www.ebs*i*.co.kr

수능특강 수학영역 **확률과 통계**

정답과 풀이

01 여러 가지 순열

유제 본문 5~9쪽

1 ③ 2 16 3 ② 4 150 5 27
6 ⑤

Level 1 기초 연습 본문 10~11쪽

1 ③ 2 ② 3 24 4 ① 5 ③
6 ⑤ 7 ⑤ 8 ③

Level 2 기본 연습 본문 12쪽

1 ④ 2 ① 3 ③ 4 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 13쪽

1 ⑤ 2 ② 3 ④

02 중복조합과 이항정리

유제 본문 17~23쪽

1 ① 2 126 3 ⑤ 4 ④ 5 ②
6 ④ 7 ② 8 ②

Level 1 기초 연습 본문 24~25쪽

1 ④ 2 ① 3 ② 4 ⑤ 5 ⑤
6 ④ 7 ② 8 ②

Level 2 기본 연습 본문 26쪽

1 ⑤ 2 420 3 ② 4 ③

Level 3 실력 완성 본문 27쪽

1 ④ 2 ① 3 486

03 확률의 뜻과 활용

유제 본문 31~37쪽

1 ④ 2 ③ 3 ③ 4 ④ 5 ③
6 ⑤ 7 ②

Level 1 기초 연습 본문 38쪽

1 ⑤ 2 ① 3 ④ 4 ④ 5 31

Level 2 기본 연습 본문 39~40쪽

1 ③ 2 ③ 3 ② 4 ④ 5 ①
6 ⑤ 7 ① 8 ②

Level 3 실력 완성 본문 41쪽

1 247 2 301 3 ①

04 조건부확률

유제 본문 45~51쪽

1 ② 2 107 3 ④ 4 14 5 ③
6 98

Level 1 기초 연습 본문 52쪽

1 ⑤ 2 ② 3 ③ 4 ② 5 ③

Level 2 기본 연습 본문 53~54쪽

1 ④ 2 ③ 3 ② 4 ④ 5 ④
6 ⑤ 7 14 8 ②

Level 3 실력 완성 본문 55쪽

1 155 2 ③ 3 496

05 이산확률변수의 확률분포

유제 본문 59~67쪽

1 ④ 2 ⑤ 3 ③ 4 ④ 5 ⑤
6 ④ 7 ③ 8 ② 9 ① 10 ①

Level 1 기초 연습 본문 68쪽

1 ⑤ 2 ④ 3 ② 4 ③ 5 5

Level 2 기본 연습 본문 69~70쪽

1 ③ 2 ① 3 43 4 ⑤ 5 ⑤
6 ④ 7 ⑤ 8 ②

Level 3 실력 완성 본문 71쪽

1 ④ 2 ③ 3 ⑤ 4 281

06 연속확률변수의 확률분포

유제 본문 75~81쪽

1 ⑤ 2 ⑤ 3 ③ 4 ③ 5 ⑤
6 ③ 7 ④ 8 ③

Level 1 기초 연습 본문 82쪽

1 ④ 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤

Level 2 기본 연습 본문 83~84쪽

1 ③ 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ③
6 ④ 7 ⑤ 8 ③

Level 3 실력 완성 본문 85쪽

1 ④ 2 ⑤ 3 ③

07 통계적 추정

유제 본문 89~95쪽

1 ① 2 39 3 ① 4 34 5 ③
6 ② 7 196

Level 1 기초 연습 본문 96쪽

1 ③ 2 ① 3 ② 4 ③ 5 ④

Level 2 기본 연습 본문 97~98쪽

1 ① 2 ① 3 ② 4 ⑤ 5 83
6 26 7 ③ 8 ④

Level 3 실력 완성 본문 99쪽

1 ⑤ 2 16 3 ②

01 여러 가지 순열

유제 본문 5~9쪽

1 ③ 2 16 3 ② 4 150 5 27
6 ⑤

1 서로 다른 따뜻한 음료 3잔을 원 모양의 식탁 위에 원형으로 놓는 경우의 수는
$(3-1)!=2!=2$
이 각각에 대하여 따뜻한 음료 3잔의 사이 사이 3곳에 서로 다른 차가운 음료 3잔을 각각 1잔씩 놓는 경우의 수는
$3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는
$2\times6=12$

답 ③

2 $1+2+3+4+5+6=21$
이므로 빗변을 공유하는 두 직각삼각형에 놓인 두 개의 접시에 적혀 있는 두 수의 합은 7이다.
1과 6, 2와 5, 3과 4가 적혀 있는 접시를 각각 하나로 생각하여 서로 다른 3개를 원형으로 배열하는 경우의 수는
$(3-1)!=2!=2$
이 각각에 대하여 두 개의 접시의 위치를 서로 바꾸는 경우의 수는
$2!\times2!\times2!=8$
따라서 구하는 경우의 수는
$2\times8=16$

답 16

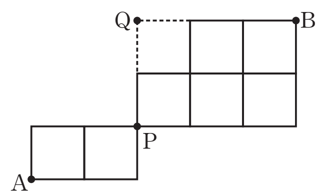
3 양 끝에 나열되는 두 개의 문자를 택하는 경우의 수는 네 개의 문자 a, b, c, d에서 서로 다른 두 개를 택하는 순열의 수와 같으므로
${}_4P_2=4\times3=12$
이 각각에 대하여 양 끝을 제외한 나머지 세 곳에 나열되는 문자를 택하는 경우의 수는 네 개의 문자 a, b, c, d에서 중복을 허락하여 세 개를 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_4\Pi_3=4^3=64$
따라서 구하는 경우의 수는
$12\times64=768$

답 ②

4 서로 다른 볼펜 다섯 자루를 세 명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 5개를 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_3\Pi_5=3^5=243$
서로 다른 세 명 중에서 두 명을 택한 후, 택한 두 명에게 서로 다른 볼펜 다섯 자루를 남김없이 나누어 줄 때 두 명 모두에게 적어도 볼펜 한 자루씩 나누어 주는 경우의 수는
${}_3C_2\times({}_2\Pi_5-2)=3\times(2^5-2)=90$
서로 다른 볼펜 다섯 자루를 세 명 중 한 명에게 남김없이 주는 경우의 수는
${}_3C_1=3$
따라서 구하는 경우의 수는
$243-90-3=150$

답 150

5 그림과 같이 P지점을 정하고 Q지점에 도로망이 연결되어 있다고 하자.



A지점에서 출발하여 P지점을 지나 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
$\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{5!}{3!2!}=30$
A지점에서 출발하여 P지점과 Q지점을 지나 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
$\dfrac{3!}{2!}\times1\times1=3$
따라서 구하는 경우의 수는
$30-3=27$

답 27

6 문자 a, a, b, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\dfrac{5!}{2!3!}=10$

이 각각에 대하여 문자와 문자 사이 및 양 끝 중 두 곳을 선택하되 선택한 두 곳 사이에 2개의 문자가 있도록 선택한 후 선택한 두 곳에 c와 d를 놓는 경우의 수는

$4\times2!=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times8=80$

답 ⑤

다른 풀이

c와 d 사이에 들어갈 2개의 문자는

a, a 또는 b, b 또는 a, b이다.

(ⅰ) c와 d 사이에 들어갈 2개의 문자가 a, a인 경우

$caad$를 하나의 문자 x로 생각하여 x, b, b, b를 일렬로 나열한 후, 이 각각에 대하여 c와 d가 서로 위치를 바꿀 수 있으므로 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}\times2!=4\times2=8$

(ⅱ) c와 d 사이에 들어갈 2개의 문자가 b, b인 경우

$cbbd$를 하나의 문자 x로 생각하여 x, a, a, b를 일렬로 나열한 후, 이 각각에 대하여 c와 d가 서로 위치를 바꿀 수 있으므로 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}\times2!=12\times2=24$

(ⅲ) c와 d 사이에 들어갈 2개의 문자가 a, b인 경우

$cabd$를 하나의 문자 x로 생각하여 x, a, b, b를 일렬로 나열한 후, 이 각각에 대하여 c와 d, a와 b가 서로 위치를 바꿀 수 있으므로 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}\times2!\times2!=12\times2\times2=48$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$8+24+48=80$

Level 1 기초 연습 본문 10~11쪽

1 ③	2 ②	3 24	4 ①	5 ③
6 ⑤	7 ⑤	8 ③		

1 대학생 4명이 원형의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

이 각각에 대하여 고등학생 2명이 대학생과 대학생 사이에 한 명씩 앉는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{P}_2=4\times3=12$

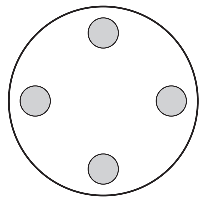
따라서 구하는 경우의 수는

$6\times12=72$

답 ③

2 숫자 1, 3, 5, 7이 하나씩 적혀 있는 4개의 공을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$



이 각각에 대하여 숫자 2, 4, 6이 하나씩 적혀 있는 3개의 공을 홀수가 적혀 있는 공과 공 사이의 네 곳 중 세 곳에 배열하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{P}_3=4\times3\times2=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times24=144$

답 ②

3 아버지와 어머니를 묶어서 한 사람, 자녀 3명을 묶어서 한 사람으로 생각하면 3명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

이 각각에 대하여 아버지와 어머니가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

이 각각에 대하여 자녀 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times2\times6=24$

답 24

4 (ⅰ) 일의 자리의 수가 4인 경우

천의 자리의 수는 2이고, 백의 자리의 수와 십의 자리의

수를 택하는 경우의 수는 네 개의 숫자 2, 3, 4, 6에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 주어진 조건을 만족시키는 자연수의 개수는

$_4\Pi_2=4^2=16$

(ii) 일의 자리의 수가 6인 경우

천의 자리의 수는 2 또는 3이고, 백의 자리의 수와 십의 자리의 수를 택하는 경우의 수는 네 개의 숫자 2, 3, 4, 6에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 주어진 조건을 만족시키는 자연수의 개수는

$2\times{}_4\Pi_2=2\times4^2=32$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$16+32=48$

답 ①

5 서로 다른 5개의 공 중 2개를 택하여 주머니 A에 넣는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

이 각각에 대하여 나머지 공 3개를 2개의 주머니 B, C에 넣는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$_2\Pi_3=2^3=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times8=80$

답 ③

6 b, b, d를 X, X, X로 놓고 6개의 문자 a, a, c, X, X, X를 일렬로 나열한 후 X의 자리에 왼쪽부터 순서대로 d, b, b를 넣으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!3!}=60$

답 ⑤

7 4개의 문자 b, b, c, d를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!}=12$

∨□∨□∨□∨□∨

이 각각에 대하여 그림과 같이 ∨로 표시된 다섯 곳 중 3개의 문자 a, a, a를 놓을 세 곳을 선택하는 경우의 수는

$_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\times10=120$

답 ⑤

8 4의 약수는 1, 2, 4이다.

각 자리의 모든 수의 합이 8이 되는 경우는 각 자리의 수가 4, 2, 1, 1 또는 2, 2, 2, 2이어야 한다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

$\dfrac{4!}{2!}+1=12+1=13$

답 ③

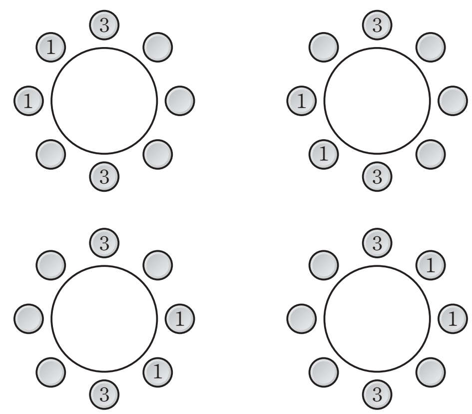
Level 2 기본 연습

본문 12쪽

1 ④ 2 ① 3 ③ 4 ⑤

1 3학년 학생 중 한 명의 자리를 결정하면 남은 3학년 학생 한 명의 자리는 마주보는 자리에 고정된다.

이때 1학년 학생 2명이 서로 이웃하게 앉을 수 있는 두 자리는 그림과 같이 4가지이다.



이 각각에 대하여 2학년 학생 4명이 남은 네 자리에 앉는 경우의 수는

$4!=24$

이 각각에 대하여 1학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times24\times2=192$

답 ④

2 숫자 0을 포함하지 않는 경우와 숫자 0을 1개 포함하는 경우로 나누면 다음과 같다.

(i) 숫자 0을 포함하지 않는 경우

2개의 숫자 1, 2에서 중복을 허락하여 6개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수의 개수는

${}_2\Pi_6=2^6=64$

(ii) 숫자 0을 1개 포함하는 경우

2개의 숫자 1, 2에서 중복을 허락하여 5개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_2\Pi_5=2^5=32$

$\square\vee\square\vee\square\vee\square\vee\square\vee$

이 각각에 대하여 그림과 같이 ∨로 표시된 다섯 곳 중 한 곳에 0을 넣는 경우의 수는 5이므로 이때 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수의 개수는

$32\times5=160$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$64+160=224$

답 ①

3 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 4개를 택할 때, 문자 a가 나오는 횟수가 문자 b가 나오는 횟수보다 큰 경우는 다음과 같다.

(i) a가 4번 나오는 경우

a, a, a, a를 일렬로 나열하는 경우의 수는 1

(ii) a가 3번 나오는 경우

a, a, a, b 또는 a, a, a, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{3!}=4+4=8$

(iii) a가 2번 나오는 경우

a, a, b, c 또는 a, a, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!2!}=12+6=18$

(iv) a가 1번 나오는 경우

a, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

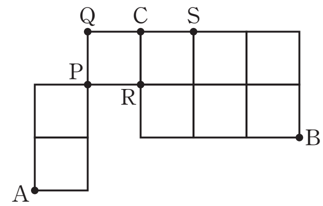
$\frac{4!}{3!}=4$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$1+8+18+4=31$

답 ③

4 그림과 같이 P, Q, R, S지점을 정하자.



A지점에서 출발하여 C지점을 지나 B지점까지 최단 거리로 가는 경우는 다음과 같다.

(i) A→P→Q→C→B인 경우

$\frac{3!}{2!}\times1\times1\times\frac{5!}{3!2!}=3\times1\times1\times10=30$

(ii) A→P→R→C→S→B인 경우

$\frac{3!}{2!}\times1\times1\times1\times\frac{4!}{2!2!}=3\times1\times1\times1\times6=18$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$30+18=48$

답 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 13쪽

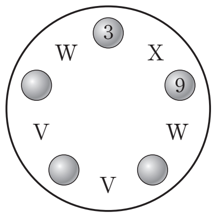
1 ⑤ 2 ② 3 ④

1 숫자 1, 3, 5, 7, 9가 적혀 있는 공을 원형으로 배열할 때 3, 9가 적혀 있는 2개의 공이 서로 이웃하는 경우와 이웃하지 않는 경우로 구분하면 다음과 같다.

(i) 3, 9가 적혀 있는 2개의 공이 서로 이웃하는 경우

숫자 1, 3, 5, 7, 9가 적혀 있는 공을 원형으로 배열할 때 3, 9가 적혀 있는 2개의 공이 서로 이웃하는 경우의 수는 3, 9가 적혀 있는 2개의 공을 한 개로 생각하여 서로 다른 4개를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(4-1)!=3!=6$



이 각각에 대하여 6이 적혀 있는 공은 2개의 V 중 한 곳에 놓고, X에 2, 4, 8이 적혀 있는 3개의 공 중에서 한 개를 놓고, 남은 1개의 V와 2개의 W 중 두 곳을 선택하여 남은 2개의 공을 놓는 경우의 수는

${}_{2}C_{1}\times{}_{3}C_{1}\times{}_{3}P_{2}=2\times3\times6=36$

이 각각에 대하여 3과 9가 적힌 공을 서로 바꿀 수 있으므로

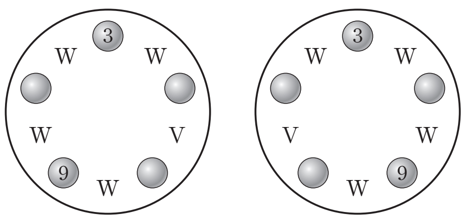
$2!=2$

따라서 이 경우의 수는

$6\times36\times2=432$

(ii) 3, 9가 적혀 있는 2개의 공이 서로 이웃하지 않는 경우

3, 9가 적혀 있는 2개의 공이 서로 이웃하지 않도록 놓은 경우는 다음 그림과 같이 2가지이다.



이 각각에 대하여 1, 5, 7이 적혀 있는 3개의 공을 배열하는 경우의 수는

$3!=6$

이 각각에 대하여 6이 적혀 있는 공은 V에 놓고, 4개의 W 중 세 곳을 선택하여 남은 3개의 공을 놓는 경우의 수는

$1\times{}_{4}P_{3}=24$

따라서 이 경우의 수는

$2\times6\times24=288$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$432+288=720$

답 ⑤

다른 풀이

짝수 2, 4, 6, 8과 3의 배수 3, 6, 9에 모두 포함되는 6이 적혀 있는 공을 먼저 놓는다.

1부터 9까지의 자연수 중에서 6과 서로소인 수는 1, 5, 7이므로 6이 적혀 있는 공의 양 옆에는 숫자 1, 5, 7이 적혀 있는 3개의 공 중 2개를 놓으면 된다.

이때의 경우의 수는

${}_{3}P_{2}=3\times2=6$

숫자 1, 5, 7이 적혀 있는 3개의 공 중 6이 적혀 있는 공의 양 옆에 놓지 않은 한 개의 공에 적혀 있는 수를 x라 하자.

남은 6개의 공을 놓을 때, 숫자 2, 4, 8이 적혀 있는 3개의 공은 서로 이웃하지 않도록 놓아야 하므로 숫자 3, 9, x가 적혀 있는 3개의 공을 먼저 배열하자.

(i) 3, 9, x 또는 x, 3, 9와 같이 숫자 3, 9가 적혀 있는 2개의 공이 서로 이웃하는 경우

$\vee3\vee9\vee x\vee$에서 숫자 3, 9가 적혀 있는 2개의 공 사이의 $\vee$자리에 숫자 2, 4, 8이 적혀 있는 3개의 공 중 하나를 놓은 후, 남은 3개의 $\vee$자리에 나머지 2개의 공을 배열하는 경우의 수는

${}_{3}C_{1}\times{}_{3}P_{2}=3\times6=18$

이 각각에 대하여 숫자 3, 9가 적혀 있는 2개의 공의 위치를 서로 바꿀 수 있으므로

$2!=2$

같은 방법으로 $\vee x\vee3\vee9\vee$인 경우의 수도 18×2

따라서 이 경우의 수는

$2\times18\times2=72$

(ii) 숫자 3, 9가 적혀 있는 2개의 공이 서로 이웃하지 않는 경우

$\vee3\vee x\vee9\vee$에서 4개의 $\vee$자리 중 세 곳에 숫자 2, 4, 8이 적혀 있는 3개의 공을 배열하는 경우의 수는

${}_{4}P_{3}=4\times3\times2=24$

이 각각에 대하여 숫자 3, 9가 적혀 있는 2개의 공의 위치를 서로 바꿀 수 있으므로

$2!=2$

따라서 이 경우의 수는

$24\times2=48$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$6\times(72+48)=720$

2 조건 (가)에 의하여 선택한 5개의 문자 중 문자 c의 개수는 3 또는 4이다.

