

## III\_2. 정적분의 활용

[12미적03-04] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해한다.

[12미적03-05] 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

[12미적03-06] 입체도형의 부피를 구할 수 있다.

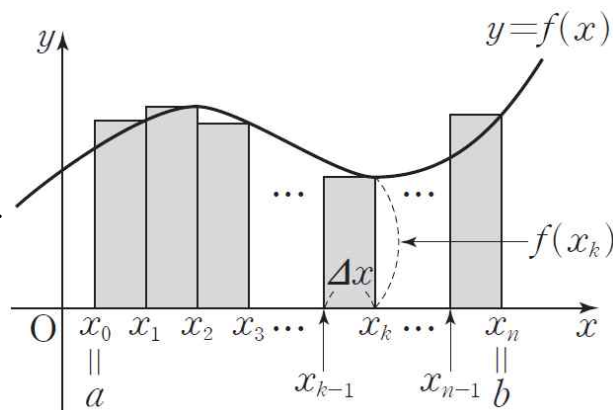
[12미적03-07] 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

### 1 정적분과 급수

함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) dx$$

☑ 함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이고  $f(x) \geq 0$ 일 때, 그림과 같이 닫힌구간  $[a, b]$ 를  $n$ 등분하여 양 끝점과 각 분점의  $x$ 좌표를 차례대로



$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$$

라 하고, 닫힌구간  $[x_{k-1}, x_k]$ 의 길이를  $\Delta x$ 라 하면

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, x_k = a + k \Delta x \quad (\text{단, } k = 1, 2, 3, \dots, n)$$

이때 그림과 같이  $n$ 개의 직사각형을 만들고,  
이 직사각형의 넓이의 합을  $S_n$ 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= f(x_1) \Delta x + f(x_2) \Delta x + f(x_3) \Delta x + \dots \\ &\quad + f(x_n) \Delta x = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x \end{aligned}$$

$n$ 의 값이 한없이 커질 때  $S_n$ 은 곡선  $y = f(x)$ 와  $x$ 축 및 두 직선  $x = a, x = b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

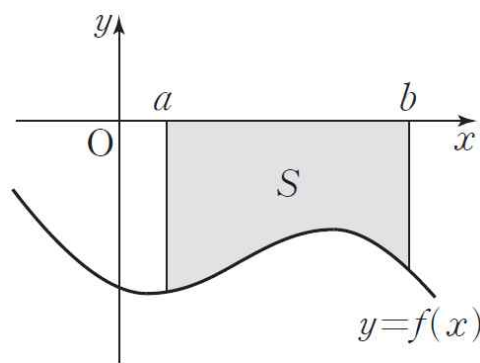
즉,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} k\right) \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) dx$ 가 성립.

한편, 함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속이고  $f(x) \leq 0$ 이면

$f(x_k) \leq 0, \Delta x > 0$ 이므로

곡선  $y = f(x)$ 와  $x$ 축 및 두 직선

$x = a, x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를  $S$ 라 하면



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = -S = - \int_a^b |f(x)| dx$$

$$= - \int_a^b \{ -f(x) \} dx = \int_a^b f(x) dx$$

## ☆ 급수의 정적분 표현

함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속일 때,

$$(1) \Delta x = \frac{b-a}{n} \Rightarrow x_k = a + k \Delta x$$

오른쪽 끝점에서의 함숫값 :  $f(x_k)$

$$(2) S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

$$(3) \textcircled{1} \lim \sum \rightarrow \int$$

$$\textcircled{2} \Delta x = \frac{b-a}{n} \rightarrow \begin{cases} dx \\ \text{정적분 구간이 } a \text{에서 } b \text{까지} \end{cases}$$

$$\textcircled{3} x_k = a + k \Delta x \rightarrow x \quad (\because a \text{에서 출발한 } k \text{번째 구간})$$

