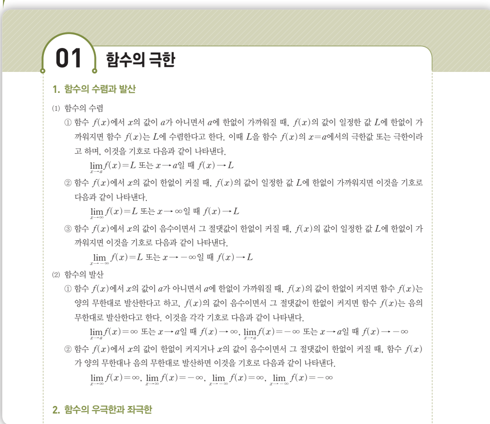
수능특강

수학영역 | **수학Ⅱ**

이 책의 차례 Contents

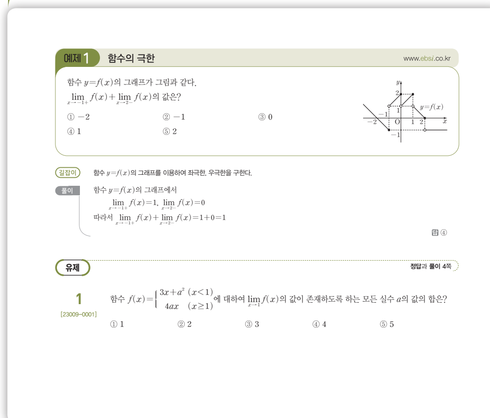
이 책의 구성과 특징 Structure

개념 정리



여러 종의 교과서를 통합하여 핵심 개념만을 체계적으로 정리하였고 설명, 참고, 예 를 제시하여 개념에 대한 이해와 적용에 도움이 되게 하였다.

예제 & 유제

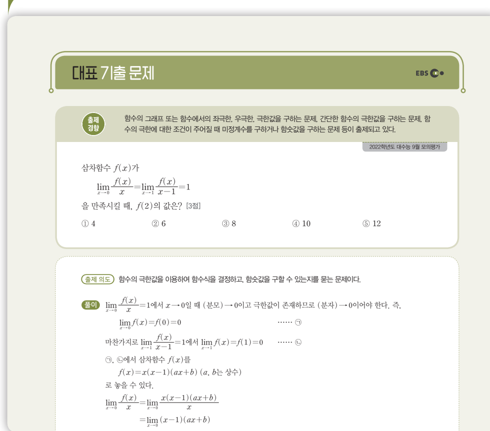


예제는 개념을 적용한 대표 문항으로 문제를 해결하는 데 필요한 주요 개념 및 풀이 전략을 길잡이로 제시하여 풀이 과정의 이해를 돕도록 하였고, 유제는 예제와 유사한 내용의 문제나 일반화된 문제를 제시하여 학습 내용과 문제에 대한 연관성을 익히도록 구성하였다.

Level 1-Level 2-Level 3

Level 1 기초 연습은 기초 개념을 제대로 숙지했는지 확인할 수 있는 문항을 제시하였으며, Level 2 기본 연습은 기본 응용 문항을, 그리고 Level 3 실력 완성은 수학적 사고력과 문제 해결 능력을 함양할 수 있는 문항을 제시하여 대학수학능력시험 실전에 대비할 수 있도록 구성하였다.

대표 기출 문제



대학수학능력시험과 모의평가 기출 문항으로 구성하였으며 기존 출제 유형을 파악할 수 있도록 출제 경향과 출제 의도를 제시하였다.

01 함수의 극한

1. 함수의 수렴과 발산

(1) 함수의 수렴

① 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다고 한다. 이때 L을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 극한값 또는 극한이라고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x\to a}f(x)=L$ 또는 $x\to a$일 때 $f(x)\to L$

② 함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x\to\infty}f(x)=L$ 또는 $x\to\infty$일 때 $f(x)\to L$

③ 함수 $f(x)$에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=L$ 또는 $x\to-\infty$일 때 $f(x)\to L$

(2) 함수의 발산

① 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 양의 무한대로 발산한다고 하고, $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 음의 무한대로 발산한다고 한다. 이것을 각각 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ 또는 $x\to a$일 때 $f(x)\to\infty$, $\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$ 또는 $x\to a$일 때 $f(x)\to-\infty$

② 함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커지거나 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, 함수 $f(x)$가 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하면 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

2. 함수의 우극한과 좌극한

(1) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 L을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 우극한이라고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x\to a+}f(x)=L$ 또는 $x\to a+$일 때 $f(x)\to L$

(2) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 L을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 좌극한이라고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x\to a-}f(x)=L$ 또는 $x\to a-$일 때 $f(x)\to L$

(3) 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 우극한과 좌극한이 모두 존재하면서 그 값이 L로 서로 같으면 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다. 또 그 역도 성립하므로 다음이 성립한다.

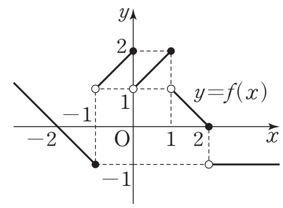
$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)=L \Longleftrightarrow \lim_{x\to a}f(x)=L$

참고 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 우극한과 좌극한이 모두 존재하더라도 그 값이 같지 않으면 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$는 존재하지 않는다.

예제 1 함수의 극한

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

$\lim\limits_{x \to -1+} f(x) + \lim\limits_{x \to 2-} f(x)$의 값은?



① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

길잡이 함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 좌극한, 우극한을 구한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$$\lim_{x \to -1+} f(x) = 1,\ \lim_{x \to 2-} f(x) = 0$$

따라서 $\lim\limits_{x \to -1+} f(x) + \lim\limits_{x \to 2-} f(x) = 1 + 0 = 1$

답 ④

유제

정답과 풀이 4쪽

1 [23009-0001]

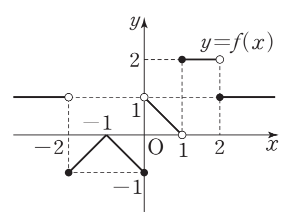
함수 $f(x) = \begin{cases} 3x + a^2 & (x < 1) \\ 4ax & (x \geq 1) \end{cases}$에 대하여 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$의 값이 존재하도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2 [23009-0002]

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

$\lim\limits_{x \to 1+} f(x) + \lim\limits_{x \to 2-} f(-x) + \lim\limits_{x \to 0} |f(x)|$의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

01 함수의 극한

3. 함수의 극한에 대한 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x \to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때

(1) $\lim_{x \to a} cf(x)=c\lim_{x \to a} f(x)=c\alpha$ (단, c는 상수)

(2) $\lim_{x \to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x \to a} f(x)+\lim_{x \to a} g(x)=\alpha+\beta$

(3) $\lim_{x \to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x \to a} f(x)-\lim_{x \to a} g(x)=\alpha-\beta$

(4) $\lim_{x \to a} f(x)g(x)=\lim_{x \to a} f(x)\times\lim_{x \to a} g(x)=\alpha\beta$

(5) $\lim_{x \to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta\neq 0$)

예 ① $\lim_{x \to 1}(x^2+3x)=\lim_{x \to 1} x^2+\lim_{x \to 1} 3x=\lim_{x \to 1} x\times\lim_{x \to 1} x+3\lim_{x \to 1} x=1\times1+3\times1=4$

② $\lim_{x \to 2}\dfrac{x+4}{2x-1}=\dfrac{\lim_{x \to 2}(x+4)}{\lim_{x \to 2}(2x-1)}=\dfrac{\lim_{x \to 2} x+\lim_{x \to 2} 4}{2\lim_{x \to 2} x-\lim_{x \to 2} 1}=\dfrac{2+4}{2\times2-1}=2$

참고 (1) 함수의 극한에 대한 성질은 $x\to a+$, $x\to a-$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$인 경우에도 성립한다.

(2) 함수의 극한에 대한 성질은 각 함수의 극한값이 모두 존재할 때에만 성립한다.

① $c=0$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$이면 $\lim_{x \to 0} cf(x)=\lim_{x \to 0}\left(0\times\dfrac{1}{x}\right)=\lim_{x \to 0} 0=0$이지만

극한값 $\lim_{x \to 0} f(x)$가 존재하지 않으므로 $\lim_{x \to 0} cf(x)=c\lim_{x \to 0} f(x)$가 성립하지 않는다.

② $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=-\dfrac{1}{x}$이면 $\lim_{x \to 0}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x \to 0}\left\{\dfrac{1}{x}+\left(-\dfrac{1}{x}\right)\right\}=\lim_{x \to 0} 0=0$이지만

두 극한값 $\lim_{x \to 0} f(x)$, $\lim_{x \to 0} g(x)$가 모두 존재하지 않으므로 $\lim_{x \to 0}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x \to 0} f(x)+\lim_{x \to 0} g(x)$가 성립하지 않는다.

③ $f(x)=x$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$이면 $\lim_{x \to 0} f(x)g(x)=\lim_{x \to 0}\left(x\times\dfrac{1}{x}\right)=\lim_{x \to 0} 1=1$이지만

극한값 $\lim_{x \to 0} g(x)$가 존재하지 않으므로 $\lim_{x \to 0} f(x)g(x)=\lim_{x \to 0} f(x)\times\lim_{x \to 0} g(x)$가 성립하지 않는다.

④ $f(x)=x$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$이면 $\lim_{x \to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x \to 0}\dfrac{x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x \to 0} x^2=0$이지만

극한값 $\lim_{x \to 0} g(x)$가 존재하지 않으므로 $\lim_{x \to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x \to 0} f(x)}{\lim_{x \to 0} g(x)}$가 성립하지 않는다.

예제 2 함수의 극한에 대한 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to-1}(2x+3)f(x)=4,\ \lim_{x\to-1}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{3}{2}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x\to-1}\frac{5f(x)+2x}{\{g(x)\}^2}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

길잡이 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때

(1) $\lim_{x\to a}cf(x)=c\alpha$ (단, c는 상수)

(2) $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha+\beta$

(3) $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\alpha\beta$

(4) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta\neq0$)

풀이 $\lim_{x\to-1}(2x+3)f(x)=4$, $\lim_{x\to-1}(2x+3)=1$이므로

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{(2x+3)f(x)}{2x+3}=\frac{\lim_{x\to-1}(2x+3)f(x)}{\lim_{x\to-1}(2x+3)}=\frac{4}{1}=4$$

$\lim_{x\to-1}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{3}{2}$이므로

$$\lim_{x\to-1}g(x)=\lim_{x\to-1}\left\{\frac{g(x)}{f(x)}\times f(x)\right\}=\lim_{x\to-1}\frac{g(x)}{f(x)}\times\lim_{x\to-1}f(x)=\frac{3}{2}\times4=6$$

따라서 $\lim_{x\to-1}\frac{5f(x)+2x}{\{g(x)\}^2}=\frac{\lim_{x\to-1}5f(x)+\lim_{x\to-1}2x}{\lim_{x\to-1}\{g(x)\}^2}=\frac{5\lim_{x\to-1}f(x)+2\lim_{x\to-1}x}{\lim_{x\to-1}g(x)\times\lim_{x\to-1}g(x)}=\frac{5\times4+2\times(-1)}{6\times6}=\frac{1}{2}$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 4쪽

3 [23009-0003]

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to3}\{2f(x)+g(x)\}=7,\ \lim_{x\to3}\{f(x)-g(x)\}=-1$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x\to3}f(x)g(x)$의 값을 구하시오.

4 [23009-0004]

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to0}\{xf(x)-(x^2+2)\}=1,\ \lim_{x\to0}\left\{\frac{g(x)}{x}+\frac{1}{x^2+1}\right\}=3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x\to0}\{3f(x)g(x)-xf(x)\}$의 값을 구하시오.

4. 함수의 극한값의 계산

(1) $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$에서 $\lim_{x\to a}f(x)=0$, $\lim_{x\to a}g(x)=0$인 경우

① $f(x)$, $g(x)$가 다항식이면 각각 인수분해하여 공통인수를 약분한 후 극한값을 구한다.

② $f(x)$ 또는 $g(x)$가 무리식이면 무리식이 있는 쪽을 유리화한 다음 분모, 분자의 공통인수를 약분한 후 극한값을 구한다.

(2) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$에서 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$인 경우

$f(x)$, $g(x)$가 다항식이면 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 각각 나누어 극한값을 구한다.

참고 $f(x)$, $g(x)$가 다항식이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$는 다음과 같다.

① $(f(x)$의 차수$)<(g(x)$의 차수$)$이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

② $(f(x)$의 차수$)=(g(x)$의 차수$)$이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(f(x)\text{의 최고차항의 계수})}{(g(x)\text{의 최고차항의 계수})}$

③ $(f(x)$의 차수$)>(g(x)$의 차수$)$이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ 또는 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

예 $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+1}{5x^2+2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{1}{x^2}}{5+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}=\frac{4+0}{5+0-0}=\frac{4}{5}$

(3) $\infty-\infty$ 꼴의 극한값

$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-g(x)\}$에서 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$인 경우

① $f(x)-g(x)$가 다항식이면 $f(x)-g(x)$의 최고차항으로 묶어 극한값을 구한다.

② $f(x)-g(x)$가 무리식이면 분모가 1인 분수 꼴의 식으로 생각하여 분자를 유리화한 후 극한값을 구한다.

예 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+6x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+6x)-x^2}{\sqrt{x^2+6x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^2+6x}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{\sqrt{1+\frac{6}{x}}+1}=\frac{6}{1+1}=3$

(4) $0\times\infty$ 꼴의 극한값

$\lim_{x\to a}f(x)g(x)$에서 $\lim_{x\to a}f(x)=0$, $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$인 경우는 식을 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{c}{\infty}$ (c는 상수)의 꼴로 변형하여 극한값을 구한다.

예 $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\left\{\frac{(x+1)-2}{2(x+1)}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2(x+1)}=\frac{1}{2\times 2}=\frac{1}{4}$

예제 3 함수의 극한값의 계산

www.ebsi.co.kr

$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2-4x}{x^2-1}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

길잡이　분모, 분자를 각각 인수분해하여 공통인수를 약분한 후 극한값을 구한다.

풀이

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2-4x}{x^2-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{x(x+4)(x-1)}{(x+1)(x-1)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x(x+4)}{x+1}\\&=\frac{1\times 5}{1+1}\\&=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 4쪽

5 [23009-0005]

$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{\sqrt{3x+3}-3}$의 값은?

① 24　② 30　③ 36　④ 42　⑤ 48

6 [23009-0006]

$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x}-x}{x+2}$의 값은?

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

5. 미정계수의 결정

(1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)이고

① $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이다.

② $\lim_{x\to a}f(x)=0$이고 $\alpha\neq0$이면 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이다.

설명 ① $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)이고, $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\times g(x)\right\}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\times\lim_{x\to a}g(x)=\alpha\times0=0$$

② $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 0이 아닌 실수)이면 $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{\alpha}$이다.

이때 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이므로 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\left\{\frac{g(x)}{f(x)}\times f(x)\right\}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}\times\lim_{x\to a}f(x)=\frac{1}{\alpha}\times0=0$$

예 ① $\lim_{x\to1}\frac{2x^2+ax}{x-1}=2$ (a는 상수)이면 $\lim_{x\to1}(x-1)=1-1=0$이므로

$\lim_{x\to1}(2x^2+ax)=2+a=0$이어야 한다.

따라서 $a=-2$이다.

② $\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^2+a}=\frac{1}{4}$ (a는 상수)이면 $\lim_{x\to2}(x-2)=2-2=0$이고 $\frac{1}{4}\neq0$이므로

$\lim_{x\to2}(x^2+a)=4+a=0$이어야 한다.

따라서 $a=-4$이다.

(2) 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 0이 아닌 실수)이면

($f(x)$의 차수)$=$($g(x)$의 차수)이고 $\alpha=\dfrac{(f(x)\text{의 최고차항의 계수})}{(g(x)\text{의 최고차항의 계수})}$이다.

예 $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2-x}{4x^2+1}=\frac{1}{2}$ (a는 상수)이면 $\frac{a}{4}=\frac{1}{2}$에서 $a=2$이다.

6. 함수의 극한의 대소 관계

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때, a에 가까운 모든 실수 x에 대하여

(1) $f(x)\leq g(x)$이면 $\alpha\leq\beta$이다.

(2) 함수 $h(x)$에 대하여 $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$이다.

예제 4 미정계수의 결정

$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+ax+b}{x^2-4}=\frac{3}{2}$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

길잡이 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$의 극한값이 존재하고 $x \to a$일 때 (분모) $\to$ 0이면 (분자) $\to$ 0이어야 한다.

풀이

$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+ax+b}{x^2-4}=\frac{3}{2}$ …… ㉠

㉠에서 $x \to -2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to -2}(x^2+ax+b)=4-2a+b=0$에서

$b=2a-4$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -2} \frac{x^2+ax+b}{x^2-4} &= \lim_{x \to -2} \frac{x^2+ax+2a-4}{x^2-4} \\ &= \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x+a-2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \to -2} \frac{x+a-2}{x-2}=\frac{-4+a}{-4}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

따라서 $a=-2$이고 ㉡에서 $b=-8$이므로

$ab=(-2)\times(-8)=16$

답 ④

유제

정답과 풀이 5쪽

7 [23009-0007]

$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+ax}-3}{x^2-1}=b$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{17}{2}$ ② $\frac{53}{6}$ ③ $\frac{55}{6}$ ④ $\frac{19}{2}$ ⑤ $\frac{59}{6}$

8 [23009-0008]

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{x-1}{3x^2+2}<\frac{f(x)}{x^2+1}<\frac{x+4}{3x^2+1}$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x \to \infty} \frac{4x+3f(x)}{2x-f(x)}$의 값은?

① 2 ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

Level 1 기초 연습

[23009-0009]

1 함수

$$f(x)=\begin{cases} 3x-1 & (x<a) \\ -x+2 & (x\geq a) \end{cases}$$

에 대하여 $\lim_{x\to a-} f(x)=3\lim_{x\to a+} f(x)$일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② $\frac{7}{6}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

[23009-0010]

2 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 1}(x+a)f(x)=\lim_{x\to 1}\{f(x)\}^2=9$$

를 만족시킬 때, a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[23009-0011]

3 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to 1} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to 1}\{f(x)+3g(x)\}=4$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-g(x)}{5f(x)+2g(x)}$의 값은?

① $\frac{1}{13}$ ② $\frac{2}{13}$ ③ $\frac{3}{13}$ ④ $\frac{4}{13}$ ⑤ $\frac{5}{13}$

[23009-0012]

4 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left\{1-\frac{1}{(2x+1)^2}\right\}$의 값을 구하시오.

[23009-0013]

5 $\lim_{x \to a} \frac{x^2-4x+b}{x-a}=6$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

[23009-0014]

6 $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+a}-\sqrt{2a}}=b\ (b \neq 0)$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $3\sqrt{6}$　② $6\sqrt{3}$　③ $6\sqrt{6}$　④ $9\sqrt{3}$　⑤ $9\sqrt{6}$

[23009-0015]

7 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)+x^2}{x-2}=3,\ \lim_{x \to 2} \frac{f(x)-4}{x-2}=a$$

를 만족시킬 때, 상수 a의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

[23009-0016]

8 함수 $f(x)=x^2+ax+b$가

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(0)}{x-1}=f(2)$$

를 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[23009-0017]

1 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax+2 & (x<1) \\ 0 & (x=1) \\ 2ax^2-5 & (x>1) \end{cases}$$

에 대하여 $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값은 존재하지 않고, $\lim_{x\to 1}|f(x)|$의 값은 존재할 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

[23009-0018]

2 $\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{4x^2+10x+3}-(ax+b)\}=1$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[23009-0019]

3 자연수 n과 0이 아닌 상수 a에 대하여 $\lim_{x\to 0}\frac{x^n(\sqrt{x+1}-1)}{\sqrt{x^4+16}-4}=a$일 때, $a+n$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

[23009-0020]

4 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여

$$\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\le f(x)\le\left(1-\frac{1}{x}\right)^2$$

을 만족시킨다. $\lim_{x\to a} x^2 f(x)=1$일 때, 양수 a의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

[23009-0021]

5 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim_{x\to 0}\dfrac{2x^2f(x)-g(x)}{x^3f(x)+g(x)}$의 값은?