(i) 문자 c가 3개인 경우

선택된 5개의 문자는 a, b, c, c, c 또는 b, b, c, c, c이다.

a, b, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

b, b, c, c, c를 일렬로 나열할 때, 문자 b가 서로 이웃하도록 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

따라서 이 경우의 수는

$20+4=24$

(ii) 문자 c가 4개인 경우

선택된 5개의 문자는 a, c, c, c, c 또는 b, c, c, c, c이다.

a, c, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{4!}=5$

b, c, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{4!}=5$

따라서 이 경우의 수는

$5+5=10$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$24+10=34$

답 ②

3 $f(1)+f(4)\geq 2$이므로 조건 (가)에 의하여

$f(1)+f(4)=2$ 또는 $f(1)+f(4)=4$

(i) $f(1)+f(4)=2$인 경우

$f(1)=1,\ f(4)=1$

조건 (나)에 의하여

$f(2)=1,\ f(3)=1$

조건 (다)에 의하여

$f(5)\geq 1,\ f(6)\geq 1$

이때 $f(5),\ f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_6\Pi_2=6^2=36$

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는 36이다.

(ii) $f(1)+f(4)=4$인 경우

$f(1)=1,\ f(4)=3$ 또는 $f(1)=2,\ f(4)=2$ 또는 $f(1)=3,\ f(4)=1$

㉠ $f(1)=1,\ f(4)=3$일 때

조건 (나)에 의하여

$f(2)=1,\ f(3)=1$

조건 (다)에 의하여

$f(5)\geq 3,\ f(6)\geq 3$

이때 $f(5),\ f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_2=4^2=16$

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는 16이다.

㉡ $f(1)=2,\ f(4)=2$일 때

조건 (나)에 의하여

$f(2)\leq 2,\ f(3)\leq 2$

조건 (다)에 의하여

$f(5)\geq 2,\ f(6)\geq 2$

이때 $f(2),\ f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_2=2^2=4$

이 각각에 대하여 $f(5),\ f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$4\times 25=100$

㉢ $f(1)=3,\ f(4)=1$일 때

조건 (나)에 의하여

$f(2)\leq 3,\ f(3)\leq 3$

조건 (다)에 의하여

$f(5)\geq 1,\ f(6)\geq 1$

이때 $f(2),\ f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_2=3^2=9$

이 각각에 대하여 $f(5),\ f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_6\Pi_2=6^2=36$

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$9\times 36=324$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$36+(16+100+324)=476$

답 ④

02 중복조합과 이항정리

유제 본문 17~23쪽

1 ① 2 126 3 ⑤ 4 ④ 5 ②
6 ④ 7 ② 8 ②

1 서로 다른 5개의 상자에 각각 공을 2개씩 넣은 후, 남은 3개의 공을 나누어 넣으면 된다.
이때 3개의 공을 서로 다른 5개의 상자에 나누어 넣는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$$

답 ①

2 A에게 과자 2봉지, 세 사람에게 각각 음료 1병씩을 나누어 준 후, 남은 과자 5봉지와 음료 2병을 세 사람에게 나누어 주는 경우를 생각하면 된다.
(i) 과자 5봉지를 세 사람에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$$

(ii) 음료 2병을 세 사람에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$21\times6=126$

답 126

3 (i) 다항식 $(a+b)^3$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_3={}_{2+3-1}C_3={}_4C_3={}_4C_1=4$$

(ii) 다항식 $(c+d+e)^6$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$$

(i), (ii)에서 구하는 서로 다른 항의 개수는
$4\times28=112$

답 ⑤

4 3명의 후보가 득표한 수를 각각
x, y, z (x, y, z는 음이 아닌 정수)라 하면
$x+y+z=9$ ...... ㉠
가능한 득표 결과의 경우의 수는 방정식 ㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수와 같다.
한편, 방정식 ㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 서로 다른 3개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_9={}_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=\frac{11\times10}{2\times1}=55$$

따라서 구하는 경우의 수는 55이다.

답 ④

5 다항식 $(x+a)^6$의 전개식의 일반항은
${}_6C_r\, x^{6-r}\, a^r$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$
x^4항은 $6-r=4$, 즉 $r=2$일 때이므로 x^4의 계수는

$${}_6C_2\times a^2=\frac{6\times5}{2\times1}\times a^2=15a^2$$

이때 $15a^2=60$에서
$a^2=4$
$a>0$이므로
$a=2$

답 ②

6 다항식 $(2x-1)(x+2)^7$의 전개식에서 x^5의 계수는 $(2x-1)$에서 x의 계수 2와 $(x+2)^7$의 전개식에서 x^4의 계수를 곱한 것과 $(2x-1)$에서 상수항 -1과 $(x+2)^7$의 전개식에서 x^5의 계수를 곱한 것의 합과 같다.

$(x+2)^7$의 전개식의 일반항은
${}_7C_r\, x^{7-r}2^r = {}_7C_r\, 2^r x^{7-r}$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$
x^4항은 $7-r=4$, 즉 $r=3$일 때이므로 x^4의 계수는
${}_7C_3 \times 2^3 = \dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times8=280$
x^5항은 $7-r=5$, 즉 $r=2$일 때이므로 x^5의 계수는
${}_7C_2 \times 2^2 = \dfrac{7\times6}{2\times1}\times4=84$
따라서 다항식 $(2x-1)(x+2)^7$의 전개식에서 x^5의 계수는
$2\times280+(-1)\times84=476$

답 ④

7 $A={}_{15}C_0+{}_{15}C_2+{}_{15}C_4+\cdots+{}_{15}C_{14}=2^{14}$
$B={}_{12}C_0+{}_{12}C_1+{}_{12}C_2+\cdots+{}_{12}C_{12}=2^{12}$
따라서
$\dfrac{A}{B}=\dfrac{2^{14}}{2^{12}}=2^2=4$

답 ②

8 다항식 $(1+x)^3$의 전개식의 일반항은
${}_3C_r\, x^r$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ 3)$
x항은 $r=1$일 때이므로 x의 계수는 ${}_3C_1$
4 이상의 자연수 n에 대하여 $\dfrac{(1+x)^n}{x^{n-3}}$의 전개식에서 x의 계수는 $(1+x)^n$의 전개식에서 x^{n-2}의 계수와 같다.
이때 다항식 $(1+x)^n$의 전개식의 일반항은
${}_nC_r\, x^r$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$
x^{n-2}항은 $r=n-2$일 때이므로 x^{n-2}의 계수는 ${}_nC_{n-2}$
$(1+x)^3+\dfrac{(1+x)^4}{x}+\dfrac{(1+x)^5}{x^2}+\dfrac{(1+x)^6}{x^3}+\dfrac{(1+x)^7}{x^4}$
의 전개식에서 x의 계수는
${}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5$
$=-1+{}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5$
$=-1+{}_5C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5$
$=-1+{}_6C_3+{}_6C_4+{}_7C_5$
$=-1+{}_7C_4+{}_7C_5$
$=-1+{}_8C_5$
$=-1+{}_8C_3$
$=-1+\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}$
$=55$

답 ②

Level 1 기초 연습

본문 24~25쪽

1 ④	2 ①	3 ②	4 ⑤	5 ⑤
6 ④	7 ②	8 ②		

1 ${}_2\Pi_5=2^5=32$
${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=\dfrac{9\times8}{2\times1}=36$
따라서
${}_2\Pi_5+{}_3H_7=32+36=68$

답 ④

2 (i) 같은 종류의 손목 보호대 5개를 학생 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5={}_7C_2=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$
(ii) 서로 다른 종류의 수건 2장을 학생 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_3\Pi_2=3^2=9$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$21\times9=189$

답 ①

3 (i) 서로 다른 세 종류의 과자 중에서 중복을 허락하여 과자 3개를 주문하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$
(ii) 서로 다른 두 종류의 음료 중에서 중복을 허락하여 음료 3개를 주문하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_2H_3={}_{2+3-1}C_3={}_4C_3={}_4C_1=4$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$10\times4=40$

답 ②

4 a, b, c는 홀수이고, d는 짝수이므로

$a=2a'+1$, $b=2b'+1$, $c=2c'+1$, $d=2d'+2$

(a', b', c', d'은 음이 아닌 정수)

로 놓을 수 있다.

이때 방정식 $a+b+c+d=21$에서

$(2a'+1)+(2b'+1)+(2c'+1)+(2d'+2)=21$

즉, $a'+b'+c'+d'=8$

방정식 $a'+b'+c'+d'=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 모든 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$${}_4\mathrm{H}_8={}_{11}\mathrm{C}_8={}_{11}\mathrm{C}_3=\frac{11\times10\times9}{3\times2\times1}=165$$

답 ⑤

5 $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5\mathrm{C}_r(2x^2)^{5-r}\left(-\frac{3}{x}\right)^r={}_5\mathrm{C}_r\,2^{5-r}(-3)^r x^{10-3r}$$

$(r=0, 1, 2, 3, 4, 5)$

x^4항은 $10-3r=4$, 즉 $r=2$일 때이다.

따라서 x^4의 계수는

$${}_5\mathrm{C}_2\times2^{5-2}\times(-3)^2=\frac{5\times4}{2\times1}\times8\times9=720$$

답 ⑤

6 다항식 $(x-a)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6\mathrm{C}_r\,x^{6-r}(-a)^r={}_6\mathrm{C}_r\,(-a)^r x^{6-r}$ $(r=0, 1, 2, \cdots, 6)$

x^3항은 $6-r=3$, 즉 $r=3$일 때이므로 x^3의 계수는

$${}_6\mathrm{C}_3\times(-a)^3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times(-a^3)=-20a^3$$

또 x^2항은 $6-r=2$, 즉 $r=4$일 때이므로 x^2의 계수는

$${}_6\mathrm{C}_4\times(-a)^4={}_6\mathrm{C}_2\times(-a)^4=\frac{6\times5}{2\times1}\times a^4=15a^4$$

이때 x^3의 계수와 x^2의 계수의 합이 0이므로

$-20a^3+15a^4=0$

$5a^3(3a-4)=0$

$a>0$이므로 $a=\frac{4}{3}$

답 ④

7 어느 마술 동아리 회원 13명 중에서 공연에 참가할 7명 이상의 회원을 택하는 경우의 수는

${}_{13}\mathrm{C}_7+{}_{13}\mathrm{C}_8+{}_{13}\mathrm{C}_9+{}_{13}\mathrm{C}_{10}+{}_{13}\mathrm{C}_{11}+{}_{13}\mathrm{C}_{12}+{}_{13}\mathrm{C}_{13}$

이때 ${}_{13}\mathrm{C}_0+{}_{13}\mathrm{C}_1+{}_{13}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_{13}=2^{13}$이고

${}_{13}\mathrm{C}_r={}_{13}\mathrm{C}_{13-r}$ $(r=0, 1, 2, \cdots, 13)$이므로

$${}_{13}\mathrm{C}_7+{}_{13}\mathrm{C}_8+{}_{13}\mathrm{C}_9+{}_{13}\mathrm{C}_{10}+{}_{13}\mathrm{C}_{11}+{}_{13}\mathrm{C}_{12}+{}_{13}\mathrm{C}_{13}$$
$$={}_{13}\mathrm{C}_6+{}_{13}\mathrm{C}_5+{}_{13}\mathrm{C}_4+{}_{13}\mathrm{C}_3+{}_{13}\mathrm{C}_2+{}_{13}\mathrm{C}_1+{}_{13}\mathrm{C}_0$$
$$=\frac{1}{2}({}_{13}\mathrm{C}_0+{}_{13}\mathrm{C}_1+{}_{13}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_{13})$$
$$=\frac{1}{2}\times2^{13}$$
$$=2^{12}$$

답 ②

8 ${}_9\mathrm{H}_0+{}_8\mathrm{H}_1+{}_7\mathrm{H}_2+{}_6\mathrm{H}_3+{}_5\mathrm{H}_4+{}_4\mathrm{H}_5+{}_3\mathrm{H}_6+{}_2\mathrm{H}_7+{}_1\mathrm{H}_8$

$={}_2\Pi_4({}_n\mathrm{H}_2-5)$

에서

$${}_9\mathrm{H}_0+{}_8\mathrm{H}_1+{}_7\mathrm{H}_2+{}_6\mathrm{H}_3+{}_5\mathrm{H}_4+{}_4\mathrm{H}_5+{}_3\mathrm{H}_6+{}_2\mathrm{H}_7+{}_1\mathrm{H}_8$$
$$={}_8\mathrm{C}_0+{}_8\mathrm{C}_1+{}_8\mathrm{C}_2+{}_8\mathrm{C}_3+{}_8\mathrm{C}_4+{}_8\mathrm{C}_5+{}_8\mathrm{C}_6+{}_8\mathrm{C}_7+{}_8\mathrm{C}_8$$
$=2^8$,

${}_2\Pi_4=2^4$,

$${}_n\mathrm{H}_2={}_{n+1}\mathrm{C}_2=\frac{n(n+1)}{2}$$

이므로

$$2^8=2^4\left\{\frac{n(n+1)}{2}-5\right\}$$

$n^2+n-42=0$

$(n+7)(n-6)=0$

n은 자연수이므로 $n=6$

답 ②

Level 2 기본 연습			본문 26쪽
1 ⑤	2 420	3 ②	4 ③

1 (i) 같은 종류의 우유 5개 중 3개를 세 사람에게 각각 1개씩 나누어 주고, 남은 2개를 세 사람에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

(ⅱ) 같은 종류의 빵 10개 중 6개를 세 사람에게 각각 2개씩 나누어 주고, 남은 4개를 세 사람에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

$6\times15=90$

답 ⑤

2 조건 (나)에서 a, b, c, d 중에서 적어도 하나는 홀수이므로 조건 (가)와 (나)를 모두 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 조건 (가)를 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수에서 a, b, c, d가 모두 짝수이면서 동시에 조건 (가)를 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 빼면 된다.

방정식 $a+b+c+d=16$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 서로 다른 4개에서 12개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4\mathrm{H}_{12}={}_{4+12-1}\mathrm{C}_{12}={}_{15}\mathrm{C}_{12}={}_{15}\mathrm{C}_3=\frac{15\times14\times13}{3\times2\times1}=455$$

a, b, c, d가 모두 짝수이면

$a=2(a'+1)$, $b=2(b'+1)$, $c=2(c'+1)$, $d=2(d'+1)$

(a', b', c', d'은 음이 아닌 정수)로 놓을 수 있다.

조건 (가)에 의하여

$2(a'+1)+2(b'+1)+2(c'+1)+2(d'+1)=16$

즉, $a'+b'+c'+d'=4$

방정식 $a'+b'+c'+d'=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 모든 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는 서로 다른 4개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4\mathrm{H}_4={}_{4+4-1}\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$455-35=420$

답 420

3 다항식 $(x+y+z)^n$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 3개에서 n개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

다항식 $(x+y+z)^n$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 105이므로

${}_3\mathrm{H}_n=105$

이때

$$\begin{aligned}{}_3\mathrm{H}_n&={}_{3+n-1}\mathrm{C}_n={}_{n+2}\mathrm{C}_n={}_{n+2}\mathrm{C}_2\\&=\frac{(n+2)(n+1)}{2\times1}\end{aligned}$$

이므로

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2\times1}=105$$

$n^2+3n-208=0$

$(n+16)(n-13)=0$

n은 자연수이므로 $n=13$

한편, 다항식 $(x+y+z)^{13}$의 전개식에서 xyz를 인수로 갖는 서로 다른 항의 개수는 x, y, z 중에서 서로 다른 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$\begin{aligned}{}_3\mathrm{H}_{10}&={}_{3+10-1}\mathrm{C}_{10}\\&={}_{12}\mathrm{C}_{10}\\&={}_{12}\mathrm{C}_2\\&=\frac{12\times11}{2\times1}=66\end{aligned}$$

즉, $a=66$

따라서 $n+a=13+66=79$

답 ②

4 다항식 $(1+2x)^n$의 전개식의 일반항은

${}_n\mathrm{C}_r\,(2x)^r={}_n\mathrm{C}_r\,2^rx^r$ $(r=0, 1, 2, \cdots, n)$

x^2항은 $r=2$일 때이므로 x^2의 계수 a는

$a={}_n\mathrm{C}_2\times2^2=4\times{}_n\mathrm{C}_2$

또 x^3항은 $r=3$일 때이므로 x^3의 계수 b는

$b={}_n\mathrm{C}_3\times2^3=8\times{}_n\mathrm{C}_3$

$2a+b=132n$에서

$2\times4\times{}_n\mathrm{C}_2+8\times{}_n\mathrm{C}_3=132n$

$${}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3=\frac{33}{2}n$$

$${}_{n+1}\mathrm{C}_3=\frac{33}{2}n$$

$$\frac{(n+1)n(n-1)}{3\times2\times1}=\frac{33}{2}n$$

$n(n+10)(n-10)=0$

$n\geq3$이므로 $n=10$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 27쪽

1 ④ 2 ① 3 486

1 조건 (나)에서 x에 대한 이차방정식 $x^2-cx+4=0$의 두 근이 a, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=c$, $ab=4$

이때 a, b는 음이 아닌 정수이므로

$a=1$, $b=4$ 또는 $a=2$, $b=2$ 또는 $a=4$, $b=1$

(i) $a=1$, $b=4$일 때

$c=1+4=5$이므로

$d+e+f=10$

방정식 $d+e+f=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 d, e, f의 모든 순서쌍 (d, e, f)의 개수는 서로 다른 3개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{3+10-1}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=\frac{12\times11}{2\times1}=66$$

(ii) $a=2$, $b=2$일 때

$c=2+2=4$이므로

$d+e+f=12$

방정식 $d+e+f=12$를 만족시키는 음이 아닌 정수 d, e, f의 모든 순서쌍 (d, e, f)의 개수는 서로 다른 3개에서 12개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_{12}={}_{3+12-1}\mathrm{C}_{12}={}_{14}\mathrm{C}_{12}={}_{14}\mathrm{C}_2=\frac{14\times13}{2\times1}=91$$

(iii) $a=4$, $b=1$일 때

$c=4+1=5$이므로

$d+e+f=10$

(i)과 같은 방법으로 순서쌍 (d, e, f)의 개수는 66

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$66+91+66=223$

답 ④

2 조건 (나)에서 함수 f의 치역의 모든 원소의 합이 6이므로 함수 f의 치역은

$\{2, 4\}$, $\{0, 2, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{0, 1, 2, 3\}$

중 하나이다.

(i) 함수 f의 치역이 $\{2, 4\}$인 경우

조건 (가)에 의하여

$f(0)=2$, $f(4)=4$

이고, 2, 4에서 중복을 허락하여 3개를 택한 후 택한 세 수로 $f(1)\le f(2)\le f(3)$을 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하면 된다.

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

${}_2\mathrm{H}_3={}_{2+3-1}\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$

(ii) 함수 f의 치역이 $\{0, 2, 4\}$인 경우

조건 (가)에 의하여

$f(0)=0$, $f(4)=4$

이고, 0, 2, 4에서 먼저 2를 1개 택하고 0, 2, 4에서 중복을 허락하여 2개를 다시 택한 후 택한 세 수로 $f(1)\le f(2)\le f(3)$을 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하면 된다.

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

(iii) 함수 f의 치역이 $\{1, 2, 3\}$인 경우

조건 (가)에 의하여

$f(0)=1$, $f(4)=3$

이고, 1, 2, 3에서 먼저 2를 1개 택하고 1, 2, 3에서 중복을 허락하여 2개를 다시 택한 후 택한 세 수로 $f(1)\le f(2)\le f(3)$을 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하면 된다.

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$${}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

(iv) 함수 f의 치역이 $\{0, 1, 2, 3\}$인 경우

조건 (가)에 의하여

$f(0)=0$, $f(4)=3$

이고, 0, 1, 2, 3에서 먼저 1과 2를 택하고 0, 1, 2, 3에서 1개를 다시 택한 후 택한 세 수로 $f(1)\le f(2)\le f(3)$을 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하면 된다.

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

${}_4\mathrm{H}_1={}_{4+1-1}\mathrm{C}_1={}_4\mathrm{C}_1=4$

(i)~(iv)에서 구하는 함수 f의 개수는

$4+6+6+4=20$

답 ①

다른 풀이

조건 (나)에서 함수 f의 치역의 모든 원소의 합이 6이므로 함수 f의 치역은 $\{2, 4\}$, $\{0, 2, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{0, 1, 2, 3\}$ 중 하나이다.

