

함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



8  $f(x) = x \ln x - 3x$ 라 하면

$$f'(x) = \ln x + 1 - 3 = \ln x - 2$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = e^2$$

$x > 0$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	(0)	...	$e^2$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	극소	/

함수  $f(x)$ 는  $x=e^2$ 에서 극소이면서 최소이므로

함수  $f(x)$ 의 최솟값은

$$f(e^2) = e^2 \times \ln e^2 - 3e^2 = -e^2$$

$x > 0$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) \geq k$ 이라면  $k$ 는  $f(x)$ 의 최솟값보다 작거나 같아야 하고, 함수  $f(x)$ 의 최솟값이  $-e^2$ 이므로

$$k \leq -e^2$$

따라서  $k$ 의 최댓값은  $-e^2$ 이다.

답 ④

9  $x > 0$ 에서  $f(x) = g(x)$ , 즉  $e^x = kx^2$ 에서  $\frac{e^x}{x^2} = k$

$h(x) = \frac{e^x}{x^2}$ 이라 하면  $x > 0$ 에서 방정식  $f(x) = g(x)$ 의 실근이 존재하기 위해서는 함수  $y=h(x)$ 의 그래프와 직선  $y=k$ 의 교점이 존재해야 한다.

$$h'(x) = \frac{e^x \times x^2 - e^x \times 2x}{x^4} = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$$

$x > 0$ 이므로  $h'(x) = 0$ 에서  $x = 2$

$x > 0$ 에서 함수  $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	(0)	...	2	...
$h'(x)$		-	0	+
$h(x)$		\	극소	/

함수  $h(x)$ 는  $x=2$ 에서 극소이면서 최소이므로 함수  $h(x)$ 의 최솟

값은  $h(2) = \frac{e^2}{4}$ 이고,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x^2} = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty \text{ 이므로}$$

로 함수  $y=h(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

따라서 함수  $y=h(x)$ 의 그래프와 직선  $y=k$ 의 교점이 존재하기 위해서는  $k \geq \frac{e^2}{4}$ 이어야 하므로  $k$ 의 최솟값은  $\frac{e^2}{4}$ 이다.

답 ②

10  $x = 2t + \frac{1}{t}, y = t - \frac{2}{t}$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = 2 - \frac{1}{t^2}, \frac{dy}{dt} = 1 + \frac{2}{t^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2}{t^3}, \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{4}{t^3}$$

이므로 시각  $t$ 에서의 점 P의 가속도의 크기는

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} &= \sqrt{\left(\frac{2}{t^3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{t^3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{20}{t^6}} = \frac{2\sqrt{5}}{t^3} \end{aligned}$$

따라서 시각  $t=2$ 에서의 점 P의 가속도의 크기는

$$\frac{2\sqrt{5}}{2^3} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

답 ①

11  $x = 1 - \cos 2t$ 에서  $\frac{dx}{dt} = 2 \sin 2t$ ,

$$y = \frac{1}{2} \sin 2t \text{에서 } \frac{dy}{dt} = \cos 2t$$

이므로 시각  $t$ 에서의 점 P의 속력은

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{(2 \sin 2t)^2 + (\cos 2t)^2} \\ &= \sqrt{4 \sin^2 2t + \cos^2 2t} \\ &= \sqrt{4 \sin^2 2t + (1 - \sin^2 2t)} \\ &= \sqrt{3 \sin^2 2t + 1} \end{aligned}$$

$0 \leq \sin^2 2t \leq 1$ 이므로

점 P의 속력은  $\sin^2 2t=1$ 인 시각  $t$ 에서 최대이고, 최댓값은  $M=\sqrt{3+1}=2$

점 P의 속력은  $\sin^2 2t=0$ 인 시각  $t$ 에서 최소이고, 최솟값은  $m=\sqrt{0+1}=1$

따라서  $M^2+m^2=2^2+1^2=5$

답 5

### Level 1 기초 연습

본문 70쪽

1 ④      2 ②      3 ③      4 ③      5 ①

1  $f(x)=\frac{1}{x}$ 이라 하면  $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

곡선  $y=f(x)$  위의 점  $(t, \frac{1}{t})$  ( $t>0$ )에서의 접선  $l$ 의 방정식은

$$y-\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}(x-t)$$

$$y=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선  $l$ 이 직선  $y=\frac{1}{4}x$ 와 수직이므로 직선  $l$ 의 기울기는  $-4$ 이다.

$$-\frac{1}{t^2}=-4, \quad t^2=\frac{1}{4}$$

$$t>0\text{이므로 } t=\frac{1}{2}$$

$$t=\frac{1}{2}\text{을 } \textcircled{1}\text{에 대입하면 } y=-4x+4$$

따라서 직선  $l$ 의  $x$ 절편은 1이다.

답 ④

2  $f(x)=\frac{1}{2}x^2+ax+\ln x$ 라 하면

함수  $f(x)$ 의 정의역은  $\{x|x>0\}$ 이고,

$$f'(x)=x+a+\frac{1}{x}$$

$$f''(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$$

$$f''(x)=0\text{에서 } x^2=1$$

$x>0$ 이므로  $x=1$

$x=1$ 의 좌우에서  $f''(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 곡선  $y=f(x)$ 의 변곡점의 좌표는  $(1, f(1))$ 이다.

변곡점이  $x$ 축 위에 있으므로  $f(1)=0$ 에서

$$\frac{1}{2}+a=0$$

$$\text{따라서 } a=-\frac{1}{2}$$

답 ②

3  $f(x)=x+2\cos x$ 에서  $f'(x)=1-2\sin x$

$$f'(x)=0\text{에서 } \sin x=\frac{1}{2}$$

$$0\leq x\leq\pi\text{에서 } x=\frac{\pi}{6}\text{ 또는 } x=\frac{5}{6}\pi$$

닫힌구간  $[0, \pi]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	$\pi$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	2	↗	극대	↘	극소	↗	$\pi-2$

$$f(0)=2, \quad f(\pi)=\pi-2$$

$f(0)>f(\pi)$ 이므로 함수  $f(x)$ 는  $x=\frac{\pi}{6}$ 에서 극대이면서

최대이고, 함수  $f(x)$ 는  $x=\frac{5}{6}\pi$ 에서 극소이면서 최소이다.

그러므로

$$M=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$$

$$m=f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{5}{6}\pi+2\cos\frac{5}{6}\pi=\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$$

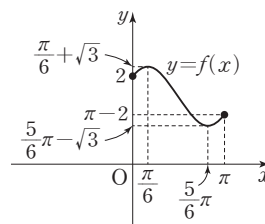
$$\text{따라서 } M+m=\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)+\left(\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)=\pi$$

답 ③

#### 참고

닫힌구간  $[0, \pi]$ 에서 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



4 방정식  $(x+2)^2e^{-x}=k$ 에서  $f(x)=(x+2)^2e^{-x}$ 이라 하면

$$f'(x)=2(x+2)e^{-x}-(x+2)^2e^{-x}=-x(x+2)e^{-x}$$

모든 실수  $x$ 에 대하여  $e^{-x}>0$ 이므로

$$f'(x)=0\text{에서 } x=-2\text{ 또는 } x=0$$



함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

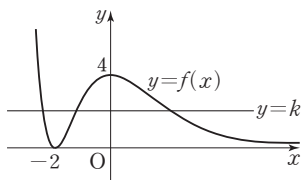
$x$	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = 0$ 에서  $x+2=t$ 로 놓으면

$x \rightarrow \infty$ 일 때  $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x+2)^2 e^{-x} = \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 e^{-t+2} = e^2 \times \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 e^{-t} = 0$$

또  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2)^2 e^{-x} = \infty$ 이고,  $f(-2)=0$ ,  $f(0)=4$ 이므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖기 위해서는 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와 직선  $y=k$ 의 교점의 개수가 3이어야 하므로 이를 만족시키는 실수  $k$ 의 값의 범위는

$$0 < k < 4$$

따라서 가능한 정수  $k$ 의 값은 1, 2, 3으로 그 개수는 3이다.

답 ③

5  $x = \cos t + t \sin t$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t + (\sin t + t \cos t) = t \cos t$$

$y = \sin t - t \cos t$ 에서

$$\frac{dy}{dt} = \cos t - (\cos t - t \sin t) = t \sin t$$

이므로 시각  $t$ 에서의 점 P의 속력은

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{(t \cos t)^2 + (t \sin t)^2} \\ &= \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t} \\ &= \sqrt{t^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} = t \end{aligned}$$

따라서 점 P의 속력이  $\pi$ 가 되는 시각은  $t = \pi$ 이므로 이때 점 P의 위치는

$$x = \cos \pi + \pi \sin \pi = -1, y = \sin \pi - \pi \cos \pi = \pi$$

즉, 점 P(-1,  $\pi$ )이므로 직선 OP의 기울기는

$$\frac{\pi - 0}{-1 - 0} = -\pi$$

답 ①

## Level 2 기본 연습

본문 7쪽

1 ①      2 ③      3 ⑤      4 ⑤

1  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$ 에서 함수의 극한의 성질에 의하여  $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모)  $\rightarrow 0$ 이면 (분자)  $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

이때 함수  $f(x)$ 가  $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0 \text{이고,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 4$$

한편, 함수  $g(x)$ 는 함수  $f(x)$ 의 역함수이므로

$$f(1)=0 \text{에서 } g(0)=1 \text{이고,}$$

$$f(g(x)) = x$$

이 식의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f'(g(x))g'(x) = 1$$

위 식에  $x=0$ 을 대입하면

$$f'(g(0))g'(0) = 1, f'(1)g'(0) = 1$$

$$g'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$$

따라서 곡선  $y=g(x)$  위의 점  $(0, g(0))$ , 즉  $(0, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - 1 = g'(0)(x - 0), y = \frac{1}{4}x + 1$$

이때  $a = \frac{1}{4}$ ,  $b = 1$ 이므로

$$a + b = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

답 ①

2  $f(x) = \ln(4 + a \sin x)$ 에서

$$f'(x) = \frac{a \cos x}{4 + a \sin x}$$

$0 < a < 4$ 이므로  $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서

$$4 + a \sin x > 0$$

즉,  $f'(x) = 0$ 에서  $\cos x = 0$ 이므로

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	$2\pi$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$2 \ln 2$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	$2 \ln 2$

$f(0)=f(2\pi)=2\ln 2>0$ 이므로 함수  $f(x)$ 는  $x=\frac{3}{2}\pi$ 에서 극소이면서 최소이고, 최솟값은

$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\ln\left(4+a\sin\frac{3}{2}\pi\right) \\ =\ln(4-a)$$

함수  $y=f(x)$ 의 그래프가  $x$ 축에 접하고

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f(0)=f(2\pi)>0\text{이므로 } f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=0\text{이어야 한다.}$$

$$\ln(4-a)=0\text{에서}$$

$$a=3$$

$$\text{즉, } f(x)=\ln(4+3\sin x)$$

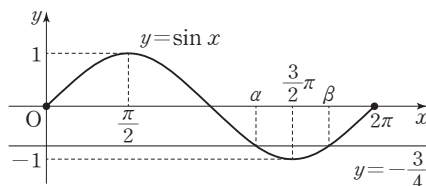
$$f'(x)=\frac{3\cos x}{4+3\sin x}\text{에서}$$

$$f''(x)=\frac{-3\sin x \times (4+3\sin x) - 3\cos x \times 3\cos x}{(4+3\sin x)^2} \\ =\frac{-12\sin x - 9}{(4+3\sin x)^2}$$

$$f''(x)=0\text{에서}$$

$$\sin x=-\frac{3}{4}$$

$0\leq x\leq 2\pi$ 에서 곡선  $y=\sin x$ 와 직선  $y=-\frac{3}{4}$ 이 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만나고, 두 점의  $x$ 좌표를 각각  $\alpha$ ,  $\beta$  ( $\alpha<\beta$ )라 하면  $x=\alpha$ ,  $x=\beta$  좌우에서 함수  $f''(x)$ 의 부호가 각각 바뀌므로 두 점  $(\alpha, f(\alpha))$ ,  $(\beta, f(\beta))$ 는 곡선  $y=f(x)$ 의 변곡점이다.