## ☆ 급수의 정적분 표현 공식 ①

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \times \frac{1}{n} = \int_0^1 f(x) dx$$

$$\checkmark \lim \sum \rightarrow \int, \frac{1}{n} \rightarrow \begin{cases} dx \\ \text{구간 : } 0 \sim 1 \end{cases} \quad \& \quad \frac{k}{n} \rightarrow x$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{p}{n} k\right) \frac{p}{n} = \int_0^p f(x) dx = p \int_0^1 f(px) dx$$

$$\checkmark \frac{p}{n} \rightarrow \begin{cases} dx \\ \text{구간 : } 0 \sim p \end{cases} \quad \& \quad \frac{pk}{n} \rightarrow x \quad (\text{단, } p \text{는 상수})$$

## ☆ 급수의 정적분 표현 공식 ②

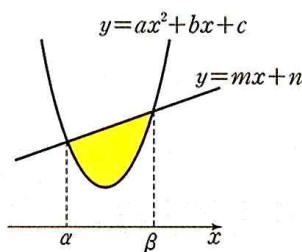
$$\begin{aligned}
 (3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{p}{n} k\right) \frac{p}{n} &= \int_0^p f(a+x) dx \\
 &= \int_a^{a+p} f(x) dx \\
 &= p \int_0^1 f(a+px) dx
 \end{aligned}$$

(단,  $a, p$ 는 상수)

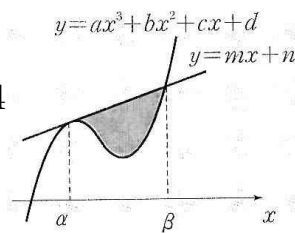
$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right) \times \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) dx$$

## ☆ 넓이 공식

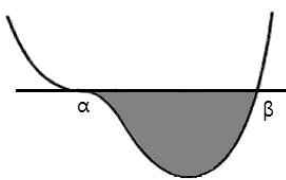
$$(1) \quad \int_{\alpha}^{\beta} |a(x-\alpha)(x-\beta)| dx = \frac{|a|}{6} (\beta-\alpha)^3$$



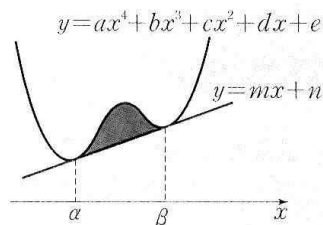
$$(2) \quad \int_{\alpha}^{\beta} |a(x-\alpha)^2(x-\beta)| dx = \frac{|a|}{12} (\beta-\alpha)^4$$



$$(3) \quad \int_{\alpha}^{\beta} |a(x-\alpha)^3(x-\beta)| dx = \frac{|a|}{20} (\beta-\alpha)^5$$

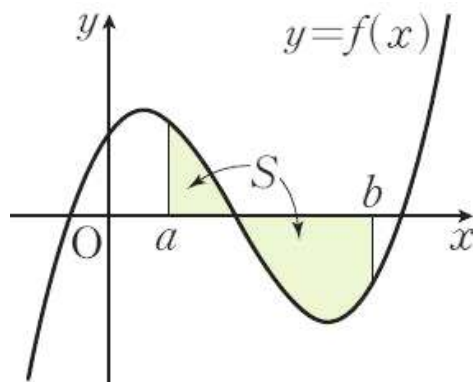


$$(4) \quad \int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 dx = \frac{|a|}{30} (\beta-\alpha)^5$$



## ② 곡선과 $x$ 축 사이의 넓이

함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선  $y = f(x)$ 와  $x$  축 및 두 직선  $x = a, x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이  $S_x$ 는



$$S_x = \int_a^b |y| dx = \int_a^b |f(x)| dx$$

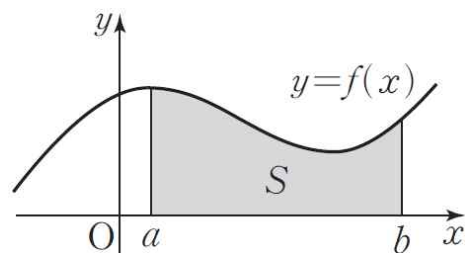
☑ 함수  $f(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선  $y = f(x)$ 와  $x$  축 및 두 직선  $x = a, x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이  $S$ 를 각 경우로 나누어 구해 보면 다음과 같다.