(i) 치역이 $\{2, 4\}$인 함수 f의 개수는 서로 다른 2종류에서 5개를 중복을 허락하여 택하되 각 종류에서 적어도 하나

씩 택하는 경우의 수와 같으므로

$_{2}H_{3}={}_{2+3-1}C_{3}={}_{4}C_{3}={}_{4}C_{1}=4$

(ii) 치역이 $\{0,\ 2,\ 4\}$인 함수 f의 개수는 서로 다른 3종류에서 5개를 중복을 허락하여 택하되 각 종류에서 적어도 하나씩 택하는 경우의 수와 같으므로

$_{3}H_{2}={}_{3+2-1}C_{2}={}_{4}C_{2}=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

(iii) 치역이 $\{1,\ 2,\ 3\}$인 함수 f의 개수는 (ii)와 마찬가지 방법으로 6이다.

(iv) 치역이 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$인 함수 f의 개수는 서로 다른 4종류에서 5개를 중복을 허락하여 택하되 각 종류에서 적어도 하나씩 택하는 경우의 수와 같으므로

$_{4}H_{1}={}_{4+1-1}C_{1}={}_{4}C_{1}=4$

(i)~(iv)에서 구하는 함수 f의 개수는

$4+6+6+4=20$

3 (i) 다섯 명의 학생 A, B, C, D, E에게 같은 종류의 컴퓨터용 사인펜 11자루를 나누어 주는 경우

조건 (가)에 의하여 다섯 명의 학생 A, B, C, D, E가 받는 컴퓨터용 사인펜의 개수를 각각 a, b, c, d, e (a, b, c, d, e는 자연수)라 하면

$a+b+c+d+e=11$ …… ㉠

또 $a=2b$이므로 ㉠에 대입하면

$3b+c+d+e=11$

이때

$b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$, $e=e'+1$

(b', c', d', e'은 음이 아닌 정수)

라 하면

$3(b'+1)+(c'+1)+(d'+1)+(e'+1)=11$

$3b'+c'+d'+e'=5$

① $b'=0$인 경우

$c'+d'+e'=5$

방정식 $c'+d'+e'=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 c', d', e'의 모든 순서쌍 $(c',\ d',\ e')$의 개수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_{3}H_{5}={}_{7}C_{5}={}_{7}C_{2}=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$

② $b'=1$인 경우

$c'+d'+e'=2$

방정식 $c'+d'+e'=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 c', d', e'의 모든 순서쌍 $(c',\ d',\ e')$의 개수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_{3}H_{2}={}_{4}C_{2}=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

①, ②에서 컴퓨터용 사인펜을 나누어 주는 경우의 수는

$21+6=27$

(ii) 다섯 명의 학생 A, B, C, D, E에게 같은 종류의 수정테이프 9개를 나누어 주는 경우

조건 (나)에 의하여 다섯 명의 학생 A, B, C, D, E가 받는 수정 테이프의 개수를 각각 x, y, z, v, w (x, y, z, v, w는 3 이하의 음이 아닌 정수)라 하면

$x+y+z+v+w=9$ …… ㉡

또 $w=v+2$이므로

$v=0$, $w=2$ 또는 $v=1$, $w=3$

③ $v=0$, $w=2$인 경우

㉡에서 $x+y+z=7$ …… ㉢

한편, 각 학생이 받는 수정 테이프는 각각 3개 이하이므로

$x=3-x'$, $y=3-y'$, $z=3-z'$

(x', y', z'은 3 이하의 음이 아닌 정수)

라 하면 ㉢에서

$(3-x')+(3-y')+(3-z')=7$

$x'+y'+z'=2$

방정식 $x'+y'+z'=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z'의 모든 순서쌍 $(x',\ y',\ z')$의 개수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_{3}H_{2}={}_{4}C_{2}=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

④ $v=1$, $w=3$인 경우

㉡에서 $x+y+z=5$ …… ㉣

한편, 각 학생이 받는 수정 테이프는 각각 3개 이하이므로

$x=3-x'$, $y=3-y'$, $z=3-z'$

(x', y', z'은 3 이하의 음이 아닌 정수)

라 하면 ㉣에서

$(3-x')+(3-y')+(3-z')=5$

$x'+y'+z'=4$

방정식 $x'+y'+z'=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z'의 모든 순서쌍 $(x',\ y',\ z')$의 개수는 서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$_{3}H_{4}={}_{6}C_{4}={}_{6}C_{2}=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

이 중에서 $x'=4$, $y'=0$, $z'=0$ 또는
$x'=0$, $y'=4$, $z'=0$ 또는 $x'=0$, $y'=0$, $z'=4$인 경우는 제외해야 하므로
$15-3=12$

③, ④에서 수정 테이프를 나누어 주는 경우의 수는
$6+12=18$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$27\times18=486$

답 486

03 확률의 뜻과 활용

유제 본문 31~37쪽

1 ④ 2 ③ 3 ③ 4 ④ 5 ③
6 ⑤ 7 ②

1 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, 4, 5\}$
$A=\{1, 3\}$이고 5 이하의 자연수 n에 대하여
$B=\{x|x\le n\}$에서 두 사건 A와 B^C이 서로 배반사건이려면 $A\cap B^C=\varnothing$, 즉 A는 B의 부분집합이어야 하므로
$n=3$ 또는 $n=4$ 또는 $n=5$이다.
따라서 모든 n의 값의 합은
$3+4+5=12$

답 ④

2 표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로
$A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{1, 2\}$
조건 (가)에서 두 사건 A와 C가 서로 배반사건이므로
$A\cap C=\varnothing$, 즉 사건 C는 사건 $A^C=\{1, 3, 5\}$의 부분집합이다.
조건 (나)에서 두 사건 B^C과 C는 서로 배반사건이 아니므로 $B^C\cap C\ne\varnothing$이다.
즉, 사건 C는 $B^C=\{3, 4, 5, 6\}$의 원소 중 적어도 하나를 원소로 가져야 한다.
그러므로 사건 C는 사건 $A^C=\{1, 3, 5\}$의 부분집합 중에서 3 또는 5를 원소로 가지는 집합이다.
따라서 사건 C가 될 수 있는 집합은
$\{3\}$, $\{5\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{3, 5\}$, $\{1, 3, 5\}$
이므로 그 개수는 6이다.

답 ③

참고
사건 C의 개수는 다음과 같이 구할 수도 있다.
집합 $\{1, 3, 5\}$의 부분집합의 개수는 2^3이고, 이 부분집합 중에서 3과 5를 모두 원소로 갖지 않는 집합의 개수는 집합 $\{1\}$의 부분집합의 개수인 2^1과 같으므로 사건 C의 개수는 $2^3-2^1=6$이다.

3 한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는
$6^3=216$

x에 대한 이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 이 이차방정식이 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=b^2-ac=0$, $b^2=ac$

b의 값에 따른 $b^2=ac$를 만족시키는 a, c의 순서쌍 (a, c)는 다음과 같다.

b	(a, c)
1	(1, 1)
2	(1, 4), (2, 2) ,(4, 1)
3	(3, 3)
4	(4, 4)
5	(5, 5)
6	(6, 6)

조건을 만족시키는 경우의 수는 8

따라서 구하는 확률은

$\frac{8}{216}=\frac{1}{27}$

답 ③

4 8명의 학생이 일렬로 서는 경우의 수는 $8!$

8명을 일렬로 세울 때 1번, 3번, 8번 학생을 X, X, X로 놓고 일렬로 세우는 경우의 수는

$\frac{8!}{3!}$

마지막 X에는 3번 학생을 세우고, 나머지 두 개의 X에 1번, 8번 학생을 세우는 경우의 수는

$1\times2!=2$

즉, 3번 학생이 1번 학생과 8번 학생보다 뒤에 서는 경우의 수는

$\frac{8!}{3!}\times2$

따라서 구하는 확률은

$\frac{\frac{8!}{3!}\times2}{8!}=\frac{1}{3}$

답 ④

5 8장의 카드 중에서 서로 다른 5장의 카드를 선택하는 경우의 수는

${}_8C_5={}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

두 번째와 네 번째에 놓이는 카드에 적혀 있는 수 a, b의 범위는 $2\le a\le5$, $4\le b\le7$이므로 $b-a=4$인 경우는

$a=2$, $b=6$ 또는 $a=3$, $b=7$이다.

$a=2$, $b=6$인 사건을 A, $a=3$, $b=7$인 사건을 B라 하자.

(i) $a=2$, $b=6$인 경우

2보다 작은 수가 적혀 있는 1장의 카드를 선택하는 경우의 수는 1

2보다 크고 6보다 작은 수가 적혀 있는 1장의 카드를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

6보다 큰 수가 적혀 있는 1장의 카드를 선택하는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$

따라서 이 경우의 수는

$1\times3\times2=6$

이므로

$P(A)=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$

(ii) $a=3$, $b=7$인 경우

3보다 작은 수가 적혀 있는 1장의 카드를 선택하는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$

3보다 크고 7보다 작은 수가 적혀 있는 1장의 카드를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

7보다 큰 수가 적혀 있는 1장의 카드를 선택하는 경우의 수는 1

따라서 이 경우의 수는

$2\times3\times1=6$

이므로

$P(B)=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$

(i), (ii)에서 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{28}+\frac{3}{28}=\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$

답 ③

6 6명의 학생이 원형으로 앉는 경우의 수는

$(6-1)!=5!=120$

적어도 2명의 여학생이 서로 이웃하여 앉는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 어느 두 여학생도 서로 이웃하지 않게 앉는 사건이다.

남학생 3명이 원형으로 앉는 경우의 수는

$(3-1)!=2!=2$

남학생 사이사이에 여학생이 앉는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 어느 두 여학생도 서로 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는

$2\times6=12$

이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$

그러므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

답 ⑤

7 100부터 999까지의 자연수 중에서 하나의 수를 선택하는 경우의 수는 900

백의 자리 또는 십의 자리 또는 일의 자리의 수가 1인 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 어느 자리의 수도 1이 아닌 사건이다.

세 자리의 자연수에서 어느 자리의 수도 1이 아니려면 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 2부터 9까지의 자연수로 8가지이고, 십의 자리와 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 3, …, 9로 각각 9가지이다.

따라서 세 자리의 자연수 중에서 어느 자리의 수도 1이 아닌 사건이 일어나는 경우의 수는

$8\times9\times9=648$

이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{648}{900}=\frac{18}{25}$

그러므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{18}{25}=\frac{7}{25}$

답 ②

Level 1 기초 연습

본문 38쪽

1 ⑤	2 ①	3 ④	4 ④	5 31

1 두 사건 A와 B가 서로 배반사건이므로

$A\cap B=\varnothing$

확률의 덧셈정리에 의하여 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

이고 조건에서 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{8}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{8}$

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$

답 ⑤

2 흰 공 5개, 검은 공 4개가 들어 있는 주머니에서 3개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_9\mathrm{C}_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

흰 공 2개와 검은 공 1개를 꺼내는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1=\frac{5\times4}{2\times1}\times4=40$

따라서 구하는 확률은 $\frac{40}{84}=\frac{10}{21}$

답 ①

3 한 개의 동전을 4번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

${}_2\Pi_4=2^4=16$

앞면이 3번 이상 나오는 사건을 A, 앞면이 연속하여 2번 이상 나오는 사건을 B라 하자.

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타내면

$A=\{\mathrm{HHHT, HHTH, HTHH, THHH, HHHH}\}$

이므로 $\mathrm{P}(A)=\frac{5}{16}$

$B=\{\mathrm{HHTT, THHT, TTHH, HHTH, HTHH, HHHT, THHH, HHHH}\}$

이므로 $\mathrm{P}(B)=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$

이때 $A\cap B=A$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{16}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{5}{16}+\frac{1}{2}-\frac{5}{16}=\frac{1}{2}$

답 ④

참고

한 개의 동전을 4번 던질 때, 앞면이 3번 이상 나오면 반드시 앞면이 연속하여 2번 이상 나오는 경우가 생긴다.

따라서 $A\cup B=B$이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(B)$이다.

4 6명의 학생이 한 번씩 차례대로 발표하는 순서를 정하는 경우의 수는

$6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$

A와 B 사이에 적어도 한 명이 발표하는 사건을 D라 하면 사건 D의 여사건 D^C은 A, B가 연달아 발표하는 사건이다.

두 사람 A, B를 묶어 한 사람이라 생각하고 5명의 학생이 발표하는 순서를 정하는 경우의 수는

$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

이 각각의 경우에 대하여 A, B가 순서를 정하는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 A, B가 연달아 발표하는 경우의 수는

$120\times2=240$

이므로

$\mathrm{P}(D^C)=\frac{240}{720}=\frac{1}{3}$

그러므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(D)=1-\mathrm{P}(D^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

답 ④

5 10부터 99까지의 자연수의 개수는 90이다.

두 자리의 자연수가 2의 배수인 사건을 A, 십의 자리의 수가 8의 약수인 사건을 B라 하자.

(ⅰ) 2의 배수인 경우

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, …, 9로 9가지, 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4, 6, 8로 5가지이다.

따라서 두 자리의 자연수 중에서 2의 배수인 수의 개수는 $9\times5=45$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}$

(ⅱ) 십의 자리의 수가 8의 약수인 경우

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 4, 8로 4가지, 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 1, 2, …, 9로 10가지이다.

따라서 두 자리의 자연수 중에서 십의 자리의 수가 8의 약수인 수의 개수는 $4\times10=40$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{40}{90}=\frac{4}{9}$

(ⅲ) 2의 배수이면서 십의 자리의 수가 8의 약수인 경우

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 4, 8로 4가지, 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4, 6, 8로 5가지이다.

따라서 두 자리의 자연수 중에서 2의 배수이면서 십의 자리의 수가 8의 약수인 수의 개수는 $4\times5=20$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{20}{90}=\frac{2}{9}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{1}{2}+\frac{4}{9}-\frac{2}{9}\\&=\frac{13}{18}\end{aligned}$$

따라서 $p=18$, $q=13$이므로

$p+q=18+13=31$

답 31

Level 2 기본 연습

본문 39~40쪽

1 ③	2 ③	3 ②	4 ④	5 ①
6 ⑤	7 ①	8 ②		

1 숫자 2, 2, 3, 4, 4를 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 다섯 자리의 자연수의 개수는

$\frac{5!}{2!2!}=30$

일의 자리의 수가 2, 3인 사건을 각각 A, B라 하자.

(ⅰ) 일의 자리의 수가 2인 경우

남은 2, 3, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$

(ⅱ) 일의 자리의 수가 3인 경우

남은 2, 2, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!2!}=6$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$

이때 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)\\&=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\\&=\frac{3}{5}\end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이

숫자 2, 2, 3, 4, 4를 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 다섯 자리의 자연수의 개수는

$\frac{5!}{2!2!}=30$

일의 자리의 수가 소수인 사건을 A라 하면 A^C은 일의 자리의 수가 소수가 아닌 사건이다.

즉, A^C은 일의 자리의 수가 4인 사건이다.

일의 자리의 수가 4이고, 남은 2, 2, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

2 6명의 학생이 의자에 앉는 경우의 수는

$6!=720$

2인용 의자에 앉을 학년을 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1=3$

이 학년의 학생 2명이 2인용 의자에 앉는 경우의 수는

$2!=2$

남은 학생들은 2개의 학년의 학생 2명씩이므로 이 4명이 4인용 의자에 앉는 자리를 같은 학년의 학생이 앉는 자리끼리 같은 문자로 나타내어 A, A, B, B라 하자.

4인용 의자에 같은 학년의 학생끼리 이웃하지 않도록 앉는 경우는 ABAB, BABA의 2가지가 있고, 각 경우에서 A자리에 앉을 학생을 정하는 경우의 수는

$2!=2$

B자리에 앉을 학생을 정하는 경우의 수는

$2!=2$

그러므로 조건을 만족시키는 경우의 수는

$3\times2\times2\times2\times2=48$

따라서 구하는 확률은

$\frac{48}{720}=\frac{1}{15}$

답 ③

3 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 조건 p가 조건 q이기 위한 충분조건이 되려면 $P\subset Q$이어야 한다.

이때 $P=\{a\}$

조건 q에서

$x^2-(2+b)x+2b\le0$, $(x-2)(x-b)\le0$

이므로

(i) $b=1$일 때, $Q=\{x|1\le x\le2\}$

이 경우에서 $P\subset Q$이도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$, $(2, 1)$

(ii) $b=2$일 때, $Q=\{2\}$

이 경우에서 $P\subset Q$이도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(2, 2)$

(iii) $b=3, 4, 5, 6$일 때, $Q=\{x|2\le x\le b\}$

이 경우에서 $P\subset Q$이도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(2, 3)$, $(3, 3)$

$(2, 4)$, $(3, 4)$, $(4, 4)$

$(2, 5)$, $(3, 5)$, $(4, 5)$, $(5, 5)$

$(2, 6)$, $(3, 6)$, $(4, 6)$, $(5, 6)$, $(6, 6)$

(i), (ii), (iii)에서 $P\subset Q$이도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는

$2+1+14=17$

따라서 구하는 확률은 $\frac{17}{36}$

답 ②

4 10개의 공 중에서 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_2=\frac{10\times9}{2\times1}=45$

꺼낸 두 공의 색이 서로 같은 사건 A, 흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼내는 사건 B에 대하여 $A^C=B$이므로

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(B)$

이것을 $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{15}$에 대입하면

$\mathrm{P}(B)=\{1-\mathrm{P}(B)\}+\frac{1}{15}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{8}{15}$ …… ㉠

흰 공의 개수를 n이라 하면 검은 공의 개수는 $10-n$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_n\mathrm{C}_1\times{}_{10-n}\mathrm{C}_1}{45}=\frac{n(10-n)}{45}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{n(10-n)}{45}=\frac{8}{15}$

$n(10-n)=24$

$n^2-10n+24=0$

$(n-4)(n-6)=0$

$n=4$ 또는 $n=6$

이때 $n\le5$이므로 흰 공의 개수는 4이다.

답 ④

5 a, b, c의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형이 만들어지려면

$a<b+c$이고 $b<a+c$이고 $c<a+b$ …… ㉠

이어야 한다.

(i) $a=b=c$인 경우

$a=b=c$이면 ㉠을 항상 만족시킨다.

따라서 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)는

$(1, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(3, 3, 3)$

이므로 이 경우의 확률은

$\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$

(ii) a, b, c 중 2개만 같은 경우

$a=b\ne c$인 경우에서 ㉠을 만족시키는 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)는

$(2, 2, 1)$, $(2, 2, 3)$, $(3, 3, 1)$, $(3, 3, 2)$

이므로 $a=b\ne c$인 삼각형이 만들어지는 경우의 수는 4이다.

같은 방법으로 $b=c\ne a$, $a=c\ne b$인 경우의 수도 각각 4이다.

따라서 이 경우의 확률은

$\frac{4+4+4}{27}=\frac{4}{9}$

(iii) a, b, c가 모두 다른 경우

a, b, c가 갖는 값이 1, 2, 3이면 ㉠을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

답 ①

6 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 X에서 X로의 모든 함수의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4$

$f(1)<f(2)<f(3)$을 만족시키는 사건을 A, $f(2)<f(4)$를 만족시키는 사건을 B라 하자.