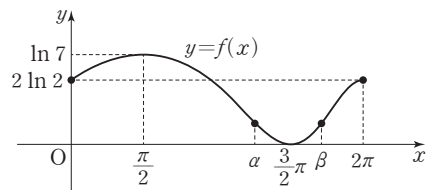


따라서  $0\leq x\leq 2\pi$ 에서 곡선  $y=f(x)$ 의 변곡점의 개수는 2이다.

답 ③

참고

$0\leq x\leq 2\pi$ 에서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



3 점 P가 제1사분면의 점이므로

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

삼각형 AQP는  $\overline{PA}=\overline{PQ}$ 인

이등변삼각형이므로 점 P에

서 선분 AQ에 내린 수선의

발을 H라 하면 원의 중심 O

를 지나는 직선 PH는 선분

AQ를 수직이등분하고, 이때 두 삼각형 APH, QPH는

서로 합동이다.

$$\text{즉, } \angle APH=\angle QPH=\frac{\theta}{2}$$

삼각형 AOP는  $\overline{OP}=\overline{OA}=1$ 인 이등변삼각형이므로

$$\angle OAP=\angle OPA=\frac{\theta}{2}\text{이고,}$$

$$\angle AOP=\pi-(\angle OAP+\angle OPA)$$

$$=\boxed{\pi-\theta}$$

삼각형 AOP에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{PA}^2=\overline{OA}^2+\overline{OP}^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OP}\times\cos(\pi-\theta)$$

$$=1+1-2\times 1\times 1\times(-\cos\theta)$$

$$=\boxed{2(1+\cos\theta)} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

삼각형 AQP의 넓이를  $S(\theta)$ 라 하면

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PA}\times\overline{PQ}\times\sin(\angle APQ)$$

$$=\frac{1}{2}\times\overline{PA}^2\times\sin(\angle APQ)$$

$$=\frac{1}{2}\times\boxed{2(1+\cos\theta)}\times\sin\theta$$

$$=(1+\cos\theta)\sin\theta$$

$$S'(\theta)=-\sin\theta\times\sin\theta+(1+\cos\theta)\times\cos\theta$$

$$=-\sin^2\theta+\cos\theta+\cos^2\theta$$

$$=-(1-\cos^2\theta)+\cos\theta+\cos^2\theta$$

$$=2\cos^2\theta+\cos\theta-1$$

$$=(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$$

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}\text{이므로 } 0<\cos\theta<1\text{이고}$$

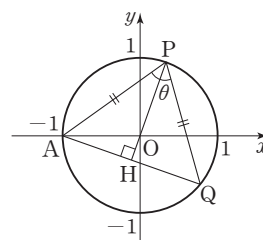
$$S'(\theta)=0\text{에서 } \cos\theta=\frac{1}{2}, \theta=\frac{\pi}{3}$$

$\theta=\frac{\pi}{3}$ 의 좌우에서  $S'(\theta)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로

$S(\theta)$ 는  $\theta=\frac{\pi}{3}$ 에서 극대이자 최대이다.

따라서  $S(\theta)$ 의 최댓값은

$$S\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)\times\sin\frac{\pi}{3} \\ =\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$





이때  $f(\theta) = \pi - \theta$ ,  $g(\theta) = 2(1 + \cos \theta)$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 이고,

$$f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

$$g(\alpha) = g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(1 + \cos \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3$$

$$\text{따라서 } f(\alpha) \times g(\alpha) = \frac{2}{3}\pi \times 3 = 2\pi$$

답 ⑤

- 4  $x = \ln 2t$ ,  $y = \frac{1}{t}$ 에서  $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$ ,  $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{t^2}$ 이므로  
 시간  $t$ 에서의 점 P의 속력은

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left(-\frac{1}{t^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^4}} = \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t^2} \end{aligned}$$

점 P의 속력이  $\sqrt{2}$ 가 되는 시각을  $t = a$  ( $a > 0$ )이라 하면

$$\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a^2} = \sqrt{2}, \sqrt{a^2 + 1} = \sqrt{2}a^2$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$2a^4 - a^2 - 1 = 0, (2a^2 + 1)(a^2 - 1) = 0$$

$a > 0$ 이므로  $a = 1$

한편,  $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{t^2}$ ,  $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2}{t^3}$ 이므로 시간  $t$ 에서의 점 P의

가속도의 크기는

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} &= \sqrt{\left(-\frac{1}{t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{t^3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{t^4} + \frac{4}{t^6}} = \frac{\sqrt{t^2 + 4}}{t^3} \end{aligned}$$

따라서 시간  $t = 1$ 에서의 점 P의 가속도의 크기는

$$\frac{\sqrt{1^2 + 4}}{1^3} = \sqrt{5}$$

답 ⑤

### Level 3 실력 완성

본문 72쪽

1 4      2 ①      3 ⑤

- 1  $f(x) = \frac{a}{x^2 + 1}$ 라 하면

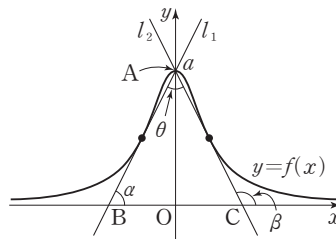
$$f'(x) = \frac{-a \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{2ax}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) = 0$ 에서  $x = 0$ 이고,  $x = 0$ 의 좌우에서  $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수  $f(x)$ 는  $x = 0$ 에서 극대이며서 최대이고, 극댓값은  $f(0) = a$ 이다.

모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(-x) = f(x)$ 이므로 곡선

$y = f(x)$ 는  $y$ 축에 대하여 대칭이고,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 이므로 함수  $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



점 A(0, a)에서 곡선  $y = f(x)$ 에 그은 접선 중 기울기가 양수인 직선을  $l_1$ , 기울기가 음수인 직선을  $l_2$ 라 하고, 두 직선  $l_1$ ,  $l_2$ 가  $x$ 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각  $\alpha$ ,  $\beta$ 라 하면  $\beta - \alpha = \theta$

곡선  $y = f(x)$  위의 점  $(t, f(t))$  ( $t \neq 0$ )에서의 접선의 방정식은

$$y - \frac{a}{t^2 + 1} = -\frac{2at}{(t^2 + 1)^2}(x - t) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 ①이 점 A(0, a)를 지나므로

$$a - \frac{a}{t^2 + 1} = -\frac{2at}{(t^2 + 1)^2} \times (-t), \frac{at^2}{t^2 + 1} = \frac{2at^2}{(t^2 + 1)^2}$$

$a > 0$ ,  $t \neq 0$ 이므로

$$1 = \frac{2}{t^2 + 1}, t^2 = 1, t = -1 \text{ 또는 } t = 1$$

그러므로 직선  $l_1$ 의 기울기는  $f'(-1) = \frac{a}{2}$

직선  $l_2$ 의 기울기는  $f'(1) = -\frac{a}{2}$

$$\text{즉, } \tan \alpha = \frac{a}{2}, \tan \beta = -\frac{a}{2}$$

$\theta = \beta - \alpha$ 이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan \theta = \tan(\beta - \alpha)$$

$$= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} = \frac{-\frac{a}{2} - \frac{a}{2}}{1 + \left(-\frac{a}{2}\right) \times \frac{a}{2}}$$

$$= -\frac{4a}{4 - a^2}$$

$$\tan \theta = \frac{4}{3} \text{에서 } -\frac{4a}{4 - a^2} = \frac{4}{3}$$

$$a^2 - 3a - 4 = 0, (a - 4)(a + 1) = 0$$

$a > 0$ 이므로  $a = 4$

따라서 조건을 만족시키는 상수  $a$ 의 값은 4이다.

4

2  $f_1(x) = \frac{a(x+1)^2}{x^2+1}$ ,  $f_2(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ 라 하자.

$$f_1'(x) = \frac{2a(x+1)(x^2+1) - a(x+1)^2 \times 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2a(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

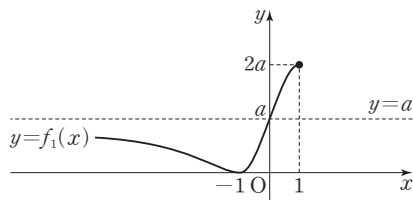
$f_1'(x) = 0$ 에서  $x = -1$  또는  $x = 1$

함수  $f_1(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	$\cdots$	$-1$	$\cdots$	$1$	$\cdots$
$f_1'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$f_1(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

$f_1(-1) = 0$ ,  $f_1(1) = 2a > 0$ 이고,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = a$ 이므로

$x \leq 1$ 에서 함수  $y = f_1(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로  $x = 1$ 에서 미분가능해야 한다.

함수  $f(x)$ 가  $x = 1$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \text{에서}$$

$$f_1(1) = f_2(1)$$

$$\text{즉, } f_2(1) = 2a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f_1(x) - f_1(1)}{x - 1} = f_1'(1) = 0$$

이고, 함수  $f(x)$ 가  $x = 1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f_2(x) - f_2(1)}{x - 1} = 0$$

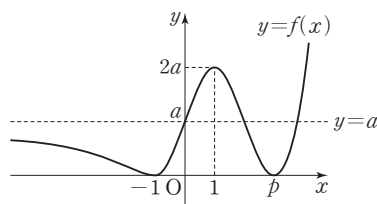
$$\text{즉, } f_2'(1) = 0$$

그러므로 삼차함수  $y = f_2(x)$ 는  $x = 1$ 에서 극대 또는 극소이거나 변곡점을 갖는다.

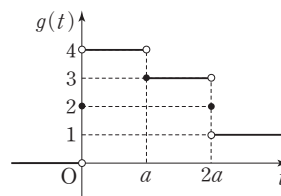
그런데 삼차함수  $y = f_2(x)$ 가  $x = 1$ 에서 극소이거나 변곡점을 가지면  $x > 1$ 에서 함수  $y = f_2(x)$ 의 그래프는  $x$ 축과 만나지 않는다.