① 닫힌구간  $[a, b]$ 에서  $f(x) \geq 0$ 인 경우

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

이때  $f(x) = |f(x)|$  이므로

$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx$$



② 닫힌구간  $[a, b]$ 에서  $f(x) \leq 0$ 인 경우

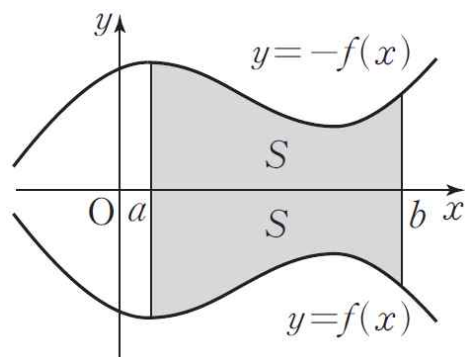
곡선  $y = f(x)$ 와 곡선  $y = -f(x)$

는  $x$  축에 대하여 대칭이므로 곡선

$y = -f(x)$ 와  $x$  축 및 두 직선

$x = a, x = b$ 로 둘러싸인 부분의

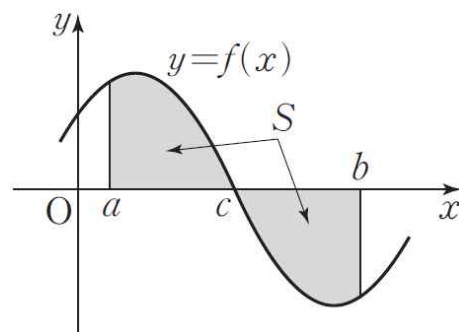
넓이는  $S$ 이다.



이때  $-f(x) \geq 0$  이고  $-f(x) = |f(x)|$  이므로

$$S = \int_a^b \{-f(x)\} dx = \int_a^b |f(x)| dx$$

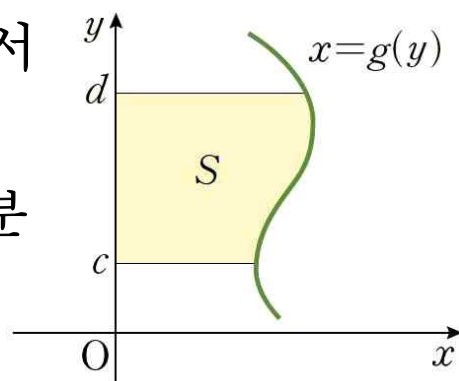
③ 닫힌구간  $[a, c]$  에서  $f(x) \geq 0$ ,  
 닫힌구간  $[c, b]$  에서  $f(x) \leq 0$  인  
 경우는 ①, ②에 의하여



$$\begin{aligned} S &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b \{-f(x)\} dx \\ &= \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^b |f(x)| dx \\ &= \int_a^b |f(x)| dx \end{aligned}$$

### ☑ 곡선과 $y$ 축 사이의 넓이

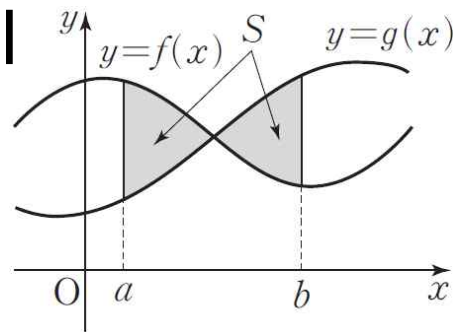
함수  $x = g(y)$ 가 닫힌구간  $[c, d]$  에서  
 연속일 때, 곡선  $x = g(y)$ 와  $y$ 축 및  
 두 직선  $y = c, y = d$ 로 둘러싸인 부분  
 의 넓이  $S_y$ 는



$$S_y = \int_c^d |x| dy = \int_c^d |g(y)| dy$$

### ③ 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이

두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선  $y_1 = f(x)$ ,  $y_2 = g(x)$  및 두 직선  $x = a$ ,  $x = b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이  $S_x$ 는



$$S_x = \int_a^b |y_1 - y_2| dx = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

