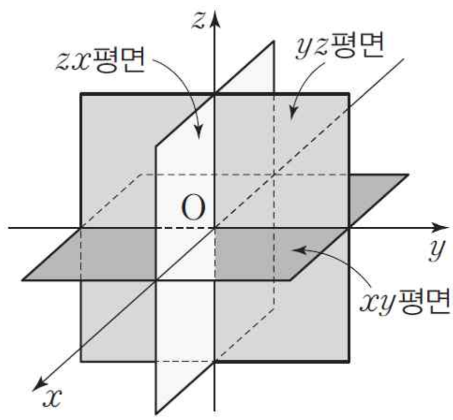
# Ⅲ_2. 공간좌표

[12기하03-04] 좌표공간에서 점의 좌표를 구할 수 있다.
[12기하03-05] 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
[12기하03-06] 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.
[12기하03-07] 구의 방정식을 구할 수 있다.

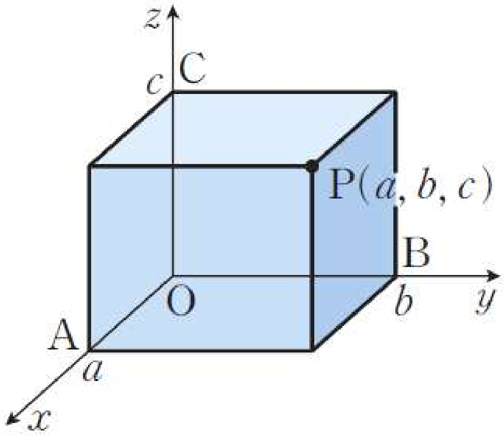
## 1 공간좌표 ❶




(1) 좌표공간

그림과 같이 공간의 한 점 O에서 서로 직교하는 세 수직선을 그어 각각 '$x$축', '$y$축', '$z$축'이라 하고, 점 O를 '원점'이라 한다. 이때 $x$축, $y$축, $z$축을 통틀어 '좌표축'이라 하고, 좌표축으로 정해진 공간을 '좌표공간'이라 한다. 또 $x$축과 $y$축을 포함하는 평면을 '$xy$평면', $y$축과 $z$축을 포함하는 평면을 '$yz$평면', $z$축과 $x$축을 포함하는 평면을 '$zx$평면'이라 하고, 이 세 평면을 통틀어 '좌표평면'이라 한다.

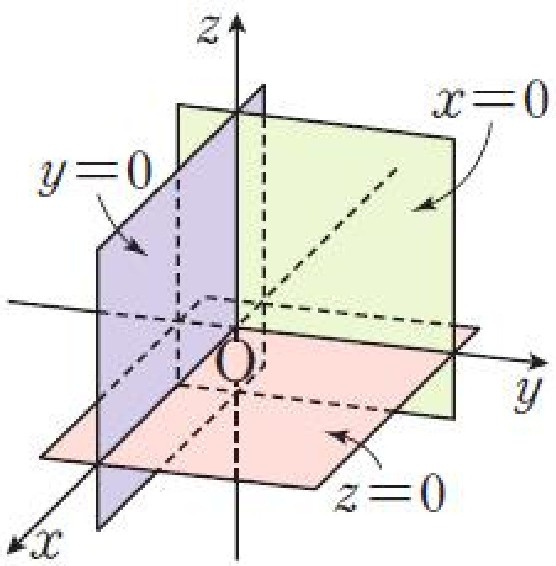
## □1 공간좌표 ❷




(2) 공간좌표 : 그림과 같이 좌표공간의 한 점 P에 대하여 점 P를 지나면서 $x$축, $y$축, $z$축과 수직인 평면이 각각 $x$축, $y$축, $z$축과 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자. 이때 세 점 A, B, C의 $x$축, $y$축, $z$축 위에서 좌표를 각각 $a$, $b$, $c$라 하면 점 P와 세 실수 $a$, $b$, $c$의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는 일대일로 대응된다. 이와 같이 좌표공간의 점 P에 대응하는 세 실수 $a$, $b$, $c$의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$를 '점 P의 공간좌표'라 하고, 기호로 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$와 같이 나타낸다. 이때 $a$, $b$, $c$를 각각 점 P의 '$x$좌표', '$y$좌표', '$z$좌표'라 한다.