조건 (가)에서  $g(0) = 2$ , 즉 함수  $y = f(x)$ 의 그래프와  $x$ 축의 교점의 개수가 2이므로 함수  $y = f_2(x)$ 의 그래프는  $x > 1$ 에서  $x$ 축과 접해야 한다.

이때 함수  $y = f_2(x)$ 의 그래프와  $x$ 축과 접하는 점의  $x$ 좌표를  $p$  ( $p > 1$ )라 하면 함수  $y = f_2(x)$ 는  $x = 1$ 에서 극대,  $x = p$ 에서 극소이므로 함수  $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 아래 그림과 같아야 한다.



그러므로 함수  $g(t)$ 의 그래프는 그림과 같다.



조건 (나)에서  $\lim_{t \rightarrow 4^-} g(t) - \lim_{t \rightarrow 4^+} g(t) = 2$ 를 만족시키는

경우는  $3 - 1 = 2$ 뿐이므로  $2a = 4$ ,  $a = 2$

$f_2(x) = (x - p)^2(x - k)$  ( $k$ 는 상수)로 놓으면

$$f_2'(x) = 2(x - p)(x - k) + (x - p)^2$$

$$= (x - p)(3x - 2k - p)$$

$$f_2'(x) = 0 \text{에서 } x = p \text{ 또는 } x = \frac{2k + p}{3}$$

$$f_2'(1) = 0 \text{이고 } p > 1 \text{이므로}$$

$$\frac{2k + p}{3} = 1, k = \frac{3 - p}{2}$$

$$\text{즉, } f_2(x) = (x - p)^2 \left( x - \frac{3 - p}{2} \right)$$

①에 의하여

$$f_2(1) = (1 - p)^2 \left( 1 - \frac{3 - p}{2} \right) = (p - 1)^2 \times \frac{p - 1}{2}$$

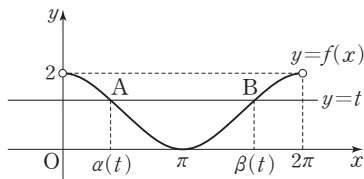
$$= \frac{(p - 1)^3}{2} = 2a = 4$$

$$(p - 1)^3 = 8 \text{에서 } p - 1 = 2, p = 3$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} \frac{2(x+1)^2}{x^2+1} & (x \leq 1) \\ x(x-3)^2 & (x > 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(-a) \times f(a) = f(-2) \times f(2) = \frac{2}{5} \times 2 = \frac{4}{5}$$

1

3 곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=t$ 는 그림과 같다.

곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=t$ 의 두 교점 A, B의  $x$ 좌표가 각각  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ 이고 곡선  $y=f(x)$ 가 직선  $x=\pi$ 에 대하여 대칭이므로  $\alpha(t)+\beta(t)=2\pi$ 에서

$$\beta(t)=2\pi-\alpha(t)$$

ㄱ.  $f(x)=\cos x+1$ 에서  $f'(x)=-\sin x$

$$\beta(t)=2\pi-\alpha(t)\text{이므로}$$

$$f'(\alpha(t))+f'(\beta(t))$$

$$=-\sin(\alpha(t))-\sin(\beta(t))$$

$$=-\sin(\alpha(t))-\sin(2\pi-\alpha(t))$$

$$=-\sin(\alpha(t))+\sin(\alpha(t))$$

$$=0 \text{ (참)}$$

ㄴ.  $f(\alpha(t))=t$ 에서 양변을  $t$ 에 대하여 미분하면

$$f'(\alpha(t))\alpha'(t)=1$$

$$\alpha'(t)=\frac{1}{f'(\alpha(t))}=-\frac{1}{\sin(\alpha(t))}$$

$f(\beta(t))=t$ 에서 양변을  $t$ 에 대하여 미분하여 정리하면

$$\beta'(t)=\frac{1}{f'(\beta(t))}=-\frac{1}{\sin(\beta(t))}$$

이때  $\beta(t)=2\pi-\alpha(t)$ 이므로

$$\beta'(t)=-\frac{1}{\sin(\beta(t))}=-\frac{1}{\sin(2\pi-\alpha(t))}$$

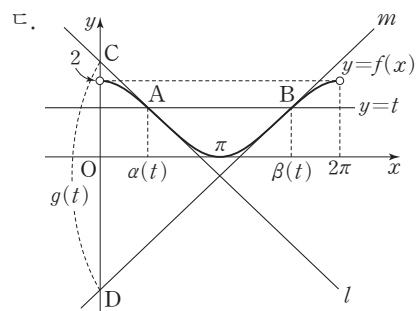
$$=\frac{1}{\sin(\alpha(t))}$$

따라서

$$\alpha'(t) \times \beta'(t) = -\frac{1}{\sin(\alpha(t))} \times \frac{1}{\sin(\alpha(t))}$$

$$=-\frac{1}{\sin^2(\alpha(t))}$$

$$=-\csc^2(\alpha(t)) \text{ (참)}$$



곡선  $y=f(x)$  위의 점  $A(\alpha(t), t)$ 에서의 접선의 방정식을  $l$ 이라 하면

$$l: y-t=f'(\alpha(t))(x-\alpha(t)) \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

㉑에  $x=0$ 을 대입하여 직선  $l$ 이  $y$ 축과 만나는 점 C의  $y$ 좌표를 구하면

$$t-f'(\alpha(t)) \times \alpha(t)=t+\alpha(t)\sin(\alpha(t))$$

곡선  $y=f(x)$  위의 점  $B(\beta(t), t)$ 에서의 접선의 방정식을  $m$ 이라 하면

$$m: y-t=f'(\beta(t))(x-\beta(t)) \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

㉒에  $x=0$ 을 대입하여 직선  $m$ 이  $y$ 축과 만나는 점 D의  $y$ 좌표를 구하면

$$t-f'(\beta(t)) \times \beta(t)$$

$$=t-\{-\sin(\beta(t))\} \times \beta(t)$$

$$=t-(2\pi-\alpha(t))\sin(\alpha(t))$$

따라서

$$g(t)=\{t+\alpha(t)\sin(\alpha(t))\}$$

$$-\{t-(2\pi-\alpha(t))\sin(\alpha(t))\}$$

$$=2\pi \sin(\alpha(t)) \quad \dots\dots \textcircled{㉓}$$

한편,  $t=\frac{1}{2}$ 일 때,  $1+\cos x=\frac{1}{2}$ ,  $\cos x=-\frac{1}{2}$ 이고,

$$0 < x < 2\pi \text{이므로 } x=\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x=\frac{4}{3}\pi$$

$$\text{즉, } \alpha\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\pi \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

ㄴ의 풀이 중  $\alpha'(t)=-\frac{1}{\sin(\alpha(t))}$ 에서

$$\begin{aligned} \alpha'\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{\sin\left(\alpha\left(\frac{1}{2}\right)\right)} = -\frac{1}{\sin \frac{2}{3}\pi} \\ &= -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉕} \end{aligned}$$

㉕의 양변을  $t$ 에 대하여 미분하면

$$g'(t)=2\pi \cos(\alpha(t)) \times \alpha'(t)$$

따라서 위 식에  $t=\frac{1}{2}$ 을 대입하면 ㉕, ㉕에 의하여

$$\begin{aligned} g'\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\pi \cos\left(\alpha\left(\frac{1}{2}\right)\right) \times \alpha'\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 2\pi \times \cos \frac{2}{3}\pi \times \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= 2\pi \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \text{ (참)} \end{aligned}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.



## 06 여러 가지 적분법

유제

본문 75~81쪽

1 14	2 ⑤	3 ③	4 ④	5 8
6 ⑤	7 ③	8 ⑤		

1  $f'(x) = x + x^{\frac{1}{2}}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (x + x^{\frac{1}{2}}) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

이때  $f(1) = \frac{7}{6} + C$ 이므로

$$\frac{7}{6} + C = \frac{11}{6} \quad \text{에서 } C = \frac{2}{3}$$

따라서  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}$ 이므로

$$f(4) = 8 + \frac{16}{3} + \frac{2}{3} = 14$$

답 14

2  $\int_0^1 \frac{16^x - 4^x}{4^x + 2^x} dx$

$$= \int_0^1 \frac{(4^x + 2^x)(4^x - 2^x)}{4^x + 2^x} dx$$

$$= \int_0^1 (4^x - 2^x) dx$$

$$= \left[ \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{2^x}{\ln 2} \right]_0^1$$

$$= \left( \frac{4}{\ln 4} - \frac{2}{\ln 2} \right) - \left( \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 2} \right)$$

$$= \left( \frac{2}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} \right) - \left( \frac{1}{2 \ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \right)$$

$$= \frac{1}{2 \ln 2}$$

답 ⑤

3  $f(x) = \int f'(x) dx$

$$= \int (1 + 2 \sin x) \cos x dx$$

이때  $1 + 2 \sin x = t$ 로 놓으면

$$2 \cos x = \frac{dt}{dx} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int (1 + 2 \sin x) \cos x dx &= \frac{1}{2} \int t dt \\ &= \frac{1}{4} t^2 + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수}) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } f(x) = \frac{1}{4} (1 + 2 \sin x)^2 + C$$

이때  $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + C$ 이므로  $\frac{1}{4} + C = \frac{1}{2}$ 에서  $C = \frac{1}{4}$

따라서  $f(x) = \frac{1}{4} (1 + 2 \sin x)^2 + \frac{1}{4}$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$$

답 ③

4  $\int_2^{\sqrt{6}} \frac{x^3}{x^4 + 4} dx = \frac{1}{4} \int_2^{\sqrt{6}} \frac{4x^3}{x^4 + 4} dx$

$$= \frac{1}{4} \int_2^{\sqrt{6}} \frac{(x^4 + 4)'}{x^4 + 4} dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[ \ln |x^4 + 4| \right]_2^{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{1}{4} \times (\ln 40 - \ln 20)$$

$$= \frac{1}{4} \ln 2$$

따라서  $k = 2^{\frac{1}{4}}$ 이므로

$$k^{10} = (2^{\frac{1}{4}})^{10} = 2^{\frac{5}{2}} = 4\sqrt{2}$$

답 ④

5  $\int_1^e x \ln x dx$ 에서

$$u(x) = \ln x, v'(x) = x \text{로 놓으면}$$

$$u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = \frac{1}{2}x^2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln x dx &= \left[ \frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2} x dx \\ &= \left[ \frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \left[ \frac{1}{4} x^2 \right]_1^e \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \left( \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

따라서  $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{4}$ 이므로

$$16(a+b) = 16 \times \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = 8$$

답 8



6  $\int_0^1 9xe^{3x} dx$ 에서  $u(x)=9x$ ,  $v'(x)=e^{3x}$ 으로 놓으면

$$u'(x)=9, v(x)=\frac{1}{3}e^{3x} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 9xe^{3x} dx &= \left[ 3xe^{3x} \right]_0^1 - \int_0^1 3e^{3x} dx \\ &= \left[ 3xe^{3x} \right]_0^1 - \left[ e^{3x} \right]_0^1 \\ &= 3e^3 - (e^3 - 1) = 2e^3 + 1 \end{aligned}$$

답 ⑤

7  $f(0)=0$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{2h} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{1}{2} f'(0)$$

또  $f(x) = \int_{2x}^{3x} (t+1)e^t dt$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x+1)e^{3x} \times 3 - (2x+1)e^{2x} \times 2 \\ &= 3(3x+1)e^{3x} - 2(2x+1)e^{2x} \end{aligned}$$

$$f'(0) = 3 - 2 = 1$$

$$\text{따라서 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{2h} = \frac{1}{2} f'(0) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

답 ③

8  $f(x) = 2(e^x - 1) + \int_0^x f(t) dt \quad \dots\dots ㉠$

이라 하자.