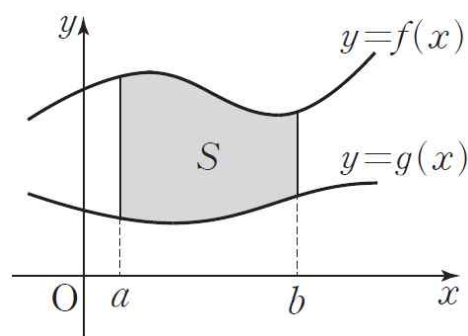
☑ 두 함수  $f(x)$ ,  $g(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  및 두 직선  $x = a$ ,  $x = b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이  $S$ 를 각 경우로 나누어 구해 보면 다음과 같다.

① 닫힌구간  $[a, b]$ 에서

$0 \leq g(x) \leq f(x)$ 인 경우

$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

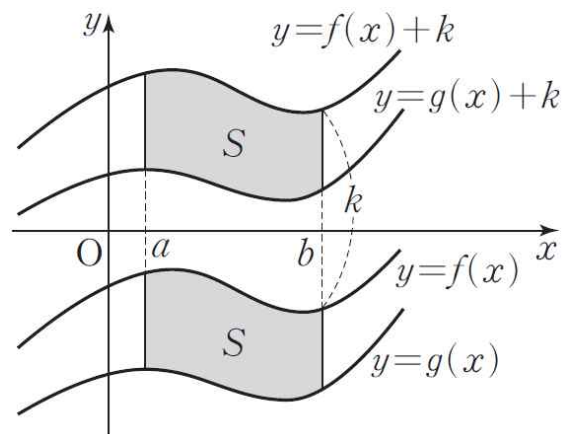
$$= \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



② 닫힌구간  $[a, b]$ 에서

$g(x) \leq f(x) \leq 0$ 인 경우

두 곡선  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ 를  $y$ 축의 방향으로  $k$  ( $k > 0$ )만큼 평행이동하여 닫힌구간  $[a, b]$ 에서

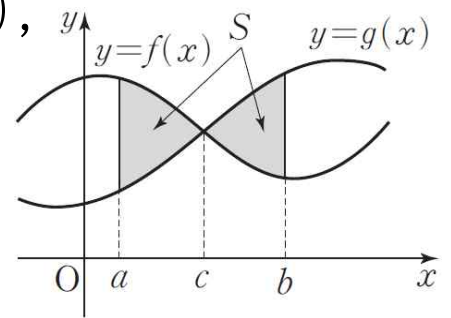


$0 \leq g(x) + k \leq f(x) + k$ 가 되게 할 수 있다.

평행이동하여도 구하는 넓이  $S$ 는 변하지 않으므로

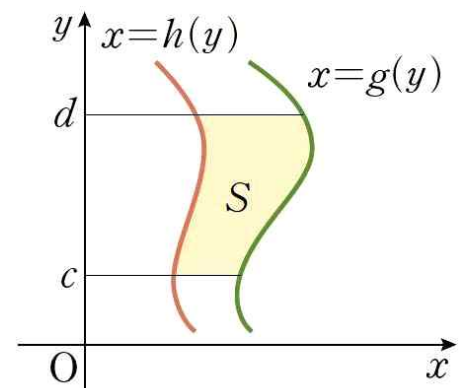
$$\begin{aligned} S &= \int_a^b \{f(x) + k\} dx - \int_a^b \{g(x) + k\} dx \\ &= \int_a^b [\{f(x) + k\} - \{g(x) + k\}] dx \\ &= \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \end{aligned}$$

