Ⅰ_1. 다항식의 연산

[10공수1-01-01] 다항식의 사칙연산의 원리를 설명하고, 그 계산을 할 수 있다.

A : 다항식의 사칙연산의 원리를 이해하여 설명할 수 있으며, 그 계산을 수학적 절차에 따라 체계적으로 수행할 수 있다.

B : 다항식의 사칙연산의 원리를 이해하여 설명할 수 있으며, 그 계산을 할 수 있다.

C : 다항식의 사칙연산의 원리를 이해하고, 그 계산을 할 수 있다.

D : 다항식의 사칙연산의 원리를 알고, 간단한 다항식의 계산을 할 수 있다.

E : 안내된 절차에 따라 간단한 다항식의 사칙연산을 할 수 있다.

1 다항식의 정리

두 개 이상의 문제에 대한 다항식은 어떤 문자에 주목하는가에 따라 차수와 동류항, 계수가 달라진다.

☑ 동류항 : 다항식에서 문자와 차수가 각각 같은 항

즉, $x^3-3xy^2+y^2-2$에 대하여 다음과 같다.

문자	차수	동류항	상수항
x에 대한 식	3차	y^2과 -2	y^2-2
y에 대한 식	2차	$-3xy^2$과 y^2, x^3과 -2	x^3-2
x, y에 대한 식	3차	없다	-2

$\boxed{2}$ 다항식의 덧셈과 뺄셈

(1) 세 다항식 A, B, C에 대하여 다음 법칙이 성립한다.

① 교환법칙 : $A+B=B+A$

② 결합법칙 : $(A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C$

(2) 더하는 식은 그대로 더하고,
빼는 식은 각 항의 부호를 바꾸어서 더한 후
동류항끼리 정리한다.

$\boxed{3}$ 다항식의 곱셈

(1) 세 다항식 A, B, C에 대하여 다음 법칙이 성립한다.

① 교환법칙 : $AB=BA$

② 결합법칙 : $(AB)C=A(BC)=ABC$

③ 분배법칙 : $A(B+C)=AB+AC$

$(A+B)C=AC+BC$

$$A(C+D)=AC+AD$$

$$(A+B)(C+D)=AC+AD+BC+BD$$

(2) 다항식의 곱셈은 지수법칙과 분배법칙을 이용하여
간단히 한다.

$\boxed{4}$ 곱셈 공식 ❶

(o) $m(a+b)=ma+mb$, $m(a-b)=ma-mb$

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(2) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(3) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(4) $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

(5) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

(6) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(7) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

$\boxed{4}$ 곱셈 공식 ❷

(8) $(x+a)(x+b)(x+c)$

$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

(9) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

(10) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=a^3+b^3+c^3-3abc$

(11) $(a+b)(b+c)(c+a)$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

5 곱셈 공식의 변형 ❶

✡ a, b에 대한 식의 변형

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

(2) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$, $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

(3) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

(4) $a^4+b^4=\left(a^2+b^2\right)^2-2(ab)^2$

(5) $a^5+b^5=\left(a^2+b^2\right)\left(a^3+b^3\right)-(ab)^2(a+b)$

(6) $a^7+b^7=\left(a^3+b^3\right)\left(a^4+b^4\right)-(ab)^3(a+b)$

5 곱셈 공식의 변형 ❷

✡ a, b, c에 대한 식의 변형

(7) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

(8) $ab+bc+ca=\dfrac{1}{2}\left\{(a+b+c)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)\right\}$

(9) $a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)+3abc$

(10) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\dfrac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}$

$=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)$

5 곱셈 공식의 변형 ❸

(11) $a^4+b^4+c^4$

$$=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$

(12) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

$$=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$$

(13) $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

$$=\frac{1}{2}\left\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\right\}$$

(14) $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)=(ax-by)^2+(ay+bx)^2$

$$=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$$

5 곱셈 공식의 변형 ❹

(15) $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

$$=a\left(b^2+c^2\right)+b\left(c^2+a^2\right)+c\left(a^2+b^2\right)$$

$$=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(a^3+b^3+c^3\right)$$

$$=(a+b)(b+c)(c+a)-2abc$$

$$=(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$$

✡ 기타 식의 변형

(16) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$

(17) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

✡ 대칭식

(1) x^3+y^3, x^2-xy+y^2, $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$와 같이 x, y의 자리를 서로 바꾸어도 변하지 않는 식을 '대칭식'이라 한다.

(2) 두 문자 x, y에 대한 기본 대칭식

$\Rightarrow x+y,\ xy$

세 문자 x, y, z에 대한 기본 대칭식

$\Rightarrow x+y+z,\ xy+yz+zx,\ xyz$

(3) 다항식인 대칭식은 모두 기본 대칭식에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

6 다항식의 나눗셈 ❶

(1) 다항식의 나눗셈 : 각 다항식을 내림차순으로 정리한 다음 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다.

$x-5$	← 몫 →	13	
$x+2\,\overline{)\,x^2-3x-7}$		$12\,\overline{)\,165}$	
$\underline{x^2+2x}$	$\leftarrow (x+2)\times x$	$\underline{12}$	$\leftarrow 12\times 1$
$-5x-7$		45	
$\underline{-5x-10}$	$\leftarrow (x+2)\times(-5)$	$\underline{36}$	$\leftarrow 12\times 3$
3	← 나머지 →	9	

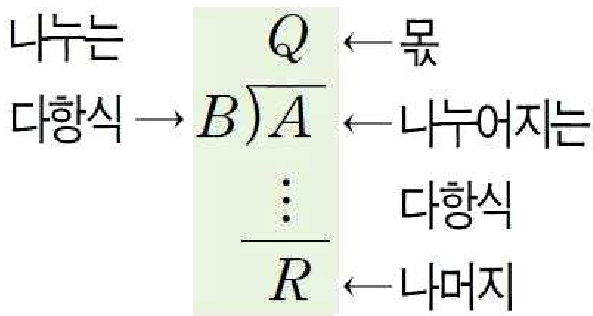
$\therefore\ x^2-3x-7=(x+2)(x-5)+3,\quad 165=12\times13+9$

6 다항식의 나눗셈 ❷

(2) 다항식의 나눗셈 정리 : 다항식 A를 다항식 B($B \neq 0$)로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R이라 하면

$$A = BQ + R \quad (\text{단, } (R\text{의 차수}) < (B\text{의 차수}))$$

특히 $R = 0$, 즉 $A = BQ \Leftrightarrow A$는 B로 나누어떨어진다.



☑ Q : 몫(Quotient)

R : 나머지(Remainder)

예 나눗셈 $(2x^2 - 3x + 1) \div (2x + 1)$에서 몫은 $x - 2$이고 나머지는 $3 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = (2x + 1)(x - 2) + 3$