(i) $f(1)<f(2)<f(3)$을 만족시키는 경우

집합 X에서 서로 다른 세 원소를 선택하여 작은 수부터 차례로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값으로 정하는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

$f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_4\Pi_1=4$

따라서 $f(1)<f(2)<f(3)$을 만족시키는 함수 f의 개수는 $4\times4=16$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{16}{4^4}=\frac{1}{16}$

(ii) $f(2)<f(4)$를 만족시키는 경우

집합 X에서 서로 다른 두 원소를 선택하여 작은 수부터 차례로 $f(2)$, $f(4)$의 값으로 정하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

$f(1)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_4\Pi_2=4^2$

따라서 $f(2)<f(4)$를 만족시키는 함수 f의 개수는

6×4^2이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{6\times4^2}{4^4}=\frac{3}{8}$

(iii) $f(1)<f(2)<f(3)$, $f(2)<f(4)$를 모두 만족시키는 경우

$f(1)<f(2)<f(3)<f(4)$, $f(1)<f(2)<f(4)<f(3)$을 만족시키는 함수 f의 개수는 각각 1이고,

$f(1)<f(2)<f(3)=f(4)$를 만족시키는 함수 f의 개수는 ${}_4C_3=4$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1+1+4}{4^4}=\frac{3}{128}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{16}+\frac{3}{8}-\frac{3}{128}=\frac{53}{128}$$

답 ⑤

7 1부터 4까지의 자연수 중에서 중복을 허락하여 4개를 선택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 $a_1a_2a_3a_4$의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

1, 2, 3, 4의 양의 약수의 개수는 각각 1, 2, 2, 3이므로 다음과 같은 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) a_1, a_2, a_3, a_4 중 1이 1개, 4가 3개인 경우

1, 4, 4, 4를 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$

이므로 이 경우의 확률은

$\frac{4}{256}=\frac{1}{64}$

(ii) a_1, a_2, a_3, a_4 중 2가 2개, 3이 2개인 경우

2, 2, 3, 3을 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$

이므로 이 경우의 확률은

$\frac{6}{256}=\frac{3}{128}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{64}+\frac{3}{128}=\frac{5}{128}$

답 ①

8 방정식 $x+y+z+w=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

${}_4\mathrm{H}_6={}_{4+6-1}\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

$(x+y-4)(z-1)=0$을 만족시키려면

$x+y=4$ 또는 $z=1$

순서쌍 (x, y, z, w)가 $x+y=4$를 만족시키는 사건을 A, $z=1$을 만족시키는 사건을 B라 하자.

(i) $x+y=4$인 경우

$x+y+z+w=6$에서 $x+y=4$이므로 $z+w=2$이다.

$x+y=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는

${}_2\mathrm{H}_4={}_{2+4-1}\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_1=5$

$z+w=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 z, w의 순서쌍 (z, w)의 개수는

${}_2\mathrm{H}_2={}_{2+2-1}\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$

따라서 $x+y=4$, $z+w=2$를 모두 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

$5\times3=15$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{15}{84}=\frac{5}{28}$

(ii) $z=1$인 경우

$x+y+z+w=6$에서 $z=1$이므로 $x+y+w=5$이다.

$x+y+w=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, w의 순서쌍 (x, y, w)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_5={}_{3+5-1}\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$

따라서 $x+y+w=5$, $z=1$을 모두 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, w와 $z=1$의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 $21\times1=21$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{21}{84}=\frac{1}{4}$

(iii) $x+y=4$이고 $z=1$인 경우

$x+y+z+w=6$에서 $x+y=4$, $z=1$이면 $w=1$이다.

$x+y=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는

${}_2\mathrm{H}_4={}_{2+4-1}\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_1=5$

따라서 $x+y=4$, $z=1$, $w=1$을 모두 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y와 $z=1$, $w=1$의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 $5\times1\times1=5$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{84}$

(i), (ii), (iii)에서 확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{5}{28}+\frac{1}{4}-\frac{5}{84}=\frac{31}{84}$

답 ②

Level 3 실력 완성

본문 41쪽

1 247 **2** 301 **3** ①

1 집합 X의 모든 부분집합 중에서 한 집합을 택하는 경우의 수는 2^7이다.

(i) $n(A\cap B)=1$인 경우

집합 B의 원소 중 집합 $A\cap B$의 원소를 정하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_1=5$

집합 $X-B$의 원소인 6, 7 중 적어도 한 개가 집합 A의 원소가 되는 경우의 수는 $2^2-1=3$

따라서 이 경우의 수는

$5\times3=15$

(ii) $n(A\cap B)\geq2$인 경우

집합 B의 원소 중 집합 $A\cap B$의 원소를 정하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_4+{}_5\mathrm{C}_5=10+10+5+1=26$

집합 $X-B$의 원소인 6, 7이 각각 집합 A의 원소이어도 되고 집합 A의 원소가 아니어도 되므로 이 경우의 수는 $2^2=4$

따라서 이 경우의 수는

$26\times4=104$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{15+104}{2^7}=\frac{119}{128}$

따라서 $p=128$, $q=119$이므로

$p+q=128+119=247$

답 247

다른 풀이

집합 X의 모든 부분집합 중에서 한 집합을 택하는 경우의 수는 2^7이다.

집합 A의 원소의 개수가 2 이상인 사건을 D, 두 집합 A, B가 서로소가 아닌 사건을 E라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(D\cap E)$이다.

$\mathrm{P}(D\cap E)=\mathrm{P}(D)-\mathrm{P}(D\cap E^C)$이고

$\mathrm{P}(D)=1-\mathrm{P}(D^C)=1-\frac{8}{2^7}=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

한편, 사건 $D\cap E^C$은 집합 A의 원소의 개수가 2 이상이고 두 집합 A, $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$가 서로소인 사건이다.

이를 만족시키는 집합 A는 $A=\{6, 7\}$뿐이므로

$\mathrm{P}(D\cap E^C)=\frac{1}{2^7}=\frac{1}{128}$

그러므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(D\cap E)=\mathrm{P}(D)-\mathrm{P}(D\cap E^C)=\frac{15}{16}-\frac{1}{128}=\frac{119}{128}$

따라서 $p=128$, $q=119$이므로

$p+q=128+119=247$

2 각 점 P_i $(i=1, 2, 3, 4)$에 대하여 점 P_i와 점 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 중에서 선택한 한 점을 선분으로 연결하여 4개의 선분을 그리는 경우의 수는

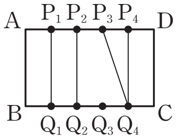
${}_4\Pi_4=4^4=2^8$

점 $\mathrm{P}_i\,(i=1, 2, 3, 4)$, 점 $\mathrm{Q}_j\,(j=1, 2, 3, 4)$에 대하여 [그림 a]와 같이 직사각형 ABCD의 내부에서 선분 $\mathrm{P}_i\mathrm{Q}_j$끼리 만나는 경우가 없으면 직사각형은 5개의 영역으로 나누어진다.

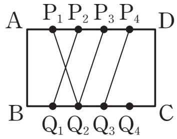
[그림 b]와 같이 직사각형 ABCD의 내부에서 선분 $\mathrm{P}_i\mathrm{Q}_j$끼리 만나는 점의 개수가 1이면 직사각형은 6개의 영역으로 나누어진다.

이때 [그림 b]의 두 점 P_1, P_2와 같이 서로 이웃하는 점에서 연결한 두 선분이 직사각형 내부에서 만날 때에만 6개의 영역으로 나누어진다.

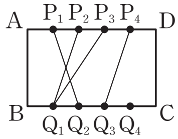
한편, [그림 c]의 두 점 P_1, P_3과 같이 서로 이웃하지 않은 점에서 연결한 두 선분이 직사각형 내부에서 만나면, 직사각형 내부에 다른 선분 $\mathrm{P}_i\mathrm{Q}_j$와 만나는 점이 반드시 존재하게 되어 직사각형은 7개 이상의 영역으로 나누어진다.



[그림 a]



[그림 b]



[그림 c]

따라서 다음과 같은 경우로 나누어 구할 수 있다.

(i) 두 점 P_1, P_2에서 연결한 두 선분만 직사각형 내부에서 만날 경우

점 P_2를 점 Q_1에 연결할 때, 세 점 P_1, P_3, P_4에 대하여 세 점 Q_2, Q_3, Q_4에서 중복을 허락하여 세 점을 선택한 후 점 Q의 첨자가 크지 않은 점부터 차례로 점 P_1, P_3, P_4와 연결하면 되므로 이 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

같은 방법으로 점 P_2를 점 Q_2에 연결할 때의 경우의 수는

${}_2\mathrm{H}_3={}_{2+3-1}\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$

점 P_2를 점 Q_3에 연결할 때의 경우의 수는

${}_1\mathrm{H}_3={}_{1+3-1}\mathrm{C}_3={}_3\mathrm{C}_3=1$

그러므로 두 점 P_1, P_2에서 연결한 두 선분만 직사각형 내부에서 만나는 경우의 수는

$10+4+1=15$

(ii) 두 점 P_2, P_3에서 연결한 두 선분만 직사각형 내부에서 만날 경우

점 P_3을 점 Q_1에 연결할 때, 점 P_1은 점 Q_1에 연결해야 하고, 두 점 P_2, P_4에 대하여 세 점 Q_2, Q_3, Q_4에서 중복을 허락하여 두 점을 선택한 후 점 Q의 첨자가 크지 않은 점부터 차례로 점 P_2, P_4와 연결하면 되므로 이 경우의 수는

$1\times{}_3\mathrm{H}_2={}_{3+2-1}\mathrm{C}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

같은 방법으로 점 P_3을 점 Q_2에 연결할 때의 경우의 수는

$2\times{}_2\mathrm{H}_2=2\times{}_{2+2-1}\mathrm{C}_2=2\times{}_3\mathrm{C}_2=2\times3=6$

점 P_3을 점 Q_3에 연결할 때의 경우의 수는

$3\times{}_1\mathrm{H}_2=3\times{}_{1+2-1}\mathrm{C}_2=3\times{}_2\mathrm{C}_2=3\times1=3$

그러므로 두 점 P_2, P_3에서 연결한 두 선분만 직사각형 내부에서 만나는 경우의 수는

$6+6+3=15$

(iii) 두 점 P_3, P_4에서 연결한 두 선분만 직사각형 내부에서 만날 경우

점 P_4를 점 Q_1에 연결할 때, 두 점 P_1, P_2는 점 Q_1에 연결해야 하고, 점 P_3은 세 점 Q_2, Q_3, Q_4 중에서 한 점과 연결하면 되므로 이 경우의 수는

$1\times3=3$

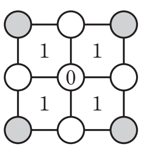
점 P_4를 점 Q_2에 연결할 때, 두 점 P_1, P_2에 대하여 두 점 Q_1, Q_2에서 중복을 허락하여 두 점을 선택한 후 점 Q의 첨자가 크지 않은 점부터 차례로 두 점 P_1, P_2와 연결해야 하고, 점 P_3은 두 점 Q_3, Q_4 중 한 점과 연결하면 되므로 이 경우의 수는

${}_2\mathrm{H}_2\times2={}_{2+2-1}\mathrm{C}_2\times2={}_3\mathrm{C}_2\times2=3\times2=6$

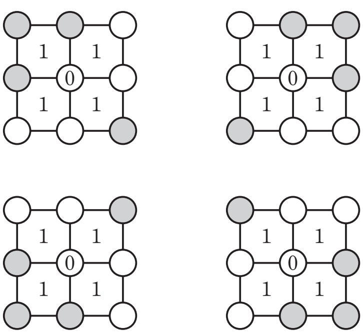
같은 방법으로 점 P_4를 점 Q_3에 연결할 때의 경우의 수는
${}_3H_2\times1={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$
그러므로 두 점 P_3, P_4에서 연결한 두 선분만 직사각형 내부에서 만나는 경우의 수는
$3+6+6=15$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은
$\frac{15+15+15}{2^8}=\frac{45}{256}$
따라서 $p=256$, $q=45$이므로
$p+q=256+45=301$

답 301

3 8개의 원에 1부터 8까지의 자연수를 써넣는 경우의 수는
$8!$
4개의 모양의 도형에 적혀 있는 1의 개수가 4가 되려면 각각의 모양의 도형과 원주의 일부를 공유하는 4개의 원에 적혀 있는 모든 수의 합이 홀수이어야 한다.
이때 1부터 8까지의 자연수 중 홀수는 1, 3, 5, 7의 4개이므로 이 4개의 홀수를 어떻게 배치하느냐에 따라 합이 홀수인지 짝수인지가 정해진다.
홀수가 적히는 원을 회색 원( )으로 나타내고, 이 회색 원을 조건을 만족시키도록 놓는 경우를 살펴보면 다음과 같다.
(ⅰ) 각 모양의 도형에 회색 원( )을 1개씩 놓는 경우
이 경우는 그림과 같이 1가지이다.



(ⅱ) 회색 원( )을 3개 놓은 모양의 도형이 1개 있는 경우
이 경우는 그림과 같이 4가지이다.



(ⅰ), (ⅱ)에서 5가지 경우가 나온다.
5가지의 각 경우에서 홀수 4개와 짝수 4개를 각 자리에 놓는 경우의 수는
$4!\times4!$
따라서 4개의 모양의 도형에 적혀 있는 1의 개수가 4인 경우의 수는
$5\times4!\times4!$
이므로 구하는 확률은
$\frac{5\times4!\times4!}{8!}=\frac{1}{14}$

답 ①

04 조건부확률

유제 본문 45~51쪽

1 ② 2 107 3 ④ 4 14 5 ③
6 98

1 이 고등학교의 3학년 학생 중에서 한 명을 선택하는 경우의 수는 181
이 고등학교의 3학년 학생 중에서 임의로 선택한 한 명이 과목 B를 선택한 학생인 사건을 B, 여학생인 사건을 F라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(F|B)$이다.
이때 $\mathrm{P}(B)=\frac{120}{181}$이고, 사건 $B\cap F$는 과목 B를 선택한 여학생을 선택하는 사건이므로
$\mathrm{P}(B\cap F)=\frac{50}{181}$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(F|B)=\frac{\mathrm{P}(B\cap F)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{50}{181}}{\frac{120}{181}}=\frac{5}{12}$$
답 ②

참고
$$\mathrm{P}(F|B)=\frac{n(B\cap F)}{n(B)}=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$$

2 한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $6^3=216$
한 개의 주사위를 세 번 던질 때, 4의 눈이 한 번 이상 나오는 사건을 A, 세 눈의 수의 합이 6의 배수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.
세 번 중 4의 눈이 1번 나오는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1\times5\times5=75$,
세 번 중 4의 눈이 2번 나오는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2\times5=15$,
세 번 모두 4의 눈이 나오는 경우의 수는 1이므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{75+15+1}{216}=\frac{91}{216}$
사건 $A\cap B$는 4의 눈이 한 번 이상 나오고 세 눈의 수의 합이 6의 배수인 사건이다.
세 눈의 수를 4, a, b라 하고 다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.
(i) $4+a+b=6$인 경우
a, b가 1, 1이고 4, 1, 1을 나열하는 경우의 수는
$\frac{3!}{2!}=3$
이므로 이 경우의 수는 3이다.
(ii) $4+a+b=12$인 경우
a, b가 2와 6 또는 3과 5 또는 4와 4이다.
이때 a, b가 2와 6 또는 3과 5의 2가지 경우에서 서로 다른 세 수를 나열하는 경우의 수는 $3!$이고, a, b가 4, 4일 때 3개의 4를 나열하는 경우의 수는 1이므로 이 경우의 수는 $2\times3!+1=13$이다.
(iii) $4+a+b$의 값이 18 이상인 경우는 없다.
(i), (ii), (iii)에서
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3+13}{216}=\frac{16}{216}=\frac{2}{27}$
이므로 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{27}}{\frac{91}{216}}=\frac{16}{91}$$
따라서 $p=91$, $q=16$이므로
$p+q=91+16=107$
답 107

3 이 학급의 학생 중에서 임의로 선택한 한 학생이 1인 미디어 방송을 시청한 경험이 있는 학생인 사건을 A, 남학생인 사건을 B라 하자.
이 학급의 남학생이 60 %이고, 남학생의 80 %는 1인 미디어 방송을 시청한 경험이 있으므로
$\mathrm{P}(B)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(A|B)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$
이 학급의 여학생이 40 %이고, 여학생의 40 %는 1인 미디어 방송을 시청한 경험이 없으므로 여학생의 60 %가 1인 미디어 방송을 시청한 경험이 있다.
$\mathrm{P}(B^C)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(A|B^C)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$
따라서 구하는 확률은
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(A|B^C)\\&=\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\\&=\frac{18}{25}\end{aligned}$$
답 ④

4 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 6
4의 약수의 눈이 나오는 사건 $A=\{1, 2, 4\}$이므로
$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$
2 이상 6 이하의 자연수 a에 대하여 1 또는 a의 눈이 나오는 사건 $B=\{1, a\}$이므로
$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$
두 사건 A와 B가 서로 독립이려면
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이어야 하므로
$\frac{n(A\cap B)}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$에서 $n(A\cap B)=1$
이때 $A\cap B=\{1\}$이어야 하므로 a는 2, 4가 아니어야 한다.
따라서 $a=3$ 또는 $a=5$ 또는 $a=6$이므로 모든 a의 값의 합은
$3+5+6=14$

답 14

5 한 개의 동전을 한 번 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로
구하는 확률은
$${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{20}{64}=\frac{5}{16}$$

답 ③

6 한 번의 시행에서 흰 공을 꺼내는 것을 ○, 검은 공을 꺼내는 것을 ×, 정해지지 않는 경우를 ▲와 같이 나타내자.
4번째 시행을 한 후 공을 꺼내는 것을 멈추는 경우는
×○○○이고 이 경우의 확률은
$$p_4=\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^3$$
7번째 시행을 한 후 공을 꺼내는 것을 멈추는 경우는
▲▲▲×○○○이다.
이때 ▲▲▲에는 ▲가 모두 ○인 경우만 아니면 된다.
따라서 이 경우의 확률은
$$p_7=\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^3\right\}\times\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^3=\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^3\right\}\times p_4=\frac{98}{125}p_4$$
이므로
$$125\times\frac{p_7}{p_4}=98$$

답 98

Level 1 기초 연습 본문 52쪽

1 ⑤ 2 ② 3 ③ 4 ② 5 ③

1 이 학급의 24명의 학생 중에서 임의로 선택한 한 명의 학생이 남학생인 사건을 A, 유기견 보호 봉사를 선택한 학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.
이때
$\mathrm{P}(A)=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$
이고 유기견 보호 봉사를 선택한 남학생의 수는 7이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{7}{24}$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{7}{24}}{\frac{1}{2}}=\frac{7}{12}$$

답 ⑤

2 학생 A가 1이 적혀 있는 카드를 선택하는 사건을 A, 학생 B가 1이 적혀 있는 카드를 선택하는 사건을 B라 하면
$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{5}$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$$

답 ②

3 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$이므로
$$\mathrm{P}(A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B|A)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}$$

답 ③

4 한 개의 동전을 4번 던져 앞면이 나온 횟수가 a, 뒷면이 나온 횟수가 b이므로
$a+b=4$
두 식 $a+b=4$, $a-b=2$를 연립하여 풀면
$a=3$, $b=1$
따라서 구하는 확률은 한 개의 동전을 4번 던질 때 앞면이 3번 나올 확률이므로

$_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

답 ②

5 나온 눈의 수의 최댓값이 5이려면 적어도 한 번은 5의 눈이 나와야 한다.
또 6의 눈은 한 번도 나오지 않아야 한다.
(ⅰ) 5의 눈이 1번, 1, 2, 3, 4의 눈 중에서 2번 나올 때

$$_3C_1\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{4}{6}\right)^2=\frac{48}{216}=\frac{2}{9}$$

(ⅱ) 5의 눈이 2번, 1, 2, 3, 4의 눈 중에서 1번 나올 때

$$_3C_2\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{4}{6}=\frac{12}{216}=\frac{1}{18}$$

(ⅲ) 5의 눈이 3번 나올 때

$$_3C_3\times\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은

$$\frac{2}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{216}=\frac{61}{216}$$