㉠에  $x=0$ 을 대입하면  $f(0)=0$

㉠의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 2e^x + f(x)$$

따라서 이 식에  $x=0$ 을 대입하면

$$f'(0) = 2 + 0 = 2$$

답 ⑤

### Level 1 기초 연습

본문 82~83쪽

1 ④      2 ②      3 ①      4 ④      5 7

6 ③      7 ②      8 ①

1  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx = \left[ -\cos x + \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$   
 $= 1 - (-1) = 2$

답 ④

2  $\int_0^9 (x - \sqrt{x} - 1) dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x \right]_0^9$   
 $= \frac{1}{2} \times 81 - \frac{2}{3} \times 27 - 9 = \frac{27}{2}$

답 ②

3  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx$   
 $= - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x} dx$   
 $= - \left[ \ln |\sin x + \cos x| \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$   
 $= -(-\ln \sqrt{2})$   
 $= \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2$

답 ①

4  $\int_1^e \left( \ln x^3 + \frac{1}{x} \right) dx = \int_1^e \left( 3 \ln x + \frac{1}{x} \right) dx$   
 $= 3 \int_1^e \ln x dx + \int_1^e \frac{1}{x} dx$

이때  $\int_1^e \ln x dx$ 에서  $u(x) = \ln x$ ,  $v'(x) = 1$ 로 놓으면

$$u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x dx &= \left[ x \ln x \right]_1^e - \int_1^e dx \\ &= \left[ x \ln x \right]_1^e - \left[ x \right]_1^e \\ &= e - (e - 1) = 1 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} 3 \int_1^e \ln x dx + \int_1^e \frac{1}{x} dx &= 3 \times 1 + \left[ \ln |x| \right]_1^e \\ &= 3 + 1 = 4 \end{aligned}$$

답 ④

5  $\int_1^3 \frac{2}{x^2 + 4x + 3} dx = \int_1^3 \frac{2}{(x+1)(x+3)} dx$   
 $= \int_1^3 \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) dx$   
 $= \left[ \ln |x+1| - \ln |x+3| \right]_1^3$   
 $= \left[ \ln \left| \frac{x+1}{x+3} \right| \right]_1^3$   
 $= \ln \frac{2}{3} - \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{4}{3}$

따라서  $p=3$ ,  $q=4$ 이므로

$$p+q = 3+4 = 7$$

답 7

6  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 이므로

$$f'(x) = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \\ = \sec^2 x + \csc^2 x$$

즉,

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (\sec^2 x + \csc^2 x) dx \\ = \tan x - \cot x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$$\text{이때 } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = C \text{이므로 } C = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \tan x - \cot x + \frac{\sqrt{3}}{3} \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

답 ③

**다른 풀이**

$$f'(x) = \csc^2 x \sec^2 x \text{이므로}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \csc^2 x \sec^2 x dx$$

$$u(x) = \csc^2 x, v'(x) = \sec^2 x \text{로 놓으면}$$

$$u'(x) = 2 \csc x (-\csc x \cot x), v(x) = \tan x \text{이므로}$$

$$f(x) = \tan x \csc^2 x + 2 \int \csc^2 x dx$$

$$= \tan x \csc^2 x - 2 \cot x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$$\text{이때 } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 - 2 + C = C \text{이므로}$$

$$C = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \tan x \csc^2 x - 2 \cot x + \frac{\sqrt{3}}{3} \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

7  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x+2) \cos 2x dx$ 에서

$$u(x) = x+2, v'(x) = \cos 2x \text{로 놓으면}$$

$$u'(x) = 1, v(x) = \frac{1}{2} \sin 2x \text{이므로}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x+2) \cos 2x dx$$

$$= \left[ \frac{1}{2} (x+2) \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x dx$$

$$= \left[ \frac{1}{2} (x+2) \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left[ \frac{1}{4} \cos 2x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= 0 + \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}$$

답 ②

8  $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 4x dx = \int_0^{\frac{\pi}{8}} (\sin 4x \times \sin 4x) dx$ 에서

$$u(x) = \sin 4x, v'(x) = \sin 4x \text{로 놓으면}$$

$$u'(x) = 4 \cos 4x, v(x) = \boxed{-\frac{1}{4} \cos 4x} \text{이므로}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 4x dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{4} \sin 4x \cos 4x \right]_0^{\frac{\pi}{8}} + \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos^2 4x dx$$

$$= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos^2 4x dx$$

$$\text{에서 } \int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 4x dx = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos^2 4x dx$$

따라서

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 4x dx = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 4x dx + \int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 4x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 4x dx + \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos^2 4x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{8}} (\sin^2 4x + \cos^2 4x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{8}} dx$$

$$= \left[ x \right]_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{\pi}{8}$$

$$\text{이므로 } \int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 4x dx = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{8} = \boxed{\frac{\pi}{16}}$$

$$\text{즉, } f(x) = -\frac{1}{4} \cos 4x, p = \frac{\pi}{16} \text{이므로}$$

$$f(p) = f\left(\frac{\pi}{16}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{8}$$

답 ①

### Level 2 기본 연습

본문 84~85쪽

1 ③	2 32	3 ①	4 256	5 ②
6 12	7 ⑤	8 ③		

1  $f'(x) = \sin^3 x$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \sin^3 x dx$$

$$= \int (\sin^2 x \times \sin x) dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx$$



이때  $\cos x = t$ 로 놓으면  $-\sin x = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\int (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \int (t^2 - 1) dt \\ = \frac{1}{3}t^3 - t + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$$\text{즉, } f(x) = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$$

곡선  $y=f(x)$ 가 원점을 지나므로

$$f(0) = \frac{1}{3} - 1 + C = 0 \text{에서 } C = \frac{2}{3}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + \frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$k = f(\pi) = \frac{1}{3} \times (-1)^3 - (-1) + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

답 ③

$$2 \quad \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx$$

이때  $\int_{-2}^0 f(x) dx$ 에서  $x = -t$ 로 놓으면

$x = -2$ 일 때  $t = 2$ ,  $x = 0$ 일 때  $t = 0$ 이고,

$$1 = -\frac{dt}{dx} \text{이므로}$$

$$\int_{-2}^0 f(x) dx = -\int_2^0 f(-t) dt = \int_0^2 f(-t) dt$$

따라서

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = \int_0^2 f(-x) dx + \int_0^2 f(x) dx$$

$$= \int_0^2 \{f(-x) + f(x)\} dx$$

$$= \int_0^2 \cos \frac{\pi x}{8} dx$$

$$= \left[ \frac{8}{\pi} \sin \frac{\pi x}{8} \right]_0^2$$

$$= \frac{8}{\pi} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}$$

$$\text{즉, } k = 4\sqrt{2} \text{이므로 } k^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32$$

답 32

$$3 \quad \frac{d}{dx} \{xf(x)\} = xf'(x) + f(x) \text{이므로}$$

$$xf(x) = \int 4x^3 \ln x dx$$

$$\int 4x^3 \ln x dx \text{에서}$$

$$u(x) = \ln x, v'(x) = 4x^3 \text{으로 놓으면}$$

$$u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = x^4 \text{이므로}$$

$$\int 4x^3 \ln x dx = x^4 \ln x - \int x^3 dx \\ = x^4 \ln x - \frac{1}{4}x^4 + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$$\text{즉, } xf(x) = x^4 \ln x - \frac{1}{4}x^4 + C$$

이 식에  $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = -\frac{1}{4} + C = -\frac{1}{4} \text{이므로 } C=0$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 \ln x - \frac{1}{4}x^3 \text{이므로}$$

$$f(e) = e^3 - \frac{1}{4}e^3 = \frac{3}{4}e^3$$

답 ①

4  $\tan g(t)$ 는 점 P에서의 접선의 기울기이므로

$$f'(x) = 2^x \ln 2 \text{에서 } \tan g(t) = 2^t \ln 2$$

$$\text{즉, } \int_0^2 t \tan g(t) dt = \ln 2 \int_0^2 t 2^t dt$$

이때  $\int_0^2 t 2^t dt$ 에서  $u(t) = t$ ,  $v'(t) = 2^t$ 으로 놓으면

$$u'(t) = 1, v(t) = \frac{2^t}{\ln 2} \text{이므로}$$

$$\int_0^2 t 2^t dt = \left[ \frac{t 2^t}{\ln 2} \right]_0^2 - \frac{1}{\ln 2} \int_0^2 2^t dt$$

$$= \left[ \frac{t 2^t}{\ln 2} \right]_0^2 - \frac{1}{\ln 2} \left[ \frac{2^t}{\ln 2} \right]_0^2$$

$$= \frac{8}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \times \frac{3}{\ln 2}$$

$$= \frac{8 \ln 2 - 3}{(\ln 2)^2}$$

따라서

$$\int_0^2 t \tan g(t) dt = \ln 2 \times \frac{8 \ln 2 - 3}{(\ln 2)^2}$$

$$= \frac{8 \ln 2 - 3}{\ln 2} = \frac{\ln 256 - 3}{\ln 2}$$

이므로  $k = 256$

답 256

$$5 \quad f'(x) = -a \sin \left( bx + \frac{\pi}{3} \right) \times b$$

$$= -ab \sin \left( bx + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$f''(x) = -ab \cos \left( bx + \frac{\pi}{3} \right) \times b$$

$$= -ab^2 \cos \left( bx + \frac{\pi}{3} \right)$$

이때  $f(0) = \frac{a}{2}$  이므로  $f(0) = 1$ 에서  $a = 2$

$f''(0) = -\frac{ab^2}{2}$ ,  $b > 0$  이므로  $f''(0) = -4$ 에서  $b = 2$

즉,  $f(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

따라서  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) dx$ 에서

$2x + \frac{\pi}{3} = t$ 로 놓으면

$x = 0$ 일 때  $t = \frac{\pi}{3}$ ,  $x = \frac{\pi}{3}$ 일 때  $t = \pi$ 이고,

$2 = \frac{dt}{dx}$  이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx &= 2 \times \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \cos t dt \\ &= \left[ \sin t \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned} 6 \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^4 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 x \times \sec^2 x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \tan^2 x) \sec^2 x dx \end{aligned}$$

이때  $\tan x = t$ 로 놓으면

$x = 0$ 일 때  $t = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{3}$ 일 때  $t = \sqrt{3}$ 이고,