## □1 공간좌표 ❸

### ✡ 좌표평면과 좌표축




① $xy$평면 ⇔ $z$좌표가 모두 0

⇔ $z=0$

② $yz$평면 ⇔ $x$좌표가 모두 0

⇔ $x=0$

③ $zx$평면 ⇔ $y$좌표가 모두 0

⇔ $y=0$

④ $x$축 ⇔ $y$좌표와 $z$좌표가 모두 0 ⇔ $y=0,\ z=0$

⑤ $y$축 ⇔ $x$좌표와 $z$좌표가 모두 0 ⇔ $x=0,\ z=0$

⑥ $z$축 ⇔ $x$좌표와 $y$좌표가 모두 0 ⇔ $x=0,\ y=0$

⑦ 원점 ⇔ $x$좌표, $y$좌표, $z$좌표가 모두 0 ⇔ $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$

## 1 공간좌표 ❹

(3) 좌표공간의 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$에서 좌표축 또는 좌표평면에 내린 수선의 발의 좌표

① 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$에서 $x$축, $y$축, $z$축에 내린 수선의 발의 좌표는 각각

$$(a,\ 0,\ 0),\ (0,\ b,\ 0),\ (0,\ 0,\ c)$$

② 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$에서 $xy$평면, $yz$평면, $zx$평면에 내린 수선의 발의 좌표는 각각

$$(a,\ b,\ 0),\ (0,\ b,\ c),\ (a,\ 0,\ c)$$

예 점 $\mathrm{P}(1,\ 2,\ -3)$에서 $x$축에 내린 수선의 발의 좌표는 $(1,\ 0,\ 0)$이고, $yz$평면에 내린 수선의 발의 좌표는 $(0,\ 2,\ -3)$이다.

## 1 공간좌표 ❺

### ✡ 수선의 발

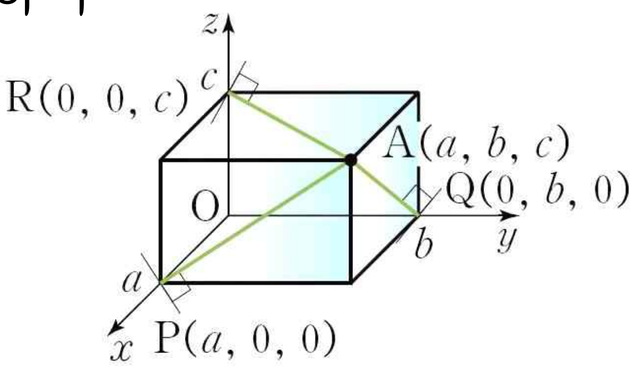
좌표공간의 점 $\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$에 대하여