답 ③

다른 풀이

나온 눈의 수의 최댓값이 5인 경우는 세 번 모두 5 이하의 눈이 나오는 경우에서 세 번 모두 4 이하의 눈이 나오는 경우를 제외시키면 된다.
따라서 구하는 확률은

$$_3C_3\left(\frac{5}{6}\right)^3-{}_3C_3\left(\frac{4}{6}\right)^3=\frac{125}{216}-\frac{64}{216}=\frac{61}{216}$$

Level 2 기본 연습

본문 53~54쪽

1 ④	**2** ③	**3** ②	**4** ④	**5** ④
6 ⑤	**7** 14	**8** ②		

1 한 개의 주사위를 5번 던져 나온 눈의 수의 곱이 2의 배수이지만 4의 배수가 아니려면 5개의 눈의 수에 2, 6 중 하나가 1번 나타나고 홀수가 4번 나타나야 한다.
이때 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 2 또는 6의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, 홀수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.
따라서 구하는 확률은

$$_5C_1\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{48}$$

답 ④

2 $B=(A\cap B)\cup(A^C\cap B)$이고
$(A\cap B)\cap(A^C\cap B)=\varnothing$이므로

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

따라서

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{4}$$

답 ③

3 X에서 X로의 모든 함수의 개수는
$_4\Pi_4=4^4=256$
모든 함수 중에서 임의로 한 함수 f를 선택할 때,
$f(1)>f(3)$인 사건을 A, $f(1)+f(2)=4$인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.
(ⅰ) $f(1)>f(3)$인 경우
$f(1)>f(3)$을 만족시키도록 $f(1)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 $_4C_2=6$
이 각각에 대하여 $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 $_4\Pi_2=4^2=16$
따라서 $f(1)>f(3)$일 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{6\times16}{256}=\frac{3}{8}$$

(ⅱ) $f(1)>f(3)$이고 $f(1)+f(2)=4$인 경우
$f(1)+f(2)=4$이려면 $f(1)=1$, $f(2)=3$ 또는 $f(1)=3$, $f(2)=1$ 또는 $f(1)=f(2)=2$이어야 한다.
그런데 $f(1)>f(3)$이려면 $f(1)\neq1$이어야 한다.
$f(1)=3$, $f(2)=1$일 때, $f(1)>f(3)$을 만족시키도록 $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 4이므로 이 경우의 수는 $2\times4=8$
$f(1)=f(2)=2$일 때, $f(1)>f(3)$을 만족시키도록 $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 4이므로 이 경우의 수는 $1\times4=4$
따라서 $f(1)>f(3)$이고 $f(1)+f(2)=4$일 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{8+4}{256}=\frac{3}{64}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{3}{64}}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{8}$$

답 ②

4 이 조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 한 명이 3학년 학생이 아니면서 일주일에 3일 이상 이용하는 학생일 확률이 $\frac{5}{14}$이므로

$\frac{12+a}{70}=\frac{5}{14}$

$12+a=25$, 즉 $a=13$

이때 $b=50-(12+a)=25$

이 조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 한 명이 일주일에 3일 이상 이용하는 학생일 때, 이 학생이 3학년 학생일 확률 p_1은

$p_1=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}$

이 조사에 참여한 학생 중에서 임의로 선택한 한 명이 3학년 학생일 때, 이 학생이 일주일에 3일 이상 이용하는 학생일 확률 p_2는

$p_2=\frac{25}{25+d}$

$p_1=\frac{3}{5}p_2$이므로

$\frac{1}{2}=\frac{3}{5}\times\frac{25}{25+d}$

$25+d=30$, 즉 $d=5$

이때 $c=20-(7+d)=8$

따라서 $b+c=25+8=33$

답 ④

5 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 나오는 눈의 수가 3의 약수일 확률은 $\frac{1}{3}$

한 번의 시행에서 3의 약수의 눈이 나오는 것을 ○, 3의 약수가 아닌 눈이 나오는 것을 ×로 나타내기로 하자.

점 P가 한 번에 1 또는 2만큼 이동하므로 점 P의 좌표가 6 이상이 되어 멈추는 경우는 점 P의 좌표가 6이 되어 멈추는 경우와 점 P의 좌표가 7이 되어 멈추는 경우로 나누어진다.

(i) 점 P의 좌표가 6이 되어 멈추는 경우

4번 이하의 시행을 하여 멈추어야 하므로

○○××와 같이 3의 약수의 눈이 2번, 3의 약수가 아닌 눈이 2번 나올 확률은

${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{24}{81}=\frac{8}{27}$

×××와 같이 3의 약수가 아닌 눈이 3번 나올 확률은

${}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

따라서 이 경우의 확률은

$\frac{8}{27}+\frac{8}{27}=\frac{16}{27}$

(ii) 점 P의 좌표가 7이 되어 멈추는 경우

점 P의 좌표가 7이 되어 멈추려면 이전의 점 P의 좌표가 5이고 3의 약수가 아닌 눈이 나와서 점 P가 7로 이동하여야 한다.

4번 이하의 시행을 하여 멈추려면 앞의 세 번의 시행에서 ○××와 같이 3의 약수의 눈이 1번, 3의 약수가 아닌 눈이 2번 나오고, 4번째 시행에서 3의 약수가 아닌 눈이 나와야 하므로 이 경우의 확률은

${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{16}{27}+\frac{8}{27}=\frac{24}{27}=\frac{8}{9}$

답 ④

6 집합 S의 원소 중에서 임의로 선택한 한 삼각형이 넓이가 2이고 적어도 한 변이 좌표축에 평행한 삼각형인 사건을 A, 직각삼각형인 사건을 B라 하자.

y축에 평행한 변의 길이는 1 또는 2가 될 수 있고, 이때의 높이는 1 또는 2 또는 3이므로 넓이가 2가 되는 경우는 y축에 평행한 변의 길이가 2이고 높이가 2일 때이다.

같은 방법으로 넓이가 2가 되는 경우는 x축에 평행한 변의 길이가 2이고 높이가 2일 때이다.

(i) 넓이가 2인 삼각형이 y축에 평행한 변을 가지는 경우

두 점은 직선 $x=1$ 또는 직선 $x=2$ 또는 직선 $x=3$ 또는 직선 $x=4$ 위에 있다.

이때 각 직선에서 거리가 2인 두 점을 선택하는 경우의 수는 각각 1이고, 이 두 점을 연결한 선분을 밑변으로 할 때 높이가 2가 되도록 나머지 꼭짓점을 정하는 경우의 수는 각각 3이다.

그러므로 이 경우의 수는

$4\times1\times3=12$

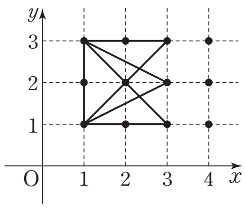
(ii) 넓이가 2인 삼각형이 x축에 평행한 변을 가지는 경우

두 점은 직선 $y=1$ 또는 직선 $y=3$ 위에 있다.

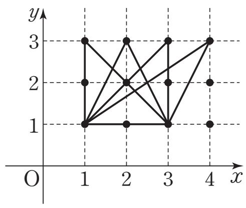
이때 각 직선에서 거리가 2인 두 점을 선택하는 경우의 수는 각각 2이고, 이 두 점을 연결한 선분을 밑변으로 할 때 높이가 2가 되도록 나머지 꼭짓점을 정하는 경우의 수는 각각 4이다.

그러므로 이 경우의 수는

$2\times2\times4=16$



(ⅰ)의 경우



(ⅱ)의 경우

(ⅲ) 넓이가 2인 삼각형이 x축에 평행한 변과 y축에 평행한 변을 모두 가지는 경우

(ⅰ)에서 y축에 평행한 직선 위의 거리가 2인 두 점을 선택하는 경우의 수는

$4\times1=4$

이 4가지 경우에서 x축에 평행한 변을 갖는 직각삼각형이 2개씩 만들어진다.

그러므로 이 경우의 수는

$4\times2=8$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 넓이가 2이고 적어도 한 변이 좌표축에 평행한 삼각형을 선택할 확률은

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{12+16-8}{n(S)}=\dfrac{20}{n(S)}$

이때 넓이가 2이고 적어도 한 변이 좌표축에 평행한 삼각형이면서 직각삼각형인 경우가 (ⅲ)이므로 이러한 삼각형을 선택할 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{8}{n(S)}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\dfrac{8}{n(S)}}{\dfrac{20}{n(S)}}=\dfrac{2}{5}$$

답 ⑤

참고

$n(S)={}_{12}\mathrm{C}_3-({}_3\mathrm{C}_3\times8+{}_4\mathrm{C}_3\times3)=200$

7 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 6

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

(ⅰ) $n=1$일 때,

$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이다.

이때 $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=1$이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $n=2$일 때,

$B=\{2,\ 4,\ 6\}$이다.

이때 $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{5}{6}$가 되어 조건 (가)를 만족시킨다.

$A\cap B=\{2,\ 4\}$에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

그런데 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$에서

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}=\mathrm{P}(A\cap B)$

이므로 두 사건 A와 B는 서로 독립이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $n=3$일 때,

$B=\{3,\ 6\}$이다.

이때 $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{5}{6}$가 되어 조건 (가)를 만족시킨다.

$A\cap B=\{3\}$에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$

그런데 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$에서

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}\neq\mathrm{P}(A\cap B)$

이므로 두 사건 A와 B는 서로 종속이 되어 조건 (나)를 만족시킨다.

(ⅳ) $n=4$일 때,

$B=\{4\}$이다.

이때 $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$가 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅴ) $n=5$ 또는 $n=6$일 때,

$n=5$이면 $B=\{5\}$, $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이고,

$n=6$이면 $B=\{6\}$, $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$이므로

모두 $\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{5}{6}$가 되어 조건 (가)를 만족시킨다.

$A\cap B=\varnothing$에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

그런데 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{6}$에서

$\mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이므로 두 사건 A와 B는 서로 종속이 되어 조건 (나)를 만족시킨다.

(ⅰ)~(ⅴ)에서 조건을 만족시키는 n의 값은 3, 5, 6이므로 구하는 모든 n의 값의 합은
$3+5+6=14$

답 14

8 두 번째 시행 후 상자 A에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수가 서로 같은 사건을 E, 첫 번째 시행 후 상자 A에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수가 서로 다른 사건을 D라 하자.
한 번의 시행에서 흰 공 2개를 꺼내면 상자 A에 흰 공 1개만 다시 넣으므로 상자 A에 들어 있는 흰 공은 1개 적어지고 검은 공의 개수는 변하지 않는다.
같은 방법으로 검은 공 2개를 꺼내면 상자 A에 들어 있는 검은 공은 1개 적어지고 흰 공의 개수는 변하지 않는다.
흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼내면 상자 A에 들어 있는 흰 공과 검은 공은 각각 1개씩 적어진다.
시행 전에 상자 A에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수가 같으므로 두 번째 시행 후 상자 A에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수가 서로 같은 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 첫 번째 시행에서 흰 공 2개를 꺼내고, 두 번째 시행에서 검은 공 2개를 꺼내는 경우
흰 공 3개와 검은 공 3개가 들어 있는 상자 A에서 흰 공 2개를 꺼낼 확률은
$\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$
이제 상자 A에는 흰 공 2개와 검은 공 3개가 들어 있고, 이 상자에서 검은 공 2개를 꺼낼 확률은
$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$
따라서 이 경우의 확률은
$\frac{1}{5}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{50}$

(ⅱ) 첫 번째 시행에서 검은 공 2개를 꺼내고, 두 번째 시행에서 흰 공 2개를 꺼내는 경우
흰 공 3개와 검은 공 3개가 들어 있는 상자 A에서 검은 공 2개를 꺼낼 확률은
$\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$
이제 상자 A에는 흰 공 3개와 검은 공 2개가 들어 있고, 이 상자에서 흰 공 2개를 꺼낼 확률은
$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$
따라서 이 경우의 확률은
$\frac{1}{5}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{50}$

(ⅲ) 첫 번째 시행에서 흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼내고, 두 번째 시행에서도 흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼내는 경우
흰 공 3개와 검은 공 3개가 들어 있는 상자 A에서 흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼낼 확률은
$\frac{{}_3C_1\times{}_3C_1}{{}_6C_2}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$
이제 상자 A에는 흰 공 2개와 검은 공 2개가 들어 있고, 이 상자에서 흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼낼 확률은
$\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$
따라서 이 경우의 확률은
$\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 두 번째 시행 후 상자 A에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수가 서로 같은 사건 E가 일어날 확률은
$\mathrm{P}(E)=\frac{3}{50}+\frac{3}{50}+\frac{2}{5}=\frac{26}{50}=\frac{13}{25}$
이때 두 번째 시행 후 상자 A에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수가 서로 같고 첫 번째 시행 후 상자 A에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수가 서로 다른 사건인 $E\cap D$는 (ⅰ), (ⅱ)에서 일어나므로
$\mathrm{P}(E\cap D)=\frac{3}{50}+\frac{3}{50}=\frac{6}{50}=\frac{3}{25}$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(D|E)=\frac{\mathrm{P}(E\cap D)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{3}{25}}{\frac{13}{25}}=\frac{3}{13}$$

답 ②

Level 3 실력 완성 본문 55쪽

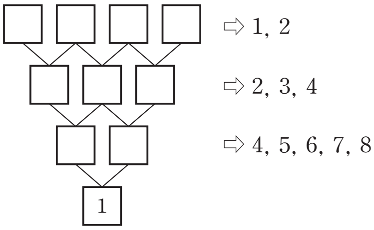
1 155 **2** ③ **3** 496

1 맨 윗줄에서 빈칸에 1이 적힐 확률은 한 개의 동전을 두 번 던져서 앞면이 한 번 이상 나올 확률과 같고, 빈칸에 2가 적힐 확률은 한 개의 동전을 두 번 던져서 모두 뒷면이 나올 확률과 같다.
따라서 맨 윗줄에서 빈칸에 2가 적힐 확률은 ${}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

이고, 1이 적힐 확률은 $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$이다.

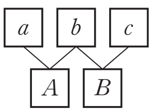
이제 맨 아랫줄에 적혀 있는 숫자가 1이 되는 경우를 생각하자.

각 줄에서 □에 들어갈 수 있는 수는 다음과 같다.



따라서 위에서 3번째 줄에 적혀 있는 두 수는 4와 7 또는 5와 6이어야 한다.

한편, 아래 그림과 같이 $A=a+b$, $B=b+c$이므로 서로 이웃하는 두 수의 합을 나타낸 수에서 공통인 b가 존재해야 함을 알 수 있다.

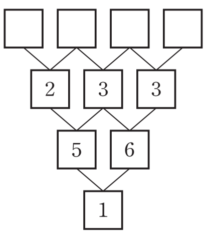


(ⅰ) 3번째 줄에 적혀 있는 두 수가 왼쪽부터 차례로 4, 7인 경우

$4=2+2$, $7=3+4$이고 공통인 수가 없으므로 이러한 경우는 없다.

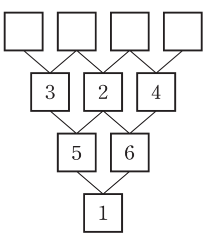
(ⅱ) 3번째 줄에 적혀 있는 두 수가 왼쪽부터 차례로 5, 6인 경우

ⓐ $5=2+3$, $6=3+3$일 때



$2=1+1$, $3=1+2$, $3=2+1$이므로 조건을 만족시킨다.

ⓑ $5=3+2$, $6=2+4$일 때



$2=1+1$, $4=2+2$이고 공통인 수가 없으므로 이러한 경우는 없다.

따라서 맨 윗줄의 네 수가 왼쪽부터 차례로 1, 1, 2, 1이면 되므로 이 경우의 확률은

$\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{27}{256}$

(ⅲ) 3번째 줄에 적혀 있는 두 수가 왼쪽부터 차례로 6, 5인 경우

(ⅱ)에 의하여 맨 윗줄의 네 수가 왼쪽부터 차례로 1, 2, 1, 1임을 알 수 있고, 이 경우의 확률은 $\frac{27}{256}$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은

$\frac{27}{256}+\frac{27}{256}=\frac{54}{256}=\frac{27}{128}$

따라서 $p=128$, $q=27$이므로

$p+q=128+27=155$

답 155

참고

맨 윗줄의 빈칸에 1 또는 2를 적는 16가지 경우에 대하여 그림을 완성한 후 확률을 구할 수도 있다.

2 5장의 카드에서 2장의 카드를 동시에 선택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 6인 사건을 A라 하면 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 6인 경우는 1과 5 또는 2와 4일 때이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 곱이 $m\,(3\le m\le 20)$ 이상인 사건을 B_m이라 하자.

두 사건 A, B_m이 서로 독립이려면

$\mathrm{P}(A\cap B_m)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B_m)$이어야 하므로

$\frac{n(A\cap B_m)}{10}=\frac{1}{5}\times\frac{n(B_m)}{10}$에서

$n(B_m)=5\times n(A\cap B_m)$ …… ㉠

꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 곱이 될 수 있는 경우를 곱이 작은 수부터 차례로 나열하면

$1\times2=2$, $1\times3=3$, $1\times4=4$, $1\times5=5$, $2\times3=6$, $2\times4=8$, $2\times5=10$, $3\times4=12$, $3\times5=15$, $4\times5=20$ …… ㉡

(ⅰ) $m=3$, 4, 5일 때

㉡에서 두 수의 곱이 3 이상인 경우는 1과 3, …, 4와 5이므로 $n(B_3)=9$

같은 방법으로 $n(B_4)=8$, $n(B_5)=7$

이때 $n(A\cap B_m)=2$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $m=6$일 때

㉡에서 $n(B_6)=6$, $n(A\cap B_6)=1$이므로

㉠을 만족시키지 않는다.

(iii) $m=7$, 8일 때

㉡에서 $n(B_m)=5$, $n(A\cap B_m)=1$

이므로 ㉠을 만족시킨다.

(iv) $m=9$, 10, $\cdots$, 20일 때

㉡에서 $n(A\cap B_m)=0$

이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 $m=7$ 또는 $m=8$이므로 구하는 모든 m의 값의 합은

$7+8=15$

답 ③

3 한 개의 주사위를 한 번 던지는 시행에서 4 이하의 눈이 나오는 사건을 D, 5 이상의 눈이 나오는 사건을 E라 하면

$\mathrm{P}(D)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(E)=\frac{1}{3}$

7 이하의 자연수 n에 대하여 n번의 시행에서 4 이하의 눈이 나오는 횟수를 a라 하면 5 이상의 눈이 나오는 횟수는 $n-a$이다.

이때 상자 A에 들어 있는 공의 개수는

$9-a+(n-a)=9+n-2a$

이고, 상자 B에 들어 있는 공의 개수는

$9+a+(n-a)=9+n$

이다.

상자 B에 들어 있는 공의 개수가 상자 A에 들어 있는 공의 개수의 2배가 되려면

$9+n=2(9+n-2a)$

$n=4a-9$

a는 n 이하의 음이 아닌 정수이고 n이 7 이하의 자연수이므로

$a=3$일 때 $n=3$, $a=4$일 때 $n=7$이다.

따라서 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 7번째 시행 후 처음으로 상자 A에 들어 있는 공의 개수의 2배가 되는 경우는 7번째 시행까지 D가 4번, E가 3번 일어나는 경우에서 3번째 시행까지 D가 3번 일어나고 4번째 시행에서 7번째 시행까지 D가 1번, E가 3번 일어나는 경우를 제외시키면 된다.