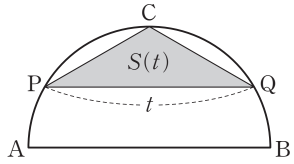
> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $$\{xf(x)\}^2-f(x)g(x)+g(x)-x^2=0$$
> 이다.
>
> (나) $\lim_{x\to 0} f(x)=2$

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

[23009-0022]

6 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB를 이등분하는 점을 C라 할 때, 선분 AB와 평행하고 길이가 t $(0<t<2)$인 현 PQ에 대하여 삼각형 CPQ의 넓이를 $S(t)$라 하자.

$\lim_{t\to 0+}\dfrac{S(t)}{t^3}$의 값은?



① $\dfrac{1}{32}$ ② $\dfrac{1}{16}$ ③ $\dfrac{1}{8}$ ④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{2}$

[23009-0023]

7 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^3}{4x^2+x}=1$
>
> (나) $\lim_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{(x+1)^k}=m$인 자연수 k $(k\geq 2)$와 상수 m이 존재한다.

$f(m)$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

[23009-0024]

1 다음 조건을 만족시키는 두 실수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는?

(가) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-a} = b$

(나) $\lim_{x \to 0} \left| \frac{x^3+ax^2+bx}{x^k} \right| = \frac{1}{2}$인 자연수 k가 존재한다.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[23009-0025]

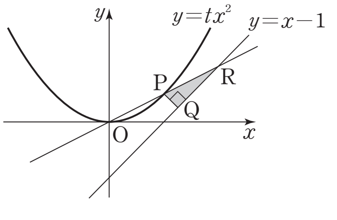
2 이차함수 $f(x)$와 상수 a가

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(0)}{x-2} = a, \ \lim_{x \to 0} \frac{2f(x+2)}{f(x)} = \frac{5}{18}a$$

를 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최솟값이 $\frac{7}{5}$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

[23009-0026]

3 t가 $\frac{1}{4}$보다 큰 실수일 때, 그림과 같이 곡선 $y=tx^2$ 위의 점 P에서 직선 $y=x-1$에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 선분 PQ의 길이가 최소일 때, 직선 OP가 직선 $y=x-1$과 만나는 점을 R라 하고, 삼각형 PQR의 넓이를 $S(t)$라 하자. $\lim_{t \to \frac{1}{4}+} \frac{S(t)}{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 P는 제1사분면에 있다.)



대표 기출 문제

EBS

출제 경향

함수의 그래프 또는 함수에서의 좌극한, 우극한, 극한값을 구하는 문제, 간단한 함수의 극한값을 구하는 문제, 함수의 극한에 대한 조건이 주어질 때 미정계수를 구하거나 함숫값을 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

2022학년도 대수능 9월 모의평가

삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

출제 의도 함수의 극한값을 이용하여 함수식을 결정하고, 함숫값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$에서 $x \to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$ …… ㉠

마찬가지로 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$에서 $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 삼차함수 $f(x)$를 $f(x) = x(x-1)(ax+b)$ (a, b는 상수, $a \neq 0$)으로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x-1)(ax+b)}{x} = \lim_{x \to 0} (x-1)(ax+b) = (-1) \times b = -b$$

이므로 $-b = 1$에서 $b = -1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)(ax+b)}{x-1} = \lim_{x \to 1} x(ax+b) = 1 \times (a+b) = a+b$$

이므로 $a+b=1$

$b=-1$이므로 $a=2$

따라서 $f(x) = x(x-1)(2x-1)$이므로

$f(2) = 2 \times 1 \times 3 = 6$

답 ②

참고 위의 ㉠, ㉡과 문제의 조건으로부터 $f'(0) = f'(1) = 1$이 됨을 이용하여 삼차함수 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d는 상수, $a \neq 0$)을 구한 후 $f(2)$의 값을 구할 수도 있다.

02 함수의 연속

1. 함수의 연속과 불연속

(1) 함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.

(ii) 극한값 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$가 존재한다.

(iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)=f(a)$

참고 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이다. $\Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to a-} f(x)=\lim\limits_{x \to a+} f(x)=f(a)$

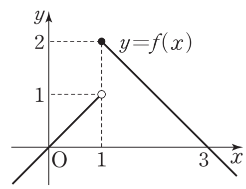
(2) 함수의 불연속

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아닐 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이라고 한다.

예 ① 함수 $f(x)=\begin{cases} x & (x<1) \\ -x+3 & (x \ge 1) \end{cases}$은 $x=1$에서 $f(1)=2$로 정의되어 있지만

$\lim\limits_{x \to 1-} f(x)=\lim\limits_{x \to 1-} x=1$, $\lim\limits_{x \to 1+} f(x)=\lim\limits_{x \to 1+} (-x+3)=2$이므로

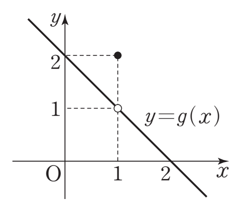
극한값 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$가 존재하지 않는다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.



② 함수 $g(x)=\begin{cases} -x+2 & (x \ne 1) \\ 2 & (x=1) \end{cases}$은 $x=1$에서 $g(1)=2$로 정의되어 있고,

$\lim\limits_{x \to 1} g(x)=\lim\limits_{x \to 1}(-x+2)=1$로 극한값 $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$가 존재하지만 $\lim\limits_{x \to 1} g(x) \ne g(1)$

이다. 따라서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.



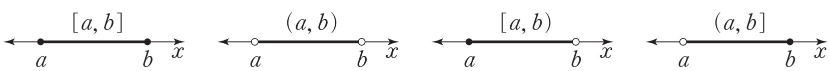
2. 구간

두 실수 a, b $(a<b)$에 대하여

(1) 실수의 집합 $\{x \mid a \le x \le b\}$, $\{x \mid a<x<b\}$, $\{x \mid a \le x<b\}$, $\{x \mid a<x \le b\}$를 구간이라고 하며, 이것을 각각 기호로

$[a,\ b]$, $(a,\ b)$, $[a,\ b)$, $(a,\ b]$

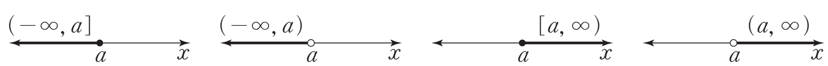
와 같이 나타낸다. 이때 $[a,\ b]$를 닫힌구간, $(a,\ b)$를 열린구간이라고 하며, $[a,\ b)$, $(a,\ b]$를 반닫힌 구간 또는 반열린 구간이라고 한다.



(2) 실수의 집합 $\{x \mid x \le a\}$, $\{x \mid x<a\}$, $\{x \mid x \ge a\}$, $\{x \mid x>a\}$도 구간이라고 하며, 이것을 각각 기호로

$(-\infty,\ a]$, $(-\infty,\ a)$, $[a,\ \infty)$, $(a,\ \infty)$

와 같이 나타낸다.



(3) 실수 전체의 집합은 기호로 $(-\infty,\ \infty)$와 같이 나타낸다.

예제 1 함수의 연속

함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x(x^2-a)}{x-2} & (x\neq2) \\ b & (x=2) \end{cases}$가 $x=2$에서 연속일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

길잡이 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$이다.

풀이 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to2} f(x)=f(2)$이다.

즉, $\lim_{x\to2}\dfrac{x(x^2-a)}{x-2}=b$ …… ㉠

㉠에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2} x(x^2-a)=2(4-a)=0$에서 $a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} b&=\lim_{x\to2}\frac{x(x^2-4)}{x-2} \\ &=\lim_{x\to2}\frac{x(x-2)(x+2)}{x-2} \\ &=\lim_{x\to2} x(x+2) \\ &=2\times4=8 \end{aligned}$$

따라서 $a+b=4+8=12$

답 ②

유제

정답과 풀이 12쪽

1 [23009-0027]

함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+a & (x<-1) \\ 2x+3a & (x\geq-1) \end{cases}$이 $x=-1$에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2 [23009-0028]

함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3x+a}-2}{x-1} & (x\neq1) \\ b & (x=1) \end{cases}$이 $x=1$에서 연속일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\dfrac{3}{2}$ ② $\dfrac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\dfrac{9}{4}$ ⑤ $\dfrac{5}{2}$

02 함수의 연속

3. 구간에서의 연속

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 실수 x에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 연속 또는 그 구간에서 연속함수라고 한다.

(1) 열린구간에서의 연속

함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b)에 속하는 모든 실수 x에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 열린구간 (a, b)에서 연속이라고 한다.

(2) 닫힌구간에서의 연속

함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이라고 한다.

① 함수 $f(x)$는 열린구간 (a, b)에서 연속이다. ② $\lim\limits_{x \to a+} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x \to b-} f(x)=f(b)$

4. 연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 다음 함수도 $x=a$에서 연속이다.

(1) $cf(x)$ (단, c는 상수)

(2) $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$

(3) $f(x)g(x)$

(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a)\neq 0$)

설명 함수의 연속의 정의와 함수의 극한에 대한 성질을 이용하면 연속함수의 성질이 성립함을 보일 수 있다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $\lim\limits_{x \to a} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x \to a} g(x)=g(a)$이므로 함수의 극한에 대한 성질에 의하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

(1) $\lim\limits_{x \to a} cf(x)=c\lim\limits_{x \to a} f(x)=cf(a)$ (c는 상수)이므로 함수 $cf(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

(2) $\lim\limits_{x \to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim\limits_{x \to a} f(x)+\lim\limits_{x \to a} g(x)=f(a)+g(a)$,

$\lim\limits_{x \to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim\limits_{x \to a} f(x)-\lim\limits_{x \to a} g(x)=f(a)-g(a)$

이므로 두 함수 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

(3) $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x)=\lim\limits_{x \to a} f(x)\times\lim\limits_{x \to a} g(x)=f(a)g(a)$이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

(4) $\lim\limits_{x \to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}=\dfrac{f(a)}{g(a)}$ $(g(a)\neq 0)$이므로 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x=a$에서 연속이다.

참고 ① 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 어떤 구간에서 연속이면 함수

$$cf(x)\ (c\text{는 상수}),\ f(x)+g(x),\ f(x)-g(x),\ f(x)g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x)\neq 0)$$

도 그 구간에서 연속이다.

② 함수 $y=x$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 연속함수의 성질 (3)에 의하여 함수

$$y=x^2,\ y=x^3,\ y=x^4,\ \cdots,\ y=x^n\ (n\text{은 2 이상의 자연수})$$

도 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이때 상수함수도 실수 전체의 집합에서 연속이므로 연속함수의 성질 (1), (2)에 의하여 다항함수

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0\ (a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \cdots,\ a_1,\ a_0\text{은 상수})$$

도 실수 전체의 집합에서 연속이다. 즉, 모든 다항함수는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

예제 2 연속함수의 성질

함수 $f(x)=\begin{cases} 3x-5 & (x<1) \\ x^2+9x & (x\geq 1) \end{cases}$에 대하여 함수 $f(x)\{f(x)-a\}$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

길잡이 실수 a에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 $\lim_{x \to a} f(x)g(x)=f(a)g(a)$를 만족시키면 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

풀이 $f(x)=\begin{cases} 3x-5 & (x<1) \\ x^2+9x & (x\geq 1) \end{cases}$에서 $f(x)-a=\begin{cases} 3x-5-a & (x<1) \\ x^2+9x-a & (x\geq 1) \end{cases}$이므로 함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x)\{f(x)-a\}$라 하면

$$g(x)=\begin{cases} (3x-5)(3x-5-a) & (x<1) \\ (x^2+9x)(x^2+9x-a) & (x\geq 1) \end{cases}$$

이다. 이때 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 1-} g(x)=\lim_{x \to 1+} g(x)=g(1)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1-} g(x) &= \lim_{x \to 1-} (3x-5)(3x-5-a) \\ &= \lim_{x \to 1-} (3x-5) \times \lim_{x \to 1-} (3x-5-a) \\ &= (-2)\times(-2-a)=4+2a,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1+} g(x) &= \lim_{x \to 1+} (x^2+9x)(x^2+9x-a) \\ &= \lim_{x \to 1+} (x^2+9x) \times \lim_{x \to 1+} (x^2+9x-a) \\ &= 10\times(10-a)=100-10a,\end{aligned}$$

$g(1)=10(10-a)=100-10a$

이므로 $4+2a=100-10a$

따라서 $a=8$

답 ④

유제

정답과 풀이 13쪽

3 [23009-0029]

두 함수 $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & (x<a) \\ x+5 & (x\geq a) \end{cases}$, $g(x)=x^2-2x-3$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 서로 다른 모든 실수 a의 값의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4 [23009-0030]

이차함수 $f(x)=x^2+6x-10$에 대하여 함수 $\dfrac{f(x)-x^2}{f(x)+k}$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 자연수 k의 최솟값을 구하시오.

02 함수의 연속

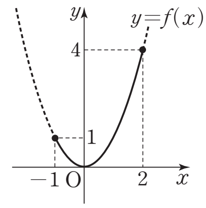
5. 최대 · 최소 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

예 함수 $f(x)=x^2$은 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다. 이때

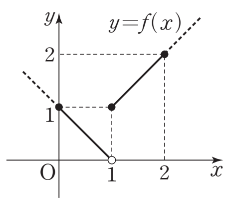
$f(-1)=1,\ f(0)=0,\ f(2)=4$

이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같으므로 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 4, 최솟값은 0이다.



참고 ① 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이 아니면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 최댓값 또는 최솟값을 갖지 않을 수도 있다.

예를 들어 $x=1$에서 불연속인 함수 $f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x<1) \\ x & (x\ge 1)\end{cases}$은 닫힌구간 $[0, 2]$에서 최솟값을 갖지 않는다.



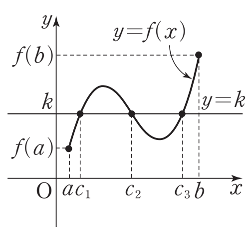
② 함수 $f(x)$가 열린구간 (a, b) 또는 구간 $[a, b)$ 또는 구간 $(a, b]$에서 연속인 경우에는 함수 $f(x)$가 이 구간에서 최댓값 또는 최솟값을 갖지 않을 수도 있다.

예를 들어 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)=x^2$은 열린구간 $(-1, 2)$ 또는 구간 $[-1, 2)$에서 연속이고 두 구간에서 최솟값 $f(0)=0$을 갖지만 두 구간에서 최댓값을 갖지 않는다.

6. 사잇값의 정리

(1) 사잇값의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.



예 함수 $f(x)=x^2$은 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 $f(0)=0,\ f(2)=4$이므로 $f(c)=3$인 c가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

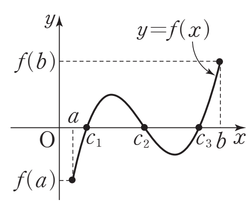
이때 $f(c)=c^2=3$에서 $0<\sqrt{3}<2$인 $c=\sqrt{3}$이 존재한다.

(2) 사잇값의 정리의 활용

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

설명 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르므로 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 값인 0에 대하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.



예제 3 최대 · 최소 정리

함수 $f(x)=\begin{cases} -2x+2a & (x<1) \\ x^2+a & (x\geq 1) \end{cases}$이 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 최솟값 $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$를 가질 때, 함수 $f(x)$의 최댓값을 M이라 하자. $a+M$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

길잡이 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 최대 · 최소 정리에 의하여 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

풀이 $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(-2x+2a)=-2+2a$, $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(x^2+a)=1+a=f(1)$이다.

(i) $-2+2a>1+a$, 즉 $a>3$인 경우

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $x=1$일 때 최솟값 $f(1)=1+a$를 갖는다.

이때 $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)>1+a$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $-2+2a=1+a$, 즉 $a=3$인 경우

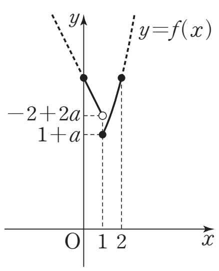
함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이고, 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $x=1$일 때 최솟값 $f(1)=1+a$를 갖는다.

이때 $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=1+a$이므로 조건을 만족시킨다.

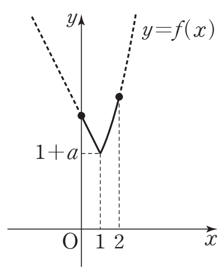
(iii) $-2+2a<1+a$, 즉 $a<3$인 경우

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 최솟값을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

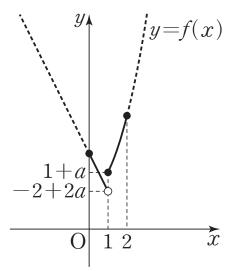
(i) $a>3$인 경우



(ii) $a=3$인 경우



(iii) $a<3$인 경우



(i), (ii), (iii)에서 $a=3$이고 이때 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 연속이므로 최대 · 최소 정리에 의하여 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 반드시 최댓값을 갖는다.

이때 $f(0)=2a=6$, $f(2)=4+a=7$이므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $x=2$일 때 최댓값 7을 갖는다.

따라서 $a+M=3+7=10$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 13쪽

5 [23009-0031]

x에 대한 방정식 $x^3+6x+5=a$는 a의 값에 관계없이 항상 서로 다른 실근의 개수가 1이다. 이 실근이 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재하도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오.

[23009-0032]

1 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 0}\{5f(x)-9\}=2f(0)$$

을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[23009-0033]

2 함수

$$f(x)=\begin{cases} 3x+a & (x<2) \\ b & (x=2) \\ 2x^2+x & (x>2) \end{cases}$$

가 $x=2$에서 연속일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

[23009-0034]

3 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+a}-3}{x-2} & (x\neq 2) \\ b & (x=2) \end{cases}$$

가 $x=2$에서 연속일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{16}{3}$ ② $\frac{17}{3}$ ③ 6 ④ $\frac{19}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

[23009-0035]

4 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x-3 & (x<1) \\ 3x-a & (x\geq 1) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

[23009-0036]

5 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2ax+1 & (x<1) \\ x^2-a^2 & (x\geq 1) \end{cases},\ g(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+a^2 & (x<2) \\ x^2+x & (x\geq 2) \end{cases}$$

에 대하여 두 함수 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$가 모두 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[23009-0037]

6 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x+3 & (x<2) \\ -x & (x\geq 2) \end{cases},\ g(x)=x^2+ax-8$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[23009-0038]

7 모든 자연수 k에 대하여 두 곡선 $y=x^3+k$, $y=2x^2-2x$는 한 점에서만 만난다. 두 곡선의 교점의 x좌표를 α_k라 할 때, $-2<\alpha_k<-1$이 되도록 하는 자연수 k의 개수는?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

Level 2 기본 연습

[23009-0039]

1 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} (x+3)f(x) & (x<2) \\ f(0) & (x=2) \\ (2x-3)f(1-x) & (x>2) \end{cases}$$

가 $x=2$에서 연속일 때, $f(2)$의 값은?