① 좌표축에 내린 수선의 발

㉠ $x$축 $\Rightarrow$ $\mathrm{P}(a,\ 0,\ 0)$

㉡ $y$축 $\Rightarrow$ $\mathrm{Q}(0,\ b,\ 0)$

㉢ $z$축 $\Rightarrow$ $\mathrm{R}(0,\ 0,\ c)$

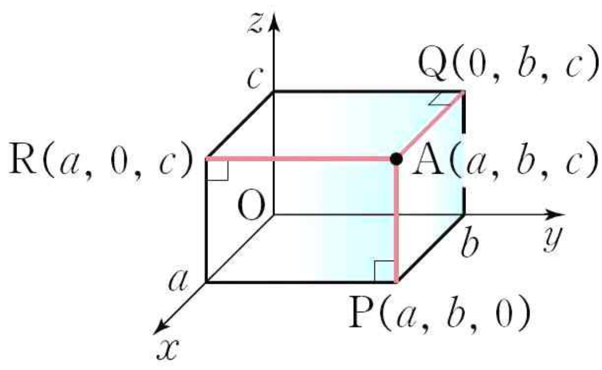



② 좌표평면에 내린 수선의 발

㉠ $xy$평면 $\Rightarrow$ $\mathrm{P}(a,\ b,\ 0)$

㉡ $yz$평면 $\Rightarrow$ $\mathrm{Q}(0,\ b,\ c)$

㉢ $zx$평면 $\Rightarrow$ $\mathrm{R}(a,\ 0,\ c)$



## 1 공간좌표 ❻

(4) 좌표공간의 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$를 좌표축 또는 좌표평면 또는 원점에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표

① 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$를 $x$축, $y$축, $z$축에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 각각

$$(a,\ -b,\ -c),\ (-a,\ b,\ -c),\ (-a,\ -b,\ c)$$

② 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$를 $xy$평면, $yz$평면, $zx$평면에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 각각

$$(a,\ b,\ -c),\ (-a,\ b,\ c),\ (a,\ -b,\ c)$$

③ 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는

$$(-a,\ -b,\ -c)$$

## 1 공간좌표 ❼

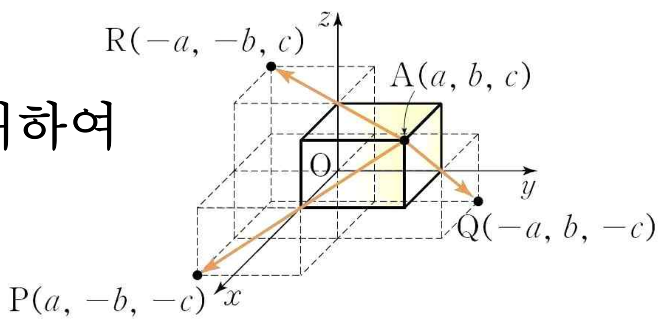
좌표공간의 점 $\mathrm{A}(a,\ b,\ c)$에 대하여

① 좌표축에 대한 대칭점

㉠ $x$축 $\Rightarrow \mathrm{P}(a,\ -b,\ -c)$

㉡ $y$축 $\Rightarrow \mathrm{Q}(-a,\ b,\ -c)$

㉢ $z$축 $\Rightarrow \mathrm{R}(-a,\ -b,\ c)$

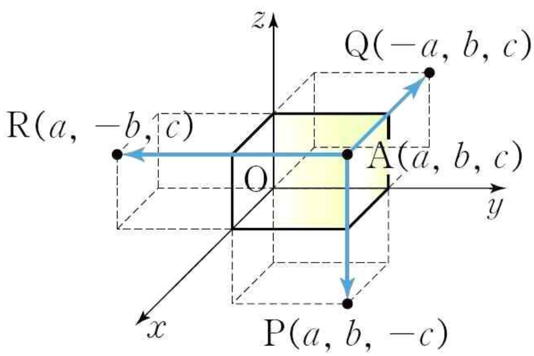



② 좌표평면에 대한 대칭점

㉠ $xy$평면 $\Rightarrow \mathrm{P}(a,\ b,\ -c)$

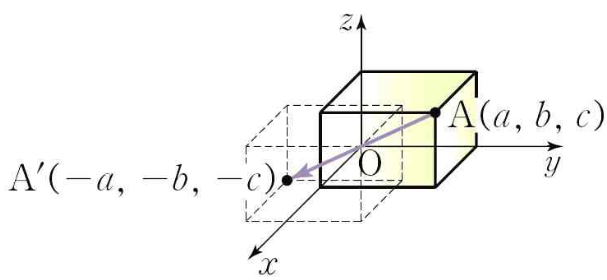
㉡ $yz$평면 $\Rightarrow \mathrm{Q}(-a,\ b,\ c)$

㉢ $zx$평면 $\Rightarrow \mathrm{R}(a,\ -b,\ c)$




③ 원점에 대한 대칭점

$\Rightarrow \mathrm{A}'(-a,\ -b,\ -c)$



## 1 공간좌표 ❽

예 점 $\mathrm{P}(2,\ 3,\ 1)$을 $x$축에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 $(2,\ -3,\ -1)$이고, $yz$평면에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 $(-2,\ 3,\ 1)$이며, 원점에 대하여 대칭이동시킨 점의 좌표는 $(-2,\ -3,\ -1)$이다.

