

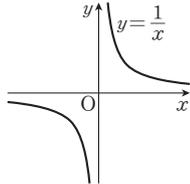
I 함수의 극한과 연속

1 함수의 극한

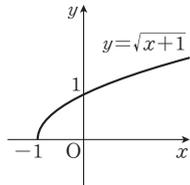
01 함수의 극한

11~17쪽

준비하기 (1) 정의역은
 $\{x | x \neq 0 \text{인 실수}\}$,
 치역은
 $\{y | y \neq 0 \text{인 실수}\}$



(2) 정의역은
 $\{x | x \geq -1\}$,
 치역은
 $\{y | y \geq 0\}$



생각 열기 ①

x	x^2	x	x^2
0.8	0.64	1.2	1.44
0.9	0.81	1.1	1.21
0.99	0.9801	1.01	1.0201
0.999	0.998001	1.001	1.002001

② 1

문제 1 (1) 1 (2) 1 (3) -1 (4) 3

함께하기 ① 한없이 커진다.
 ② 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커진다.

생각특독 실수라 말할 수 없다.
 ∞ 는 값이 아니라 상태를 말한다.

문제 2 (1) $-\infty$ (2) ∞

문제 3 (1) 2 (2) 0

문제 4 (1) $-\infty$ (2) ∞

생각 열기 ① 0
 ② 1

문제 5 (1) 1 (2) -1

문제 6 (1) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$
 (2) 존재하지 않는다.
 (3) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$

생각 넓히기 ① $\lim_{t \rightarrow -10^+} v_1(t) = 80, \lim_{t \rightarrow -10^+} v_2(t) = 30$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow -10^+} v_1(t) \neq \lim_{t \rightarrow -10^+} v_2(t)$$

② $\lim_{t \rightarrow -10^-} v_1(t) = \lim_{t \rightarrow -10^-} v_2(t) = 80$

③ $\lim_{t \rightarrow -10} v_1(t) = 80$

$\lim_{t \rightarrow -10} v_2(t)$ 는 존재하지 않는다.

02 함수의 극한에 대한 성질

18~24쪽

준비하기 (1) 1 (2) 1

생각 열기 주어진 그래프에서

$$\lim_{x \rightarrow -1} x^2 = 1, \lim_{x \rightarrow -1} 2x = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 2x) = 3$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 2x) = 3$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} x^2 + \lim_{x \rightarrow -1} 2x \\ &= 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow -1} \{f(x) + g(x)\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1} g(x)$$

가 성립한다.

문제 1 (1) 13 (2) 2 (3) $\frac{3}{5}$ (4) 7

문제 2 (1) 5 (2) 8

문제 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ 이 존재하지 않으므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} x \neq \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \times x \right)$$

이다. 함수의 극한에 대한 성질은 함수의 극한값이 존재할 때만 성립하므로 함수가 수렴할 때만 이용할 수 있다.

문제 4 (1) $-\frac{1}{6}$ (2) 2 (3) 54 (4) 1

문제 5 (1) 3 (2) $-\frac{3}{2}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) 1

문제 6 (1) $\frac{|-t|-1}{-t+2}$ (2) -1

문제 7 (1) $a=0, b=-1$ (2) $a=1, b=-3$

함께하기 ① \leq, \leq
 ② $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$
 ③ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 2$

문제 8 -2

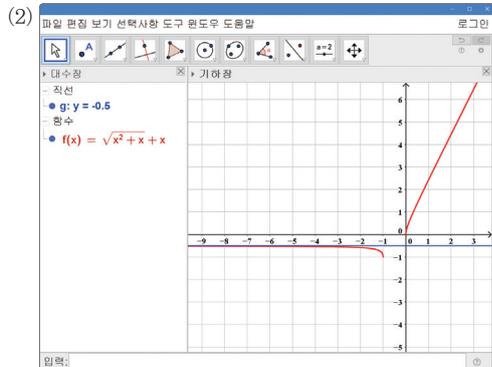
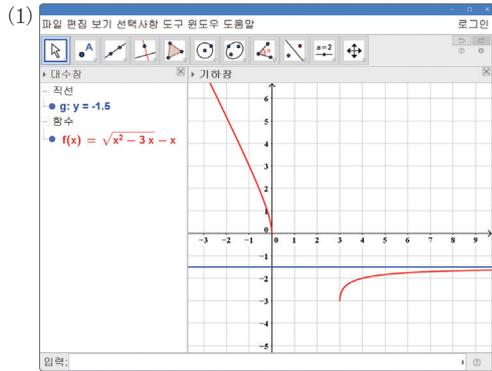
문제 9 5