$\sec^2 x = \frac{dt}{dx}$  이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 x} dx &= \int_0^{\sqrt{3}} (1 + t^2) dt \\ &= \left[ t + \frac{1}{3} t^3 \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

따라서  $k = 2\sqrt{3}$  이므로  $k^2 = 12$

답 12

$$\begin{aligned} 7 \quad \int_0^{\pi} f''(x) \sin 2x dx &\text{에서} \\ u(x) &= \sin 2x, v'(x) = f''(x) \text{로 놓으면} \\ u'(x) &= 2 \cos 2x, v(x) = f'(x) \text{이므로} \\ \int_0^{\pi} f''(x) \sin 2x dx &= \left[ f'(x) \sin 2x \right]_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} f'(x) \cos 2x dx \\ &= -2 \int_0^{\pi} f'(x) \cos 2x dx \end{aligned}$$

또  $\int_0^{\pi} f'(x) \cos 2x dx$ 에서

$u_1(x) = \cos 2x$ ,  $v_1'(x) = f'(x)$ 로 놓으면

$u_1'(x) = -2 \sin 2x$ ,  $v_1(x) = f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f'(x) \cos 2x dx &= \left[ f(x) \cos 2x \right]_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} f(x) \sin 2x dx \\ &= f(\pi) - f(0) + 2 \int_0^{\pi} f(x) \sin 2x dx \\ &= f(\pi) - 1 + 2 \int_0^{\pi} f(x) \sin 2x dx \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f''(x) \sin 2x dx &= -2f(\pi) + 2 - 4 \int_0^{\pi} f(x) \sin 2x dx \end{aligned}$$

이므로

$$\int_0^{\pi} \{f''(x) + 4f(x)\} \sin 2x dx = -2f(\pi) + 2$$

즉,  $-2f(\pi) + 2 = -2\pi^2$  이므로

$$f(\pi) = \pi^2 + 1$$

답 ⑤

$$8 \quad f(x) + e^x \int_{\pi}^x f(t) e^{-t} dt = \cos 2x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①에  $x = \pi$ 를 대입하면  $f(\pi) = 1$

또 ①의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f'(x) + e^x \int_{\pi}^x f(t) e^{-t} dt + e^x f(x) e^{-x} = -2 \sin 2x$$

$$f'(x) + e^x \int_{\pi}^x f(t) e^{-t} dt + f(x) = -2 \sin 2x$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } e^x \int_{\pi}^x f(t) e^{-t} dt + f(x) = \cos 2x \text{이므로}$$

위의 식에 대입하면

$$f'(x) + \cos 2x = -2 \sin 2x$$

즉,  $f'(x) = -\cos 2x - 2 \sin 2x$ 이므로

$$f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + \cos 2x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$x = \pi$ 를 대입하면  $f(\pi) = 1 + C$ 이므로

$$1 + C = 1 \text{에서 } C = 0$$

따라서  $f(x) = -\frac{1}{2} \sin 2x + \cos 2x$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

답 ③



## Level 3 실력 완성

본문 86쪽

1 ①      2 ②      3 16

1 ㄱ.  $f(x)$ 

$$\begin{aligned}
 &= \cos x - 2 \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt \\
 &= \cos x - 2 \int_0^x f(t) (\sin x \cos t - \cos x \sin t) dt \\
 &= \cos x - 2 \sin x \int_0^x f(t) \cos t dt \\
 &\quad + 2 \cos x \int_0^x f(t) \sin t dt
 \end{aligned}$$

이므로  $f(0)=1$  (참)

$$\begin{aligned}
 \text{ㄴ. } f(x) &= \cos x - 2 \sin x \int_0^x f(t) \cos t dt \\
 &\quad + 2 \cos x \int_0^x f(t) \sin t dt
 \end{aligned}$$

의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -\sin x - 2 \cos x \int_0^x f(t) \cos t dt \\
 &\quad - 2 \sin x \times f(x) \cos x \\
 &\quad - 2 \sin x \int_0^x f(t) \sin t dt + 2 \cos x \times f(x) \sin x
 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -\sin x - 2 \cos x \int_0^x f(t) \cos t dt \\
 &\quad - 2 \sin x \int_0^x f(t) \sin t dt \quad \dots\dots \textcircled{㉑}
 \end{aligned}$$

㉑에  $x=\frac{\pi}{2}$ 를 대입하면

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin t dt \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

또 ㉑에  $x=-\frac{\pi}{2}$ 를 대입하면

$$\begin{aligned}
 f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= 1 + 2 \int_0^{-\frac{\pi}{2}} f(t) \sin t dt \\
 &= 1 - 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(t) \sin t dt \quad \dots\dots \textcircled{㉓}
 \end{aligned}$$

㉒+㉓에서

$$\begin{aligned}
 f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin t dt - 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(t) \sin t dt \\
 &= -2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin t dt
 \end{aligned}$$

이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin t dt = -\frac{f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} \quad (\text{거짓})$$

$$\begin{aligned}
 \text{ㄷ. } f'(x) &= -\sin x - 2 \cos x \int_0^x f(t) \cos t dt \\
 &\quad - 2 \sin x \int_0^x f(t) \sin t dt
 \end{aligned}$$

의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= -\cos x + 2 \sin x \int_0^x f(t) \cos t dt \\
 &\quad - 2 \cos x \times f(x) \cos x - 2 \cos x \int_0^x f(t) \sin t dt \\
 &\quad - 2 \sin x \times f(x) \sin x \\
 &= -\cos x + 2 \sin x \int_0^x f(t) \cos t dt \\
 &\quad - 2 \cos x \int_0^x f(t) \sin t dt \\
 &\quad - 2f(x)(\cos^2 x + \sin^2 x) \\
 &= -\cos x + 2 \sin x \int_0^x f(t) \cos t dt \\
 &\quad - 2 \cos x \int_0^x f(t) \sin t dt - 2f(x)
 \end{aligned}$$

ㄱ에서  $f(0)=1$ 이므로

$$f''(0) = -1 - 2f(0) = -1 - 2 = -3 \quad (\text{거짓})$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

2  $f(x)>0, g(x)>0$ 이므로조건 (나)의 식의 양변에  $\frac{1}{f(x)g(x)}$ 을 곱하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)} = 1$$

이 식의 양변을 적분하면

$$\ln|f(x)| - \ln|g(x)| = x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$$\ln\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = x + C$$

이 식에  $x=1$ 을 대입하면  $\frac{f(1)}{g(1)}=1$ 이므로

$$0 = 1 + C \text{에서 } C = -1$$

$$\text{즉, } \ln\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = x - 1$$

$$f(x)>0, g(x)>0 \text{이므로 } \frac{f(x)}{g(x)} = e^{x-1}$$

$$\text{따라서 } \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{e^{x-1}} \text{이므로}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{g(k)}{f(k)}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \cdots + \frac{1}{e^{n-1}} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{e} \left[ 1 - \left( \frac{1}{e} \right)^{n-1} \right]}{1 - \frac{1}{e}} \\
&= \frac{\frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}
\end{aligned}$$

답 ②

다른 풀이

$g(x) > 0$ 이므로 조건 (나)의 식의 양변에  $\frac{1}{\{g(x)\}^2}$  을 곱하면

$$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\text{즉, } \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \text{이고 } \frac{\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}'}{\frac{f(x)}{g(x)}} = 1 \text{이므로}$$

이 식의 양변을 적분하면

$$\ln \frac{f(x)}{g(x)} = x + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

$$\frac{f(1)}{g(1)} = 1 \text{이므로 } C = -1$$

$$\ln \frac{f(x)}{g(x)} = x - 1 \text{에서}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = e^{x-1}$$

3  $\{f(x)\}^2 - xf(x)f'(x) = x^4 e^{-x}$ 에서

$x > 0, f(x) > 0$ 이므로 양변에  $\frac{1}{f(x)}$  을 곱하면

$$f(x) - xf'(x) = \frac{x^4 e^{-x}}{f(x)}$$

$$\frac{f(x) - xf'(x)}{x^2} = \frac{x^2 e^{-x}}{f(x)}$$

$$\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = -\frac{x^2 e^{-x}}{f(x)}$$

$$\text{그런데 } \frac{d}{dx} \left\{ \frac{f(x)}{x} \right\} = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \text{이므로}$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{f(x)}{x} \right\} = -\frac{x^2 e^{-x}}{f(x)} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

한편,  $\int_1^2 \frac{e^{2x} \{f(2x)\}^3}{x^3} dx$ 에서  $2x=t$ 로 놓으면

$x=1$ 일 때  $t=2$ ,  $x=2$ 일 때  $t=4$ 이고,

$$2 = \frac{dt}{dx} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{e^{2x} \{f(2x)\}^3}{x^3} dx &= \int_2^4 \frac{8e^t \{f(t)\}^3}{2t^3} dt \\
&= 4 \int_2^4 e^t \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\}^3 dt
\end{aligned}$$

이때  $\int_2^4 e^t \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\}^3 dt$ 에서

$$u(t) = \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\}^3, v'(t) = e^t \text{으로 놓으면 ㉠에서}$$

$$\begin{aligned}
u'(t) &= 3 \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\}^2 \times \left\{ -\frac{t^2 e^{-t}}{f(t)} \right\} \\
&= -3f(t)e^{-t}
\end{aligned}$$

이고,  $v(t) = e^t$ 이므로

$$\begin{aligned}
&\int_2^4 e^t \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\}^3 dt \\
&= \left[ \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\}^3 e^t \right]_2^4 + 3 \int_2^4 f(t) dt \\
&= \frac{\{f(4)\}^3 e^4}{64} - \frac{\{f(2)\}^3 e^2}{8} + 3 \int_2^4 f(t) dt
\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 \frac{e^{2x} \{f(2x)\}^3}{x^3} dx \\
&= 4 \int_2^4 e^t \left\{ \frac{f(t)}{t} \right\}^3 dt \\
&= \frac{e^4}{16} \times \{f(4)\}^3 - \frac{e^2}{2} \times \{f(2)\}^3 + 12 \int_2^4 f(t) dt
\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 \frac{e^{2x} \{f(2x)\}^3}{x^3} dx - 12 \int_2^4 f(x) dx \\
&= \frac{e^4}{16} \times \{f(4)\}^3 - \frac{e^2}{2} \times \{f(2)\}^3
\end{aligned}$$

$$\text{즉, } m = 16$$

답 16



## 07 정적분의 활용

유제

본문 89~97쪽

1 ②	2 9	3 ④	4 9	5 ②
6 23	7 ②	8 12		

$$\begin{aligned}
 1 \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\ln 2 + \frac{\ln 2 \times k}{n}\right) \frac{\ln 2}{n} \\
 &= \int_{\ln 2}^{2 \ln 2} f(x) dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} f(x) dx \\
 &= \int_{\ln 2}^{\ln 4} e^x dx \\
 &= \left[ e^x \right]_{\ln 2}^{\ln 4} \\
 &= 4 - 2 = 2
 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}
 2 \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2n+4k}{n^2+kn+k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n \times \left(2 + \frac{4k}{n}\right)}{n^2 \times \left\{1 + \frac{k}{n} + \left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2 + \frac{4k}{n}}{1 + \frac{k}{n} + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \\
 &= \int_0^1 \frac{2+4x}{1+x+x^2} dx \\
 &= 2 \int_0^1 \frac{1+2x}{1+x+x^2} dx \\
 &= 2 \int_0^1 \frac{(1+x+x^2)'}{1+x+x^2} dx \\
 &= 2 \left[ \ln |1+x+x^2| \right]_0^1 \\
 &= 2 \ln 3 = \ln 9
 \end{aligned}$$