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{9}{4}$ ③ -2 ④ $-\frac{7}{4}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

[23009-0040]

2 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 모든 실수 x에 대하여

$$(x-1)(x-2)f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$$

를 만족시킨다. $f(1)=2$일 때, $f(2)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[23009-0041]

3 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+ax^2+bx-2}{x-1} & (x<1) \\ f(-x) & (x\geq 1) \end{cases}$$

이 $x=1$에서 연속일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

[23009-0042]

4 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이고, $0\le x<3$일 때

$$f(x)=\begin{cases} -x+5 & (0\le x<1) \\ \dfrac{ax+b}{x+1} & (1\le x<3) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(8)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5

[23009-0043]

5 a가 양의 실수일 때, 함수 $f(x)=\begin{cases} x-1 & (x<0) \\ a & (x\ge 0) \end{cases}$에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄴ. $a=1$이면 함수 $|f(x)|$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $xf(x)$는 a의 값에 관계없이 실수 전체의 집합에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[23009-0044]

6 다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은?

(가) 함수 $f(x)$의 모든 항의 계수는 정수이다.

(나) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x}=f(-4)$

(다) 함수 $\dfrac{1}{f(x)}$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

① 60 ② 65 ③ 70 ④ 75 ⑤ 80

[23009-0045]

1 실수 전체의 집합에서 연속이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$인 함수 $f(x)$와 $\lim_{x\to1+}g(x)>\lim_{x\to1-}g(x)$인 함수 $g(x)$가 있다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)\times\left\{\lim_{x\to1+}g(x)-\lim_{x\to1-}g(x)\right\}$의 값을 구하시오.

(가) 함수 $|f(x)g(x)|$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(나) $x<1$일 때 $f(x)g(x)=x^2-2x-8$이고, $x>1$일 때 $\dfrac{g(x)}{f(x)}=3x+1$이다.

[23009-0046]

2 함수

$$f(x)=\begin{cases}|x+2|-1 & (x<-1)\\ |x| & (-1\le x<1)\\ -|x-2|+1 & (x\ge1)\end{cases}$$

에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=1$에서 모두 불연속이다.

ㄴ. 함수 $f(x)\{f(x)+k\}$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값이 존재한다.

ㄷ. 함수 $f(x)f(x-2)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[23009-0047]

3 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x-2}$와 양의 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $|f(x)|=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하고, x에 대한 방정식 $|f(x)|=tx$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 할 때, 두 함수 $g(t)$, $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$는 $t=b$에서만 불연속이다.

(나) 함수 $h(t)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$f(4)+h(4)=-3$일 때, $f(b)$의 값은? (단, a, b는 상수이고, $2a+b\ne0$, $b>0$이다.)

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 함수의 연속의 정의를 이용하여 함수의 미정계수를 구하는 문제, 함수의 그래프를 이용하여 새롭게 정의된 함수의 연속 여부를 판단하는 문제, 연속함수의 성질을 이용하여 함수가 연속이 될 조건을 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

2022학년도 대수능

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때, $f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? **[4점]**

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

출제 의도 연속함수의 성질을 이용하여 함수를 직접 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$에서

$\{f(x)-1\}\{f(x)+x\}\{f(x)-x\}=0$이므로

$f(x)=1$ 또는 $f(x)=-x$ 또는 $f(x)=x$

이때 $f(0)=1$ 또는 $f(0)=0$이므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각하자.

(i) $f(0)=1$일 때

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이므로 $f(x)=1$이다.

그러나 $f(x)=1$이면 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이 될 수 없으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(0)=0$일 때

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(x)=-x$ 또는 $f(x)=x$가 가능하다.

$f(x)=-x$이면 $-1\le x\le 0$에서 $0\le f(x)\le 1$,

$f(x)=x$이면 $0\le x\le 1$에서 $0\le f(x)\le 1$

이므로 함수 $f(x)$의 최댓값이 1, 최솟값이 0이려면

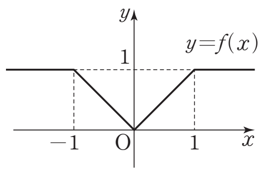
$-1\le x\le 0$에서 $f(x)=-x$, $0\le x\le 1$에서 $f(x)=x$이어야 한다.

또한 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 실수 전체의 집합에서 연속이려면

$x<-1$과 $x>1$에서 $f(x)=1$이어야 한다.

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases}|x| & (|x|\le 1)\\ 1 & (|x|>1)\end{cases}$$



따라서 $f\left(-\frac{4}{3}\right)=1$, $f(0)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$이므로

$$f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1+0+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

답 ③

03 미분계수와 도함수

1. 평균변화율

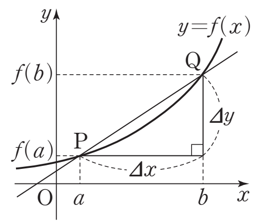
(1) 평균변화율

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때, y의 값은 $f(a)$에서 $f(b)$까지 변한다. x의 값의 변화량 $b-a$를 x의 증분, y의 값의 변화량 $f(b)-f(a)$를 y의 증분이라 하고, 기호로 각각 Δx, Δy와 같이 나타낸다.

또 x의 증분 Δx에 대한 y의 증분 Δy의 비율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

를 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율이라고 한다.



(2) 평균변화율의 기하적 의미

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$, $\mathrm{Q}(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

2. 미분계수

(1) 미분계수

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은

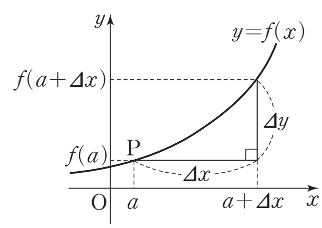
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

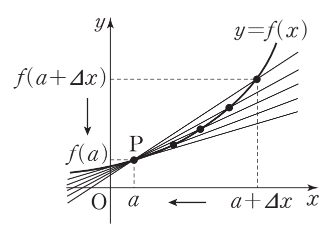
이다. 이때 $\Delta x \to 0$일 때의 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 이 극한값을 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 순간변화율 또는 미분계수라 하고, 이것을 기호로 $f'(a)$와 같이 나타낸다. 즉,

$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$





참고 위의 식에서 $a+\Delta x=x$라 하면 $\Delta x \to 0$일 때 $x \to a$이므로

$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(2) 미분계수의 기하적 의미

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

예 함수 $f(x)=x^2$의 $x=1$에서의 미분계수는

$$f'(1)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{x \to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x \to 1}\frac{x^2-1}{x-1}==\lim_{x \to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$$

이므로 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 2이다.

예제 1 미분계수

다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=2$이고 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-4}{h}=3$일 때, x의 값이 1에서 2까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율을 a, $x=2$에서의 미분계수를 b라 하자. $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

길잡이 다항함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는 $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$이다.

풀이 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-4}{h}=3$에서 $h\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{h\to 0}\{f(2+h)-4\}=0$이고 다항함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$f(2)-4=0$에서 $f(2)=4$

따라서 $a=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{4-2}{2-1}=2$이고

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)=3$이므로 $b=3$

따라서 $a+b=2+3=5$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 20쪽

1 [23009-0048]

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-1}{h}=2$일 때, $f(1)+f'(1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2 [23009-0049]

다항함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 1까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율과 함수 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수가 서로 같을 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{h\{f(1)-f(0)\}}$의 값은? (단, $f(1)\neq f(0)$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

03 미분계수와 도함수

3. 미분가능과 연속

(1) 미분가능

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

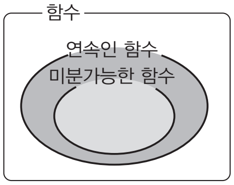
가 존재하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

(2) 미분가능한 함수

함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다. 또한 함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 미분가능한 함수라고 한다.

(3) 미분가능과 연속

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.



참고 위의 명제의 대우는 참이다. 즉, 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

한편, 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이라고 해서 항상 $x=a$에서 미분가능한 것은 아니다.

설명 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $x=a$에서의 미분계수

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

가 존재하므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times(x-a)\right\}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\lim_{x\to a}(x-a)=f'(a)\times 0=0$$

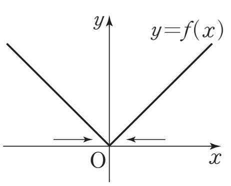
따라서

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}[\{f(x)-f(a)\}+f(a)]=\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}+f(a)=0+f(a)=f(a)$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

예 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않음을 보이자.

(i) $x=0$에서의 연속성



$$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}|x|=\lim_{x\to 0-}(-x)=0,$$

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}|x|=\lim_{x\to 0+}x=0$$

에서 $\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$이므로 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $x=0$에서의 미분가능성

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{|x|-0}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=-1,$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{|x|-0}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=1$$

이므로 $\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$이다. 따라서 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

예제 2 미분가능과 연속

함수 $f(x)=\begin{cases} 2x+a & (x\le 1) \\ x^2+bx+2 & (x>1) \end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

길잡이

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면

(1) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다. $\Longleftrightarrow \lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a+} f(x)=f(a)$

(2) $f'(a)$가 존재한다. $\Longleftrightarrow \lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

풀이

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=1$에서 미분가능하면 된다.

(i) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$이므로

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} (2x+a)=2+a$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+} (x^2+bx+2)=1+b+2=b+3$$

$$f(1)=2+a$$

따라서 $2+a=b+3$이므로

$$a-b=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-} \frac{(2x+a)-(2+a)}{x-1}=\lim_{x\to 1-} \frac{2(x-1)}{x-1}=2,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to 1+} \frac{(x^2+bx+2)-(2+a)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1+} \frac{(x-1)(x+b+1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1+} (x+b+1)=b+2\end{aligned}$$

에서 $2=b+2$, $b=0$

이것을 ㉠에 대입하면 $a=1$이므로

$$a+b=1+0=1$$

답 ④

유제

정답과 풀이 20쪽

3 [23009-0050]

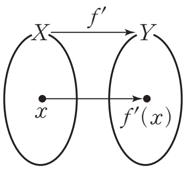
함수 $f(x)=\begin{cases} 2x+a & (x\le 0) \\ x^2+(a^2-2)x+\frac{1}{2}a^2 & (x>0) \end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, 상수 a의 값을 구하시오.

03 미분계수와 도함수

4. 도함수

⑴ 도함수

함수 $y=f(x)$가 정의역에 속하는 모든 x에서 미분가능할 때, 정의역에 속하는 임의의 원소 x에 미분계수 $f'(x)$를 대응시키는 새로운 함수



$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

를 함수 $y=f(x)$의 도함수라 하고, 이것을 기호로

$$f'(x),\ y',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x)$$

와 같이 나타낸다.

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구하는 것을 함수 $f(x)$를 x에 대하여 미분한다고 하고, 그 계산법을 미분법이라고 한다.

참고 ① $f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{h \to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

② 위의 식에서 $x+\Delta x=t$라 하면 $\Delta x \to 0$일 때 $t \to x$이므로

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{t \to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

⑵ 도함수와 미분계수

도함수의 정의에 의하여 $f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$이다. 따라서 함수 $f(x)$에 대하여 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 도함수 $f'(x)$에 $x=a$를 대입하여 얻은 함숫값이다.

예 함수 $f(x)=x^2$의 도함수는

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h \to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &=\lim_{h \to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\\ &=\lim_{h \to 0}\frac{2hx+h^2}{h}\\ &=\lim_{h \to 0}(2x+h)=2x \end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)=x^2$의 $x=2$에서의 미분계수는

$$f'(2)=2\times 2=4$$

예제 3 도함수

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}=-2x^2+4$$

를 만족시킬 때, $f'(x)=ax^2+b$이다. ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

길잡이 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$이다.

풀이

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\times 2\right\}$$

$$=2\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}$$

$$=2f'(x)$$

이므로

$$2f'(x)=-2x^2+4$$

따라서 $f'(x)=-x^2+2$이므로 $a=-1$, $b=2$

즉, $ab=-2$

답 ①

유제

정답과 풀이 20쪽

4 [23009-0051]

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}=3x^2+ax$$

이고 $f'(1)=2$일 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5 [23009-0052]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y)=f(x)+f(y)-xy-f(0)$$

일 때, $f'(0)-f'(-2)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 함수 $y=x^n$ (n은 자연수)와 상수함수의 도함수

(1) $y=x^n$ ($n\geq 2$인 자연수)이면 $y'=nx^{n-1}$

설명 함수 $y=x^n$ ($n\geq 2$인 자연수)에서 $f(x)=x^n$으로 놓으면

$$\begin{aligned}
y'&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)-x\}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+(x+h)^{n-3}x^2+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\}}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+(x+h)^{n-3}x^2+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\}\\
&=\underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}+x^{n-1}}_{n\text{개}}=nx^{n-1}
\end{aligned}$$

(2) $y=x$이면 $y'=1$

(3) $y=c$ (c는 상수)이면 $y'=0$

6. 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

(1) $y=cf(x)$ (c는 상수)이면 $y'=cf'(x)$

(2) $y=f(x)+g(x)$이면 $y'=f'(x)+g'(x)$

(3) $y=f(x)-g(x)$이면 $y'=f'(x)-g'(x)$

(4) $y=f(x)g(x)$이면 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

설명 (2)
$$\begin{aligned}
y'&=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}+\{g(x+h)-g(x)\}}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&=f'(x)+g'(x)
\end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned}
y'&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\times\lim_{h\to 0}g(x+h)+f(x)\times\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

예 ① $(x^2+2x-1)'=(x^2)'+2(x)'-(1)'=2x+2$

② $\{(x^2+1)(2x+3)\}'=(x^2+1)'(2x+3)+(x^2+1)(2x+3)'$

$=2x(2x+3)+(x^2+1)\times 2=6x^2+6x+2$

참고 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 미분가능할 때

① $y=f(x)g(x)h(x)$이면 $y'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

② $y=\{f(x)\}^2$이면 $y'=2f(x)f'(x)$

③ 상수 a에 대하여 다항식 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어지기 위한 필요충분조건은 $f(a)=0$, $f'(a)=0$이다.

예제 4 미분법

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

(가) $f(0)=0$	(나) $f'(1)=f'(3)=2$

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

길잡이 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓고 미분법의 공식을 이용하여 함수 $f(x)$를 구한다.

풀이 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)로 놓으면 조건 (가)에 의하여

$f(0)=c=0$

또한 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로 조건 (나)에 의하여

$f'(1)=3+2a+b=2$에서 $2a+b=-1$ …… ㉠

$f'(3)=27+6a+b=2$에서 $6a+b=-25$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-6$, $b=11$이므로 $f(x)=x^3-6x^2+11x$

따라서 $f(3)=3^3-6\times3^2+11\times3=6$

답 ③

유제

정답과 풀이 21쪽

6 [23009-0053]

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 $f'(1)=4$, $f(-1)=2$일 때, 이차함수 $f(x)$의 최솟값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

7 [23009-0054]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값은?

(가) $f'(1)=5$
(나) $f(x)$가 $(x-2)^2$으로 나누어떨어진다.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Level 1 기초 연습

[23009-0055]

1 함수 $f(x)=x^3-x$에서 x의 값이 -2에서 1까지 변할 때의 평균변화율은?

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

[23009-0056]

2 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(1)=2$일 때, $\lim_{h \to 0}\frac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

[23009-0057]

3 함수 $f(x)=x^2+ax+2$가 $\lim_{x \to 1}\frac{f(x)+b}{x-1}=2f'(2)$를 만족시킬 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -6 ② -7 ③ -8 ④ -9 ⑤ -10

[23009-0058]

4 함수 $f(x)=\begin{cases} 2 & (x \le -1) \\ x^2+ax+b & (x>-1) \end{cases}$이 $x=-1$에서 미분가능할 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[23009-0059]

5 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+a & (x\le a) \\ x+a^2 & (x>a) \end{cases}$의 도함수 $f'(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+f'(a)$의 값은?

(단, a는 상수이다.)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[23009-0060]

6 함수 $f(x)=x^3-2x^2+ax-1$의 그래프 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 기울기가 7일 때, $f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

[23009-0061]

7 함수 $f(x)=x^2-2x$에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)f'(x)}{x-1}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[23009-0062]

8 두 함수 $f(x)=x^2+1$, $g(x)=x^3-2x+3$에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)-4}{x-1}$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[23009-0063]

1 함수 $f(x)=|x^2-1|(x+a)$가 $x=1$에서 미분가능하도록 하는 a의 값을 α, $x=-1$에서 미분가능하도록 하는 a의 값을 β라 할 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[23009-0064]

2 상수 a와 두 자연수 m, n에 대하여 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2mh)-f(a-2nh)}{h}=f(a)\times f'(a)+\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2mnh)-14}{h}$$

를 만족시키도록 하는 모든 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오. (단, $f'(a)\neq 0$)

[23009-0065]

3 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(1)$의 값은?

(가) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{3x^2f(x)+f(x^2)}=3$

(나) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

[23009-0066]

4 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-a}{x^2-4}=2,\ \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{g(x)}=6$$

일 때, 함수 $h(x)=f(x)g(x)$라 하자. $h'(2)=\frac{1}{2}$일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

[23009-0067]

5 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(3)$의 값은?

> (가) $f'(2)=0$
> (나) 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근 0, 1, 2만을 갖는다.

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

[23009-0068]

6 $f(0)=2$, $g(0)=1$인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2,\ \frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=2x+3$$

을 만족시킬 때, $f'(0)\times g'(0)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[23009-0069]

7 삼차함수 $f(x)=ax^3+b$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f'(x)\}^2+xf(x)+x=0$$

을 만족시킬 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{7}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

[23009-0070]

8 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(3)=0$
> (나) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식은 $y=2x$이다.

함수 $g(x)=f(2x)$에 대하여 $g'(-1)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[23009-0071]

1 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

(가) $f(0)=0$

(나) 모든 실수 x에 대하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+\frac{h}{2}\right)f(h)-f(x)f(h)}{h^2}=\frac{3}{2}x^2+2x+\frac{1}{2}$$

이다.

[23009-0072]

2 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$이라 하자. 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\sum_{k=1}^{3}\frac{f(x)}{f'(a_k)\times(x-a_k)}$$

일 때, $g(a_4)$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

[23009-0073]

3 함수 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+2 & (x\le 0)\\ x^2+2 & (x>0)\end{cases}$과 세 정수 a, b, k에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (x\le k)\\ f(x-a)+b & (x>k)\end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b+k$의 최솟값은?

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 극한의 성질과 미분계수의 정의를 이용하여 미분계수를 계산하는 문제, 미분가능과 연속의 관계를 이용하여 함수를 추론하는 문제, 미분법을 이용하여 함수의 도함수를 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

2021학년도 대수능

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)+g(x)}{x}=3,\ \lim_{x \to 0} \frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $h'(0)$의 값은? [4점]

① 27 ② 30 ③ 33 ④ 36 ⑤ 39

출제 의도 극한의 성질과 미분계수의 정의 및 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)+g(x)}{x}=3$에서 $x \to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 0}\{f(x)+g(x)\}=0$이고 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 연속함수이므로

$f(0)+g(0)=0$ …… ㉠

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{f(x)+g(x)}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x)+g(x)-f(0)-g(0)}{x}\\ &= \lim_{x \to 0}\left\{\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{g(x)-g(0)}{x}\right\}\\ &= f'(0)+g'(0)=3 \quad \cdots\cdots \text{㉡}\end{aligned}$$

또 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$에서 $x \to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 0}\{f(x)+3\}=0$이고 다항함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$f(0)+3=0$에서 $f(0)=-3$

㉠에서 $g(0)=3$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{f(x)+3}{xg(x)} &= \lim_{x \to 0}\left\{\frac{f(x)-f(0)}{x}\times\frac{1}{g(x)}\right\}\\ &= \frac{f'(0)}{g(0)}=\frac{f'(0)}{3}=2\end{aligned}$$

에서 $f'(0)=6$

㉡에서 $g'(0)=-3$

따라서 $h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=6\times3+(-3)\times(-3)=27$

답 ①

04 도함수의 활용(1)

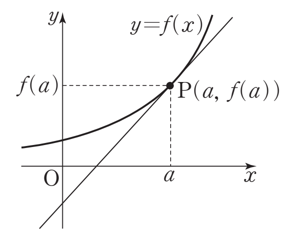
1. 접선의 방정식

(1) 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$



(2) 기울기가 주어진 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 기울기가 m이고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선의 방정식은 다음과 같이 구한다.