생각 넓히기 ① 2

- ② $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}$ 의 값이 존재하고 $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$
 이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ 이다.
 따라서 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(2) = 0$ 이
 므로 $f(x)$ 는 $x-2$ 를 인수로 갖는다.
 ③ $f(x) = x^2 - 5x + 6$

공학적 도구

25쪽



I -1 중단원 마무리하기

26~29쪽

01 (1) 3 (2) -3 (3) $\frac{1}{2}$ (4) 1

02 (1) -2 (2) 0 (3) ∞ (4) $-\infty$

03 (1) 0 (2) ∞

04 (1) 2 (2) 8 (3) 7 (4) -5

05 (1) 4 (2) -2 (3) 2 (4) $\frac{1}{2}$

06 -1

07 **해결과정** $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+a)$
 $= 2+a$

▶ 30%

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 - 6x + 1)$
 $= -2$

▶ 30%

답구하기 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하려면

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 이어야 하므로
 $2+a = -2, \quad a = -4$

▶ 40%

08 (1) 1750 (2) 2450 09 \sim, \subset, \supset

10 (1) 12 (2) 4 (3) 1 (4) $\frac{3}{2}$

11 (가) $\frac{1}{a}$ (나) $\frac{g(x)}{f(x)}$ (다) $\frac{g(x)}{f(x)}$

12 (1) $a=3, b=-7$ (2) $a=5, b=4$

13 3

14 $h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면
 $g(x) = f(x) - h(x)$ 이고, $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1$ 이다.

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + g(x)}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + \{f(x) - h(x)\}}{f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(x) - h(x)}{f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 2 - \frac{h(x)}{f(x)} \right\} = 2 \end{aligned}$$

15 **문제 이해** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 2x^3}{x^2} = 2$ 에서 $f(x)$ 는 삼차항의 계수가 2, 이차항의 계수가 2인 삼차함수임을 알 수 있다. ▶ 20%

또, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -3$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 이므로 $f(0) = 0$ ▶ 30%

해결과정 즉, $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + ax$ (a 는 상수)로 놓을 수 있으므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x^2 + 2x + a)}{x} = a = -3 \quad \text{▶ 20\%}$$

답구하기 따라서 $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x$ 이므로 $f(2) = 2 \times 2^3 + 2 \times 2^2 - 3 \times 2 = 18$ ▶ 30%

16 $5x + 3 < f(x) < 5x + 6$ 에서 $(5x + 3)^3 < \{f(x)\}^3 < (5x + 6)^3$
 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $5x^3 + 1 > 0$ 이므로 각 변을 $5x^3 + 1$ 로 나누면

$$\frac{(5x + 3)^3}{5x^3 + 1} < \frac{\{f(x)\}^3}{5x^3 + 1} < \frac{(5x + 6)^3}{5x^3 + 1}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x + 3)^3}{5x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x + 6)^3}{5x^3 + 1} = 25$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^3}{5x^3 + 1} = 25$$

17 원 C의 반지름의 길이는 점 $(a, a - \frac{1}{a})$ 과 직선 $y = x$, 즉 $x - y = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|a - (a - \frac{1}{a})|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}a}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{a^2 + (a - \frac{1}{a})^2} - \frac{1}{\sqrt{2}a} \\ &= \sqrt{2a^2 - 2 + \frac{1}{a^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}a} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{d}{a} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2a^2 - 2 + \frac{1}{a^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}a}}{a} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2 - \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^4}} - \frac{1}{\sqrt{2}a^2} \right) = \sqrt{2} \end{aligned}$$

2 함수의 연속

01 함수의 연속

31~34쪽

준비하기 (1) 4 (2) $\frac{5}{6}$

생각 열기 $x = -1$ 에서 이어져 있지 않다.
 $x = 1$ 에서 이어져 있다.
 $x = 2$ 에서 이어져 있지 않다.

문제 1 (1) 연속 (2) 불연속

문제 2 (1) $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ (2) $(-\infty, 2]$

문제 3 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, 5), (5, \infty)$
(3) $(-\infty, -2), (-2, \infty)$ (4) $[3, \infty)$

문제 4 $a = -3, b = -5$

02 연속함수의 성질

35~39쪽

준비하기 최댓값: 4, 최솟값: -5

생각 열기 ① 모두 $x = 1$ 에서 연속이다.
② 연속이다.