따라서  $m=9$ 

답 9

$$\begin{aligned}
 3 \quad & S_1 = \int_k^0 \frac{1}{x+2} dx = \int_k^0 \frac{(x+2)'}{x+2} dx \\
 &= \left[ \ln |x+2| \right]_k^0 = \ln 2 - \ln(k+2) \\
 &= \ln \frac{2}{k+2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \int_0^2 \frac{1}{x+2} dx = \int_0^2 \frac{(x+2)'}{x+2} dx \\
 &= \left[ \ln |x+2| \right]_0^2 = \ln 4 - \ln 2 \\
 &= \ln 2
 \end{aligned}$$

이때  $S_1 : S_2 = 2 : 1$ 에서  $S_1 = 2S_2$ 

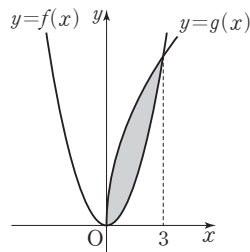
$$\text{즉, } \ln \frac{2}{k+2} = 2 \ln 2$$

$$\text{따라서 } \frac{2}{k+2} = 4 \text{에서}$$

$$k = -\frac{3}{2}$$

답 ④

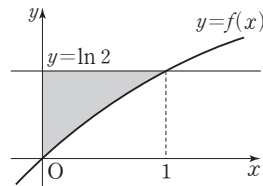
- 4  $x^2 = 3\sqrt{3x}$ 에서  $x^4 - 27x = 0$   
 $x(x^3 - 27) = x(x-3)(x^2+3x+9) = 0$   
 $x=0$  또는  $x=3$   
 즉, 두 곡선  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 가 만나는 점의  $x$ 좌표는  
 $x=0$  또는  $x=3$ 이고, 두 곡선  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 는 그림  
 과 같다.

따라서 구하는 넓이를  $S$ 라 하면

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^3 (3\sqrt{3x} - x^2) dx = \left[ 2\sqrt{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 \\
 &= 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} - 9 = 9
 \end{aligned}$$

답 9

- 5 곡선  $y=f(x)$ 는 곡선  $y=\ln x$ 를  $x$ 축의 방향으로  $-1$ 만큼  
 평행이동시킨 곡선이므로 곡선  $y=f(x)$ 는 그림과 같다.



곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=\ln 2$ 가 만나는 점의  $x$ 좌표가 1이  
 므로 구하는 넓이를  $S$ 라 하면



$$S = 1 \times \ln 2 - \int_0^1 \ln(x+1) dx$$

$$= \ln 2 - \int_1^2 \ln x dx$$

이때  $\int_1^2 \ln x dx$ 에서

$$u(x) = \ln x, v'(x) = 1 \text{로 놓으면}$$

$$u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = x \text{이므로}$$

$$\int_1^2 \ln x dx = \left[ x \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 dx = \left[ x \ln x \right]_1^2 - \left[ x \right]_1^2 \\ = 2 \ln 2 - 1$$

따라서

$$S = \ln 2 - (2 \ln 2 - 1) = 1 - \ln 2 = \ln \frac{e}{2}$$

$$\text{이므로 } k = \frac{e}{2}$$

답 ②

### 다른 풀이

함수  $f(x)$ 의 역함수를  $g(x)$ 라 하면

$$y = \ln(x+1) \text{에서 } x = \ln(y+1)$$

$$y+1 = e^x \text{이므로 } g(x) = e^x - 1$$

따라서 구하는 넓이를  $S$ 라 하면

$$S = \int_0^{\ln 2} (e^x - 1) dx = \left[ e^x - x \right]_0^{\ln 2}$$

$$= 2 - \ln 2 - 1 = 1 - \ln 2 = \ln \frac{e}{2}$$

$$\text{이므로 } k = \frac{e}{2}$$

- 6  $1 \leq t \leq 4$ 인 실수  $t$ 에 대하여 직선  $x=t$ 를 포함하고  $x$ 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를  $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{t})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} t$$

구하는 입체도형의 부피를  $V$ 라 하면

$$V = \int_1^4 S(t) dt = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_1^4 t dt$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ \frac{1}{2} t^2 \right]_1^4 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left( 8 - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{15}{2} = \frac{15}{8} \sqrt{3}$$

따라서  $p=8, q=15$ 이므로

$$p+q=8+15=23$$

답 23

7  $f'(x) = \frac{2e^{2x} - 2e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$ 이므로

$$1 + \{f'(x)\}^2 = 1 + \left( \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \right)^2 = 1 + \frac{e^{4x} - 2 + e^{-4x}}{4}$$

$$= \frac{e^{4x} + 2 + e^{-4x}}{4}$$

$$= \left( \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \right)^2$$

$$\text{즉, } \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$$

따라서  $0 \leq x \leq \ln 2$ 에서 곡선  $y=f(x)$ 의 길이를  $l$ 이라 하면

$$l = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx = \int_0^{\ln 2} \left( \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} e^{-2x} \right) dx$$

$$= \left[ \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right]_0^{\ln 2} = \left( \frac{1}{4} \times 4 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \right) - \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{15}{16}$$

답 ②

8  $x=4e^t$ 에서  $\frac{dx}{dt}=4e^t, y=2t-e^{2t}$ 에서  $\frac{dy}{dt}=2-2e^{2t}$ 이므로

$$\sqrt{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2} = \sqrt{(4e^t)^2 + (2-2e^{2t})^2}$$

$$= \sqrt{4(e^{2t}+1)^2} = 2(e^{2t}+1)$$

따라서  $t=\ln 2$ 에서  $t=\ln 4$ 까지 점 P가 움직인 거리를  $s$ 라 하면

$$s = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \sqrt{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2} dt = 2 \int_{\ln 2}^{\ln 4} (e^{2t}+1) dt$$

$$= 2 \left[ \frac{1}{2} e^{2t} + t \right]_{\ln 2}^{\ln 4} = 2 \times \{ (8+2 \ln 2) - (2+\ln 2) \}$$

$$= 12 + 2 \ln 2$$

$$\text{즉, } m=12$$

답 12

### Level 1 기초 연습

본문 98~99쪽

1 ③	2 ②	3 ①	4 4	5 ②
6 ②	7 9	8 ②	9 ③	10 ②

1  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{1}{n^3}} + \sqrt{\frac{2}{n^3}} + \sqrt{\frac{3}{n^3}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n^3}} \right)$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}} \right)$



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \\
 &= \int_0^1 \sqrt{x} dx \\
 &= \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

답 ③

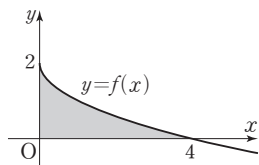
2  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+6} + \dots + \frac{1}{n+2n} \right)$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \frac{1}{1+\frac{4}{n}} + \frac{1}{1+\frac{6}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{2n}{n}} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{2k}{n}} \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{1+2x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2}{1+2x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1+2x)'}{1+2x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \ln |1+2x| \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} \ln 3 = \ln \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

따라서  $p = \sqrt{3}$

답 ②

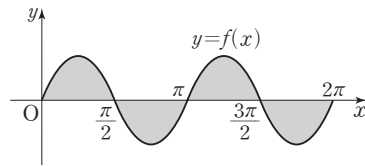
- 3 곡선  $y=f(x)$ 가 두 점  $(0, 2)$ ,  $(4, 0)$ 을 지나므로 곡선  $y=f(x)$ 는 그림과 같다. 따라서 구하는 넓이를  $S$ 라 하면



$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^4 (2 - \sqrt{x}) dx \\
 &= \left[ 2x - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 \\
 &= 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

답 ①

- 4 함수  $f(x)$ 의 주기가  $\pi$ 이므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이를  $S$ 라 하면

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4}S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \left[ -\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } S = 4 \times 1 = 4$$

답 4

- 5 곡선  $y=f(x)$ 와 두 직선  $y=1$ ,  $y=4$ 가 제1사분면에서 만나는 점의  $x$ 좌표가 각각  $x=1$ ,  $x=\frac{1}{2}$ 이므로

$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ 에서 곡선  $y=f(x)$ 와 두 직선  $y=1$ ,  $x=\frac{1}{2}$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \frac{1}{x^2} - 1 \right) dx &= \left[ -\frac{1}{x} - x \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
 &= -2 - \left( -\frac{5}{2} \right) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$y$ 축과 직선  $x=\frac{1}{2}$  및 두 직선  $y=1$ ,  $y=4$ 로 둘러싸인

직사각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

따라서 구하는 넓이를  $S$ 라 하면

$$S = 2 \times \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) = 4$$

답 ②

#### 다른 풀이

제1사분면의 곡선  $y=\frac{1}{x^2}$ 에서  $x=\frac{1}{\sqrt{y}}$ 이므로 제1사분면의

곡선  $x=\frac{1}{\sqrt{y}}$ 과  $y$ 축 및 두 직선  $y=1$ ,  $y=4$ 로 둘러싸인

부분의 넓이는

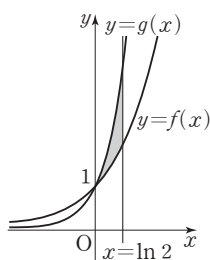
$$\begin{aligned}
 \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{y}} dy &= \int_1^4 y^{-\frac{1}{2}} dy \\
 &= \left[ 2y^{\frac{1}{2}} \right]_1^4 \\
 &= 4 - 2 = 2
 \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이를  $S$ 라 하면

$$S = 2 \times 2 = 4$$

- 6 두 곡선  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 와 직선  $x=\ln 2$ 는 그림과 같다. 따라서 구하는 넓이를  $S$ 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\ln 2} (e^{2x} - e^x) dx \\ &= \left[ \frac{1}{2} e^{2x} - e^x \right]_0^{\ln 2} \\ &= \left( \frac{1}{2} \times 4 - 2 \right) - \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$



답 ②

- 7  $f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ 이므로 점  $(1, \sqrt{e})$ 에서의 접선의 기울기는

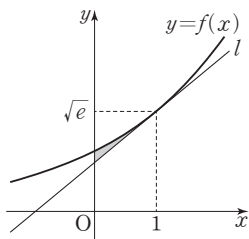
$$f'(1) = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