## 2 좌표공간에서 두 점 사이의 거리 ❶

(1) 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}\left(x_1,\ y_1,\ z_1\right)$, $\mathrm{B}\left(x_2,\ y_2,\ z_2\right)$ 사이의 거리는

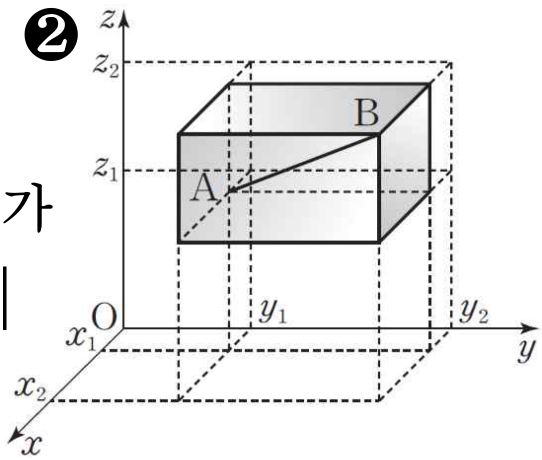
$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}$$

(2) 좌표공간의 원점 O와 점 $\mathrm{A}\left(x_1,\ y_1,\ z_1\right)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}$$

☑ 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}\left(x_1,\ y_1,\ z_1\right)$, $\mathrm{B}\left(x_2,\ y_2,\ z_2\right)$에 대하여 직선 AB가 $xy$평면, $yz$평면, $zx$평면 중 어느 평면과도 평행하지 않은 경우, 그림과 같이 두 점 A, B를 꼭짓점으로 하고 $xy$평면, $yz$평면, $zx$평면에 각각 평행한 6개의 평면으로 이루어진 직육면체를 생각하면 선분 AB는

## 2 좌표공간에서 두 점 사이의 거리 ❷




이 직육면체의 대각선이다.

이때 직육면체의 세 모서리의 길이가

$$|x_2-x_1|,\ |y_2-y_1|,\ |z_2-z_1|$$

이므로 두 점 A, B 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

또한 직선 AB가 $xy$평면, $yz$평면, $zx$평면 중 어느 한 평면에 평행한 경우에도 위의 식은 성립한다.

☑ ① 두 점 A, B가 $xy$평면 위의 점인 경우, 두 점 A, B의 $z$좌표가 모두 0이므로

## 2 좌표공간에서 두 점 사이의 거리 ❸

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

② 두 점 A, B가 $x$축 위의 점인 경우, 두 점 A, B의 $y$좌표와 $z$좌표가 모두 0이므로

$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|$$

즉, 수직선 위의 두 점 사이의 거리 공식과 일치한다.

예 ① 두 점 A$(0,\ -1,\ 2)$, B$(3,\ 2,\ -1)$ 사이의 거리는

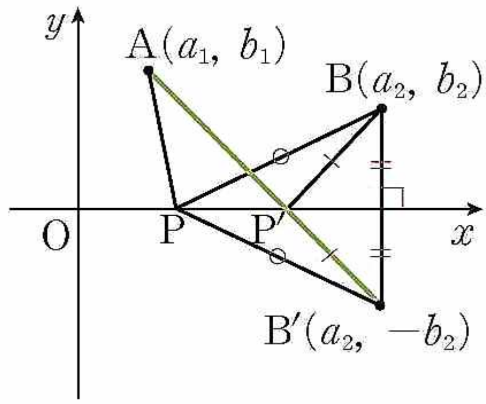
$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3-0)^2+\{2-(-1)\}^2+(-1-2)^2}=3\sqrt{3}$$