① 접점의 좌표를 $(a,\ f(a))$로 놓고 방정식 $f'(a)=m$을 만족시키는 실수 a의 값을 구한다.

② 위의 ①에서 구한 a의 값을 $y-f(a)=m(x-a)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

(3) 곡선 위에 있지 않은 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식

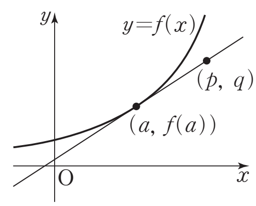
함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 곡선 위에 있지 않은 점 $(p,\ q)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식은 다음과 같이 구한다.

① 접점의 좌표를 $(a,\ f(a))$로 놓는다.

② 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$를 구한다.

③ 점 $(p,\ q)$는 접선 위의 점이므로 위의 ②에서 구한 접선의 방정식에 $x=p$, $y=q$를 대입하여 실수 a의 값을 구한다.

④ 위의 ③에서 구한 a의 값을 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.



예 (1) 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

$f(x)=x^2$이라 하면 $f'(x)=2x$이므로 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-1=2(x-1)$, 즉 $y=2x-1$

(2) 곡선 $y=x^2+x$에 접하고 기울기가 3인 접선의 방정식을 구해 보자.

$f(x)=x^2+x$라 하면 $f'(x)=2x+1$

접점의 좌표를 $(a,\ a^2+a)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 3이므로

$f'(a)=2a+1=3$에서 $a=1$

따라서 기울기가 3인 접선의 접점의 좌표는 $(1,\ 2)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-2=3(x-1)$, 즉 $y=3x-1$

(3) 점 $(0,\ -4)$에서 곡선 $y=x^2-x$에 그은 접선의 방정식을 구해 보자.

$f(x)=x^2-x$라 하면 $f'(x)=2x-1$

접점의 좌표를 $(a,\ a^2-a)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=2a-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2-a)=(2a-1)(x-a)$, 즉 $y=(2a-1)x-a^2$

이 직선이 점 $(0,\ -4)$를 지나므로 $a^2=4$, 즉 $a=-2$ 또는 $a=2$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $a=-2$일 때 $y=-5x-4$, $a=2$일 때 $y=3x-4$

예제 1 접선의 방정식

www.ebsi.co.kr

곡선 $y=x^3-6x+1$ 위의 점 $\mathrm{A}(-1,\ 6)$에서의 접선이 이 곡선과 점 A가 아닌 다른 점 B에서 만날 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선의 기울기는?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

길잡이 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$이다.

풀이 $y=x^3-6x+1$에서 $y'=3x^2-6$이므로 곡선 $y=x^3-6x+1$ 위의 점 $\mathrm{A}(-1,\ 6)$에서의 접선의 방정식은

$y-6=-3(x+1)$, 즉 $y=-3x+3$

이 접선이 곡선 $y=x^3-6x+1$과 만나는 점의 x좌표는

$x^3-6x+1=-3x+3$에서 $x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선의 기울기는

$$3\times2^2-6=6$$

답 ③

유제

정답과 풀이 27쪽

1 [23009-0074]

다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=x^2f(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기가 3일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 y절편은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2 [23009-0075]

곡선 $y=x^3$ 위의 제3사분면에 있는 점에서의 접선이 $y=ax+a$일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{25}{4}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{27}{4}$ ④ 7 ⑤ $\frac{29}{4}$

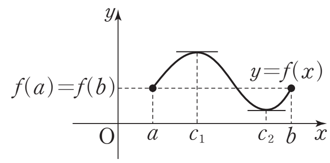
2. 평균값 정리

(1) 롤의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면

$$f'(c)=0$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

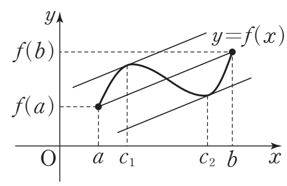


(2) 평균값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.



설명 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하다고 하자.

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$, $\mathrm{Q}(b,\ f(b))$를 지나는 직선 PQ의 방정식은

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

이다. 이때

$$g(x)=f(x)-\left\{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right\}$$

라 하면 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하며 $g(a)=g(b)=0$이다.

따라서 롤의 정리에 의하여

$$g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,\ \text{즉}\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

참고 ① 평균값 정리는 열린구간 (a, b)에서 곡선 $y=f(x)$에 접하고 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선에 평행한 직선이 적어도 하나 존재함을 의미한다.

② 평균값 정리에서 $f(a)=f(b)$인 경우가 롤의 정리이다.

③ 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때, 열린구간 (a, b)에 속하는 모든 x에서 $f'(x)=0$이면 평균값 정리에 의하여 닫힌구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$는 상수함수임을 알 수 있다.

예 함수 $f(x)=x^2$에 대하여 닫힌구간 $[0, 2]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c의 값을 구해 보자.

함수 $f(x)=x^2$은 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{4-0}{2-0}=2=f'(c)$$

인 c가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=2x$이므로 $f'(c)=2c=2$에서 $c=1$이고 $0<1<2$를 만족시킨다.

예제 2 평균값 정리

www.ebsi.co.kr

함수 $f(x)=x^2-2x$에 대하여 닫힌구간 $[-2,\ a]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c가 있다. $c=\frac{a}{4}$일 때, 상수 a의 값은? (단, $a>-2$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

길잡이 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능할 때,
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

풀이 함수 $f(x)=x^2-2x$는 닫힌구간 $[-2,\ a]$에서 연속이고 열린구간 $(-2,\ a)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(a)-f(-2)}{a-(-2)}=f'(c)$$

를 만족시키는 상수 c가 열린구간 $(-2,\ a)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=2x-2$이므로 $\frac{(a^2-2a)-8}{a+2}=2\times\frac{a}{4}-2$에서

$$\frac{a^2-2a-8}{a+2}=\frac{a}{2}-2,\ a^2-2a-8=\left(\frac{a}{2}-2\right)(a+2),\ a^2-2a-8=\frac{a^2}{2}-a-4$$

$$a^2-2a-8=0,\ (a+2)(a-4)=0$$

이때 $a>-2$이므로 $a=4$

답 ④

유제

정답과 풀이 27쪽

3 [23009-0076]

함수 $f(x)=x^3-3x^2-3$에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 평균값 정리를 만족시키는 모든 상수 c의 값의 합은?

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

4 [23009-0077]

두 상수 a, b에 대하여 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+3$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

(가) $f(0)=f(4)$
(나) 닫힌구간 $[2,\ 4]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c의 값은 a이다.

04 도함수의 활용(1)

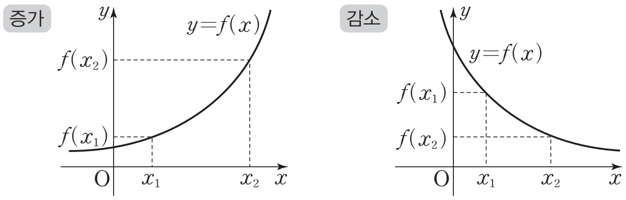
3. 함수의 증가와 감소

(1) 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

① $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)<f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다고 한다.

② $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)>f(x_2)$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다고 한다.



(2) 함수의 증가와 감소의 판정

함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고, 이 구간에 속하는 모든 x에 대하여

① $f'(x)>0$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

② $f'(x)<0$이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

설명 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고 이 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이라 하자.
이 열린구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$일 때, 닫힌구간 $[x_1, x_2]$에서 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c) \quad \cdots\cdots ㉠$$

인 c가 x_1과 x_2 사이에 적어도 하나 존재한다.
그런데 $f'(c)>0$이고 $x_2-x_1>0$이므로 $f(x_2)-f(x_1)>0$이다.
즉, $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)<f(x_2)$이므로 함수 $f(x)$는 이 열린구간에서 증가한다.
같은 방법으로 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에서 미분가능하고 이 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)<0$이라 하면 ㉠에서 $f'(c)<0$이고 $x_2-x_1>0$이므로 $f(x_2)-f(x_1)<0$이다.
따라서 $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)>f(x_2)$이므로 함수 $f(x)$는 이 열린구간에서 감소한다.

참고 ① 일반적으로 위의 명제의 역은 성립하지 않는다.
예를 들어 함수 $f(x)=x^3$은 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하지만 $f'(0)=0$이다.

② 함수 $f(x)$가 상수함수가 아닌 다항함수일 때

㉠ $f(x)$가 어떤 열린구간에서 증가하기 위한 필요충분조건은 이 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이다.

㉡ $f(x)$가 어떤 열린구간에서 감소하기 위한 필요충분조건은 이 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$이다.

예 함수 $f(x)=x^3-12x$에서 $f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$이므로
$f'(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위인 $x<-2$ 또는 $x>2$에서 함수 $f(x)$는 증가하고
$f'(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위인 $-2<x<2$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

예제 3 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)=x^3+3ax^2+(3a+6)x$가 구간 $(0, \infty)$에서 증가하도록 하는 실수 a의 최솟값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

길잡이 다항함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 증가할 때, $f'(x)\geq 0$이다.

풀이 $f(x)=x^3+3ax^2+(3a+6)x$에서

$$f'(x)=3x^2+6ax+3a+6=3(x+a)^2-3a^2+3a+6$$

(i) $-a>0$일 때, 즉 $a<0$일 때

$$-3a^2+3a+6\geq 0,\ a^2-a-2\leq 0,\ (a+1)(a-2)\leq 0$$

이때 $a<0$이므로 $-1\leq a<0$

(ii) $-a\leq 0$일 때, 즉 $a\geq 0$일 때

$$f'(0)=3a+6\geq 0$$

이때 $a\geq 0$이므로 항상 성립한다.

(i), (ii)에서 $a\geq -1$이므로 실수 a의 최솟값은 -1이다.

답 ②

유제

정답과 풀이 27쪽

5 [23009-0078]

함수 $f(x)=-x^3+ax^2-ax$의 역함수가 존재하지 않도록 하는 자연수 a의 최솟값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

6 [23009-0079]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}(1, 5)$, $\mathrm{B}(2, 0)$을 지나고 열린구간 $(-1, 1)$에서 감소할 때, $f(0)$의 최솟값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

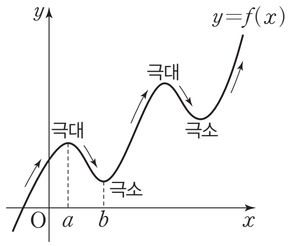
4. 함수의 극대와 극소

(1) 함수의 극대와 극소

① 함수 $f(x)$에서 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여

$$f(x) \le f(a)$$

이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라 하고, 그때의 함숫값 $f(a)$를 극댓값이라고 한다.



② 함수 $f(x)$에서 $x=b$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여

$$f(x) \ge f(b)$$

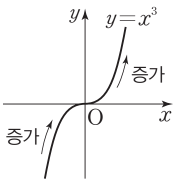
이면 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극소라 하고, 그때의 함숫값 $f(b)$를 극솟값이라고 한다.

이때 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

(2) 극값과 미분계수

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

참고 일반적으로 위의 명제의 역은 성립하지 않는다.
즉, $f'(a)=0$이라고 해서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖는 것은 아니다.
예를 들어 함수 $f(x)=x^3$에서 $f'(0)=0$이지만 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.



(3) 미분가능한 함수 $f(x)$의 극대와 극소의 판정

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

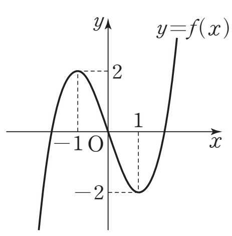
① 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$를 갖는다.

② 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$를 갖는다.

예 함수 $f(x)=x^3-3x$에서 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=2$를 갖고, $x=1$에서 극솟값 $f(1)=-2$를 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



예제 4 함수의 극대와 극소

www.ebsi.co.kr

함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x+4$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 각각 극값을 가질 때, 서로 다른 두 점 $A(\alpha,\ f(\alpha))$, $B(\beta,\ f(\beta))$를 지나는 직선의 기울기는?

① -2 ② -4 ③ -6 ④ -8 ⑤ -10

길잡이 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

풀이 $f(x)=x^3-3x^2-9x+4$에서 $f'(x)=3x^2-6x-9$이므로

$3x^2-6x-9=0$에서 $x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

즉, $x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=3$에서 극값을 가지고

$$f(-1)=(-1)^3-3\times(-1)^2-9\times(-1)+4=9,$$

$$f(3)=3^3-3\times3^2-9\times3+4=-23$$

이므로 두 점 $A(\alpha,\ f(\alpha))$, $B(\beta,\ f(\beta))$를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-23-9}{3-(-1)}=-8$$

답 ④

유제

정답과 풀이 28쪽

7 [23009-0080]

함수 $f(x)=x^3-3x^2+6$의 극댓값을 a, 극솟값을 b라 할 때, $2a-b$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

8 [23009-0081]

함수 $f(x)=x^4-2x^2+ax+b$가 $x=0$에서 극댓값을 가지고 극솟값이 모두 3일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Level 1 기초 연습

[23009-0082]

1 곡선 $y=x^4-x$ 위의 점 $(-1, 2)$에서의 접선의 x절편은?

① $-\frac{1}{5}$ ② $-\frac{2}{5}$ ③ $-\frac{3}{5}$ ④ $-\frac{4}{5}$ ⑤ -1

[23009-0083]

2 곡선 $y=x^3-2x$ 위의 점 $(1, -1)$에서의 접선과 평행하고 곡선 $y=x^3-2x+1$에 접하는 직선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 양의 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[23009-0084]

3 원점에서 곡선 $y=x^3+x^2-1$에 그은 접선의 기울기는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[23009-0085]

4 함수 $f(x)=x^2$에 대하여 닫힌구간 $[n, n+1]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c의 값을 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? (단, n은 자연수이다.)

① 60 ② 65 ③ 70 ④ 75 ⑤ 80

[23009-0086]

5 함수 $f(x)=-x^3+ax^2+5ax+1$이 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$를 만족시키도록 하는 모든 정수 a의 개수는?

① 16　② 17　③ 18　④ 19　⑤ 20

[23009-0087]

6 함수 $f(x)=x^3+x^2-ax+1$이 일대일함수일 때, 실수 a의 최댓값은?

① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{3}$　③ $-\frac{1}{4}$　④ $-\frac{1}{5}$　⑤ $-\frac{1}{6}$

[23009-0088]

7 함수 $f(x)=x^3-12a^2x+1$의 극댓값과 극솟값의 차가 256일 때, 양수 a의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[23009-0089]

8 함수 $f(x)=x^3+ax^2-9x+3$이 $x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 가지고, $\alpha+\beta=2$일 때, $f(\alpha)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

[23009-0090]

1 곡선 $y=|x|(x+1)$에 접하고 기울기가 3인 서로 다른 두 직선 사이의 거리는?

① $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{10}}{2}$

[23009-0091]

2 함수 $f(x)=x^3+(a+4)x^2+(4a+6)x+4a+5$의 그래프가 a의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 P라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a는 실수이다.)

① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{23}{4}$ ④ 6 ⑤ $\frac{25}{4}$

[23009-0092]

3 곡선 $f(x)=x^3-11x+8$ 위의 점 $\mathrm{P}(2, -6)$에서의 접선 l이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 P가 아닌 점은 $\mathrm{Q}(-4, -12)$이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{R}(a, b)$와 접선 l 사이의 거리가 최대일 때, $a+b$의 값은?

(단, $-4<a<2$)

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

[23009-0093]

4 곡선 $f(x)=x^3+x^2$에 접하는 직선 $y=ax+b$가 곡선 $g(x)=x^2$에도 접할 때, $a+3b$의 값은?

(단, a, b는 0이 아닌 상수이다.)

① $-\frac{80}{243}$ ② $-\frac{82}{243}$ ③ $-\frac{28}{81}$ ④ $-\frac{86}{243}$ ⑤ $-\frac{88}{243}$

[23009-0094]

5 실수 a에 대하여 함수 $f(x)=-2x^3+3(a+1)x^2-6ax-3a^2+9a+1$의 극댓값을 $g(a)$라 할 때,

$\lim_{a\to 1-} g'(a)+\lim_{a\to 1+} \dfrac{g'(a)}{a-1}$의 값은?

① -2 ② -4 ③ -6 ④ -8 ⑤ -10

[23009-0095]

6 서로 다른 2개의 동전을 동시에 2번 던졌을 때, k $(k=1,\ 2)$번째에서 앞면이 나온 동전의 개수를 a_k라 하자. 함수 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-2)$가 극댓값 M을 가질 때, M의 최댓값은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[23009-0096]

7 세 실수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3+ax^2+bx+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(2)=0$
(나) 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.
(다) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ f(3))$에서의 접선 l은 점 $(0,\ -4)$를 지난다.

$0<t<3$일 때, 직선 $x=t$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점을 P, 직선 $x=t$와 직선 l이 만나는 점을 Q라 하자. $h(t)=\overline{\mathrm{PQ}}$라 할 때, 함수 $h(t)$의 극댓값은?

① 2 ② $\dfrac{7}{3}$ ③ $\dfrac{8}{3}$ ④ 3 ⑤ $\dfrac{10}{3}$

[23009-0097]

8 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$의 극솟값은 -2이다.
(나) 열린구간 $(a,\ b)$에서 $a<x_1<x_2<b$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>f(x_2)$이다.

a의 최솟값이 -1, b의 최댓값이 3일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은?

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

[23009-0098]

1 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값은?

> (가) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=0$에서 x축에 접한다.
> (나) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2,\ f(-2))$에서 접하고 기울기가 1인 접선이 점 $(2,\ f(2))$를 지난다.

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

[23009-0099]

2 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 상수 p에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)-f'(p)(x-p)-f(p)$$

라 하자. $g(2)=0$이고 함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=1$에서 극값을 가질 때, p의 값은? (단, $p\neq 2$)

① $-\frac{1}{5}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ -1

[23009-0100]

3 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 두 함수 $g(x)$, $h(x)$를

$$g(x)=f(x)\times f'(x),\ h(x)=|g(x)|$$

라 하자. 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근의 합이 2이고 실수 k에 대하여 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}x+k$의 교점의 개수가 5가 되도록 하는 실수 k의 최솟값이 0일 때, 실수 k의 최댓값은 $\frac{a\sqrt{42}-b}{72}$이다. 두 정수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오.

[23009-0101]

4 함수 $f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x+9$에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 함수 $f(x)$는 열린구간 $(1, 2)$에서 증가한다.

ㄴ. $1<x<2$에서 방정식 $f(x)=\frac{1}{2}$은 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. 3보다 큰 모든 실수 a에 대하여 $f(a)<f'(a)\times(a-3)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[23009-0102]

5 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=\begin{cases} -x^2+x & (0<x<1) \\ -x^2+4x-3 & (1\le x\le 3) \end{cases}$

(나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이다.

양의 실수 m에 대하여 함수 $g(x)=f(x)-mx$라 할 때, 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소인 모든 실수 α를 작은 수부터 차례대로 나열한 것을 α_1, α_2, α_3, $\cdots$, α_n, $\cdots$이라 하자. $\alpha_7<6\le\alpha_8$이고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7=18$일 때, $g'\left(\frac{11}{3}\right)$의 값은?