문제 1 (1) 모든 실수에서 연속이다.
(2) $x \neq 0, x \neq 3$ 인 모든 실수에서 연속이다.

문제 2 (1) **예시** $x = -1$ 에서 불연속인 유리함수: $y = \frac{x}{x+1}$
 $x = 1$ 에서 불연속인 유리함수: $y = \frac{x}{x-1}$

(2) **예시** $y = \frac{1}{(x+1)(x-1)},$
 $y = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)}$

함께하기 ①

구간	$[-1, 2]$	$[-1, 2)$	$(0, 2)$
$f(x)$ 의 최댓값	4	4	없다.
$f(x)$ 의 최솟값	0	없다.	없다.

② $[-1, 2]$

문제 3 (1) 최댓값: $\frac{1}{4}$, 최솟값: -12

(2) 최댓값: 3, 최솟값: $\frac{3}{5}$

생각 열기 해수는 해발 1000 m인 지점을 반드시 지났다.

문제 4 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고,
 $f(0)=0, f(1)=3$
 에서 $f(0) \neq f(1)$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여
 $f(c)=1$ 인 c 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나
 존재한다.

문제 5 $f(x)=x^4+x^3-7x+1$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는
 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 연속이고
 $f(1)=-4 < 0, f(2)=11 > 0$
 이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$ 인 c 가
 열린구간 $(1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.
 따라서 방정식 $x^4+x^3-7x+1=0$ 이 열린구간
 $(1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

생각 넓히기 1 $f(x)=x^3+3x-1$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는
 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고
 $f(0)=-1 < 0, f(1)=3 > 0$
 이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(a)=0$
 인 a 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재
 한다.
 따라서 방정식 $x^3+3x-1=0$ 이 열린구간
 $(0, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가지므로
 a 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 있다.

2 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8} > 0, f(0) < 0$ 이므로 열린구간
 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 에 실근 a 가 존재한다.

3 열린구간 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 을 두 열린구간 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 과
 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ 로 나누면

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{15}{64} < 0, f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$$

이므로 열린구간 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ 에 실근 a 가 존재
 한다.

또, 열린구간 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ 을 두 열린구간

$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)$ 과 $\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right)$ 로 나누면

$$f\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{91}{512} > 0, f\left(\frac{1}{4}\right) < 0$$

이므로 열린구간 $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)$ 에 실근 a 가 존재
 한다.

왼쪽 샌드위치를 이등분하는 직선 l 과 오른쪽 샌드위치를 이
 등분하는 직선 m 은 반드시 존재한다.
 따라서 직선 l 의 연장선에 직선 m 이 위치하도록 오른쪽 샌
 드위치를 놓으면 직선 l 은 두 개의 샌드위치를 동시에 이등
 분하는 직선이 된다.

I -2 중단원 마무리하기

01 (1) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 가 존재
 하지 않는다. 따라서 $x=1$ 에서 불연속이다.

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ 이므로 $x=1$ 에서 불연속이다.

02 (1) 연속 (2) 불연속

03 (1) 모든 실수에서 연속이다.
 (2) $x \neq -6$ 인 모든 실수에서 연속이다.

04 $f(x)=x^3+4x+3$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간
 $[-1, 0]$ 에서 연속이고
 $f(-1)=-2 < 0, f(0)=3 > 0$
 이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$ 인 c 가 열린
 구간 $(-1, 0)$ 에 적어도 하나 존재한다.
 따라서 방정식 $x^3+4x+3=0$ 이 열린구간 $(-1, 0)$ 에
 적어도 하나의 실근을 갖는다.

05 (1) 연속 (2) 불연속

06 **문제 이해** 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=f(1)$ ▶ 30%

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = a$

해결 과정

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

▶ 60%

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \beta$ (α, β 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ f(x) \times \frac{g(x)}{f(x)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \alpha\beta \end{aligned}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ 의 값도 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

08 2

09 -2

10 $\overline{OP} = \sqrt{t^2 + (\sqrt{2t})^2} = \sqrt{t^2 + 2t}$, $\overline{OQ} = t$
이므로

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2 + 2t}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{2}{t}} = 1 \end{aligned}$$

11 -1

12 ①

13 7

14 6

15 6

16 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=3$ 에서도 연속이다. 즉, $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} \{a(x-3)^2 + b\} &= 5 \\ b &= 5 \end{aligned}$$