② 원점 O와 점 A$(3,\ -2,\ -6)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{3^2+(-2)^2+(-6)^2}=7$$

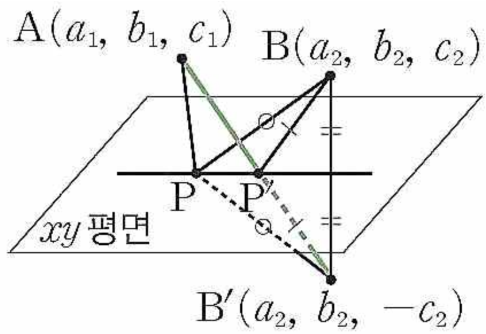
## $\boxed{2}$ 좌표공간에서 두 점 사이의 거리 ❹

### ✡ 선분의 길이의 합의 최솟값




(1) 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(a_1, a_2)$,
$\mathrm{B}(b_1, b_2)$와 $x$축 위를 움직이는
점 P에 대하여

⇨ $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB'}}\geq\overline{\mathrm{AB'}}$




(2) 좌표공간 위의 두 점 $\mathrm{A}(a_1, b_1, c_1)$,
$\mathrm{B}(a_2, b_2, c_2)$와 $xy$평면 위를
움직이는 점 P에 대하여

⇨ $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB'}}\geq\overline{\mathrm{AB'}}$

## $\boxed{3}$ 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점 ❶

(1) 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점

좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$에 대하여

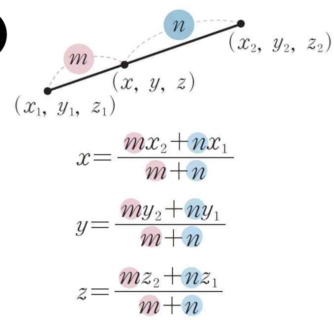
① 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$으로
내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n},\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

② 선분 AB를 $m:n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로
외분하는 점의 좌표는

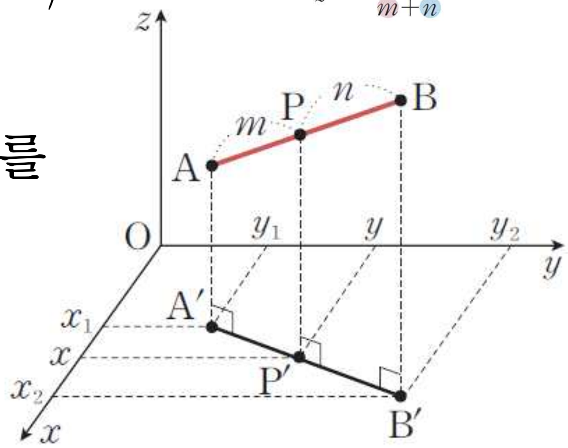
$$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n},\ \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

## 3 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점 ❷




③ 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2},\ \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

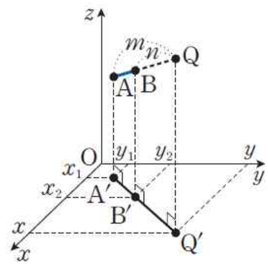



☑ 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$라 하자.
세 점 A, B, P의 $xy$평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′, P′이라 하면 세 점 A′, B′, P′의 좌표는 $\mathrm{A}'(x_1,\ y_1,\ 0)$, $\mathrm{B}'(x_2,\ y_2,\ 0)$, $\mathrm{P}'(x,\ y,\ 0)$이고 $\overline{\mathrm{A'P'}} : \overline{\mathrm{B'P'}} = \overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = m : n$이다. 따라서 선분

## 3 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점 ❸

A′B′의 내분점의 좌표를 $xy$평면 위에서 생각하면

$x=\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$, $y=\dfrac{my_2+ny_1}{m+n}$이다. 마찬가지로 세 점 A, B, P의 $yz$평면(또는 $zx$평면) 위로의 정사영을 이용하여 점 P의 $z$좌표를 구하면 $z=\dfrac{mz_2+nz_1}{m+n}$이므로 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점 P의 좌표는




$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n},\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$이다.