즉, 직선  $l$ 의 방정식은

$$y - \sqrt{e} = \frac{\sqrt{e}}{2}(x - 1)$$

$$y = \frac{\sqrt{e}}{2}x + \frac{\sqrt{e}}{2}$$

곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $l$ 은 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이를  $S$ 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \left\{ e^{\frac{x}{2}} - \left( \frac{\sqrt{e}}{2}x + \frac{\sqrt{e}}{2} \right) \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left( e^{\frac{x}{2}} - \frac{\sqrt{e}}{2}x - \frac{\sqrt{e}}{2} \right) dx \\ &= \left[ 2e^{\frac{x}{2}} - \frac{\sqrt{e}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{e}}{2}x \right]_0^1 \\ &= \left( 2\sqrt{e} - \frac{\sqrt{e}}{4} - \frac{\sqrt{e}}{2} \right) - 2 \\ &= \frac{5}{4}\sqrt{e} - 2 \end{aligned}$$

즉,  $p=4$ ,  $q=5$ 이므로

$$\begin{aligned} p+q &= 4+5 \\ &= 9 \end{aligned}$$

답 9

- 8  $0 \leq t \leq 2$ 인 실수  $t$ 에 대하여 직선  $x=t$ 를 포함하고  $x$ 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를  $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{t^2 \sqrt{t}}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{8} t^5$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를  $V$ 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 S(t) dt = \frac{\pi}{8} \int_0^2 t^5 dt \\ &= \frac{\pi}{8} \left[ \frac{1}{6} t^6 \right]_0^2 = \frac{\pi}{8} \times \frac{32}{3} \\ &= \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

답 ②

- 9  $x = e^t \sin t$ 에서

$$\frac{dx}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\sin t + \cos t),$$

$y = e^t \cos t$ 에서

$$\frac{dy}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} &\sqrt{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2} \\ &= \sqrt{e^{2t} (\sin t + \cos t)^2 + e^{2t} (\cos t - \sin t)^2} \\ &= \sqrt{e^{2t} (1 + 2 \sin t \cos t) + e^{2t} (1 - 2 \sin t \cos t)} \\ &= \sqrt{2e^{2t}} = \sqrt{2} e^t \end{aligned}$$

따라서 점  $P$ 가  $t=\ln 2$ 에서  $t=\ln 3$ 까지 움직인 거리를  $s$ 라 하면

$$\begin{aligned} s &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \sqrt{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2} dt \\ &= \sqrt{2} \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^t dt = \sqrt{2} \left[ e^t \right]_{\ln 2}^{\ln 3} \\ &= \sqrt{2} \times (3 - 2) = \sqrt{2} \end{aligned}$$

답 ③

- 10  $f(x) = \frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}$ 에서  $f'(x) = (x+2)^{\frac{1}{2}}$ 이므로

$6 \leq x \leq 13$ 에서 곡선  $y=f(x)$ 의 길이를  $l$ 이라 하면

$$\begin{aligned} l &= \int_6^{13} \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx = \int_6^{13} \sqrt{1 + (x+2)} dx \\ &= \int_6^{13} \sqrt{x+3} dx = \left[ \frac{2}{3} (x+3)^{\frac{3}{2}} \right]_6^{13} \\ &= \frac{2}{3} \times (16^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}) \\ &= \frac{2}{3} \times 37 = \frac{74}{3} \end{aligned}$$

답 ②



## Level 2 기본 연습

본문 100~101쪽

1 ②	2 ③	3 21	4 ④	5 105
6 ①	7 16	8 ⑤		

$$\begin{aligned}
 1 \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (e^{1+\frac{1}{n}} + 2e^{1+\frac{2}{n}} + 3e^{1+\frac{3}{n}} + \cdots + ne^{1+\frac{n}{n}}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} e^{1+\frac{1}{n}} + \frac{2}{n} e^{1+\frac{2}{n}} + \frac{3}{n} e^{1+\frac{3}{n}} + \cdots + \frac{n}{n} e^{1+\frac{n}{n}} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} e^{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 x e^{1+x} dx \\
 &= e \int_0^1 x e^x dx \\
 &\text{이때 } \int_0^1 x e^x dx \text{에서 } u(x)=x, v'(x)=e^x \text{으로 놓으면} \\
 &u'(x)=1, v(x)=e^x \text{이므로} \\
 &\int_0^1 x e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [x e^x]_0^1 - [e^x]_0^1 \\
 &= e - (e - 1) = 1
 \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (e^{1+\frac{1}{n}} + 2e^{1+\frac{2}{n}} + 3e^{1+\frac{3}{n}} + \cdots + ne^{1+\frac{n}{n}}) \\
 &= e \int_0^1 x e^x dx = e \times 1 = e
 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned}
 2 \quad & \angle AMP_k = \frac{k\pi}{n} \text{이므로 삼각형 } AMP_k \text{의 넓이는} \\
 & \frac{1}{2} \times \overline{AM} \times \overline{P_k M} \times \sin \frac{k\pi}{n} = 2 \sin \frac{k\pi}{n} \\
 & \text{이때 } \overline{AQ_k} = \frac{3}{4} \overline{AP_k} \text{이므로} \\
 & S(k) = \frac{3}{4} \times 2 \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{3}{2} \sin \frac{k\pi}{n} \\
 & \text{따라서} \\
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n} \\
 &= \frac{3}{2} \int_0^1 \sin \pi x dx \\
 &= \frac{3}{2} \left[ -\frac{1}{\pi} \cos \pi x \right]_0^1 \\
 &= \frac{3}{2} \times \left( \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \right) = \frac{3}{\pi}
 \end{aligned}$$

답 ③

$$3 \quad \int_0^1 x f(2x^2+1) dx \text{에서 } 2x^2+1=t \text{로 놓으면}$$

$x=0$ 일 때  $t=1$ ,  $x=1$ 일 때  $t=3$ 이고,  $4x=\frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\int_0^1 x f(2x^2+1) dx = \frac{1}{4} \int_1^3 f(t) dt$$

이때  $f(x) \geq 0$ 이므로  $\int_1^3 f(t) dt$ 의 값은 함수  $y=f(x)$ 의

그래프와  $x$ 축 및 두 직선  $x=1$ ,  $x=3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

$$\text{즉, } \int_1^3 f(t) dt = \frac{13}{2}$$

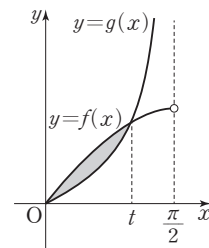
$$\text{따라서 } \int_0^1 x f(2x^2+1) dx = \frac{1}{4} \times \frac{13}{2} = \frac{13}{8}$$

즉,  $p=8$ ,  $q=13$ 이므로

$$p+q=8+13=21$$

답 21

4 두 곡선  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 는 그림과 같다.



두 곡선  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 가 만나는 점 중 원점이 아닌 점의  $x$ 좌표를  $t$ 라 하면

$$3 \sin t = \tan t$$

$$3 \sin t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$\sin t \left( 3 - \frac{1}{\cos t} \right) = 0 \text{에서}$$

$$\cos t = \frac{1}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 두 곡선  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를  $S$ 라 하면

$$S = \int_0^t (3 \sin x - \tan x) dx$$

$$= 3 \int_0^t \sin x dx - \int_0^t \tan x dx$$

$$= 3 \int_0^t \sin x dx + \int_0^t \frac{(-\sin x)}{\cos x} dx$$

$$= 3 \int_0^t \sin x dx + \int_0^t \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx$$

$$= 3 \left[ -\cos x \right]_0^t + \left[ \ln |\cos x| \right]_0^t$$

$$= 3(-\cos t + 1) + \ln |\cos t|$$

㉠에 의하여

$$S = 3 \times \left( -\frac{1}{3} + 1 \right) + \ln \frac{1}{3}$$

$$= 2 + \ln \frac{1}{3}$$

$$= \ln \frac{e^2}{3}$$

답 ④

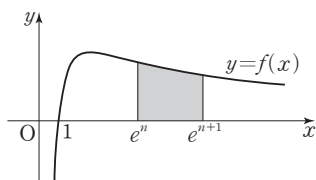
$$\begin{aligned} 5 \quad f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} \\ &= \frac{1 - \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = e$$

$x > 0$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	(0)	...	$e$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	극대	↘

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ 이므로 함수  $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$$\text{이때 } S(n) = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln x}{x} dx$$

$$\int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln x}{x} dx \text{에서 } \ln x = t \text{로 놓으면}$$

$$x = e^n \text{일 때 } t = n, \quad x = e^{n+1} \text{일 때 } t = n+1 \text{이고,}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln x}{x} dx &= \int_n^{n+1} t dt = \left[ \frac{1}{2} t^2 \right]_n^{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^2 - n^2}{2} \end{aligned}$$

$$= n + \frac{1}{2}$$

따라서  $S(n) = n + \frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} S(2k-1) &= \sum_{k=1}^{10} \left( 2k - \frac{1}{2} \right) \\ &= 2 \times \frac{10 \times 11}{2} - 10 \times \frac{1}{2} \\ &= 110 - 5 = 105 \end{aligned}$$

답 105

6  $f(-x) = -f(x)$ 이므로 곡선  $y = f(x)$ 는 원점에 대하여 대칭이다.

또

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-\frac{x^2}{2}} + x e^{-\frac{x^2}{2}} \times (-x) \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}} \times (1 - x^2) \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

$x \geq 0$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	0	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	↗	극대	↘

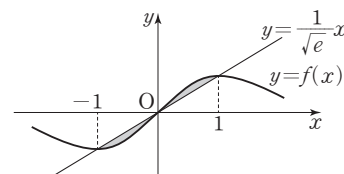
$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{-\frac{x^2}{2}} \times (-x) \times (1 - x^2) + e^{-\frac{x^2}{2}} \times (-2x) \\ &= x(x^2 - 3)e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

에서  $0 < x < 1$ 일 때  $f''(x) < 0$ 이므로 곡선  $y = f(x)$ 는 위로 볼록하다.

$$\text{또 } x e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} x \text{에서 } x(e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}) = 0 \text{이므로}$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

곡선  $y = f(x)$ 와 직선  $y = \frac{1}{\sqrt{e}} x$ 는 그림과 같다.