① $-\frac{1}{6}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{5}{6}$

대표 기출 문제

EBS

출제 경향

함수가 실수 전체의 집합에서 증가 또는 감소할 조건을 구하거나 역함수가 존재할 조건을 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

2022학년도 대수능

함수 $f(x)=x^3+ax^2-(a^2-8a)x+3$이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하시오. [3점]

출제 의도 삼차함수가 실수 전체의 집합에서 증가할 조건을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $f(x)=x^3+ax^2-(a^2-8a)x+3$에서

$$f'(x)=3x^2+2ax-(a^2-8a)$$

이때 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

즉, 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}\le 0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=a^2-3(-a^2+8a)=4a^2-24a=4a(a-6)\le 0$$

따라서 $0\le a\le 6$이므로 a의 최댓값은 6이다.

답 6

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 곡선 위의 점 또는 접선의 기울기가 주어졌을 때 접선의 방정식을 구하는 문제 또는 곡선 위에 있지 않은 한 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식을 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

2022학년도 대수능

삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은? [4점]

① -18 ② -17 ③ -16 ④ -15 ⑤ -14

출제 의도 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 점 $(0,\ 0)$이 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$f(0)=0$ …… ㉠

이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(0)\times(x-0)+0$, 즉 $y=f'(0)\times x$ …… ㉡

또 점 $(1,\ 2)$가 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점이므로

$1\times f(1)=2$, 즉 $f(1)=2$ …… ㉢

$y=xf(x)$에서 $y'=f(x)+xf'(x)$이므로 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$$\begin{aligned} y&=\{f(1)+f'(1)\}(x-1)+2 \\ &=\{f'(1)+2\}(x-1)+2 \\ &=\{f'(1)+2\}x-f'(1) \end{aligned}$$ …… ㉣

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq0$, a, b, c, d는 상수)라 하면 ㉠에서 $d=0$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$이므로 ㉢에서 $a+b+c=2$ …… ㉤

㉡과 ㉣에서 두 접선이 일치하므로

$f'(0)=f'(1)+2$, $-f'(1)=0$

즉, $f'(0)=2$, $f'(1)=0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로 $f'(0)=2$에서 $c=2$

㉤에 $c=2$를 대입하면 $a+b=0$ …… ㉥

$f'(x)=3ax^2+2bx+2$이므로 $f'(1)=0$에서 $3a+2b+2=0$

㉥에서 $b=-a$를 위 식에 대입하면 $a=-2$, $b=2$이므로

$f(x)=-2x^3+2x^2+2x$

따라서 $f'(x)=-6x^2+4x+2$이므로

$f'(2)=-24+8+2=-14$

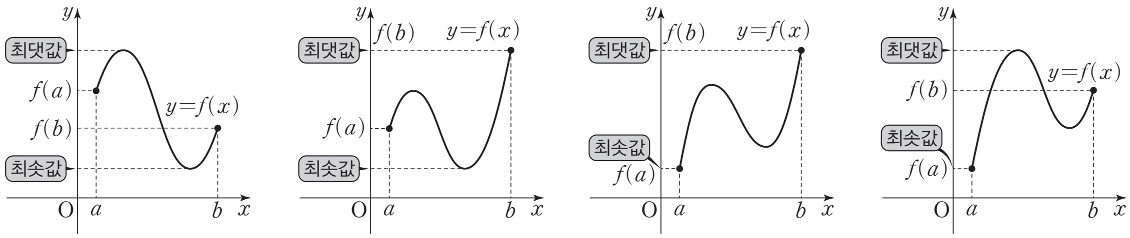
답 ⑤

05 도함수의 활용(2)

1. 함수의 최대와 최소

(1) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이면 최대 · 최소 정리에 의하여 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

이때 닫힌구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 함수 $f(x)$의 최댓값이고, 가장 작은 값이 함수 $f(x)$의 최솟값이다.



(2) 함수의 최대와 최소의 활용

도형의 길이, 넓이, 부피 등의 최댓값 또는 최솟값은 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

① 주어진 조건에 적합한 변수를 정하여 미지수 x로 놓고 x의 값의 범위를 조사한다.

② 도형의 길이, 넓이, 부피 등을 함수 $f(x)$로 나타낸다.

③ 함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 ①에서 구한 x의 값의 범위에서 함수 $f(x)$의 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

2. 방정식에의 활용

(1) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표와 같다. 따라서 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수의 그래프를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

① 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 서로 다른 점의 개수를 구한다.

② 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수

함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 서로 다른 점의 개수를 구한다.

③ 방정식 $f(x)=k$ (k는 상수)의 서로 다른 실근의 개수

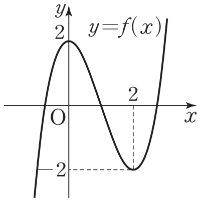
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 구한다.

예 방정식 $x^3-3x^2+2=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구해 보자.

$f(x)=x^3-3x^2+2$라 하면 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$



따라서 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $x^3-3x^2+2=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

예제 1 함수의 최대와 최소

www.ebsi.co.kr

닫힌구간 $[-2, 1]$에서 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① 2 ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

길잡이 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 이 구간에서 함수 $f(x)$의 극댓값, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 함수 $f(x)$의 최댓값이고, 가장 작은 값이 함수 $f(x)$의 최솟값이다.

풀이 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+2$에서 $f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

닫힌구간 $[-2, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	$\frac{11}{3}$	$\searrow$	$-\frac{5}{3}$

닫힌구간 $[-2, 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 $\frac{11}{3}$을 갖고, $x=1$일 때 최솟값 $-\frac{5}{3}$를 갖는다.

따라서 $M=\frac{11}{3}$, $m=-\frac{5}{3}$이므로

$$M+m=\frac{11}{3}+\left(-\frac{5}{3}\right)=2$$

답 ①

유제

정답과 풀이 35쪽

1 [23009-0103]

닫힌구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)=-x^3+3x^2+a$의 최댓값이 8이고 최솟값이 m일 때, m의 값은? (단, a는 상수이다.)

① -20 ② -18 ③ -16 ④ -14 ⑤ -12

2 [23009-0104]

양수 a에 대하여 닫힌구간 $[0, 3a]$에서 함수 $f(x)=x^4-6a^2x^2-8a^3x$의 최댓값이 M이고 최솟값이 -48일 때, a^4+M의 값을 구하시오.

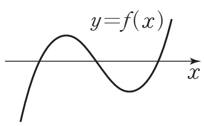
(2) 삼차방정식의 서로 다른 실근의 개수

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 즉 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때, 삼차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 다음과 같다.

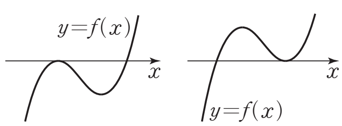
① (극댓값)×(극솟값)<0인 경우: 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같이 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

② (극댓값)×(극솟값)$=0$인 경우: 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같이 x축과 접하고 다른 한 점을 지나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

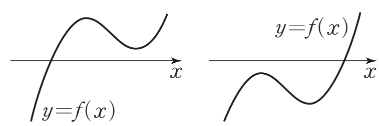
③ (극댓값)×(극솟값)>0인 경우: 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 3]과 같이 x축과 오직 한 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

참고 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않는 경우, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 오직 한 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

3. 부등식에의 활용

함수의 그래프를 이용하여 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립함을 증명할 수 있다.
방정식에서와 마찬가지로 극대, 극소를 이용하여 최댓값 또는 최솟값을 찾으면 된다.

(1) 모든 실수 x에 대하여 성립하는 부등식

① 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$의 증명: ($f(x)$의 최솟값)≥ 0임을 보인다.

② 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq g(x)$의 증명: ($f(x)-g(x)$의 최솟값)≥ 0임을 보인다.

③ 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq k$ (k는 상수)의 증명: ($f(x)$의 최솟값)$\geq k$임을 보이거나 ($f(x)-k$의 최솟값)≥ 0임을 보인다.

(2) $x\geq a$에서 성립하는 부등식

① $x\geq a$에서 $f(x)>0$의 증명: $x\geq a$에서 ($f(x)$의 최솟값)>0임을 보인다.

② $x\geq a$에서 $f(x)<0$의 증명: $x\geq a$에서 ($f(x)$의 최댓값)<0임을 보인다.

(3) 닫힌구간 $[a, b]$에서 성립하는 부등식

닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x)\geq 0$의 증명

① 열린구간 (a, b)에서 $f'(x)\geq 0$이면 $f(a)\geq 0$임을 보인다.

② 열린구간 (a, b)에서 $f'(x)\leq 0$이면 $f(b)\geq 0$임을 보인다.

③ 열린구간 (a, b)에서 함수 $f(x)$의 극값이 존재하면 극값을 고려하여 닫힌구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 구하고 ($f(x)$의 최솟값)≥ 0임을 보인다.

예제 2 방정식과 부등식에의 활용

x에 대한 삼차방정식 $x^3+4x^2-9x-14=x^2+a$가 서로 다른 세 실근을 갖고, 세 실근의 곱이 양수가 되도록 하는 정수 a의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

길잡이 x에 대한 삼차방정식 $f(x)=a$ (a는 상수)가 서로 다른 세 실근을 갖고, 세 실근의 곱이 양수가 되려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나고, 만나는 세 점의 x좌표의 곱이 양수이어야 한다.

풀이 $x^3+4x^2-9x-14=x^2+a$에서

$$x^3+3x^2-9x-14=a$$

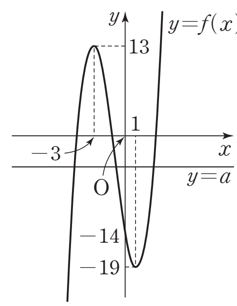
함수 $f(x)$를 $f(x)=x^3+3x^2-9x-14$라 하면

$$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$$

$f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	13	↘	-19	↗



함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 x에 대한 삼차방정식 $x^3+3x^2-9x-14=a$가 서로 다른 세 실근을 갖고, 세 실근의 곱이 양수가 되려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나고, 만나는 세 점의 x좌표의 곱이 양수이어야 한다.

즉, 만나는 세 점의 x좌표 중 두 개는 음수, 한 개는 양수이어야 하므로 $-14<a<13$에서 구하는 정수 a의 최댓값은 12, 최솟값은 -13이다.

따라서 정수 a의 최댓값과 최솟값의 합은

$$12+(-13)=-1$$

답 ②

유제

정답과 풀이 35쪽

3 [23009-0105]

두 함수 $f(x)=x^4+a$, $g(x)=\frac{4}{3}x^3+4x^2-2$에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?

① $-\frac{10}{3}$　② -3　③ $-\frac{8}{3}$　④ $-\frac{7}{3}$　⑤ -2

4 [23009-0106]

두 함수 $f(x)=3x^4+2x^2+a$, $g(x)=4x^3+2x^2-3$이 있다. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\ge g(x)$가 성립하도록 하는 실수 a의 최솟값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

4. 속도와 가속도

(1) 수직선 위를 움직이는 점의 속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $x=f(t)$일 때, 점 P의 시각 t에서의 속도 v는

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

설명 점 P가 수직선 위를 움직일 때, 시각 t에서의 점 P의 위치를 x라 하면 x는 t에 대한 함수이다. 이 함수를 $x=f(t)$라 하면 시각 t에서 $t+\Delta t$까지의 점 P의 위치의 변화량 Δx는

$$\Delta x=f(t+\Delta t)-f(t)$$

이다. 시각 t에서 $t+\Delta t$까지의 점 P의 평균 속도는

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

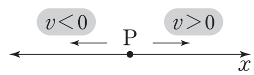
이고, 이것은 함수 $f(t)$의 평균변화율이다.

이때 점 P의 위치 $x=f(t)$의 시각 t에서의 순간변화율을 시각 t에서의 점 P의 순간속도 또는 속도라고 하며 보통 v로 나타낸다.

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=f'(t)$$

참고 속도 v의 부호는 점 P의 운동 방향을 나타낸다.

$v>0$이면 점 P는 양의 방향으로 움직이고, $v<0$이면 점 P는 음의 방향으로 움직인다.



(2) 수직선 위를 움직이는 점의 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 v일 때, 점 P의 시각 t에서의 가속도 a는

$$a=\frac{dv}{dt}$$

설명 점 P의 속도 v도 시각 t에 대한 함수이므로 이 함수의 순간변화율을 생각할 수 있다. 점 P의 시각 t에서의 속도의 순간변화율을 시각 t에서의 점 P의 가속도라고 하며 보통 a로 나타낸다.

$$a=\frac{dv}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

예 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=2t^3-t$일 때,

점 P의 시각 t에서의 속도 v는

$$v=\frac{dx}{dt}=6t^2-1$$

점 P의 시각 t에서의 가속도 a는

$$a=\frac{dv}{dt}=12t$$

따라서 점 P의 시각 $t=1$에서의 속도와 가속도는

$$v=6\times 1^2-1=5$$

$$a=12\times 1=12$$

예제 3 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t ($t>0$)에서의 위치 $x_1(t)$, $x_2(t)$가

$$x_1(t)=t^3-10t^2+6t,\ x_2(t)=-t^3+2t^2-12t$$

이다. 두 점 P, Q의 가속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리는?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

길잡이 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 x일 때, 점 P의 시각 t에서의 속도 v는 $v=\frac{dx}{dt}$이다.

또한 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 v일 때, 점 P의 시각 t에서의 가속도 a는 $a=\frac{dv}{dt}$이다.

풀이 점 P의 시각 t ($t>0$)에서의 위치 $x_1(t)$가 $x_1(t)=t^3-10t^2+6t$이므로 점 P의 속도 $v_1(t)$는

$$v_1(t)=\frac{d}{dt}x_1(t)=3t^2-20t+6$$

점 P의 시각 t에서의 가속도 $a_1(t)$는

$$a_1(t)=\frac{d}{dt}v_1(t)=6t-20$$

점 Q의 시각 t ($t>0$)에서의 위치 $x_2(t)$가 $x_2(t)=-t^3+2t^2-12t$이므로 점 Q의 속도 $v_2(t)$는

$$v_2(t)=\frac{d}{dt}x_2(t)=-3t^2+4t-12$$

점 Q의 시각 t에서의 가속도 $a_2(t)$는

$$a_2(t)=\frac{d}{dt}v_2(t)=-6t+4$$

두 점 P, Q의 가속도가 같아지는 순간은 $6t-20=-6t+4$에서 $t=2$일 때이다.

따라서 시각 $t=2$일 때 점 P의 위치는 $x_1(2)=8-40+12=-20$이고, 점 Q의 위치는 $x_2(2)=-8+8-24=-24$이므로 두 점 P, Q의 가속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$|-24-(-20)|=4$$

답 ②

유제

정답과 풀이 36쪽

5 [23009-0107]

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t ($t\geq0$)에서의 위치 $x(t)$가

$$x(t)=t^3-2t^2-3t$$

이다. 점 P가 시각 $t=0$일 때 원점을 출발한 후 다시 원점을 지나는 순간 점 P의 속도는?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

6 [23009-0108]

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t ($t\geq0$)에서의 위치 $x_1(t)$, $x_2(t)$가

$$x_1(t)=t^3+t^2-5t,\ x_2(t)=3t^2+at$$

이다. 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간 두 점 P, Q가 만날 때, 상수 a의 값은?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

Level 1

기초 연습

[23009-0109]

1 닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+1$의 최솟값은?

① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ -1 ④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{3}$

[23009-0110]

2 닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)=2x^3-9x^2+12x+a$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m<0$이 되도록 하는 모든 정수 a의 개수는?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

[23009-0111]

3 다음 명제가 참이 되도록 하는 두 실수 a, b에 대하여 $b-a$의 최솟값은? (단, $a<b$)

$0\le x\le 3$인 모든 실수 x에 대하여 $a\le 2x^3-3x^2-12x\le b$이다.

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

[23009-0112]

4 x에 대한 삼차방정식 $x^3-4x^2+5x-k=0$이 서로 다른 두 개의 실근만을 갖도록 하는 모든 상수 k의 값의 합은?

① $\frac{101}{27}$ ② $\frac{34}{9}$ ③ $\frac{103}{27}$ ④ $\frac{104}{27}$ ⑤ $\frac{35}{9}$

[23009-0113]

5 함수 $f(x)=|x^3-3x|$에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 네 개의 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값을 구하시오.

[23009-0114]

6 음이 아닌 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^3+3x^2-9x+k>0$이 성립할 때, 정수 k의 최솟값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

[23009-0115]

7 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t>0)$에서의 위치 $x(t)$가

$$x(t)=t^3-2t^2$$

이다. 시각 $t=p$에서의 점 P의 속도가 4일 때, 시각 $t=p$에서의 점 P의 가속도는? (단, p는 상수이다.)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[23009-0116]

8 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$$x_1(t)=t^2-4t+2,\ x_2(t)=2t^3-t^2+4$$

이다. 선분 PQ의 중점 M의 위치가 7인 순간 점 M의 속도는?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

Level 2 기본 연습

[23009-0117]

1 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[-3,\ n]$에서 함수 $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x+1$이 최댓값 5를 갖도록 하는 모든 n의 값의 합은?

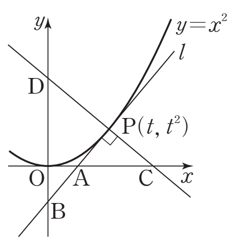
① 1 ② 3 ③ 6 ④ 10 ⑤ 15

[23009-0118]

2 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[-n,\ n]$에서 함수 $f(x)=x^4-4x^2$의 최댓값을 a_n, 최솟값을 b_n이라 하자. $a_nb_n<-100$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 m이라 할 때, a_m-b_m의 값을 구하시오.

[23009-0119]

3 $0<t<1$인 실수 t에 대하여 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$에서의 접선 l이 x축과 만나는 점을 A, y축과 만나는 점을 B라 하자. 또한 점 P를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 C, y축과 만나는 점을 D라 하자. 선분 AC의 길이와 선분 BD의 길이의 차의 최댓값은?



① $\frac{7}{18}$ ② $\frac{23}{54}$ ③ $\frac{25}{54}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{29}{54}$

[23009-0120]

4 실수 a에 대하여 점 $(1,\ a)$에서 곡선 $y=x^3-x$에 그은 서로 다른 접선의 개수를 $f(a)$라 할 때, 함수 $f(a)$가 불연속이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[23009-0121]

5 삼차함수 $f(x)=x^3+(a+1)x^2+ax$의 그래프와 이차함수 $g(x)=x^2+b$의 그래프가 어떤 실수 b에 대하여 서로 다른 세 점에서 만날 때, 자연수 a의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

[23009-0122]

6 1보다 큰 자연수 n에 대하여 정의역이 $\{x\mid 0<x<3\}$인 함수 $f(x)=\log_n x+\log_{n^2}(3-x)-\frac{1}{2}$이 있다. 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)<0$이 되도록 하는 n의 최솟값을 구하시오.

[23009-0123]

7 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t>0)$에서의 위치를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하면

$$f(t)=\frac{1}{3}t^3+t^2+a,\ g(t)=2t^2+3t$$

이다. 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리가 12가 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합을 구하시오.