또 선분 AB를 $m : n$ $(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점의 좌표도 같은 방법으로 구할 수 있다.

## 3 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점 ❹

(2) 좌표공간에서 삼각형의 무게중심

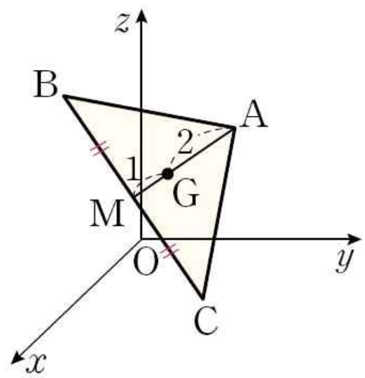
좌표공간의 세 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3,\ z_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3},\ \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

☑ 변 BC의 중점을 $\mathrm{M}(x_4,\ y_4,\ z_4)$라 하면

$$x_4=\frac{x_2+y_3}{2},\ y_4=\frac{y_2+y_3}{2},\ z_4=\frac{z_2+z_3}{2}$$

무게중심 G의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면

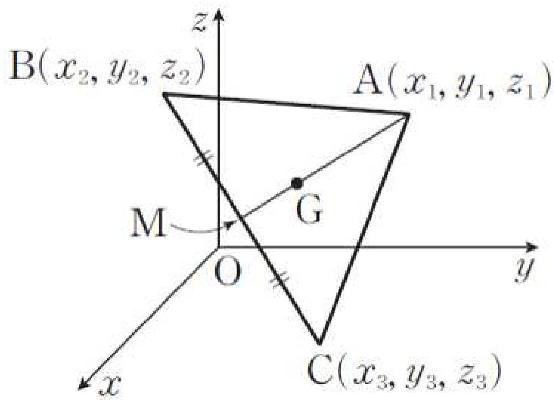



## 3 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점 ❺

$$x=\frac{2x_4+x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y=\frac{2y_4+y_1}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

$$z=\frac{2z_4+z_1}{2+1}=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$




따라서

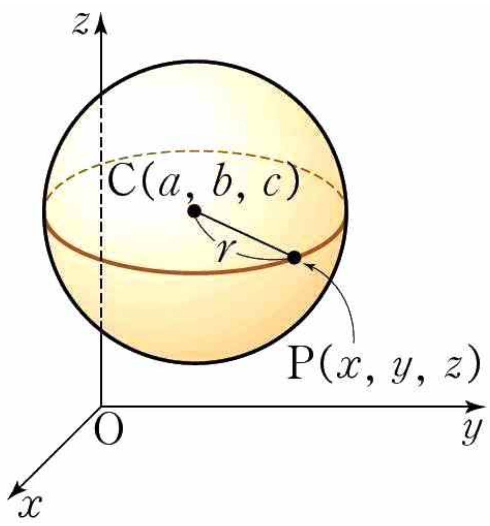
$$\mathrm{G}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3},\ \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

이다.

## $\boxed{4}$ 구의 방정식 ❶

(1) 구

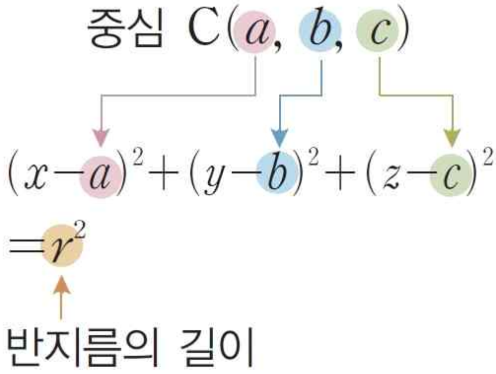
공간에서 한 정점으로부터 일정한 거리에 있는 점 전체의 집합을 ‘구’라 한다. 이때 정점을 ‘구의 중심’, 구의 중심과 구 위의 한 점을 이은 선분을 ‘구의 반지름’이라 한다.