7번째 시행까지 D가 4번, E가 3번 일어날 확률은

$${}_7\mathrm{C}_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{560}{3^7}$$

3번째 시행까지 D가 3번 일어나고 4번째 시행에서 7번째 시행까지 D가 1번, E가 3번 일어날 확률은

$${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\times{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{64}{3^7}$$

따라서 구하는 확률은

$$p=\frac{560}{3^7}-\frac{64}{3^7}=\frac{496}{3^7}$$

이므로 $3^7\times p=496$

답 496

05 이산확률변수의 확률분포

유제 본문 59~67쪽

1 ④	2 ⑤	3 ③	4 ④	5 ⑤
6 ④	7 ③	8 ②	9 ①	10 ①

1 $X^2-8X+15>0$에서

$(X-3)(X-5)>0$

$X<3$ 또는 $X>5$

즉, $X=2$ 또는 $X=6$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X^2-8X+15>0)&=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=6)\\&=\frac{1}{15}+\frac{5}{15}\\&=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

답 ④

2 확률변수 X가 갖는 값은 0, 1, 2, 3이다.

이때 $|X-2|=1$에서

$X-2=-1$ 또는 $X-2=1$

즉, $X=1$ 또는 $X=3$

한 개의 주사위를 던져서 6의 약수인 1, 2, 3, 6의 눈이 나올 확률은

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$X=1$일 때, 6의 약수의 눈이 한 번 나오는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=1)={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$

$X=3$일 때, 6의 약수의 눈이 세 번 나오는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=3)={}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{8}{27}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|X-2|=1)&=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=3)\\&=\frac{2}{9}+\frac{8}{27}\\&=\frac{14}{27}\end{aligned}$$

답 ⑤

3 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{a}{3}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{3}$	$\frac{a}{6}$	1

확률변수 X가 갖는 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\frac{a}{3}+\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\frac{a}{6}=\frac{4}{3}a=1$

$a=\frac{3}{4}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=(-1)\times\frac{a}{3}+0\times\frac{a}{2}+1\times\frac{a}{3}+2\times\frac{a}{6}\\&=\frac{1}{3}a\\&=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

답 ③

4 확률변수 X가 갖는 값은 3, 4, 5, 6이고,

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{20}$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{3}{20}$

$\mathrm{P}(X=5)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(X=6)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{2}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=3\times\frac{1}{20}+4\times\frac{3}{20}+5\times\frac{3}{10}+6\times\frac{1}{2}\\&=\frac{21}{4}\end{aligned}$$

답 ④

5 확률변수 X가 갖는 값은 1, 2, 3이고,

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_5\mathrm{C}_3}=\frac{1}{10}$

따라서

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}=\frac{9}{5}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{3}{5}+3^2\times\frac{1}{10}=\frac{18}{5}$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{18}{5}-\left(\frac{9}{5}\right)^2$

$=\frac{9}{25}$

답 ⑤

6 $\mathrm{P}(1\le X\le 3)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=\frac{5}{6}$

이므로 $\frac{1}{6}+\left(\frac{2}{3}-a\right)+b=\frac{5}{6}$, $a=b$

확률변수 X가 갖는 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=0)=1-\mathrm{P}(1\le X\le 3)$

$=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

즉, $a=\frac{1}{6}$이므로 $b=\frac{1}{6}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{1}{6}=\frac{11}{3}$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{11}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2$

$=\frac{8}{9}$

답 ④

7 $\mathrm{E}(3X+1)=3\mathrm{E}(X)+1=16$

이므로 $\mathrm{E}(X)=5$

$\mathrm{V}(2X+1)=2^2\mathrm{V}(X)=4\mathrm{V}(X)=8$

이므로 $\mathrm{V}(X)=2$

따라서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=2+5^2$

$=27$

답 ③

8 확률변수 X가 갖는 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{2}+a+b=1$

$a+b=\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\mathrm{E}(2X+1)=2\mathrm{E}(X)+1=\frac{5}{2}$

이므로 $\mathrm{E}(X)=\frac{3}{4}$

주어진 표에서

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{2}+1\times a+2\times b=a+2b$

이므로 $a+2b=\frac{3}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=b=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{5}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^2$

$=\frac{11}{16}$

따라서

$\mathrm{V}(4X+1)=4^2\mathrm{V}(X)$

$=16\times\frac{11}{16}$

$=11$

답 ②

9 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{1}{4}=\frac{n}{4}$

$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}n$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$70=\frac{3}{16}n+\frac{1}{16}n^2$

$n^2+3n-1120=0$

$(n-32)(n+35)=0$

이때 n은 자연수이므로 $n=32$

답 ①

10 $\log_2(a+1)-\log_2 3=\log_2\frac{a+1}{3}$의 값이 정수가 되려면

$\frac{a+1}{3}=1$ 또는 $\frac{a+1}{3}=2$

이어야 하므로 $a=2$ 또는 $a=5$

즉, $a=2$일 때 $\log_2 1=0$, $a=5$일 때 $\log_2 2=1$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

한 개의 주사위를 24번 던지는 시행은 독립시행이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(24, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

따라서 $\mathrm{E}(X)=24\times\frac{1}{3}=8$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(2X-3)&=2\mathrm{E}(X)-3\\&=2\times8-3\\&=13\end{aligned}$$

답 ①

Level 1 기초 연습 본문 68쪽

1 ⑤ 2 ④ 3 ② 4 ③ 5 5

1 확률변수 X가 갖는 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{2}+a+\frac{1}{3}=1$

$a=\frac{1}{6}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{3}\\&=\frac{13}{6}\end{aligned}$$

답 ⑤

2 확률변수 X가 갖는 값은 2, 3, 4, 5이다.

$X=2$일 때, 1이 적혀 있는 카드 2장을 모두 선택하는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$

$X=3$일 때, 1, 2가 적혀 있는 카드를 한 장씩 선택하는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5}$

$X=4$일 때, 1, 3이 적혀 있는 카드를 한 장씩 선택하거나 2가 적혀 있는 카드 2장을 모두 선택하는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}+\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$

$X=5$일 때, 2, 3이 적혀 있는 카드를 한 장씩 선택하는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=5)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{5}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	1

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{2}{5}+4\times\frac{3}{10}+5\times\frac{1}{5}\\&=\frac{18}{5}\end{aligned}$$

답 ④

3 $\mathrm{P}(X=-2)=\frac{k}{6}$

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{k}{4}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{k}{3}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{k}{2}$

이고

$\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=1$

이므로

$\frac{k}{6}+\frac{k}{4}+\frac{k}{3}+\frac{k}{2}=\frac{5}{4}k=1$

$k=\frac{4}{5}$

따라서 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-2	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{5}$	1

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=(-2)\times\frac{2}{15}+0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{4}{15}+2\times\frac{2}{5}\\&=\frac{4}{5}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(3X-k)&=3\mathrm{E}(X)-k\\&=3\times\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\\&=\frac{8}{5}\end{aligned}$$

답 ②

4 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{1}{3}=\frac{n}{3}$

$\mathrm{E}(2X)=2\mathrm{E}(X)=2\times\frac{n}{3}=\frac{2}{3}n=24$이므로

$n=36$

따라서 $\mathrm{V}(X)=36\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=8$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(2X+4)&=2^2\mathrm{V}(X)\\&=4\times 8\\&=32\end{aligned}$$

답 ③

5 $$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=x)&={}_{90}\mathrm{C}_x\,\frac{2^x}{3^{90}}\\&={}_{90}\mathrm{C}_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{90-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 90)\end{aligned}$$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(90, \frac{2}{3}\right)$를 따른다.

$\mathrm{V}(X)=90\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=20$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{V}\left(\frac{1}{2}X+1\right)&=\left(\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{V}(X)\\&=\frac{1}{4}\times 20\\&=5\end{aligned}$$

답 5

Level 2 기본 연습

본문 69~70쪽

1 ③	2 ①	3 43	4 ⑤	5 ⑤
6 ④	7 ⑤	8 ②		

1 1부터 9까지의 자연수 중에서 짝수는 4개, 홀수는 5개이므로 확률변수 X가 갖는 값은 1, 2, 3, 4, 5이다.

또한 확률변수 X가 갖는 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\mathrm{P}(X>2)=1-\{\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)\}$

이때

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_4\times{}_5\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_5}=\frac{5}{126}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_5}=\frac{20}{63}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X>2)&=1-\left(\frac{5}{126}+\frac{20}{63}\right)\\&=\frac{81}{126}\\&=\frac{9}{14}\end{aligned}$$

답 ③

2 확률변수 X가 갖는 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$b+\frac{1}{4}+\frac{3}{2}b+\frac{1}{8}=1$

$\frac{5}{2}b=\frac{5}{8}$

$b=\frac{1}{4}$

따라서 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	a	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+a\times\frac{3}{8}+6\times\frac{1}{8}$

$=\frac{3}{2}+\frac{3}{8}a=3$

이므로 $a=4$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{3}{8}+6^2\times\frac{1}{8}$

$=\frac{47}{4}$

따라서

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{47}{4}-3^2$

$=\frac{11}{4}$

답 ①

3 확률변수 X가 갖는 값은 0, 1, 2이다.

두 주머니 A, B에서 임의로 꺼낸 한 개의 공이 검은 공일 확률은 각각 $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)$

$=\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{2}{15}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\frac{2}{3}$

$=\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}$

$=\frac{7}{15}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}$

$=\frac{2}{5}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{2}{5}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{2}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{2}{5}$

$=\frac{19}{15}$

따라서

$\mathrm{E}(30X+5)=30\mathrm{E}(X)+5$

$=30\times\frac{19}{15}+5$

$=43$

답 43

4 확률변수 X가 갖는 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{3}+a+2a+3a+4a=1$

$10a=\frac{2}{3}$

$a=\frac{1}{15}$

따라서 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{15}+3\times\frac{2}{15}+4\times\frac{1}{5}+5\times\frac{4}{15}$

$=3$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{15}+3^2\times\frac{2}{15}+4^2\times\frac{1}{5}+5^2\times\frac{4}{15}$

$=\frac{35}{3}$

이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{35}{3}-3^2$

$=\frac{8}{3}$

따라서

$\mathrm{V}(3X)=3^2\mathrm{V}(X)$

$=9\times\frac{8}{3}=24$

답 ⑤

5 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-2	-1	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	a	a	b	b	1

확률변수 X가 갖는 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+a+a+b+b=1$

$2a+2b=\frac{5}{6}$

$a+b=\frac{5}{12}$ ...... ㉠

$\mathrm{E}(X)=\frac{7}{6}$이므로

$$\mathrm{E}(X)=(-2)\times\frac{1}{12}+(-1)\times\frac{1}{12}+0\times a+1\times a+2\times b+3\times b$$
$$=-\frac{1}{4}+a+5b=\frac{7}{6}$$

$a+5b=\frac{17}{12}$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{4}$

따라서

$$\mathrm{E}\left(\frac{X}{a}+\frac{1}{b}\right)=\mathrm{E}(6X+4)=6\mathrm{E}(X)+4=6\times\frac{7}{6}+4=11$$

답 ⑤

6 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$

$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{n}{4}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{n}{4}+\left(\frac{n}{2}\right)^2=\frac{n^2}{4}+\frac{n}{4}$$

따라서

$\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)=\frac{n^2}{4}+\frac{n}{4}-\frac{n}{2}=\frac{n^2}{4}-\frac{n}{4}=390$

$n^2-n-1560=0$

$(n-40)(n+39)=0$

이때 n은 자연수이므로 $n=40$

답 ④

7 이항분포 $\mathrm{B}(4n, p)$를 따르는 확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=r)={}_{4n}\mathrm{C}_r\,p^r(1-p)^{4n-r}$ $(r=0, 1, 2, \cdots, 4n)$

이다.

조건 (가)에서

$\mathrm{P}(X=2n-1)={}_{4n}\mathrm{C}_{2n-1}\,p^{2n-1}(1-p)^{2n+1}$

$\mathrm{P}(X=2n+1)={}_{4n}\mathrm{C}_{2n+1}\,p^{2n+1}(1-p)^{2n-1}$

${}_{4n}\mathrm{C}_{2n-1}={}_{4n}\mathrm{C}_{4n-(2n-1)}={}_{4n}\mathrm{C}_{2n+1}$이므로

$\mathrm{P}(X=2n-1)=25\mathrm{P}(X=2n+1)$에서

${}_{4n}\mathrm{C}_{2n-1}\,p^{2n-1}(1-p)^{2n+1}=25\times{}_{4n}\mathrm{C}_{2n+1}\,p^{2n+1}(1-p)^{2n-1}$

$(1-p)^2=25p^2$

$24p^2+2p-1=0$

$(4p+1)(6p-1)=0$

이때 $0\le p\le 1$이므로 $p=\frac{1}{6}$

조건 (나)에서

$\mathrm{E}(X)=4np=\frac{2}{3}n=80$

이므로 $n=120$

따라서 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(120, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{V}(Y)=120\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{80}{3}$$

답 ⑤

8 한 개의 주사위를 45번 던질 때 4 이하의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자.

한 개의 주사위를 한 번 던질 때 4 이하의 눈이 나올 확률은

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(45, \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=45\times\frac{2}{3}=30$

4 이하의 눈이 X번 나오면 5 이상의 눈은 $(45-X)$번 나오므로 점 P의 좌표 (x, y)에 대하여

$x=2\times X+(-1)\times(45-X)=3X-45$

$y=1\times X=X$

따라서

$x+y=(3X-45)+X=4X-45$

이므로 $x+y$의 값의 기댓값은

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(4X-45)&=4\mathrm{E}(X)-45\\&=4\times30-45\\&=75\end{aligned}$$

답 ②

Level 3 실력 완성

본문 7쪽

1 ④　2 ③　3 ⑤　4 281

1 확률변수 X가 갖는 값은 0, 1, 2, 3이다.

한 개의 동전을 한 번 던져서 앞면과 뒷면이 나오는 경우를 나누어서 확률을 구하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=0)&=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}+\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}\\&=\frac{1}{40}+\frac{3}{30}\\&=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=1)&=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}+\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}\\&=\frac{9}{40}+\frac{9}{30}\\&=\frac{21}{40}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=2)&=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}+\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_0}{{}_6\mathrm{C}_2}\\&=\frac{9}{40}+\frac{3}{30}\\&=\frac{13}{40}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=3)&=\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_0}{{}_6\mathrm{C}_3}\\&=\frac{1}{40}\end{aligned}$$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{13}{40}$	$\frac{1}{40}$	1

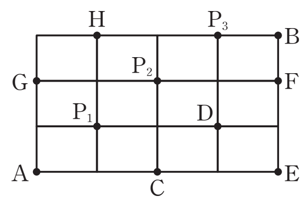
$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{21}{40}+2\times\frac{13}{40}+3\times\frac{1}{40}\\&=\frac{21+26+3}{40}\\&=\frac{5}{4}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(12X+3)&=12\mathrm{E}(X)+3\\&=12\times\frac{5}{4}+3\\&=18\end{aligned}$$

답 ④

2 그림과 같이 C, D, E, F, G, H지점을 정하자.



확률변수 X가 갖는 값은 0, 1, 2, 3이다.

(i) $X=0$인 경우

A → C → E → F → B : 1

A → C → D → F → B : $1\times2!\times2!\times1=4$

이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$

(ii) $X=1$인 경우

A → P_1 → D → F → B : $2!\times1\times2!\times1=4$

A → C → P_2 → F → B : 1

A → G → P_2 → F → B : 1

A → C → D → P_3 → B : $1\times2!\times1\times1=2$

A → G → H → P_3 → B : $1\times2!\times1\times1=2$

이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$

(iii) $X=3$인 경우

A → P_1 → P_2 → P_3 → B : $2!\times2!\times2!\times1=8$

이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{8}{35}$

(iv) $X=2$인 경우

확률변수 X가 갖는 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=2)$

$=1-\{\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=3)\}$

$=1-\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{8}{35}\right)$

$=\frac{12}{35}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{8}{35}$	1

따라서

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{7}+1\times\frac{2}{7}+2\times\frac{12}{35}+3\times\frac{8}{35}$

$=\frac{58}{35}$

답 ③

3 확률변수 X가 갖는 값은 1, 2, 3, 4, 5이다.

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$

$\mathrm{P}(X=5)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}=\frac{1}{15}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{4}{15}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{2}{15}+5\times\frac{1}{15}$

$=\frac{7}{3}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{4}{15}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{2}{15}+5^2\times\frac{1}{15}$

$=7$

따라서

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=7-\left(\frac{7}{3}\right)^2$

$=\frac{14}{9}$

이므로

$\mathrm{V}(6X+4)=6^2\mathrm{V}(X)$

$=36\times\frac{14}{9}$

$=56$

답 ⑤

4 $(a-4)(b-2)>0$이려면

$a-4>0$이고 $b-2>0$

또는 $a-4<0$이고 $b-2<0$

이어야 한다.

(i) $a>4$이고 $b>2$인 순서쌍 (a, b)의 개수는

(5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),

(6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)

의 8이다.

(ii) $a<4$이고 $b<2$인 순서쌍 (a, b)의 개수는

(3, 1), (2, 1), (1, 1)

의 3이다.

(i), (ii)에서 $\mathrm{P}(A)=\frac{11}{36}$

한 개의 주사위를 두 번 던지는 24회의 독립시행이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(24, \frac{11}{36}\right)$을 따른다.

$\mathrm{V}(X)=24\times\frac{11}{36}\times\frac{25}{36}=\frac{275}{54}$이므로

$\mathrm{V}(3X)=3^2\mathrm{V}(X)$

$=9\times\frac{275}{54}$

$=\frac{275}{6}$

따라서 $p=6$, $q=275$이므로

$p+q=6+275=281$

답 281

참고

(i) $a>4$이고 $b>2$일 확률은

$\frac{2}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{9}$

(ii) $a<4$이고 $b<2$일 확률은

$\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

(i), (ii)에서 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{9}+\frac{1}{12}=\frac{11}{36}$

06 연속확률변수의 확률분포

유제 본문 75~81쪽

1 ⑤ 2 ⑤ 3 ③ 4 ③ 5 ⑤
6 ③ 7 ④ 8 ③

1 $f(x)$가 확률밀도함수이므로 $-1\le x\le 1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이가 1이다. 즉,

$\frac{1}{2}\times\{1-(-1)\}\times\{f(-1)+f(1)\}$

$=\frac{1}{2}\times 2\times\{(-a+b)+(a+b)\}$

$=2b=1$

$b=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\frac{3}{5}$이므로 $0\le x\le 1$에서

직선 $f(x)=ax+\frac{1}{2}$과 x축 사이의 넓이가 $\frac{3}{5}$이다.

$f(0)=\frac{1}{2}$, $f(1)=a+\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times(1-0)\times\left(\frac{1}{2}+a+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{5}$

$a+1=\frac{6}{5}$, $a=\frac{1}{5}$

따라서 $a+b=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=\frac{7}{10}$

답 ⑤

2 $f(x)$가 확률밀도함수이므로 $0\le x\le 4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이가 1이다.