[23009-0124]

8 정수 m에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\geq 0)$에서의 위치 $x(t)$가

$$x(t)=\frac{1}{2}t^4-3t^2+(7-m)t$$

이다. 점 P가 시각 $t=0$일 때 원점을 출발한 후, 운동 방향이 두 번 바뀌도록 하는 모든 m의 값의 합은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

[23009-0125]

1 함수 $f(x)=\frac{1}{7}x^3-x^2$과 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t,\ t+3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. $0\le t\le 5$에서 함수 $g(t)$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $\frac{22}{7}$ ② $\frac{24}{7}$ ③ $\frac{26}{7}$ ④ 4 ⑤ $\frac{30}{7}$

[23009-0126]

2 곡선 $y=ax^3-2x\ (a>0)$과 원 $x^2+y^2=\frac{1}{27}$의 서로 다른 교점의 개수가 6이 되도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오.

[23009-0127]

3 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\ (t>0)$에서의 위치는 각각

$x_1(t)=t^3+at^2+5t,\ x_2(t)=t^2+bt+c$

이다. 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 $v_1(t),\ v_2(t)$라 하고, 두 점 P, Q의 시각 t에서의 가속도를 각각 $a_1(t),\ a_2(t)$라 할 때, 다음 조건이 성립한다.

(가) 두 점 P, Q가 시각 $t=\alpha\ (\alpha>0)$에서 만나고 $v_1(\alpha)=v_2(\alpha),\ a_1(\alpha)=a_2(\alpha)$이다.
(나) $a_1(4)-a_2(4)=12$

$x_1(\alpha)+x_2(\alpha+1)$의 값은? (단, $a,\ b,\ c$는 상수이다.)

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 함수의 그래프를 이해하여 함수의 최댓값, 최솟값을 구하거나 함수를 추론하는 문제, 방정식의 서로 다른 실근의 개수와 함수의 그래프의 교점의 개수의 관계를 이용하는 문제, 수직선 위를 움직이는 점의 위치, 속도와 가속도에 관련된 문제 등이 출제되고 있다.

2022학년도 대수능 9월 모의평가

함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

출제 의도 미분법을 이용하여 방정식의 실근의 개수가 4가 될 조건을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x)+|f(x)+x|-6x$라 하면

$g(x)=\begin{cases} -7x & (f(x)<-x) \\ 2f(x)-5x & (f(x)\ge -x) \end{cases}$이고, 주어진 방정식은 $g(x)=k$와 같다.

$f(x)=-x$에서 $\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x=-x$, $\frac{x}{2}(x^2-9x+22)=0$

이때 모든 실수 x에 대하여 $x^2-9x+22=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x$는 오직 원점 $(0,\ 0)$에서만 만난다.

따라서 함수 $h(x)$를 $h(x)=2f(x)-5x=x^3-9x^2+15x$라 하면 $g(x)=\begin{cases} -7x & (x<0) \\ h(x) & (x\ge 0) \end{cases}$이다.

$h'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$이므로 $h'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=5$

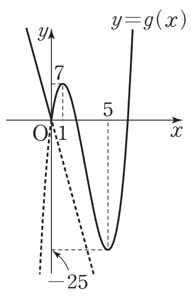
따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $h(1)=1-9+15=7$을 갖고,

$x=5$에서 극솟값 $h(5)=125-225+75=-25$를 갖는다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같고 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되기 위해서는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 서로 다른 교점의 개수가 4이어야 하므로 실수 k의 값의 범위는 $0<k<7$이다.

따라서 모든 정수 k의 값의 합은

$$1+2+3+4+5+6=21$$



답 21

06 부정적분과 정적분

1. 부정적분의 정의

(1) 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$, 즉 $F'(x)=f(x)$일 때 $F(x)$를 $f(x)$의 부정적분이라 하고, 함수 $f(x)$의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$를 적분한다고 한다.

(2) 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 함수 $f(x)$의 모든 부정적분은

$$F(x)+C \ (C\text{는 상수})$$

로 나타낼 수 있고, 이것을 기호로 $\int f(x)dx$와 같이 나타낸다.

즉, $\int f(x)dx=F(x)+C$이다. 이때 상수 C를 적분상수라고 한다.

설명 두 함수 $F(x)$, $G(x)$가 모두 함수 $f(x)$의 부정적분이면 $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=f(x)$이므로

$$\{G(x)-F(x)\}'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

이다. 그런데 도함수가 0인 함수는 상수함수이므로 그 상수를 C라 하면

$$G(x)-F(x)=C \ (C\text{는 상수}),\ \text{즉 } G(x)=F(x)+C$$

이다. 따라서 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $f(x)$의 부정적분은 모두 $F(x)+C$ (C는 상수)로 나타낼 수 있다.

참고 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

① $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}=f(x)$ ② $\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$ (단, C는 적분상수)

2. 함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)와 함수 $y=1$의 부정적분

(1) n이 양의 정수일 때, $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ (단, C는 적분상수)

(2) $\int 1dx=x+C$ (단, C는 적분상수)

3. 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 부정적분이 각각 존재할 때

(1) $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 0이 아닌 상수)

(2) $\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$ (3) $\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

설명 (2) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 부정적분 중 하나를 각각 $F(x)$, $G(x)$라 하면

$\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$이므로

$$\int\{f(x)+g(x)\}dx=F(x)+G(x)+C \ (\text{단, } C\text{는 적분상수}) \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편,

$$\int f(x)dx+\int g(x)dx=\{F(x)+C_1\}+\{G(x)+C_2\} \ (C_1,\ C_2\text{는 적분상수})$$

$$=F(x)+G(x)+C_1+C_2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 우변에서 C_1+C_2는 임의의 상수이므로 $C_1+C_2=C$로 놓으면 ㉠, ㉡에서

$$\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

예제 1 부정적분의 정의와 성질

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=\begin{cases} -3x^2+4x & (x\le 1) \\ 2x-1 & (x>1) \end{cases}$$

이고 $f(2)=4$이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-2, a)$를 지날 때, a의 값은?

① 13　② 14　③ 15　④ 16　⑤ 17

길잡이

(1) 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $\int f(x)dx=F(x)+C$ (단, C는 적분상수)

(2) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a+} f(x)=f(a)$

풀이

$f'(x)=\begin{cases} -3x^2+4x & (x\le 1) \\ 2x-1 & (x>1) \end{cases}$에서

$f(x)=\begin{cases} -x^3+2x^2+C_1 & (x\le 1) \\ x^2-x+C_2 & (x>1) \end{cases}$ (단, C_1, C_2는 적분상수)

$f(2)=4$이므로 $2^2-2+C_2=4$에서 $C_2=2$

또한 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $f(1)=\lim_{x\to 1-}(-x^3+2x^2+C_1)=\lim_{x\to 1+}(x^2-x+2)$에서

$-1+2+C_1=1-1+2$, $C_1=1$

따라서 $f(x)=\begin{cases} -x^3+2x^2+1 & (x\le 1) \\ x^2-x+2 & (x>1) \end{cases}$이므로

$a=f(-2)=8+8+1=17$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 43쪽

1 [23009-0128]

다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=x^2-2x$일 때, $f(a)=f(0)$을 만족시키는 상수 a의 값은? (단, $a\ne 0$)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

2 [23009-0129]

최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 모든 실수 x에 대하여

$$F(x)=f(x)+ax^3-x$$

가 성립한다. $F(1)$의 값은? (단, a는 0이 아닌 상수이다.)

① 3　② $\frac{10}{3}$　③ $\frac{11}{3}$　④ 4　⑤ $\frac{13}{3}$

4. 정적분의 정의

두 실수 a, b를 포함하는 구간에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, $F(b)-F(a)$를 함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라 하고, 이것을 기호로

$$\int_a^b f(x)dx$$

와 같이 나타낸다. 또 $F(b)-F(a)$를 기호

$$\Big[F(x)\Big]_a^b$$

로도 나타낸다. 즉,

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

이다.

참고 (1) 두 함수 $F(x)$, $G(x)$가 모두 함수 $f(x)$의 부정적분일 때, $F(x)=G(x)+C$ (C는 상수)이므로

$$F(b)-F(a)=\{G(b)+C\}-\{G(a)+C\}=G(b)-G(a)$$

(2) 함수 $F(x)$가 함수 $f(x)$의 한 부정적분일 때,

$$\int_a^a f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^a=F(a)-F(a)=0$$

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)=-\{F(a)-F(b)\}=-\Big[F(x)\Big]_b^a=-\int_b^a f(x)dx$$

(3) 정적분의 정의에서 변수를 x 대신 다른 문자를 사용해도 정적분의 값은 변하지 않는다. 즉,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du=\cdots$$

(4) 정적분 $\int_a^b f(x)dx$의 값을 구하는 것을 함수 $f(x)$를 a에서 b까지 적분한다고 한다.

5. 정적분과 미분의 관계

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \ (\text{단, } a<x<b)$$

설명 함수 $f(t)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면 $f(t)$의 a에서 x $(a<x<b)$까지의 정적분은 $\int_a^x f(t)dt=\Big[F(t)\Big]_a^x=F(x)-F(a)$이므로

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=\frac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\}=F'(x)-0=f(x)$$

참고 다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 상수 a에 대하여 $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

예 $\frac{d}{dx}\int_1^x (3t^2-2t+1)dt=3x^2-2x+1$, $\frac{d}{dx}\int_{-1}^x (2u^2+u-3)du=2x^2+x-3$

예제 2 정적분과 미분의 관계

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)=x^3+ax^2+\int_1^x f(t)dt$$

를 만족시킨다. $f(0)=\frac{1}{2}$일 때, $f(a)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

길잡이 다항함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여 $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$, $\int_a^a f(x)dx=0$

풀이 $xf(x)=x^3+ax^2+\int_1^x f(t)dt$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=3x^2+2ax+f(x)$, $xf'(x)=3x^2+2ax$

함수 $f(x)$가 다항함수이므로 $f'(x)=3x+2a$

$f(x)=\int(3x+2a)dx=\frac{3}{2}x^2+2ax+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=\frac{1}{2}$에서 $0+C=\frac{1}{2}$이므로 $C=\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{3}{2}x^2+2ax+\frac{1}{2}$ …… ㉡

한편, ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=1+a$

㉡에서 $f(1)=\frac{3}{2}+2a+\frac{1}{2}=2a+2$이므로

$2a+2=1+a$에서 $a=-1$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}$이므로 $f(a)=f(-1)=\frac{3}{2}+2+\frac{1}{2}=4$

답 ④

유제

정답과 풀이 43쪽

3 [23009-0130]

상수함수가 아닌 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x (t^3-2t)f'(t)dt=\{f(x)\}^2-f(x)$$

를 만족시킬 때, $f(1)+f'(1)$의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

4 [23009-0131]

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_{-1}^x f(t)dt=2x^3+ax^2+b$$

를 만족시킨다. $f(1)=4$일 때, $\int_a^b f(x)dx$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

6. 정적분의 성질

(1) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때

① $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

② $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

③ $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

설명 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 한 부정적분을 각각 $F(x)$, $G(x)$라 하자.

① 상수 k에 대하여 $\{kF(x)\}'=kF'(x)=kf(x)$이므로

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(x)dx&=\Big[kF(x)\Big]_a^b=kF(b)-kF(a)\\&=k\{F(b)-F(a)\}\\&=k\int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

② $\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$이므로

$$\begin{aligned}\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx&=\Big[F(x)+G(x)\Big]_a^b\\&=\{F(b)+G(b)\}-\{F(a)+G(a)\}\\&=\{F(b)-F(a)\}+\{G(b)-G(a)\}\\&=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

예 $$\begin{aligned}\int_0^2 (x^3-3x)dx+\int_0^2 (x^3+3x)dx&=\int_0^2 \{(x^3-3x)+(x^3+3x)\}dx\\&=\int_0^2 2x^3dx=\Big[\frac{1}{2}x^4\Big]_0^2=8-0=8\end{aligned}$$

(2) 함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때,

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

설명 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx&=\Big[F(x)\Big]_a^c+\Big[F(x)\Big]_c^b\\&=\{F(c)-F(a)\}+\{F(b)-F(c)\}\\&=F(b)-F(a)\\&=\int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

예 $\int_{-1}^0 3x^2dx+\int_0^2 3x^2dx=\int_{-1}^2 3x^2dx=\Big[x^3\Big]_{-1}^2=8-(-1)=9$

예제 3 정적분의 성질

www.ebsi.co.kr

a가 자연수일 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax & (0\le x<1) \\ a(2x-x^2) & (1\le x<2) \end{cases}$$

에 대하여 $f(5)$의 최솟값을 구하시오.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.

(나) $\int_2^5 f(x)dx$의 값은 50보다 큰 자연수이다.

길잡이 함수 $f(x)$가 임의의 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때,

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

풀이 조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이므로

$$\int_2^5 f(x)dx=\int_2^3 f(x)dx+\int_3^4 f(x)dx+\int_4^5 f(x)dx$$

$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$$

$$=2\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=2\int_0^1 ax\,dx+\int_1^2 a(2x-x^2)dx$$

$$=a\Big[x^2\Big]_0^1+a\Big[x^2-\frac{1}{3}x^3\Big]_1^2=a(1-0)+a\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{3}a$$

조건 (나)에서 $\int_2^5 f(x)dx=\frac{5}{3}a$는 50보다 큰 자연수이므로 자연수 a는 30보다 큰 3의 배수이어야 한다.

이때 $f(5)=f(3)=f(1)=a$이므로 $f(5)$의 최솟값은 a의 최솟값과 같은 33이다.

답 33

유제

정답과 풀이 43쪽

5 [23009-0132]

$\int_{-1}^{2}(2x^2-2x)dx-\int_{2}^{-1}(x^2+a)dx=8$일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

6 [23009-0133]

다항함수 $f(x)$가

$$\int_1^3 3f(x)dx+\int_1^3 (3x-1)f'(x)dx=0$$

을 만족시킬 때, $\frac{f(3)}{f(1)}$의 값은? (단, $f(1)\neq 0$)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

7. 다항함수의 성질을 이용한 정적분

(1) 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시킬 때,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

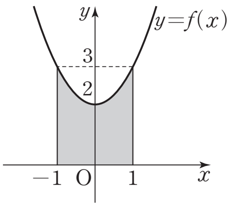
참고 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

예를 들어, 함수 $f(x)=x^2+2$는

$$f(-x)=(-x)^2+2=x^2+2=f(x)$$

이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 y축에 대하여 대칭이다. 이때

$$\int_{-1}^{1} (x^2+2)dx=2\int_{0}^{1} (x^2+2)dx=2\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_0^1=\frac{14}{3}$$



(2) 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킬 때,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$$

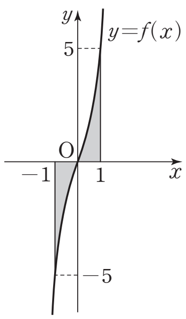
참고 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

예를 들어, 함수 $f(x)=2x^3+3x$는

$$f(-x)=2\times(-x)^3+3\times(-x)=-2x^3-3x=-f(x)$$

이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 원점에 대하여 대칭이다. 이때

$$\int_{-1}^{1} (2x^3+3x)dx=\left[\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{1}=2-2=0$$



예 $$\int_{-3}^{3} (2x^3+x^2-3x-1)dx=\int_{-3}^{3} (2x^3-3x)dx+\int_{-3}^{3} (x^2-1)dx=0+\int_{-3}^{3} (x^2-1)dx=2\int_{0}^{3} (x^2-1)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_0^3=2\times(6-0)=12$$

8. 정적분으로 표시된 함수의 극한

함수 $f(x)$가 실수 a를 포함하는 구간에서 연속일 때

(1) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{a}^{a+h} f(t)dt=f(a)$ (2) $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_{a}^{x} f(t)dt=f(a)$

설명 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

(1) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{a}^{a+h} f(t)dt=\lim_{h\to 0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=F'(a)=f(a)$

(2) $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_{a}^{x} f(t)dt=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=F'(a)=f(a)$

예 (1) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{2}^{2+h} (t^2+3t)dt=2^2+3\times 2=10$

(2) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_{1}^{x} (4t-2)dt=4\times 1-2=2$

예제 4 다항함수의 성질을 이용한 정적분

www.ebsi.co.kr

다항함수 $f(x)$에 대하여

$$f(x)=2x^2+3x+\int_{-1}^{1} tf(t)dt$$

일 때, $\int_{-1}^{1} x^2f(x)dx$의 값은?

① $\frac{16}{15}$　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{8}{5}$　④ $\frac{28}{15}$　⑤ $\frac{32}{15}$

길잡이 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시킬 때, $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$이다.

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킬 때, $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$이다.

풀이 $\int_{-1}^{1} tf(t)dt=a$라 하면 a는 상수이고, $f(x)=2x^2+3x+a$이므로

$$\int_{-1}^{1} tf(t)dt=\int_{-1}^{1} (2t^3+3t^2+at)dt=\int_{-1}^{1} (2t^3+at)dt+\int_{-1}^{1} 3t^2 dt$$

$$=0+2\int_{0}^{1} 3t^2 dt=2\Big[t^3\Big]_0^1=2\times1=2=a$$

따라서 $f(x)=2x^2+3x+2$이므로

$$\int_{-1}^{1} x^2f(x)dx=\int_{-1}^{1} (2x^4+3x^3+2x^2)dx=\int_{-1}^{1} (2x^4+2x^2)dx+\int_{-1}^{1} 3x^3 dx$$

$$=2\int_{0}^{1} (2x^4+2x^2)dx+0=4\int_{0}^{1} (x^4+x^2)dx$$

$$=4\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=4\times\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{32}{15}$$

답 ⑤

유제

정답과 풀이 44쪽

7 [23009-0134]

두 양수 a, b에 대하여 $ab=4$일 때, $\int_{-a}^{a} (3b^2x^2-2abx+ab^3)dx$의 최솟값은?

① 116　② 120　③ 124　④ 128　⑤ 132

8 [23009-0135]

함수 $f(x)=x^2+3x+1$에 대하여 $\lim_{x\to -3} \frac{1}{x+3}\int_{-3}^{x} \{tf(t)\}^2dt$의 값은?

① 3　② 6　③ 9　④ 12　⑤ 15

[23009-0136]

1 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\int f(x)dx=x^3+ax^2-x+C \text{ (}C\text{는 적분상수)}$$

가 성립한다. 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 합이 2일 때, 상수 a의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

[23009-0137]

2 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2-4x+1$이고 함수 $f(x)$의 극댓값이 $\frac{1}{3}$일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은?

① $\frac{1}{27}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{5}{27}$ ④ $\frac{7}{27}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

[23009-0138]

3 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_0^1 f(x)dx=1,\ \int_{-1}^2 f'(x)dx=5$$

일 때, $f(4)$의 값은?

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

[23009-0139]

4 두 실수 a, b가 $a-b=-3$, $ab=8$을 만족시킬 때, $\int_a^b (2ax+b^2)dx$의 값은?

① 91 ② 93 ③ 95 ④ 97 ⑤ 99

[23009-0140]

5 $\int_{0}^{2}\frac{2t}{t+2}dt-\int_{0}^{2}\frac{x^2-8}{x+2}dx$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

[23009-0141]

6 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_{1}^{x}f(t)dt=4x+\int_{1}^{2}x^2f(t)dt+a$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[23009-0142]

7 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+a & (x<1) \\ 4x-2 & (x\geq 1) \end{cases}$$

에 대하여 $\int_{a}^{3}f(x)dx$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

[23009-0143]

8 $\int_{-a}^{a}(x^5-2x^3+3x^2-7)dx=-12$를 만족시키는 모든 양수 a의 값의 합은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

Level 2 기본 연습

[23009-0144]

1 일차항의 계수가 양수인 일차함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $g(x)$라 할 때, $g(0)=0$이다. 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)g(x)=8x^3-6x^2+x$$

가 성립할 때, $f(2)+g(2)$의 값은?