(2) 구의 방정식

좌표공간에서 중심이 점 C$(a,\ b,\ c)$ 이고 반지름의 길이가 $r$ $(r > 0)$인 구의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$




## $\boxed{4}$ 구의 방정식 ❷

특히 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $r$인 구의 방정식은

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

예 ① 중심이 점 $(2,\ -3,\ 0)$이고 반지름의 길이가 $4$인 구의 방정식은

$$(x-2)^2+(y+3)^2+z^2=16$$

② 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $5$인 구의 방정식은

$$x^2+y^2+z^2=25$$

(3) 방정식 $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$이 나타내는 도형

방정식 $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$을 변형하면

## ④ 구의 방정식 ❸

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}$$

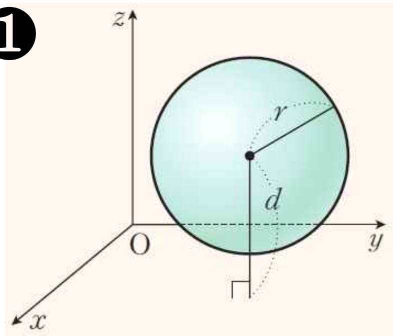
이므로 $a^2+b^2+c^2-4d>0$이면 이 방정식은 중심의 좌표가 $\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{b}{2},\ -\frac{c}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$인 구를 나타낸다.

예 방정식 $x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z+10=0$을 변형하면

$$(x+1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=2^2$$

이므로 이 방정식은 중심의 좌표가 $(-1,\ -2,\ 3)$이고 반지름의 길이가 2인 구를 나타낸다.

## ⑤ 구와 평면, 구와 직선의 위치 관계 ❶




(1) 구와 평면의 위치 관계

좌표공간에서 중심이 점 $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$이고 반지름의 길이가 $r$ $(r>0)$인 구

$$S\ :\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

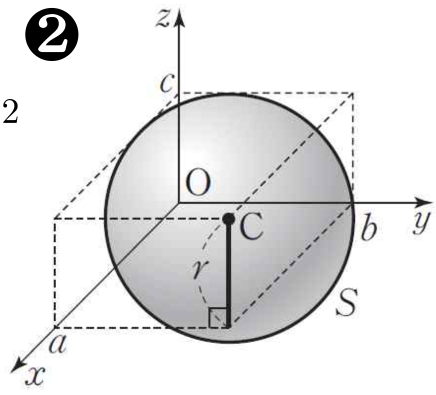
과 평면 $\alpha$에 대하여 구의 중심 C와 평면 $\alpha$ 사이의 거리를 $d$라 하면 구 $S$와 평면 $\alpha$의 위치 관계는 다음과 같다.

① $d>r$이면 구 $S$와 평면 $\alpha$는 만나지 않는다.

② $d=r$이면 구 $S$와 평면 $\alpha$는 한 점에서 만난다(접한다).

③ $d<r$이면 구 $S$와 평면 $\alpha$는 만나서 원이 생긴다.

## 5 구와 평면, 구와 직선의 위치 관계 ❷



(xy평면에 접하는 경우)

☑ 구 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

$(r>0)$이 좌표평면에 접할 조건

① $xy$평면에 접하는 경우 : $r=|c|$

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=c^2$

② $yz$평면에 접하는 경우 : $r=|a|$

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2$

③ $zx$평면에 접하는 경우 : $r=|b|$

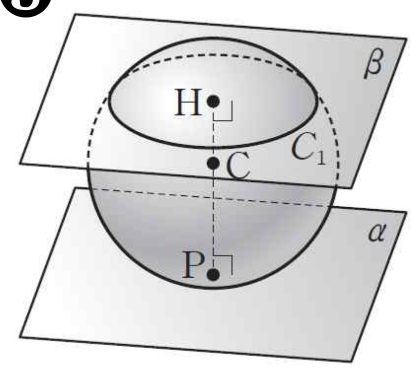
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=b^2$

④ 세 좌표평면에 모두 접하는 경우 : $r=|a|=|b|=|c|$

$(x\pm r)^2+(y\pm r)^2+(z\pm r)^2=r^2$

☑ 지나는 점에 따라 $\pm$를 결정해야 함에 주의!