즉, $\frac{1}{2}\times 3\times k+\frac{1}{2}\times 1\times k=2k=1$

$k=\frac{1}{2}$

두 점 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $(3, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-0=\frac{0-\frac{1}{2}}{3-1}(x-3)$, $y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$

즉, $f(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}\ (1\le x\le 3)$이므로

$f(1)=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$, $f(2)=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

따라서

$\mathrm{P}(2k\le X\le 4k)=\mathrm{P}(1\le X\le 2)$

$=\frac{1}{2}\times 1\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{3}{8}$

답 ⑤

3 $\mathrm{V}(2X)=2^2\mathrm{V}(X)=4\mathrm{V}(X)=36$

에서

$\mathrm{V}(X)=9$

이므로 $\sigma=3$

한편, X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(X\le 20)=\mathrm{P}(X\ge 35+\sigma)$에서

$m=\frac{20+(35+\sigma)}{2}$

$=\frac{20+35+3}{2}=29$

따라서

$m+\sigma=29+3=32$

답 ③

4 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르므로 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

조건 (가)에서 $\mathrm{P}(20\le X\le 30)=\mathrm{P}(50\le X\le 60)$이고

$30-20=60-50$이므로

$m=\frac{20+60}{2}=\frac{30+50}{2}=40$

조건 (나)에서 $\mathrm{P}(X\le m-\sigma)=\mathrm{P}(X\ge 45)$이므로

$m=\frac{(m-\sigma)+45}{2}$

즉, $40=\frac{40-\sigma+45}{2}=\frac{85-\sigma}{2}$

$\sigma=5$

따라서 $\mathrm{P}\left(\frac{m}{\sigma}\le X\le 50\right)=\mathrm{P}(30\le X\le k)$에서

$\mathrm{P}\left(\frac{40}{5}\le X\le 50\right)=\mathrm{P}(30\le X\le k)$

$\mathrm{P}(8\le X\le 50)=\mathrm{P}(30\le X\le k)$

즉, $m=\dfrac{8+k}{2}=40$이므로

$k=72$

답 ③

5 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 3^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-30}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포

$\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 36)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{36-30}{3}\right)=\mathrm{P}(Z\le 2)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5+0.4772\\&=0.9772\end{aligned}$$

답 ⑤

6 관람객 한 명의 관람 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 8^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-m}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 72)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{72-m}{8}\right)\\&=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{72-m}{8}\right)\\&=0.3085\end{aligned}$$

이므로

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{72-m}{8}\right)=0.1915$

이때 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)=0.1915$이므로

$\dfrac{72-m}{8}=0.5$

따라서 $m=68$

답 ③

7 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(900,\ \dfrac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=900\times\dfrac{1}{5}=180$

$\mathrm{V}(X)=900\times\dfrac{1}{5}\times\left(1-\dfrac{1}{5}\right)=144$

이때 $n=900$은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(180,\ 12^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-180}{12}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(168\le X\le 204)&=\mathrm{P}\left(\frac{168-180}{12}\le Z\le\frac{204-180}{12}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.3413+0.4772\\&=0.8185\end{aligned}$$

답 ④

8 2개의 공에 적힌 두 수의 곱이 4의 배수인 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 2, 4, 6, 8이 적힌 공 중에서 2개가 나오는 경우의 수는

$_4\mathrm{C}_2$

(ⅱ) 1, 3, 5, 7, 9가 적힌 공 중에서 1개, 4, 8이 적힌 공 중에서 1개가 나오는 경우의 수는

$_5\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 2개의 공에 적힌 두 수의 곱이 4의 배수인 공을 꺼낼 확률은

$\dfrac{_4\mathrm{C}_2}{_9\mathrm{C}_2}+\dfrac{_5\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{_9\mathrm{C}_2}=\dfrac{6}{36}+\dfrac{10}{36}=\dfrac{4}{9}$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(720,\ \dfrac{4}{9}\right)$를 따른다.

$\mathrm{E}(X)=720\times\dfrac{4}{9}=320$

$\mathrm{V}(X)=720\times\dfrac{4}{9}\times\left(1-\dfrac{4}{9}\right)=\dfrac{1600}{9}$

이때 $n=720$은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(320,\ \left(\dfrac{40}{3}\right)^2\right)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-320}{\frac{40}{3}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 300)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{300-320}{\frac{40}{3}}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -1.5)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5+0.4332\\&=0.9332\end{aligned}$$

답 ③

Level 1 기초 연습 본문 82쪽

1 ④ 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤

1 $f(x)$가 확률밀도함수이므로 $0\le x\le 2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이가 1이다.

즉,

$$a\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times(2-a)\times\left(\frac{2}{5}+\frac{9}{10}\right)=1$$

$$\frac{2}{5}a+\frac{13}{20}(2-a)=1$$

$$8a+26-13a=20$$

$$5a=6$$

$$a=\frac{6}{5}$$

따라서

$$\begin{aligned}P(a\le X\le 2)&=P\left(\frac{6}{5}\le X\le 2\right)\\&=1-P\left(0\le X\le\frac{6}{5}\right)\\&=1-\frac{6}{5}\times\frac{2}{5}\\&=\frac{13}{25}\end{aligned}$$

답 ④

2 $P(X\le 30)=0.76$에서

$$\begin{aligned}P(X\le 30)&=P(X\le m)+P(m\le X\le 30)\\&=0.5+P(m\le X\le 30)\\&=0.76\end{aligned}$$

이므로 $P(m\le X\le 30)=0.26$ …… ㉠

$P(m-8\le X\le 30)=0.52$에서

$P(m-8\le X\le 30)$

$=P(m-8\le X\le m)+P(m\le X\le 30)$

$=P(m-8\le X\le m)+0.26$

$=0.52$

이므로 $P(m-8\le X\le m)=0.26$ …… ㉡

따라서 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 ㉠, ㉡에서

$$m=\frac{m-8+30}{2}=\frac{m+22}{2}$$

즉, $m=22$

답 ②

3 확률변수 X가 정규분포 $N(20,\ 4^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-20}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

한편, $|X-14|\ge 2$에서 $X-14\ge 2$ 또는 $X-14\le -2$

즉, $X\ge 16$ 또는 $X\le 12$

따라서

$P(|X-14|\ge 2)$

$=P(X\ge 16)+P(X\le 12)$

$=P\left(Z\ge\frac{16-20}{4}\right)+P\left(Z\le\frac{12-20}{4}\right)$

$=P(Z\ge -1)+P(Z\le -2)$

$=0.5+P(0\le Z\le 1)+0.5-P(0\le Z\le 2)$

$=1+0.3413-0.4772$

$=0.8641$

답 ③

4 확률변수 X가 정규분포 $N(40,\ 5^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-40}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}P(X\ge 30)&=P\left(Z\ge\frac{30-40}{5}\right)\\&=P(Z\ge -2)\\&=0.5+P(0\le Z\le 2)\end{aligned}$$ …… ㉠

또한 확률변수 Y가 정규분포 $N(60,\ 4^2)$을 따르므로

$Z=\frac{Y-60}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(Y\le k)=P\left(Z\le\frac{k-60}{4}\right)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $P(X\ge 30)=P(Y\le k)$이려면 표준정규분포를 따르는 확률변수의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $z=0$에 대하여 대칭이므로

$$\begin{aligned}P\left(Z\le\frac{k-60}{4}\right)&=0.5+P\left(0\le Z\le\frac{k-60}{4}\right)\\&=0.5+P(0\le Z\le 2)\end{aligned}$$

이어야 한다.

즉, $\frac{k-60}{4}=2$

따라서 $k=68$

답 ④

5 흰 공이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 한 번의 시행에서 흰 공이 나올 확률은 $\frac{1}{10}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{1}{10}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{10}=10$

$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{10}\times\left(1-\frac{1}{10}\right)=9$

이때 $n=100$은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(10, 3^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-10}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 4)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{4-10}{3}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -2)\\&=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5+0.4772\\&=0.9772\end{aligned}$$

답 ⑤

Level 2 기본 연습 본문 83~84쪽

1 ③	2 ②	3 ③	4 ④	5 ③
6 ④	7 ⑤	8 ③		

1 확률밀도함수 $f(x)$는 $-5\le x\le 5$인 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=0$에 대하여 대칭이다.

즉, $\mathrm{P}(-1\le X\le 0)=\mathrm{P}(0\le X\le 1)$이고

$\mathrm{P}(-5\le X\le 0)=\frac{1}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(0\le X\le 1)&=\mathrm{P}(-1\le X\le 0)\\&=\mathrm{P}(-5\le X\le 0)-\mathrm{P}(-5\le X\le -1)\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\&=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(1\le X\le 3)&=\mathrm{P}(0\le X\le 3)-\mathrm{P}(0\le X\le 1)\\&=\frac{7}{18}-\frac{1}{6}\\&=\frac{2}{9}\end{aligned}$$

답 ③

2 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

모든 실수 x에 대하여 $f(20-x)=f(x+40)$이 성립하므로

$m=\frac{20-x+x+40}{2}=30$

$Z=\frac{X-30}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르고

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 36)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{36-30}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{6}{\sigma}\right)\\&=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{6}{\sigma}\right)\\&=0.8413\end{aligned}$$

이므로

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{6}{\sigma}\right)=0.3413$

이때 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{6}{\sigma}=1$, $\sigma=6$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(27\le X\le 39)&=\mathrm{P}\left(\frac{27-30}{6}\le Z\le\frac{39-30}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(-0.5\le Z\le 1.5)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.1915+0.4332\\&=0.6247\end{aligned}$$

답 ②

3 이 농장에서 재배하는 토마토 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(170, 10^2)$을 따르고,

$Z=\frac{X-170}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

선택한 토마토 한 개의 무게가 160 이하일 때, B등급으로 분류되므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\le160)&=P\left(Z\le\frac{160-170}{10}\right)\\&=P(Z\le-1)\\&=0.5-P(0\le Z\le1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

답 ③

4 확률변수 X가 정규분포 $N(60,\ 4^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-60}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(k\le X\le60)=P\left(\frac{k-60}{4}\le Z\le0\right)$

$P(0\le Z\le a)=P(-a\le Z\le0)$이므로

$\frac{k-60}{4}=-a$

$k=60-4a$ …… ㉠

$$\begin{aligned}P(X\ge k+4)&=P\left(Z\ge\frac{(k+4)-60}{4}\right)\\&=P\left(Z\ge\frac{k-56}{4}\right)\end{aligned}$$

$k<56$이므로 $\frac{k-56}{4}<0$이고

$P(Z\le b)=P(Z\ge-b)$이므로

$\frac{k-56}{4}=-b$

$k=56-4b$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$60-4a=56-4b$

$4a-4b=4$

따라서 $a-b=1$

답 ④

5 정규분포 $N(m,\ 4^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

$f(12)=f(28)$이므로

$m=\frac{12+28}{2}=20$

따라서 확률변수 X는 정규분포 $N(20,\ 4^2)$을 따르고,

$Z=\frac{X-20}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}P\left(|X-m|\ge\frac{m}{5}\right)&=P\left(|X-20|\ge\frac{20}{5}\right)\\&=P\left(\left|\frac{X-20}{4}\right|\ge\frac{4}{4}\right)\\&=P(|Z|\ge1)\\&=1-P(|Z|\le1)\\&=1-P(-1\le Z\le1)\\&=1-2P(0\le Z\le1)\\&=1-2\times0.3413\\&=1-0.6826\\&=0.3174\end{aligned}$$

답 ③

6 미세먼지 측정기 한 대의 완전 충전으로 사용가능한 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(15,\ \sigma^2)$을 따르고,

$Z=\frac{X-15}{\sigma}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

미세먼지 측정기 한 대의 완전 충전으로 사용가능한 시간이 17시간 이하일 확률이 0.92이므로

$P(X\le17)=0.92$

$$\begin{aligned}P(X\le17)&=P\left(Z\le\frac{17-15}{\sigma}\right)\\&=0.5+P\left(0\le Z\le\frac{2}{\sigma}\right)\\&=0.92\end{aligned}$$

이므로

$P\left(0\le Z\le\frac{2}{\sigma}\right)=0.92-0.5=0.42$

이때 $P(0\le Z\le1.4)=0.42$이므로

$\frac{2}{\sigma}=1.4=\frac{7}{5}$

따라서 $\sigma=\frac{10}{7}$

답 ④

7 직원의 업무 만족도를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(m,\ 10^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-m}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(X\ge72)=0.6915$에서

$$\mathrm{P}(X\ge 72)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{72-m}{10}\right)$$
$$=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{m-72}{10}\right)$$
$$=0.6915$$

이므로

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{m-72}{10}\right)=0.6915-0.5=0.1915$

이때 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)=0.1915$이므로

$\frac{m-72}{10}=0.5$, $m=77$

따라서 이 대기업의 전체 직원 10000명 중 업무 만족도가 k점 이상인 직원이 668명이므로

$\mathrm{P}(X\ge k)=\frac{668}{10000}=0.0668$

$$\mathrm{P}(X\ge k)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{k-77}{10}\right)$$
$$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-77}{10}\right)$$
$$=0.0668$$

이므로

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{k-77}{10}\right)=0.5-0.0668=0.4332$

이때 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{k-77}{10}=1.5$, $k-77=15$

즉, $k=92$

답 ⑤

8 한 개의 동전을 100회 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{2}=50$, $\mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=25$

이때 $n=100$은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50, 5^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-50}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

한편, 점수가 35점 이상이 되려면

$2X-(100-X)\ge 35$, $3X\ge 135$

$X\ge 45$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X\ge 45)=\mathrm{P}\left(Z\ge \frac{45-50}{5}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\ge -1)$$
$$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=0.5+0.3413$$
$$=0.8413$$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 85쪽

1 ④ 2 ⑤ 3 ③

1 조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 $x=20$에서 최댓값을 가지므로 정규분포를 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=20$에 대하여 대칭이다.

즉, 확률변수 X의 평균은 20이다.

조건 (나)에서 $g(x)=f(x+5)$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

즉, 확률변수 Y의 평균은 $20-5=15$이다.

또한 확률변수 X의 표준편차를 σ라 하면 확률변수 Y의 표준편차도 σ이다.

따라서 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(20, \sigma^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-20}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(16\le X\le 24)=\mathrm{P}\left(\frac{16-20}{\sigma}\le Z\le \frac{24-20}{\sigma}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(-\frac{4}{\sigma}\le Z\le \frac{4}{\sigma}\right)$$
$$=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{4}{\sigma}\right)$$
$$=0.3830$$

이므로

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{4}{\sigma}\right)=0.1915$

이때 표준정규분포표에서 $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)=0.1915$이므로

$\frac{4}{\sigma}=0.5$, $\sigma=8$

따라서 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(15, 8^2)$을 따르므로

$Z=\frac{Y-15}{8}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(Y\ge k)=0.0228$에서

$P(Y\geq k)=P\left(Z\geq \frac{k-15}{8}\right)$

$=0.5-P\left(0\leq Z\leq \frac{k-15}{8}\right)$

$=0.0228$

이므로

$P\left(0\leq Z\leq \frac{k-15}{8}\right)=0.5-0.0228=0.4772$

이때 표준정규분포표에서 $P(0\leq Z\leq 2)=0.4772$이므로

$\frac{k-15}{8}=2$, $k-15=16$

따라서 $k=31$

답 ④

2 드론 A 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(480,\ 5^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-480}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(X\geq 487)=P\left(Z\geq \frac{487-480}{5}\right)$

$=P(Z\geq 1.4)$

$=0.5-P(0\leq Z\leq 1.4)$

$=0.5-0.42$

$=0.08$

드론 B 한 개의 무게를 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $N(320,\ \sigma^2)$을 따르고, $Z=\frac{Y-320}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

이때 $P(X\geq 487)=2P(Y\geq 330)=0.08$이므로

$P(Y\geq 330)=0.04$

즉,

$P(Y\geq 330)=P\left(Z\geq \frac{330-320}{\sigma}\right)$

$=P\left(Z\geq \frac{10}{\sigma}\right)$

$=0.5-P\left(0\leq Z\leq \frac{10}{\sigma}\right)$

$=0.04$

이므로

$P\left(0\leq Z\leq \frac{10}{\sigma}\right)=0.5-0.04=0.46$

이때 표준정규분포표에서 $P(0\leq Z\leq 1.8)=0.46$이므로

$\frac{10}{\sigma}=1.8=\frac{9}{5}$

따라서 $\sigma=\frac{50}{9}$

답 ⑤

3 주어진 표에서

$a+b+22+8=100$

$a+b=70$ …… ㉠

계획안 B의 선호도가 b %이므로 Y는 이항분포 $B\left(600,\ \frac{b}{100}\right)$를 따른다.

$V(Y)=600\times\frac{b}{100}\times\left(1-\frac{b}{100}\right)$

$=6b\left(1-\frac{b}{100}\right)$

$V\left(\frac{1}{3}Y\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2V(Y)$

$=\frac{1}{9}\times 6b\left(1-\frac{b}{100}\right)$

$=\frac{2}{3}b\left(1-\frac{b}{100}\right)$

$=14$

$b\times\frac{100-b}{100}=21$

$b^2-100b+2100=0$

$(b-30)(b-70)=0$

$b=30$ 또는 $b=70$

$a>b$이고 ㉠에서 $a+b=70$이므로

$a=40$, $b=30$

즉, 계획안 A의 선호도가 $a=40(\%)$이므로 X는 이항분포 $B\left(600,\ \frac{2}{5}\right)$를 따른다.

$E(X)=600\times\frac{2}{5}=240$

$V(X)=600\times\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{2}{5}\right)=144$

이때 $n=600$은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(240,\ 12^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-240}{12}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$P(X\geq 252)=P\left(Z\geq \frac{252-240}{12}\right)$

$=P(Z\geq 1)$

$=0.5-P(0\leq Z\leq 1)$

$=0.5-0.3413$

$=0.1587$

답 ③

07 통계적 추정

유제 본문 89~95쪽

1 ① 2 39 3 ① 4 34 5 ③
6 ② 7 196

1 확률변수 X가 갖는 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{4}+a+b+\frac{1}{6}=1$

$a+b=\frac{7}{12}$ …… ㉠

$\mathrm{P}(X\le 2)=\frac{2}{3}$에서

$\mathrm{P}(X\le 2)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{4}+a$이므로

$\frac{1}{4}+a=\frac{2}{3}$, 즉 $a=\frac{5}{12}$

$a=\frac{5}{12}$를 ㉠에 대입하면

$b=\frac{1}{6}$

모집단에서 임의추출한 크기가 3인 표본을 X_1, X_2, X_3이라 하면 $\overline{X}=\frac{10}{3}$인 경우는 (X_1, X_2, X_3)이

$(4, 4, 2)$, $(4, 2, 4)$, $(2, 4, 4)$,
$(4, 3, 3)$, $(3, 4, 3)$, $(3, 3, 4)$

일 때이다.

따라서

$$\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{10}{3}\right)=3\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{12}+3\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{7}{144}$$

답 ①

2 모평균 $m=30$, 모표준편차 $\sigma=6$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=m=30$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{6^2}{n}=4$에서

$n=9$

따라서

$n+\mathrm{E}(\overline{X})=9+30=39$

답 39

3 주머니에서 한 개의 공을 꺼낼 때 나온 공에 적혀 있는 수를 확률변수 Y라 하자.
확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(Y)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$

$\mathrm{V}(Y)=1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{6}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

이 주머니에서 크기가 6인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하면

$\mathrm{E}(\overline{Y})=\frac{5}{3}$

$\mathrm{V}(\overline{Y})=\frac{\mathrm{V}(Y)}{6}=\frac{5}{54}$

한편, $\overline{Y}=\frac{X}{6}$, 즉 $X=6\overline{Y}$이므로

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(6\overline{Y})=6\mathrm{E}(\overline{Y})=6\times\frac{5}{3}=10$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(6\overline{Y})=6^2\mathrm{V}(\overline{Y})=36\times\frac{5}{54}=\frac{10}{3}$

따라서

$\mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)=10+\frac{10}{3}=\frac{40}{3}$

답 ①

4 $\mathrm{E}(\overline{X})=60$, $\sigma(\overline{X})=\frac{10}{\sqrt{25}}=2$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(60, 2^2)$을 따른다.

이때 $Z=\frac{\overline{X}-60}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(\overline{X}\le 64)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{64-60}{2}\right)=\mathrm{P}(Z\le 2)$$

또 $\mathrm{E}(\overline{Y})=36$, $\sigma(\overline{Y})=\frac{4}{\sqrt{16}}=1$

이므로 확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}(36, 1^2)$을 따른다.