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

[23009-0145]

2 상수함수가 아닌 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

(가) $\int \{f'(x)\}^2 dx = \int (2x-1)f'(x)dx$

(나) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx$

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{7}{6}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[23009-0146]

3 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=3x^2+2x\int_{-1}^{1} f(t)dt+\int_{-1}^{1} tf(t)dt$$

를 만족시킬 때, $f(-4)$의 값을 구하시오.

[23009-0147]

4 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시키고

$$\int_{-3}^{2} f(x)dx=1,\ \int_{2}^{3} f(x)dx=2$$

일 때, $\int_{-2}^{0} f(x)dx$의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

[23009-0148]

5 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 모든 이차함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{-1}^{2} f(x)dx$의 최댓값과 최솟값의 합은?

(가) $f(1)+f(-1)=0$

(나) $-1 \le \int_{0}^{1} f(x)dx \le 1$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[23009-0149]

6 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)+\int_{0}^{x} f(t)dt=x^3+2x+8$$

을 만족시킬 때, $\int_{2}^{3} f(x)dx$의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

[23009-0150]

7 이차함수 $f(x)=ax^2+b$가

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} \int_{0}^{x} tf(t)dt=20$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

[23009-0151]

8 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)=F(x)-2x^3+2x^2$$

이 성립하고, $f(0)=7$이다. $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{1-h}^{1+h} f(t)dt$의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

Level 3 실력 완성

[23009-0152]

1 삼차함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$4F(x)=(x-1)f(x)$$

를 만족시킨다. $\lim_{x \to 0}\frac{f(x)+1}{x}=3$일 때, $f(2)+F(2)$의 값은?

① 1　② $\frac{5}{4}$　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{7}{4}$　⑤ 2

[23009-0153]

2 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)>0,\ \int_{-2}^{2}f(x)dx=0$$

을 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} 0 & (f(x)<0) \\ f(x) & (f(x)\geq 0) \end{cases}$$

이라 할 때, $\int_{0}^{2}g(x)dx=\frac{1}{4}$이다. $f(4)$의 값을 구하시오.

[23009-0154]

3 다음 조건을 만족시키는 모든 일차 이상의 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{0}^{2}f(x)dx$의 최솟값은?

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\int_{1}^{x}f(t)dt=\frac{x-1}{3}\{f(x)+k\}$이다. (단, k는 실수이다.)
(나) x에 대한 방정식 $f(x)=m$이 실근을 갖도록 하는 실수 m의 최솟값은 -4이다.
(다) $f(0)\geq 0$

① $-\frac{16}{3}$　② $-\frac{14}{3}$　③ -4　④ $-\frac{10}{3}$　⑤ $-\frac{8}{3}$

[23009-0155]

4 최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} -f(x) & (f(x)<0) \\ 0 & (f(x)\geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. $h(x)=\int_{1}^{x} g(t)dt$일 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기
ㄱ. $f(x)=x(x-1)(x-2)$이면 $h(3)=\frac{1}{4}$이다.
ㄴ. $h(2)>0$이면 $\alpha>1$이고 $f(\alpha)=0$인 실수 α가 존재한다.
ㄷ. $f(\alpha)=f(\beta)=0$이고 $\alpha\beta<0$이면 $h(\alpha)h(\beta)\geq 0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[23009-0156]

5 최고차항의 계수가 -2이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은?

(가) $\int_{-1}^{0} |f(x)|dx=\int_{0}^{1} f(x)dx$

(나) $\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$

(다) $x\geq 1$이면 $f(x)\leq 0$이다.

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 정적분을 이용하여 함수를 구하는 문제, 정적분의 성질을 이용하여 정적분을 계산하는 문제 등이 출제되고 있다.

2022학년도 대수능

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x)=x$이다.
(나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 $f(x+1)-xf(x)=ax+b$이다.

$60\times\int_{1}^{2}f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

출제 의도 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x)=x$이므로 $f(1)=1$

$f(x+1)-xf(x)=ax+b$의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(1)=b=1$

구간 $[0, \infty)$에서 $f(x+1)-xf(x)=ax+1$이므로 $f(x+1)=xf(x)+ax+1$

이때 $0\le x\le 1$에서 $f(x)=x$이므로 $f(x+1)=x^2+ax+1$

$x+1=t$ $(1\le t\le 2)$라 하면 $x=t-1$이므로

$$f(t)=(t-1)^2+a(t-1)+1=t^2+(a-2)t+2-a$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{t\to 1-}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}=\lim_{t\to 1+}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}$$

$$\lim_{t\to 1-}\frac{t-1}{t-1}=\lim_{t\to 1+}\frac{\{t^2+(a-2)t+2-a\}-1}{t-1}$$

$$=\lim_{t\to 1+}\frac{(t-1)(t+a-1)}{t-1}$$

$$=\lim_{t\to 1+}(t+a-1)=a$$

즉, $a=1$

따라서 $1\le t\le 2$일 때 $f(t)=t^2-t+1$이므로

$$60\times\int_{1}^{2}f(x)dx=60\times\int_{1}^{2}(x^2-x+1)dx=60\times\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{1}^{2}$$

$$=60\times\left(\frac{8}{3}-\frac{5}{6}\right)=60\times\frac{11}{6}=110$$

답 110

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 정적분과 미분의 관계를 이용하여 함수를 구하는 문제, 정적분을 이용하여 극한값을 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

2022학년도 대수능 6월 모의평가

실수 a와 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4 dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

출제 의도 정적분과 미분의 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 실수 a의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $g(x)=f(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt-\int_a^x \{f(t)\}^5 dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt+\{f(x)\}^5-\{f(x)\}^5=f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt$$

$g'(x)=0$에서 $f'(x)=0$ 또는 $\int_a^x \{f(t)\}^4 dt=0$

$f(x)=x^3-12x^2+45x+3$이므로 $f'(x)=3x^2-24x+45=3(x-3)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=3$ 또는 $x=5$

한편, $\int_a^x \{f(t)\}^4 dt=0$인 경우는 $x=a$일 때뿐이다.

(i) $a\neq3$, $a\neq5$일 때, $g'(x)=0$에서 $x=3$ 또는 $x=5$ 또는 $x=a$

$a<3$인 경우 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 조사하면 함수 $g(x)$는 $x=a$, $x=3$, $x=5$에서 극값을 가지므로 조건을 만족시키지 못한다.

마찬가지로 $3<a<5$, $a>5$인 경우에도 함수 $g(x)$는 $x=a$, $x=3$, $x=5$에서 극값을 가지므로 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $a=3$일 때, $g'(x)=0$에서 $x=3$ 또는 $x=5$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 조사하면 함수 $g(x)$는 $x=5$에서만 극값을 가지므로 조건을 만족시킨다.

(iii) $a=5$일 때, $g'(x)=0$에서 $x=3$ 또는 $x=5$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 조사하면 함수 $g(x)$는 $x=3$에서만 극값을 가지므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$3+5=8$

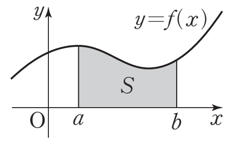
답 8

07 정적분의 활용

1. 곡선과 x축 사이의 넓이

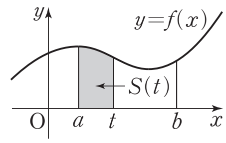
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$



설명 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S를 구해 보자.

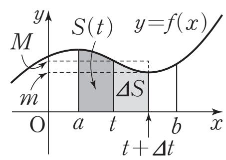
(1) 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x)\geq 0$일 때,
곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=t$ $(a\leq t\leq b)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$라 하자. x의 값이 t에서 $t+\Delta t$까지 변할 때 $S(t)$의 증분을 ΔS라 하면 $\Delta S=S(t+\Delta t)-S(t)$이다.



(i) $\Delta t>0$일 때, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[t, t+\Delta t]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다. 이때 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면

$$m\Delta t\leq \Delta S\leq M\Delta t, \text{ 즉 } m\leq \frac{\Delta S}{\Delta t}\leq M$$

이다.



(ii) $\Delta t<0$일 때, (i)과 같은 방법으로

$$m\leq \frac{\Delta S}{\Delta t}\leq M$$

이다.

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $\Delta t\to 0$이면 $m\to f(t)$, $M\to f(t)$이므로
$\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=f(t)$, 즉 $S'(t)=f(t)$이다. 따라서 $S(t)$는 $f(t)$의 한 부정적분이다. 이때 $S(a)=0$이므로

$$\int_a^t f(x)dx=\Big[S(x)\Big]_a^t=S(t)-S(a)=S(t)$$

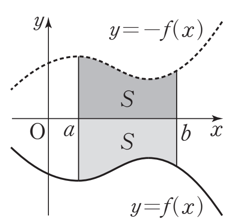
이다. 또 $t=b$일 때 $S(b)=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$이다.

그런데 $S(b)$는 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이이므로 S는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b |f(x)|dx$$

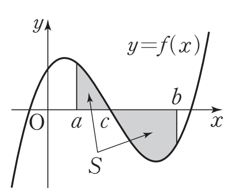
(2) 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x)\leq 0$일 때,
곡선 $y=f(x)$를 x축에 대하여 대칭이동한 곡선 $y=-f(x)$에 대하여 닫힌구간 $[a, b]$에서 $-f(x)\geq 0$이므로 S는 다음과 같다.

$$S=\int_a^b \{-f(x)\}dx=\int_a^b |f(x)|dx$$



(3) 닫힌구간 $[a, c]$에서 $f(x)\geq 0$이고 닫힌구간 $[c, b]$에서 $f(x)\leq 0$일 때, S는 다음과 같다.

$$S=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b \{-f(x)\}dx=\int_a^c |f(x)|dx+\int_c^b |f(x)|dx$$
$$=\int_a^b |f(x)|dx$$



(1), (2), (3)에 의하여 $S=\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$

예제 1 곡선과 x축 사이의 넓이

www.ebsi.co.kr

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

(가) 방정식 $f(x)=0$을 만족시키는 실수 x의 값은 0, 1, 2이다.

(나) $\int_{-1}^{1} f(x)dx=-8$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

길잡이 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_{a}^{b} |f(x)|dx$$

풀이 조건 (가)에서

$$f(x)=ax(x-1)(x-2)=a(x^3-3x^2+2x)\ (a\text{는 0이 아닌 상수})$$

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1} a(x^3-3x^2+2x)dx=2\int_{0}^{1}(-3ax^2)dx$$

$$=2\Big[-ax^3\Big]_0^1=-2a=-8$$

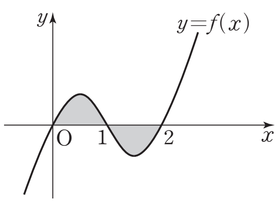
이므로 $a=4$, $f(x)=4(x^3-3x^2+2x)$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{0}^{2} |f(x)|dx=\int_{0}^{1}(4x^3-12x^2+8x)dx+\int_{1}^{2}(-4x^3+12x^2-8x)dx$$

$$=\Big[x^4-4x^3+4x^2\Big]_0^1+\Big[-x^4+4x^3-4x^2\Big]_1^2$$

$$=1+1=2$$



답 ②

유제

정답과 풀이 52쪽

1 [23009-0157]

다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2-6x-4$이고 $f(0)=0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{129}{4}$ ② $\frac{65}{2}$ ③ $\frac{131}{4}$ ④ 33 ⑤ $\frac{133}{4}$

2 [23009-0158]

곡선 $y=|x|(4-|x|)\ (-1\le x\le 1)$과 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

2. 두 곡선 사이의 넓이

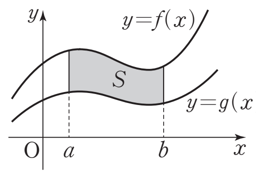
두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

설명 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S를 구해 보자.

(i) 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x)\ge g(x)\ge 0$일 때,

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$
$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

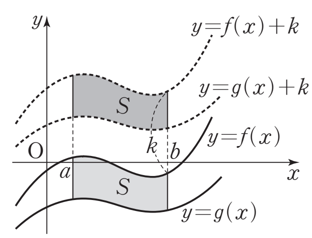


(ii) 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x)\ge g(x)$이고 $f(x)$ 또는 $g(x)$의 값이 음수인 경우가 있을 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하여 닫힌구간 $[a, b]$에서

$$f(x)+k\ge g(x)+k\ge 0$$

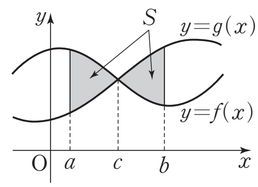
이 되게 한다. 이때 넓이 S는 두 곡선 $y=f(x)+k$, $y=g(x)+k$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$$S=\int_a^b [\{f(x)+k\}-\{g(x)+k\}]dx$$
$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$



(iii) 닫힌구간 $[a, c]$에서 $f(x)\ge g(x)$이고 닫힌구간 $[c, b]$에서 $f(x)\le g(x)$일 때,

$$S=\int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx+\int_c^b \{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=\int_a^c |f(x)-g(x)|dx+\int_c^b |f(x)-g(x)|dx$$
$$=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$



(i), (ii), (iii)에서 $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$

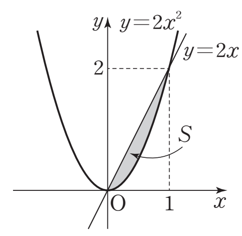
예 곡선 $y=2x^2$과 직선 $y=2x$로 둘러싸인 부분의 넓이 S를 구해 보자.

곡선 $y=2x^2$과 직선 $y=2x$가 만나는 점의 x좌표는

$2x^2=2x$에서 $2x(x-1)=0$, 즉 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^1 |2x^2-2x|dx=\int_0^1 (2x-2x^2)dx$$
$$=\left[x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_0^1=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$



예제 2 두 곡선 사이의 넓이

www.ebsi.co.kr

두 함수 $f(x)=a(x^3-x)$, $g(x)=a(x^2+x)$에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이가 37이 되도록 하는 양수 a의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

길잡이 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는 $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$이다.

풀이 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는

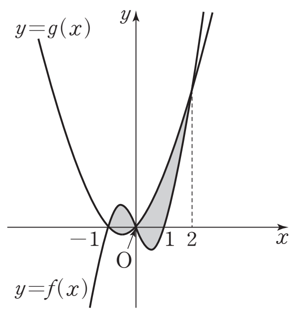
$f(x)=g(x)$에서 $a(x^3-x)=a(x^2+x)$

$a\neq0$이므로 $x^3-x^2-2x=0$, $x(x+1)(x-2)=0$

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{2}|f(x)-g(x)|dx\\&=\int_{-1}^{0}\{f(x)-g(x)\}dx+\int_{0}^{2}\{g(x)-f(x)\}dx\\&=a\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)dx+a\int_{0}^{2}(-x^3+x^2+2x)dx\\&=a\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+a\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{2}\\&=\frac{5}{12}a+\frac{8}{3}a=\frac{37}{12}a\end{aligned}$$



$S=37$에서 $\frac{37}{12}a=37$이므로 $a=12$

답 ④

유제

정답과 풀이 52쪽

3 [23009-0159]

곡선 $y=-x^3+2x^2+3x$ 위의 점 $(1, 4)$에서의 접선을 l이라 할 때, 곡선 $y=-x^3+2x^2+3x$와 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

4 [23009-0160]

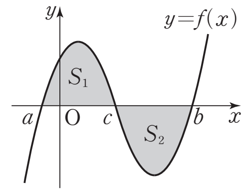
두 함수 $f(x)=\begin{cases}2x+3 & (x<0)\\-2x^2+3 & (x\geq0)\end{cases}$과 $g(x)=x^2$에 대하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ 4

3. 두 곡선으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같은 경우

(1) 곡선과 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같은 경우

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, 그림과 같이 닫힌구간 $[a,\ c]$와 닫힌구간 $[c,\ b]$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때,



$S_1=S_2$이면 $\int_a^b f(x)dx=0$

설명 닫힌구간 $[a,\ c]$에서 $f(x)\ge 0$이고 닫힌구간 $[c,\ b]$에서 $f(x)\le 0$일 때,

$$S_1=\int_a^c f(x)dx,\ S_2=\int_c^b \{-f(x)\}dx=-\int_c^b f(x)dx$$

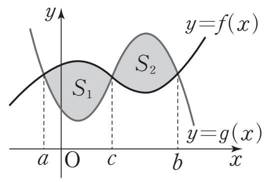
이때 $S_1=S_2$이면 $\int_a^c f(x)dx=-\int_c^b f(x)dx$이므로

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=0$$

따라서 $\int_a^b f(x)dx=0$

(2) 두 곡선으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같은 경우

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, 그림과 같이 닫힌구간 $[a,\ c]$와 닫힌구간 $[c,\ b]$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때,



$S_1=S_2$이면 $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=0$

설명 닫힌구간 $[a,\ c]$에서 $f(x)\ge g(x)$이고 닫힌구간 $[c,\ b]$에서 $f(x)\le g(x)$일 때,

$$S_1=\int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx,\ S_2=\int_c^b \{g(x)-f(x)\}dx=-\int_c^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

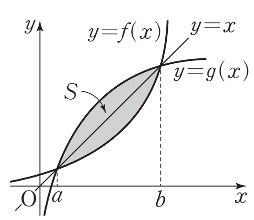
이때 $S_1=S_2$이면 $\int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx=-\int_c^b \{f(x)-g(x)\}dx$이므로

$$\int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx+\int_c^b \{f(x)-g(x)\}dx=0$$

따라서 $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=0$

4. 역함수와 넓이의 관계

역함수가 존재하는 연속인 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 그림과 같이 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 두 점 $(a,\ a)$, $(b,\ b)$에서만 만날 때, 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

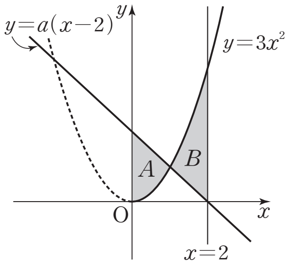


$$S=2\int_a^b |x-f(x)|dx$$

예제 3 두 곡선으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같은 경우

그림과 같이 곡선 $y=3x^2\ (x\geq0)$과 직선 $y=a(x-2)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=3x^2\ (x\geq0)$과 직선 $y=a(x-2)$ 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=B$일 때, 상수 a의 값은? (단, $a<0$)

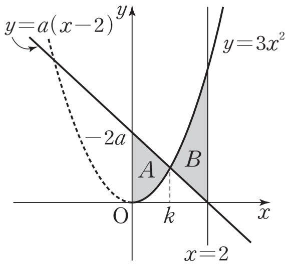
① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1



길잡이 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, $a\leq c\leq b$일 때,
$\int_a^c\{f(x)-g(x)\}dx=\int_c^b\{g(x)-f(x)\}dx$이면 $\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx=0$이다.

풀이 곡선 $y=3x^2\ (x\geq0)$과 직선 $y=a(x-2)$가 만나는 점의 x좌표를 $k\ (0<k<2)$라 하면

$$A=\int_0^k\{a(x-2)-3x^2\}dx,\ B=\int_k^2\{3x^2-a(x-2)\}dx$$



$A=B$에서

$$\int_0^k\{a(x-2)-3x^2\}dx=\int_k^2\{3x^2-a(x-2)\}dx$$

$\int_0^k(3x^2-ax+2a)dx+\int_k^2(3x^2-ax+2a)dx=0$이므로

$$\int_0^2(3x^2-ax+2a)dx=\left[x^3-\frac{a}{2}x^2+2ax\right]_0^2=8-2a+4a=2a+8=0$$

따라서 $a=-4$

답 ②

유제

정답과 풀이 53쪽

5 [23009-0161]

곡선 $y=(x-a)(x-1)^2\ (x\leq a)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 곡선 $y=(x-a)(x-1)^2$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 서로 같을 때, 상수 a의 값은? (단, $0<a<1$)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

6 [23009-0162]

함수 $f(x)=x^2+3\ (x\geq0)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=\frac{1}{4}(x-3)$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

07 정적분의 활용

5. 속도와 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하자.