## 5 구와 평면, 구와 직선의 위치 관계 ❸




(2) 구와 평면의 위치 관계의 성질

① 중심이 점 C이고 반지름의 길이가 $r$인 구 위의 점 P에서 평면 $\alpha$가 접하는 경우 $\overline{\mathrm{CP}}\perp\alpha$이다.

② 중심이 점 C이고 반지름의 길이가 $r$인 구와 평면 $\beta$가 만나서 생기는 원을 $C_1$이라 하면 원 $C_1$의 중심은 점 C에서 평면 $\beta$에 내린 수선의 발 H와 같다.

☑ 원 $C_1$의 반지름의 길이는 $\sqrt{r^2-\overline{\mathrm{CH}}^2}$이다.

## 5 구와 평면, 구와 직선의 위치 관계 ❹

(3) 구와 직선의 위치 관계

좌표공간에서 중심이 점 C$(a, b, c)$이고 반지름의 길이가 $r$ $(r>0)$인 구

$$S : (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

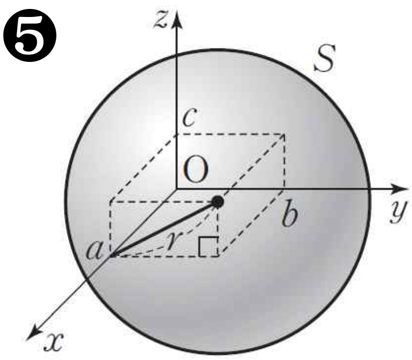
과 직선 $l$에 대하여 구의 중심 C와 직선 $l$ 사이의 거리를 $d$라 하면 구 $S$와 직선 $l$의 위치 관계는 다음과 같다.

① $d>r$이면 구 $S$와 직선 $l$은 만나지 않는다.

② $d=r$이면 구 $S$와 직선 $l$은 한 점에서 만난다(접한다).

③ $d<r$이면 구 $S$와 직선 $l$은 만나서 원이 생긴다.

## 5 구와 평면, 구와 직선의 위치 관계 ❺




☑ 구 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ $(r>0)$이 좌표축에 접할 조건

① $x$축에 접하는 경우 : $r^2=b^2+c^2$

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=b^2+c^2$$ ($x$축에 접하는 경우)

② $y$축에 접하는 경우 : $r^2=a^2+c^2$

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+c^2$$

③ $z$축에 접하는 경우 : $r^2=a^2+b^2$

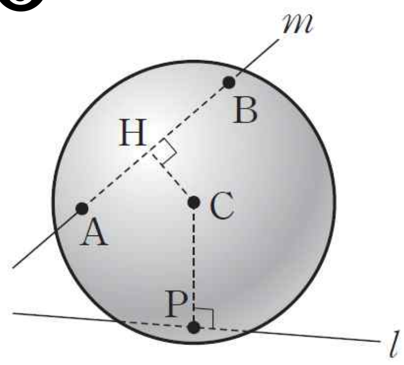
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+b^2$$

☑ 네 점이 주어지는 경우

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

## 5 구와 평면, 구와 직선의 위치 관계 ❻

(4) 구와 직선의 위치 관계의 성질




① 중심이 점 C이고 반지름의 길이가 $r$인 구 위의 점 P에 직선 $l$이 접하는 경우 $\overline{\mathrm{CP}} \perp l$이다.

② 중심이 점 C이고 반지름의 길이가 $r$인 구가 직선 $m$과 두 점 A, B에서 만나는 경우 점 C에서 직선 $m$에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 AB의 중점과 같다.