이때 $Z=\frac{\overline{Y}-36}{1}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(\overline{Y}\le a)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a-36}{1}\right)=\mathrm{P}(Z\le a-36)$$

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 64)+\mathrm{P}(\overline{Y}\le a)=1$에서
$\mathrm{P}(Z\le 2)+\mathrm{P}(Z\le a-36)=1$
$\mathrm{P}(Z\le 2)=\mathrm{P}(Z\ge -2)$이므로
$\mathrm{P}(Z\ge -2)+\mathrm{P}(Z\le a-36)=1$
따라서 $a-36=-2$이므로
$a=34$

답 34

5 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(3.5,\ \sigma^2)$을 따르므로
$Z=\dfrac{X-3.5}{\sigma}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
$\mathrm{P}(3.1\le X\le 3.5)=0.1915$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(3.1\le X\le 3.5)&=\mathrm{P}\left(\frac{3.1-3.5}{\sigma}\le Z\le \frac{3.5-3.5}{\sigma}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-\frac{0.4}{\sigma}\le Z\le 0\right)\\&=\mathrm{P}\left(0\le Z\le \frac{0.4}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

이므로
$\mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{0.4}{\sigma}\right)=0.1915$
한편, $\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)=0.1915$이므로
$\dfrac{0.4}{\sigma}=0.5$, 즉 $\sigma=0.8$
이 공장에서 생산한 가방 중에서 임의추출한 16개의 무게의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면
$\mathrm{E}(\overline{X})=3.5$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{16}}=\dfrac{0.8}{4}=0.2$
이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(3.5,\ 0.2^2)$을 따른다.
이때 $Z=\dfrac{\overline{X}-3.5}{0.2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X}\le 3.7)&=\mathrm{P}\left(Z\le \frac{3.7-3.5}{0.2}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.5+0.3413\\&=0.8413\end{aligned}$$

답 ③

6 표본평균이 $\overline{x}=50.516$, 모표준편차가 2, 표본의 크기가 100이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은
$50.516-2.58\times\dfrac{2}{\sqrt{100}}\le m\le 50.516+2.58\times\dfrac{2}{\sqrt{100}}$
$50\le m\le 51.032$
이때 $a=50$, $a+b=51.032$에서
$b=51.032-50=1.032$
따라서
$ab=50\times 1.032=51.6$

답 ②

7 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 모표준편차가 10, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은
$\overline{x}-1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}\le m\le \overline{x}+1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}$
이때 $a=\overline{x}-1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}$, $b=\overline{x}+1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}$이므로
$5(b-a)\le 14$, 즉 $b-a\le 2.8$에서
$\left(\overline{x}+1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}\right)-\left(\overline{x}-1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}\right)\le 2.8$
$2\times 1.96\times\dfrac{10}{\sqrt{n}}\le 2.8$
$\sqrt{n}\ge 14$
$n\ge 196$
따라서 자연수 n의 최솟값은 196이다.

답 196

Level 1 기초 연습

본문 96쪽

1 ③	2 ①	3 ②	4 ③	5 ④

1 확률변수 X가 갖는 값에 대한 확률의 합은 1이므로
$\dfrac{1}{3}+a+\dfrac{1}{6}=1$에서 $a=\dfrac{1}{2}$
$\overline{X}<2$이려면 $\overline{X}=1$ 또는 $\overline{X}=\dfrac{3}{2}$
모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 X_1, X_2라 하면
$\overline{X}=1$인 경우는 $(X_1,\ X_2)$가 $(1,\ 1)$일 때이므로
$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$
$\overline{X}=\dfrac{3}{2}$인 경우는 $(X_1,\ X_2)$가 $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$일 때이므로
$\mathrm{P}\left(\overline{X}=\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

따라서

$P(\overline{X}<2)=P(\overline{X}=1)+P\left(\overline{X}=\frac{3}{2}\right)$

$=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}$

$=\frac{4}{9}$

답 ③

2 모평균 $m=5$, 모표준편차 $\sigma=3$이므로 크기 $n=9$인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$E(\overline{X})=m=5$

$V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{3^2}{9}=1$

따라서 $E(\overline{X})+V(\overline{X})=5+1=6$

답 ①

3 모집단의 확률변수를 X라 하면 X는 정규분포 $N(50, 6^2)$을 따른다.

크기 $n=4$인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$E(\overline{X})=E(X)=50$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}=\frac{6}{\sqrt{4}}=3$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N(50, 3^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-50}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(\overline{X}\le 53)=P\left(Z\le\frac{53-50}{3}\right)=P(Z\le 1)$

$=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 1)$

$=0.5+0.3413$

$=0.8413$

답 ②

4 모집단의 확률변수 X가 정규분포 $N(100, 4^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-100}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X\le 92)=P\left(Z\le\frac{92-100}{4}\right)$

$=P(Z\le -2)$

이 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$E(\overline{X})=E(X)=100$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}=\frac{4}{\sqrt{n}}$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(100, \left(\frac{4}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

이때 $Z=\frac{\overline{X}-100}{\frac{4}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(\overline{X}\ge 102)=P\left(Z\ge\frac{102-100}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right)$

$=P\left(Z\ge\frac{\sqrt{n}}{2}\right)$

$P(X\le 92)=P(\overline{X}\ge 102)$에서

$P(Z\le -2)=P\left(Z\ge\frac{\sqrt{n}}{2}\right)$

이므로

$\frac{\sqrt{n}}{2}=2$, $\sqrt{n}=4$

따라서 $n=16$

답 ③

5 모평균이 m, 모표준편차가 2인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 36인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{x}$를 이용하여 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간을 구하면

$\overline{x}-2.58\times\frac{2}{\sqrt{36}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{2}{\sqrt{36}}$

$\overline{x}-0.86\le m\le\overline{x}+0.86$

주어진 조건에서 이 신뢰구간이 $a\le m\le b$이고, $a+b=32$이므로

$a+b=(\overline{x}-0.86)+(\overline{x}+0.86)=2\overline{x}=32$

$\overline{x}=16$

이때 $b=\overline{x}+0.86=16.86$

따라서 $\overline{x}+b=16+16.86=32.86$

답 ④

Level 2 기본 연습

본문 97~98쪽

1 ①	2 ①	3 ②	4 ⑤	5 83
6 26	7 ③	8 ④		

1 확률변수 X가 갖는 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$a+\frac{1}{3}+b=1$

$a+b=\frac{2}{3}$ ...... ㉠

$E(X)=(-2)\times a+0\times\frac{1}{3}+3\times b=1$에서

$-2a+3b=1$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{7}{15}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-2	0	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{15}$	1

$E(X^2)=(-2)^2\times\frac{1}{5}+0^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{7}{15}=5$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=5-1^2=4$

따라서 표본의 크기가 16이므로

$V(\overline{X})=\frac{V(X)}{16}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

답 ①

2 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 X_1, X_2라 하면 $\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$가 가질 수 있는 값은 $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3$이다.

확률변수 $\overline{X}$가 갖는 값에 대한 확률의 합은 1이고

$P\left(\frac{1}{2}\le\overline{X}\le 2\right)=\frac{7}{9}$이므로

$P(\overline{X}=0)+P\left(\overline{X}=\frac{5}{2}\right)+P(\overline{X}=3)$

$=1-P\left(\frac{1}{2}\le\overline{X}\le 2\right)$

$=1-\frac{7}{9}$

$=\frac{2}{9}$

(i) $\overline{X}=0$인 경우는 (X_1, X_2)가 $(0, 0)$일 때이므로

$P(\overline{X}=0)=a\times a=a^2$

(ii) $\overline{X}=\frac{5}{2}$인 경우는 (X_1, X_2)가 $(2, 3)$, $(3, 2)$일 때이므로

$P\left(\overline{X}=\frac{5}{2}\right)=b\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times b=\frac{1}{3}b$

(iii) $\overline{X}=3$인 경우는 (X_1, X_2)가 $(3, 3)$일 때이므로

$P(\overline{X}=3)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

따라서

$P(\overline{X}=0)+P\left(\overline{X}=\frac{5}{2}\right)+P(\overline{X}=3)=a^2+\frac{1}{3}b+\frac{1}{36}=\frac{2}{9}$

$a^2+\frac{1}{3}b-\frac{7}{36}=0$ ...... ㉠

또한 확률변수 X가 갖는 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$a+\frac{1}{4}+b+\frac{1}{6}=1$

$a+b=\frac{7}{12}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$a^2+\frac{1}{3}\left(\frac{7}{12}-a\right)-\frac{7}{36}=0$

$a\left(a-\frac{1}{3}\right)=0$

$a\ne 0$이므로

$a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{4}$

따라서 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	1

$E(\overline{X})=E(X)$

$=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{6}$

$=\frac{5}{4}$

따라서

$E\left(\frac{1}{a}\overline{X}+b\right)=\frac{1}{a}E(\overline{X})+b$

$=3\times\frac{5}{4}+\frac{1}{4}$

$=4$

답 ①

3 $E(\overline{X})=m$, $\sigma(\overline{X})=\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{n}}$이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \left(\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

이때 확률변수 $\overline{X}$의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=50$에 대하여 대칭이므로

$m=50$

$V(\overline{X})=4$이므로

$\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{n}}\right)^2=\dfrac{80}{n}=4$에서 $n=20$

즉, 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N(50,\ 2^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{\overline{X}-50}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포

$N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\ge n+33)&=P\left(Z\ge\frac{20+33-50}{2}\right)\\&=P\left(Z\ge\frac{3}{2}\right)\\&=0.5-P(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

답 ②

4 서비스 센터에 방문하는 소비자 한 명이 서비스 센터에 머무는 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(35,\ 5^2)$을 따른다.

따라서 서비스 센터에 방문한 소비자 중 임의로 선택한 4명이 서비스 센터에 머무는 시간의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$E(\overline{X})=35$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{5}{\sqrt{4}}=\dfrac{5}{2}$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(35,\ \left(\dfrac{5}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

이때 $Z=\dfrac{\overline{X}-35}{\frac{5}{2}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포

$N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(33\le\overline{X}\le 38)&=P\left(\frac{33-35}{\frac{5}{2}}\le Z\le\frac{38-35}{\frac{5}{2}}\right)\\&=P(-0.8\le Z\le 1.2)\\&=P(0\le Z\le 0.8)+P(0\le Z\le 1.2)\\&=0.2881+0.3849\\&=0.6730\end{aligned}$$

답 ⑤

5 $E(\overline{X})=80$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{6}{\sqrt{16}}=\dfrac{3}{2}$이므로

확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(80,\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z=\dfrac{\overline{X}-80}{\frac{3}{2}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포

$N(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}&P(\overline{X}\le k)-P(\overline{X}\ge 78.5)\\&=P\left(Z\le\frac{k-80}{\frac{3}{2}}\right)-P\left(Z\ge\frac{78.5-80}{\frac{3}{2}}\right)\\&=P\left(Z\le\frac{2k-160}{3}\right)-P(Z\ge -1)\\&=P\left(Z\le\frac{2k-160}{3}\right)-\{0.5+P(0\le Z\le 1)\}\\&=P\left(Z\le\frac{2k-160}{3}\right)-(0.5+0.3413)\\&=P\left(Z\le\frac{2k-160}{3}\right)-0.8413\\&=0.1359\end{aligned}$$

이므로 $P\left(Z\le\dfrac{2k-160}{3}\right)=0.1359+0.8413=0.9772$

$$\begin{aligned}P\left(Z\le\frac{2k-160}{3}\right)&=0.5+P\left(0\le Z\le\frac{2k-160}{3}\right)\\&=0.9772\end{aligned}$$

이므로

$P\left(0\le Z\le\dfrac{2k-160}{3}\right)=0.4772$

이때 표준정규분포표에서 $P(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\dfrac{2k-160}{3}=2$

따라서 $k=83$

답 83

6 표본평균이 $\overline{x}=24$, 모표준편차가 9, 표본의 크기가 36이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$24-1.96\times\dfrac{9}{\sqrt{36}}\le m\le 24+1.96\times\dfrac{9}{\sqrt{36}}$

$24-2.94\le m\le 24+2.94$

$21.06\le m\le 26.94$

따라서 신뢰구간에 속하는 정수의 최댓값은 26이다.

답 26

7 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 16이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{16}}$

$a \le m \le a+7.74$에서

$2 \times 2.58 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{16}} = (a+7.74)-a$

$5.16 \times \dfrac{\sigma}{4} = 7.74$

즉, $\sigma = 6$

답 ③

8 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 모표준편차가 100, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x} - 1.96 \times \dfrac{100}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x} + 1.96 \times \dfrac{100}{\sqrt{n}}$

$b-a = 2 \times 1.96 \times \dfrac{100}{\sqrt{n}} = \dfrac{392}{\sqrt{n}}$

$40 \le b-a \le 80$에서

$40 \le \dfrac{392}{\sqrt{n}} \le 80$

(i) $40 \le \dfrac{392}{\sqrt{n}}$에서 $\sqrt{n} \le \dfrac{392}{40} = 9.8$, $n \le 96.04$

(ii) $\dfrac{392}{\sqrt{n}} \le 80$에서 $\sqrt{n} \ge \dfrac{392}{80} = 4.9$, $n \ge 24.01$

(i), (ii)에서

$24.01 \le n \le 96.04$

따라서 자연수 n의 최댓값과 최솟값은 각각 96, 25이므로

$96 + 25 = 121$

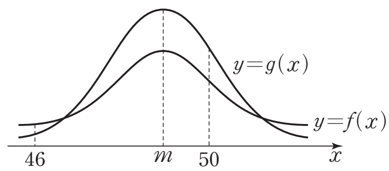
답 ④

Level 3 실력 완성 본문 99쪽

1 ⑤ 2 16 3 ②

1 정규분포 $\mathrm{N}(m, 9^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 16인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\dfrac{9}{4}\right)^2\right)$을 따르고 크기가 25인 표본의 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \left(\dfrac{9}{5}\right)^2\right)$을 따른다.

이때 두 확률밀도함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=m$으로 서로 같고, $\sigma(\overline{X}) > \sigma(\overline{Y})$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$m < 50$이고 조건 (나)에 의하여

$50-m < m-46$, 즉 $m > 48$

조건 (가)에서 m은 $m < 50$인 자연수이므로 $m = 49$

$Z = \dfrac{\overline{X}-49}{\frac{9}{4}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$$\mathrm{P}(a \le \overline{X} \le m+4.5) = \mathrm{P}\left(\dfrac{a-49}{\frac{9}{4}} \le Z \le \dfrac{4.5}{\frac{9}{4}}\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(\dfrac{a-49}{\frac{9}{4}} \le Z \le 2\right) = 0.1359$$

이때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = 0.4772$, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1) = 0.3413$에서

$\mathrm{P}(1 \le Z \le 2) = 0.1359$이므로

$\dfrac{a-49}{\frac{9}{4}} = 1$

따라서 $a = 51.25$

답 ⑤

2 이 상자에서 임의로 꺼낸 한 장의 카드에 적혀 있는 수를 확률변수 X라 할 때, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	a	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\dfrac{4}{n+8}$	$\dfrac{2}{n+8}$	$\dfrac{n}{n+8}$	$\dfrac{2}{n+8}$	1

상자에서 꺼낸 첫 번째 카드에 적혀 있는 수를 X_1, 두 번째 카드에 적혀 있는 수를 X_2라 하자.

$\overline{X}=1$인 경우는 (X_1, X_2)가

$(1, 1)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$일 때이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=1) = \dfrac{2 \times 2 + 4 \times n + n \times 4}{(n+8)^2} = \dfrac{8n+4}{(n+8)^2}$

$a > 2$이므로 $\overline{X}=a$인 경우는 (X_1, X_2)가

(a, a)일 때이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=a) = \dfrac{2 \times 2}{(n+8)^2} = \dfrac{4}{(n+8)^2}$

$\overline{X}=2$인 경우는 a의 값에 따라 다음과 같이 나눌 수 있다.

(i) $a\neq3$, $a\neq4$일 때

$\overline{X}=2$인 경우는 (X_1, X_2)가 $(2, 2)$일 때이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\dfrac{n\times n}{(n+8)^2}=\dfrac{n^2}{(n+8)^2}$

$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\mathrm{P}(\overline{X}=2)+\mathrm{P}(\overline{X}=a)$에서

$8n+4=n^2+4$

$n(n-8)=0$

n은 자연수이므로 $n=8$

이때

$\mathrm{E}(X)=0\times\dfrac{4}{16}+1\times\dfrac{2}{16}+2\times\dfrac{8}{16}+a\times\dfrac{2}{16}$

$=\dfrac{1}{8}a+\dfrac{9}{8}$

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)$이고 $Y=X_1+X_2=2\overline{X}$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2\overline{X})=2\mathrm{E}(\overline{X})=2\mathrm{E}(X)=\dfrac{1}{4}a+\dfrac{9}{4}$

이고 조건 (나)에서 $\mathrm{E}(Y)=3$이므로

$\dfrac{1}{4}a+\dfrac{9}{4}=3$, 즉 $a=3$

이 되어 $a\neq3$이라는 조건에 모순이다.

(ii) $a=3$일 때

$\overline{X}=2$인 경우는 (X_1, X_2)가

$(2, 2)$, $(1, 3)$, $(3, 1)$일 때이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\dfrac{n\times n+2\times2+2\times2}{(n+8)^2}=\dfrac{n^2+8}{(n+8)^2}$

$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\mathrm{P}(\overline{X}=2)+\mathrm{P}(\overline{X}=a)$에서

$8n+4=(n^2+8)+4$

$n^2-8n+8=0$

이 등식을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(iii) $a=4$일 때

$\overline{X}=2$인 경우는 (X_1, X_2)가

$(2, 2)$, $(0, 4)$, $(4, 0)$일 때이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\dfrac{n\times n+4\times2+2\times4}{(n+8)^2}=\dfrac{n^2+16}{(n+8)^2}$

$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\mathrm{P}(\overline{X}=2)+\mathrm{P}(\overline{X}=a)$에서

$8n+4=(n^2+16)+4$

$(n-4)^2=0$

$n=4$

이때

$\mathrm{E}(X)=0\times\dfrac{4}{12}+1\times\dfrac{2}{12}+2\times\dfrac{4}{12}+4\times\dfrac{2}{12}=\dfrac{3}{2}$

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)$이고 $Y=X_1+X_2=2\overline{X}$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2\overline{X})=2\mathrm{E}(\overline{X})=2\mathrm{E}(X)=3$

즉, 조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서 $a=4$, $n=4$이므로

$a\times n=4\times4=16$

답 16

3 어느 고등학교 학생들의 하루 독서 시간이 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따를 때, 이 고등학교 학생 중에서 n명을 임의추출하여 구한 하루 독서 시간의 표본평균 40을 이용하여 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구하면

$40-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le 40+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

조건에서 이 신뢰구간이 $36.08\le m\le a$이므로

$40-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=36.08$, $40+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=a$

$40-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=36.08$에서

$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{40-36.08}{1.96}=2$ ...... ㉠

$40+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=a$에서

$a=40+1.96\times2=43.92$ ...... ㉡

이 고등학교 학생 중에서 100명을 임의추출하여 구한 하루 독서 시간의 표본평균 $\overline{x}$를 이용하여 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 구하면

$\overline{x}-1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{100}}$

즉, $\overline{x}-1.96\times\dfrac{\sigma}{10}\le m\le\overline{x}+1.96\times\dfrac{\sigma}{10}$

조건에서 이 신뢰구간이 $36.04\le m\le a-3.96$이고 ㉡에서

$a-3.96=43.92-3.96=39.96$

이므로

$36.04\le m\le 39.96$

$\overline{x}-1.96\times\dfrac{\sigma}{10}=36.04$, $\overline{x}+1.96\times\dfrac{\sigma}{10}=39.96$에서 두 식을 더하면

$2\overline{x}=76$, 즉 $\overline{x}=38$

$\overline{x}+1.96\times\dfrac{\sigma}{10}=38+1.96\times\dfrac{\sigma}{10}=39.96$에서 $\sigma=10$

㉠에서 $\dfrac{10}{\sqrt{n}}=2$이므로 $\sqrt{n}=5$, 즉 $n=25$

따라서 $\overline{x}+\sigma+n=38+10+25=73$

답 ②

MEMO

MEMO