구하는 넓이를  $S$ 라 하면

$$\frac{1}{2} S = \int_0^1 x e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\text{이때 } \int_0^1 x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \text{에서 } \frac{x^2}{2} = t \text{로 놓으면}$$

$$x = 0 \text{일 때 } t = 0, \quad x = 1 \text{일 때 } t = \frac{1}{2} \text{이고, } x = \frac{dt}{dx} \text{이므로}$$



$$\int_0^1 x e^{-\frac{x}{2}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \left[ -e^{-t} \right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{e}} + 1$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{2}S = \left( -\frac{1}{\sqrt{e}} + 1 \right) - \frac{1}{2\sqrt{e}} = 1 - \frac{3}{2\sqrt{e}} \text{에서}$$

$$S = 2 - \frac{3}{\sqrt{e}} \text{이므로 } p=2$$

답 ①

- 7  $0 \leq t \leq 1$ 인 실수  $t$ 에 대하여 직선  $x=t$ 를 포함하고  $x$ 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를  $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = (e^t - t)^2 = e^{2t} - 2te^t + t^2$$

구하는 입체도형의 부피를  $V$ 라 하면

$$V = \int_0^1 S(t) dt = \int_0^1 (e^{2t} - 2te^t + t^2) dt$$

$$= \int_0^1 (e^{2t} + t^2) dt - 2 \int_0^1 te^t dt$$

이때  $\int_0^1 te^t dt$ 에서  $u(t)=t$ ,  $v'(t)=e^t$ 으로 놓으면

$$u'(t)=1, v(t)=e^t \text{이므로}$$

$$\int_0^1 te^t dt = \left[ te^t \right]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = \left[ te^t \right]_0^1 - \left[ e^t \right]_0^1$$

$$= e - (e - 1) = 1$$

따라서

$$V = \int_0^1 (e^{2t} + t^2) dt - 2$$

$$= \left[ \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{3}t^3 \right]_0^1 - 2$$

$$= \left( \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) - 2$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{13}{6}$$

$$\text{이므로 } p = \frac{1}{2}, q = -\frac{13}{6}$$

$$\text{즉, } 6(p-q) = 6 \times \left\{ \frac{1}{2} - \left( -\frac{13}{6} \right) \right\} = 3 + 13 = 16$$

답 16

8  $x = \frac{1}{2}e^{2t} - kt$ 에서  $\frac{dx}{dt} = e^{2t} - k$ ,

$$y = 2\sqrt{k}e^t \text{에서 } \frac{dy}{dt} = 2\sqrt{k}e^t \text{이므로}$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(e^{2t} - k)^2 + (2\sqrt{k}e^t)^2}$$

$$= \sqrt{(e^{2t} + k)^2}$$

$$= e^{2t} + k$$

따라서  $t=1$ 에서  $t=2$ 까지 점 P가 움직인 거리를  $s$ 라 하면

$$s = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_1^2 (e^{2t} + k) dt$$

$$= \left[ \frac{1}{2}e^{2t} + kt \right]_1^2$$

$$= \left( \frac{1}{2}e^4 + 2k \right) - \left( \frac{1}{2}e^2 + k \right)$$

$$= \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^2 + k$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^2 + k = \frac{1}{2}e^4 \text{에서}$$

$$k = \frac{1}{2}e^2$$

답 ⑤

## Level 3 실력 완성

본문 102쪽

1 ④

2 9

3 5

4 6

$$\begin{aligned} & 1 \quad \frac{\sqrt[n]{(n+1) \times (n+2) \times (n+3) \times \cdots \times (n+n)}}{n} \\ &= \sqrt[n]{\frac{(n+1) \times (n+2) \times (n+3) \times \cdots \times (n+n)}{n^n}} \\ &= \sqrt[n]{\frac{(n+1) \times (n+2) \times (n+3) \times \cdots \times (n+n)}{n \times n \times n \times \cdots \times n}} \\ &= \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \times \left(1 + \frac{2}{n}\right) \times \left(1 + \frac{3}{n}\right) \times \cdots \times \left(1 + \frac{n}{n}\right)} \\ &\text{이므로} \\ &\ln \frac{\sqrt[n]{(n+1) \times (n+2) \times (n+3) \times \cdots \times (n+n)}}{n} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{3}{n}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \ln\left(1 + \frac{n}{n}\right) \right\} \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{\sqrt[n]{(n+1) \times (n+2) \times (n+3) \times \cdots \times (n+n)}}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{3}{n}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \ln\left(1 + \frac{n}{n}\right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+x) dx$$

$$= \int_1^2 \ln x dx$$

$u(x)=\ln x$ ,  $v'(x)=1$ 로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$ ,  $v(x)=x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln x dx &= \left[ x \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 dx \\ &= \left[ x \ln x \right]_1^2 - \left[ x \right]_1^2 \\ &= 2 \ln 2 - 1 = \ln \frac{4}{e}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{\sqrt[n]{(n+1) \times (n+2) \times (n+3) \times \cdots \times (n+n)}}{n} \\ = \ln \frac{4}{e}\end{aligned}$$

답 ④

2  $x \sin x = \frac{1}{2}x$ 에서  $x(\sin x - \frac{1}{2}) = 0$

$$x=0 \text{ 또는 } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x=\frac{5\pi}{6}$$

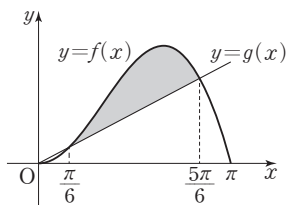
즉,  $0 \leq x \leq \pi$ 에서 곡선  $y=x \sin x$ 와 직선  $y=\frac{1}{2}x$ 가 만나는 점의  $x$ 좌표는

$$x=0 \text{ 또는 } x=\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x=\frac{5\pi}{6}$$

또  $x \sin x \geq \frac{1}{2}x$ 에서  $x(\sin x - \frac{1}{2}) \geq 0$

$$\sin x \geq \frac{1}{2} \text{에서 } \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$$

두 함수  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이를  $S$ 라 하면

$$\begin{aligned}S &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left( x \sin x - \frac{1}{2}x \right) dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} x \sin x dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{1}{2}x dx\end{aligned}$$

이때  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} x \sin x dx$ 에서

$u(x)=x$ ,  $v'(x)=\sin x$ 로 놓으면

$u'(x)=1$ ,  $v(x)=-\cos x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} x \sin x dx &= \left[ -x \cos x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \cos x dx \\ &= \left[ -x \cos x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} + \left[ \sin x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\ &= \left( \frac{5\sqrt{3}\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}\pi}{12} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}\pi}{2}\end{aligned}$$

또  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{1}{2}x dx$ 의 값은 직선  $y=\frac{1}{2}x$ 과  $x$ 축 및 두 직선

$x=\frac{\pi}{6}$ ,  $x=\frac{5\pi}{6}$ 로 둘러싸인 사다리꼴의 넓이와 같으므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{1}{2}x dx = \frac{1}{2} \times \left( \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} \right) \times \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi^2}{6}$$

따라서  $S = \frac{\sqrt{3}\pi}{2} - \frac{\pi^2}{6}$ 이므로  $p = \frac{1}{2}$ ,  $q = -\frac{1}{6}$

$$\text{즉, } \frac{p^2}{q^2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(-\frac{1}{6}\right)^2} = 9$$

답 9

3  $f'(x) = \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{3+x} - \frac{1}{3-x} \right)$   
 $= -\frac{x}{(3+x)(3-x)}$

$f'(x)=0$ 에서  $x=0$

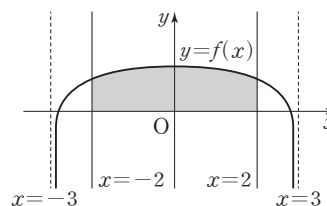
$-3 < x < 3$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

$x$	$(-3)$	$\cdots$	$0$	$\cdots$	$(3)$
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$ 이고,

$f(x)=0$ 에서  $x=-2\sqrt{2}$  또는  $x=2\sqrt{2}$

또  $f(-x)=f(x)$ 이므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.





따라서 구하는 넓이를  $S$ 라 하면

$$\frac{1}{2}S = \int_0^2 \frac{\ln(3+x) + \ln(3-x)}{2} dx$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{\ln(3+x) + \ln(3-x)\} dx \\ &= \int_0^2 \ln(3+x) dx + \int_0^2 \ln(3-x) dx \end{aligned}$$

이때  $\int_0^2 \ln(3+x) dx$ 에서  $3+x=t$ 로 놓으면

$x=0$ 일 때  $t=3$ ,  $x=2$ 일 때  $t=5$ 이고,

$1 = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\int_0^2 \ln(3+x) dx = \int_3^5 \ln t dt$$

또  $\int_0^2 \ln(3-x) dx$ 에서  $3-x=s$ 로 놓으면

$x=0$ 일 때  $s=3$ ,  $x=2$ 일 때  $s=1$ 이고,

$-1 = \frac{ds}{dx}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^2 \ln(3-x) dx &= -\int_3^1 \ln s ds \\ &= \int_1^3 \ln s ds \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} S &= \int_3^5 \ln t dt + \int_1^3 \ln s ds \\ &= \int_3^5 \ln t dt + \int_1^3 \ln t dt \\ &= \int_1^5 \ln t dt \end{aligned}$$

$u(t) = \ln t$ ,  $v'(t) = 1$ 로 놓으면

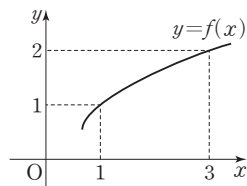
$u'(t) = \frac{1}{t}$ ,  $v(t) = t$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^5 \ln t dt &= \left[ t \ln t \right]_1^5 - \int_1^5 dt \\ &= \left[ t \ln t \right]_1^5 - \left[ t \right]_1^5 \\ &= 5 \ln 5 - 4 \end{aligned}$$

이므로  $m=5$

5

- 4 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 좌표평면의 두 점  $(1, 1)$ ,  $(3, 2)$ 를 지나고,  $f'(x) > 0$ 이므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



(i)  $\int_1^9 f'(\sqrt{x}) dx$ 에서  $\sqrt{x}=t$ 로 놓으면

$x=1$ 일 때  $t=1$ ,  $x=9$ 일 때  $t=3$ 이고,

$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{dt}{dx}$ ,  $\frac{1}{2t} = \frac{dt}{dx}$ 이므로

$$\int_1^9 f'(\sqrt{x}) dx = \int_1^3 2tf'(t) dt$$

이때  $\int_1^3 2tf'(t) dt$ 에서

$u(t) = 2t$ ,  $v'(t) = f'(t)$ 로 놓으면

$u'(t) = 2$ ,  $v(t) = f(t)$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^3 2tf'(t) dt &= \left[ 2tf(t) \right]_1^3 - 2 \int_1^3 f(t) dt \\ &= 6f(3) - 2f(1) - 2 \int_1^3 f(t) dt \end{aligned}$$

조건 (가)에서  $f(1)=1$ ,  $f(3)=2$ 이고,

조건 (나)에서  $\int_1^3 f(x) dx = \frac{7}{2}$ 이므로

$$\int_1^3 2tf'(t) dt = 6 \times 2 - 2 \times 1 - 2 \times \frac{7}{2} = 3$$

즉,  $\int_1^9 f'(\sqrt{x}) dx = 3$

(ii)  $\int_1^4 \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ 에서  $\sqrt{x}=s$ 로 놓으면

$x=1$ 일 때  $s=1$ ,  $x=4$ 일 때  $s=2$ 이고,

$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{ds}{dx}$ 이므로

$$\int_1^4 \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 2g(s) ds$$

이때  $\int_1^2 g(s) ds$ 는 함수  $y=f(x)$ 의 그래프와  $y$ 축 및

두 직선  $y=1$ ,  $y=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이이므로

$$\int_1^2 g(s) ds = 3 \times 2 - 1 \times 1 - \frac{7}{2} = \frac{3}{2}$$

즉,  $\int_1^4 \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \times \frac{3}{2} = 3$

(i), (ii)에서

$$\int_1^9 f'(\sqrt{x}) dx + \int_1^4 \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 3 + 3 = 6$$

6