한편, $f(x) = f(x+5)$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$f(0) = f(5)$ 이므로

$$0 + 2 = a(5-3)^2 + b$$

$$4a + 5 = 2, \quad a = -\frac{3}{4}$$

따라서 $f(x) = \begin{cases} x+2 & (0 \leq x < 3) \\ -\frac{3}{4}(x-3)^2 + 5 & (3 < x \leq 5) \end{cases}$ 이고,

$f(x) = f(x+5)$ 이므로

$$\begin{aligned} f(39) &= f(34) = \dots = f(4) \\ &= -\frac{3}{4}(4-3)^2 + 5 = \frac{17}{4} \end{aligned}$$

17 ③

18 5

19 4

20 ②

21 **해결과정** $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+16}-5}{ax+b}$ 의 값이 0이 아닌 실수

로 존재하고, $\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x^2+16}-5) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} (ax+b) = 0$$

즉, $3a+b=0$ 이므로

$$b = -3a \quad \dots \textcircled{1}$$

▶ 40%

답구하기 ①을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+16}-5}{ax-3a} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x^2+16}-5)(\sqrt{x^2+16}+5)}{a(x-3)(\sqrt{x^2+16}+5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{a(x-3)(\sqrt{x^2+16}+5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{a(x-3)(\sqrt{x^2+16}+5)} \\ &= \frac{3}{5a} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

이므로 $a=1$

▶ 40%

①에서 $b = -3a$ 이므로

$$b = -3$$

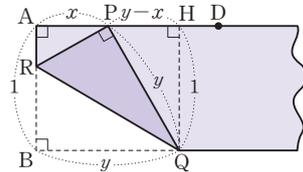
▶ 20%

22 **문제이해** 다음 그림과 같이 점 Q에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{PH} = y - x,$$

$$\overline{PQ} = \overline{BQ} = y$$

▶ 20%



해결과정 직각삼각형 PQH에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\begin{aligned} y^2 &= (y-x)^2 + 1^2 \\ &= y^2 - 2xy + x^2 + 1 \end{aligned} \quad \text{▶ 30\%}$$

즉, $y = \frac{x^2+1}{2x}$ ▶ 30%

답구하기 $\lim_{x \rightarrow 0^+} xy = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \times \frac{x^2+1}{2x} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

▶ 20%

23 **문제 이해** 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=3$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)g(x) = f(3)g(3) \quad \blacktriangleright 10\%$$

해결 과정 $f(3)=1, g(3)=3+a$ 이므로

$$f(3)g(3) = 3+a \quad \blacktriangleright 30\%$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} (x-2)(x+a) = 3+a$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} (x-1)(x+a) = 2(3+a) = 6+2a \quad \blacktriangleright 40\%$$

답구하기 따라서 $3+a=6+2a$ 이므로

$$a = -3 \quad \blacktriangleright 20\%$$

24 **해결 과정** $g(x)=f(x)-x^2-4x$ 라 하면 함수

$g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이다. $\blacktriangleright 20\%$

사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$ 이 열린구간 $(0, 1)$ 과 열린구간 $(1, 2)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 가지려면

$$g(0)g(1) < 0, \quad g(1)g(2) < 0$$

이어야 한다. 이때

$$g(0) = f(0) = 1 > 0,$$

$$g(2) = f(2) - 12 = 1 > 0$$

이므로 $g(1) < 0$ 이어야 한다. $\blacktriangleright 50\%$

답구하기 $g(1) = f(1) - 5 = a^2 - a - 6 = (a+2)(a-3) < 0$

에서 $-2 < a < 3$ $\blacktriangleright 30\%$

II 다항함수의 미분법

1 미분계수와 도함수

01 미분계수

53~59쪽

준비하기 1 5 2 (1) 4 (2) 2

생각 열기 60 m/s

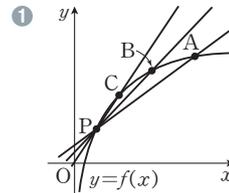
생각톡톡 0

문제 1 (1) -4 (2) $-4 - \Delta x$

문제 2 (1) 3 (2) 7

문제 3 -4.8 m/s

생각 열기



② 점 P에서 곡선 $y=f(x)$ 에 접하는 직선

문제 4 (1) 8 (2) -4

문제 5 $f'(b) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(a)$

함께하기 ① $x-a, x-a, f'(a), f(a)$

② 함수 $y=f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

문제 6 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다. 그런데

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2|x-1|}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2(x-1)}{x-1} \\ &= 2 \end{aligned}$$