(1) 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

$$x(t)=x(a)+\int_a^t v(t)dt$$

(2) 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a\leq b)$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_a^b v(t)dt$$

(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a\leq b)$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b |v(t)|dt$$

설명 (1) $\dfrac{d}{dt}x(t)=v(t)$에서 $x(t)$는 $v(t)$의 한 부정적분이므로

$$\int_a^t v(t)dt=\Big[x(t)\Big]_a^t=x(t)-x(a)$$

따라서 $x(t)=x(a)+\int_a^t v(t)dt$

(2) 시각 $t=a$, $t=b$에서의 점 P의 위치가 각각 $x(a)$, $x(b)$이므로 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a\leq b)$까지 점 P의 위치의 변화량은

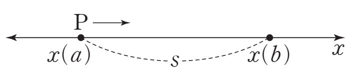
$$x(b)-x(a)=\left\{x(a)+\int_a^b v(t)dt\right\}-x(a)=\int_a^b v(t)dt$$

(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a\leq b)$까지 점 P가 움직인 거리 s는

(ⅰ) 닫힌구간 $[a, b]$에서 $v(t)\geq 0$일 때,

점 P는 양의 방향으로 움직이므로 $s=x(b)-x(a)$이다. 즉,

$$s=x(b)-x(a)=\int_a^b v(t)dt=\int_a^b |v(t)|dt$$

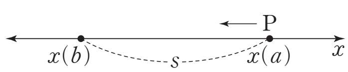


(ⅱ) 닫힌구간 $[a, b]$에서 $v(t)\leq 0$일 때,

점 P는 음의 방향으로 움직이므로 $s=x(a)-x(b)$이다. 즉,

$$s=x(a)-x(b)=-\int_a^b v(t)dt=\int_a^b \{-v(t)\}dt$$

$$=\int_a^b |v(t)|dt$$



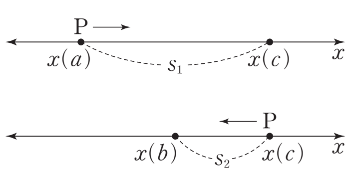
(ⅲ) 닫힌구간 $[a, c]$에서 $v(t)\geq 0$이고, 닫힌구간 $[c, b]$에서 $v(t)\leq 0$일 때,

오른쪽 그림에서 $s=s_1+s_2$이다. 즉,

$$s=s_1+s_2=\{x(c)-x(a)\}+\{x(c)-x(b)\}$$

$$=\int_a^c v(t)dt+\int_c^b \{-v(t)\}dt$$

$$=\int_a^c |v(t)|dt+\int_c^b |v(t)|dt=\int_a^b |v(t)|dt$$



(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $s=\int_a^b |v(t)|dt$

예제 4 속도와 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2+a$$

이다. 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량이 2일 때, 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, a는 상수이다.)

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

길잡이 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 하자.

① 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a\le b)$까지 점 P의 위치의 변화량은 $\int_a^b v(t)dt$

② 시각 $t=a$에서 $t=b$ $(a\le b)$까지 점 P가 움직인 거리 s는 $s=\int_a^b |v(t)|dt$

풀이 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^3 v(t)dt=\int_1^3 (3t^2+a)dt=\Big[t^3+at\Big]_1^3=(27+3a)-(1+a)=26+2a$$

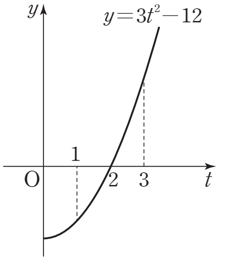
$26+2a=2$에서 $a=-12$

$$v(t)=3t^2-12=3(t+2)(t-2)$$

따라서 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^3 |v(t)|dt=\int_1^3 |3t^2-12|dt=\int_1^2 (-3t^2+12)dt+\int_2^3 (3t^2-12)dt$$

$$=\Big[-t^3+12t\Big]_1^2+\Big[t^3-12t\Big]_2^3=5+7=12$$



답 ③

유제

정답과 풀이 54쪽

7 [23009-0163]

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=t^2-4t$$

이다. 시각 $t=0$에서의 점 P의 위치와 시각 $t=a$에서의 점 P의 위치가 서로 같을 때, 양수 a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

8 [23009-0164]

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=t^3+(a-1)t^2-at$$

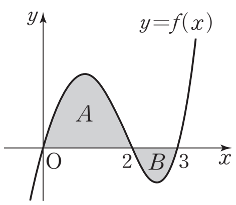
이다. 점 P가 시각 $t=p$ $(p>0)$일 때 움직이는 방향이 바뀌고, 시각 $t=0$에서 $t=p$까지 움직인 거리가 $\frac{1}{3}$일 때, 양수 a의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

[23009-0165]

1 그림과 같이 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 연속인 함수 $f(x)$가 $0\le x\le 2$에서 $f(x)\ge 0$이고 $2\le x\le 3$에서 $f(x)\le 0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 부분 A, B의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자.

$S_2=\frac{1}{4}S_1$, $\int_0^3 f(x)dx=\frac{9}{4}$일 때, $\int_0^3 |f(x)|dx$의 값은?



① $\frac{11}{4}$　② 3　③ $\frac{13}{4}$　④ $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{15}{4}$

[23009-0166]

2 곡선 $y=x^3+2x^2-4x-8$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{58}{3}$　② 20　③ $\frac{62}{3}$　④ $\frac{64}{3}$　⑤ 22

[23009-0167]

3 곡선 $y=x^3+x^2$과 직선 $y=2x$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{11}{4}$　② $\frac{35}{12}$　③ $\frac{37}{12}$　④ $\frac{13}{4}$　⑤ $\frac{41}{12}$

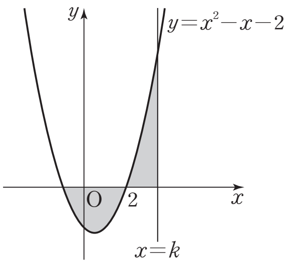
[23009-0168]

4 두 곡선 $y=ax^2$, $y=-ax^2+4a$로 둘러싸인 부분의 넓이가 32일 때, 양수 a의 값은?

① 3　② $3\sqrt{2}$　③ 6　④ $6\sqrt{2}$　⑤ 12

[23009-0169]

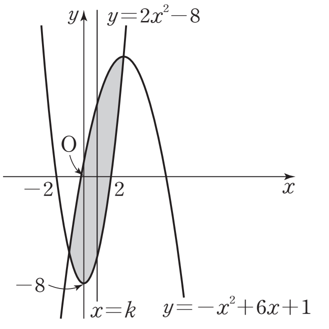
5 그림과 같이 곡선 $y=x^2-x-2$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 곡선 $y=x^2-x-2\ (x\geq 2)$와 x축 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 부분의 넓이가 서로 같을 때, 상수 k의 값은? (단, $k>2$)



① $\frac{5}{2}$　② 3　③ $\frac{7}{2}$　④ 4　⑤ $\frac{9}{2}$

[23009-0170]

6 그림과 같이 두 곡선 $y=2x^2-8$, $y=-x^2+6x+1$로 둘러싸인 부분의 넓이가 직선 $x=k$에 의하여 이등분될 때, 상수 k의 값은?



① $\frac{5}{6}$　② 1　③ $\frac{7}{6}$　④ $\frac{8}{7}$　⑤ $\frac{9}{8}$

[23009-0171]

7 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=\begin{cases} 3t^2 & (0\leq t<1) \\ -t^2+4 & (t\geq 1) \end{cases}$$

이다. 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 움직인 거리는?

① 5　② $\frac{16}{3}$　③ $\frac{17}{3}$　④ 6　⑤ $\frac{19}{3}$

[23009-0172]

8 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 속도를 각각 $v_1(t)$, $v_2(t)$라 할 때,

$$v_1(t)=3t^2-8t,\ v_2(t)=4t+1$$

이다. 출발한 후 두 점 P, Q의 가속도가 서로 같아지는 순간 두 점 P, Q의 위치는 각각 x_1, x_2이다. x_1+x_2의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

[23009-0173]

1 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+b & (x<0) \\ -3 & (0\le x<1) \\ bx^2+12x-4a & (x\ge 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

(단, a, b는 상수이다.)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

[23009-0174]

2 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 x^3-3x^2+2x이고, 함수 $f(x)$의 서로 다른 모든 극값의 합이 $\frac{3}{4}$이다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x)$ 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 2 ② $\frac{32}{15}$ ③ $\frac{34}{15}$ ④ $\frac{12}{5}$ ⑤ $\frac{38}{15}$

[23009-0175]

3 양수 a에 대하여 곡선 $y=x(x-a)$ $(x\ge a)$와 x축 및 직선 $x=2a$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=x(x-a)$ $(x\ge 0)$과 y축 및 직선 $y=2a^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $S_2-S_1=\frac{20}{27}$일 때, a의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[23009-0176]

4 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x}=3$

(나) 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 곱은 -3이다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=f'(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{55}{3}$ ② $\frac{115}{6}$ ③ 20 ④ $\frac{125}{6}$ ⑤ $\frac{65}{3}$

[23009-0177]

5 함수 $f(x)=x^4-(1+a)x^3+ax^2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같도록 하는 모든 양수 a의 값의 합은? (단, $a\neq1$)

① $\frac{11}{5}$ ② $\frac{34}{15}$ ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{12}{5}$ ⑤ $\frac{37}{15}$

[23009-0178]

6 $a<b$인 두 양수 a, b와 함수 $f(x)=(x-a)(x-b)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=-3$과 오직 한 점에서만 만난다. 곡선 $y=f(x)$ $(x\leq a)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $S_2=2S_1$일 때, $f\left(\frac{a+b}{ab}\right)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[23009-0179]

7 함수 $f(x)=x^3-6x^2+12x-12$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $S-\int_0^4 g(x)dx$의 값을 구하시오.

[23009-0180]

8 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t\geq0)$에서의 속도를 각각 $v_1(t)$, $v_2(t)$라 할 때,

$$v_1(t)=2t^3-2t,\ v_2(t)=t^2+4t$$

이다. 시각 t $(0\leq t\leq3)$에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 할 때, $|x_1(t)-x_2(t)|$의 최댓값은?

① 6 ② $\frac{19}{3}$ ③ $\frac{20}{3}$ ④ 7 ⑤ $\frac{22}{3}$

[23009-0181]

1 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)-|f(x)|$$

라 하고, 함수 $h(x)$를 $h(x)=\int_0^x g(t)dt$라 할 때, 두 함수 $g(x)$와 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(0)=0$
> (나) 방정식 $h(x)=0$의 실근은 $x=0$뿐이다.

$f(1)=-1$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

[23009-0182]

2 두 양수 a, k에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^3-2x^2 & (x<a) \\ \frac{1}{2}x^2+k & (x\ge a) \end{cases}$$

는 $x=a$에서 연속이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=a+1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $S_1=8S_2$일 때, $a+k$의 값은?

① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$ ④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

[23009-0183]

3 $a>2$일 때, 실수 전체의 집합에서 증가하고 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x)=-f(x),\ f(x)=f(x-2)+2a$$

를 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이가 2일 때, $\int_3^6 f(x)dx>100$을 만족시키는 자연수 a의 최솟값을 구하시오.

[23009-0184]

4 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(2)=0$, $f'(-2)=0$
(나) $f(2)f(-2)\leq 0$
(다) $f(2)f(-2)<0$이면 $f(0)=0$이다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이가 24일 때, $f(1)$의 최솟값과 최댓값의 합은?

① $-\frac{22}{9}$ ② $-\frac{17}{9}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{7}{9}$ ⑤ $-\frac{2}{9}$

[23009-0185]

5 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(0\leq t\leq 2)$에서의 속도를 각각 $v_1(t)$, $v_2(t)$라 할 때,

$$v_1(t)=-2t^2+4t,\ v_2(t)=-a|t-1|+a$$

이다. $0\leq t\leq 2$에서 점 P가 점 Q보다 항상 원점에 가깝거나 같은 위치에 있도록 하는 양수 a의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

대표 기출 문제

출제 경향 정적분을 이용하여 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 문제, 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

2020학년도 대수능 9월 모의평가

함수 $f(x)=x^2-2x$에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x-1)-1$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{5}{12}$　⑤ $\frac{1}{2}$

출제 의도 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $f(x)=x^2-2x$이므로

$$-f(x-1)-1=-\{(x-1)^2-2(x-1)\}-1=-(x^2-4x+3)-1=-x^2+4x-4$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x-1)-1$의 교점의 x좌표는

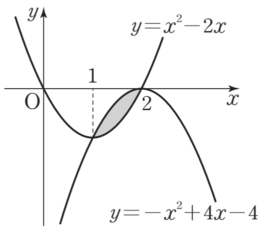
$f(x)=-f(x-1)-1$에서 $x^2-2x=-x^2+4x-4$이므로

$x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$x=1$ 또는 $x=2$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x-1)-1$로 둘러싸인 부분의 넓이는



$$\int_1^2 |f(x)-\{-f(x-1)-1\}|\,dx$$
$$=\int_1^2 \{(-x^2+4x-4)-(x^2-2x)\}dx$$
$$=\int_1^2 (-2x^2+6x-4)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right]_1^2$$
$$=-\frac{4}{3}-\left(-\frac{5}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}$$

답 ③

대표 기출 문제

EBS

출제 경향 수직선 위를 움직이는 점의 속도가 시각 t에 대한 함수 또는 그래프로 주어질 때, 점의 위치 또는 점이 움직인 거리를 구하는 문제 등이 출제되고 있다.

2022학년도 대수능

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여 $x(t)=t(t-1)(at+b)$ $(a\neq0)$이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1|v(t)|dt=2$를 만족시킬 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

ㄱ. $\int_0^1 v(t)dt=0$

ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

ㄷ. $0\le t\le1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

출제 의도 수직선 위를 움직이는 점의 위치와 속도 사이의 관계 및 정적분의 성질을 이해하여 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 ㄱ. $t=0$에서 $x(0)=0$, $t=1$에서 $x(1)=0$이므로 $\int_0^1 v(t)dt=x(1)-x(0)=0$ (참)

ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 $0<t_1<1$에 존재한다고 가정하면 $t=t_1$에서의 점 P와 원점 사이의 거리가 1보다 크다.

즉, 시각 $t=0$에서 시각 $t=t_1$까지 점 P가 움직인 거리가 1보다 크므로 $\int_0^{t_1}|v(t)|dt>1$ …… ㉠

또 시각 $t=1$에서의 점 P의 위치가 원점이므로 시각 $t=t_1$에서 시각 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리가 1보다 크다. 즉, $\int_{t_1}^1|v(t)|dt>1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\int_0^{t_1}|v(t)|dt+\int_{t_1}^1|v(t)|dt=\int_0^1|v(t)|dt>2$이므로 조건을 만족시키지 못한다.

따라서 $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $0\le t\le1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 점 P와 원점 사이의 거리는 모두 1보다 작다.

$x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재하지 않는다고 가정하면 점 P가 시각 $t=0$에서 원점을 출발하여 $t=1$일 때 원점으로 돌아오므로 $0<t<1$에서 점 P의 운동 방향이 한 번만 바뀌어야 한다.

이때의 시각을 $t=p$ $(0<p<1)$이라 하면 $\int_0^p|v(t)|dt<1$, $\int_p^1|v(t)|dt<1$

$\int_0^p|v(t)|dt+\int_p^1|v(t)|dt=\int_0^1|v(t)|dt<2$이므로 조건을 만족시키지 못한다.

따라서 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

고2~N수 수능 집중 로드맵

수능 입문 → 기출 / 연습 → 연계+연계 보완 → 고난도 → 모의고사

수능 입문
- 윤혜정의 개념/패턴의 나비효과
- 수능 감(感)잡기
- 수능특강 Light
- 강의노트 수능개념

기출 / 연습
- 윤혜정의 기출의 나비효과
- 수능 기출의 미래
- 수능 기출의 미래 미니모의고사
- 수능특강Q 미니모의고사

연계+연계 보완
- 수능연계교재의 국어 어휘
- 수능연계교재의 VOCA 1800
- 수능연계 기출 Vaccine VOCA
- 연계: 감수 수능특강 / 감수 수능완성
- 수능특강 사용설명서
- 수능특강 연계 기출
- 수능 영어 간접연계 서치라이트
- 수능완성 사용설명서

고난도
- 수능연계완성 3/4주 특강 고난도·신유형
- 박봄의 사회 · 문화 표 분석의 패턴

모의고사
- FINAL 실전모의고사
- 만점마무리 봉투모의고사
- 고난도 시크릿X 봉투모의고사
- 수능 싱크로 100% 프리미엄 봉투모의고사

구분	시리즈명	특징	수준	영역
수능 입문	윤혜정의 개념/패턴의 나비효과	윤혜정 선생님과 함께하는 수능 국어 개념/패턴 학습		국어
	수능 감(感) 잡기	동일 소재 · 유형의 내신과 수능 문항 비교로 수능 입문		국/수/영
	수능특강 Light	수능 연계교재 학습 전 연계교재 입문서		국/영
	수능개념	EBSi 대표 강사들과 함께하는 수능 개념 다지기		전 영역
기출/연습	윤혜정의 기출의 나비효과	윤혜정 선생님과 함께하는 까다로운 국어 기출 완전 정복		국어
	수능 기출의 미래	올해 수능에 딱 필요한 문제만 선별한 기출문제집		전 영역
	수능 기출의 미래 미니모의고사	부담없는 실전 훈련, 고품질 기출 미니모의고사		국/수/영
	수능특강Q 미니모의고사	매일 15분으로 연습하는 고품격 미니모의고사		전 영역
연계 + 연계 보완	수능특강	최신 수능 경향과 기출 유형을 분석한 종합 개념서		전 영역
	수능특강 사용설명서	수능 연계교재 수능특강의 지문 · 자료 · 문항 분석		국/영
	수능특강 연계 기출	수능특강 수록 작품 · 지문과 연결된 기출문제 학습		국/영
	수능완성	유형 분석과 실전모의고사로 단련하는 문항 연습		전 영역
	수능완성 사용설명서	수능 연계교재 수능완성의 국어 · 영어 지문 분석		국/영
	수능 영어 간접연계 서치라이트	출제 가능성이 높은 핵심만 모아 구성한 간접연계 대비 교재		영어
	수능연계교재의 국어 어휘	수능 지문과 문항 이해에 필요한 어휘 학습서		국어
	수능연계교재의 VOCA 1800	수능특강과 수능완성의 필수 중요 어휘 1800개 수록		영어
	수능연계 기출 Vaccine VOCA	수능-EBS 연계 및 평가원 최다 빈출 어휘 선별 수록		영어
고난도	수능연계완성 3/4주 특강	단기간에 끝내는 수능 킬러 문항 대비서		국/수/영/과
	박봄의 사회 · 문화 표 분석의 패턴	박봄 선생님과 사회 · 문화 표 분석 문항의 패턴 연습		사회탐구
모의고사	FINAL 실전모의고사	수능 동일 난도의 최다 분량, 최다 과목 모의고사		전 영역
	만점마무리 봉투모의고사	실제 시험지 형태와 OMR 카드로 실전 훈련 모의고사		전 영역
	고난도 시크릿X 봉투모의고사	제대로 어려운 최고난도 모의고사		국/수/영
	수능 싱크로 100% 프리미엄 봉투모의고사	수능 직전에 만나는, 수능과 가장 가까운 고품격 프리미엄 모의고사		국/수/영