③ 닫힌구간  $[a, c]$ 에서  $g(x) \geq f(x)$ ,  
 닫힌구간  $[c, b]$ 에서  $f(x) \leq g(x)$   
 인 경우는 ①, ②에 의하여



$$\begin{aligned} S &= \int_a^c \{f(x) - g(x)\} dx + \int_c^b \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= \int_a^c |f(x) - g(x)| dx + \int_c^b |f(x) - g(x)| dx \\ &= \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \end{aligned}$$

☑ 닫힌구간  $[c, d]$ 에서 연속인  
 두 곡선  $x_1 = g(y)$ ,  $x_2 = h(y)$  및  
 두 직선  $y = c$ ,  $y = d$ 로 둘러싸인  
 부분의 넓이  $S_y$ 는



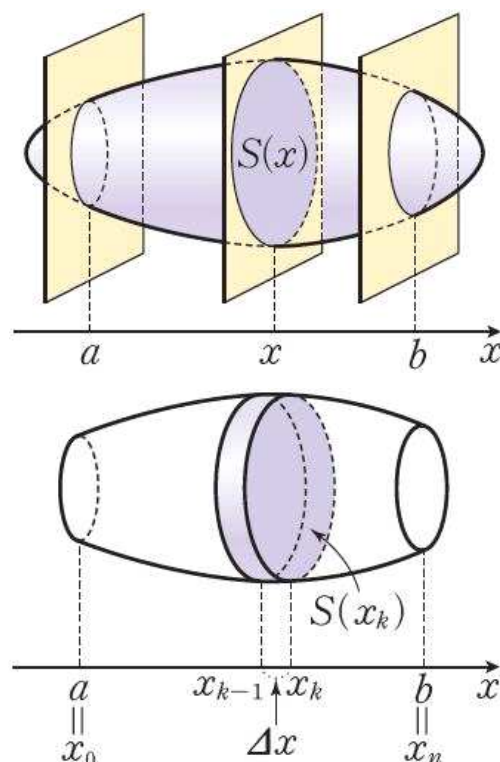
$$S_y = \int_c^d |x_1 - x_2| dy = \int_c^d |g(y) - h(y)| dy$$



#### ④ 입체도형의 부피

닫힌구간  $[a, b]$  에서  $x$ 좌표가  $x$ 인 점을 지나고  $x$ 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가  $S(x)$ 이고, 함수  $S(x)$ 가 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속일 때, 이 입체도형의 부피  $V_x$ 는

$$V_x = \int_a^b S(x) dx$$



☑ 그림과 같이  $x$ 축 위의 닫힌구간

$[a, b]$ 를  $n$ 등분하여 양 끝 점과 각 분점의  $x$ 좌표를 차례대로  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ 라 하고

닫힌구간  $[x_{k-1}, x_k]$ 의 길이를  $\Delta x$ 라 하면

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, x_k = a + k\Delta x \quad (\text{단, } k = 1, 2, 3, \dots, n)$$

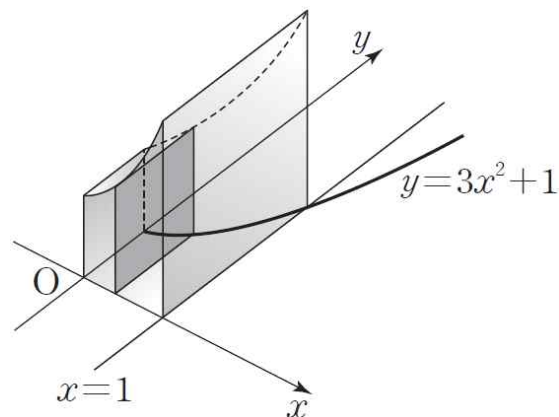
이때 각 점  $x_k$ 에서  $x$ 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이  $S(x_k)$ 를 밑면의 넓이로 하고 높이가  $\Delta x$ 인  $n$ 개의 기둥의 부피의 합을  $V_n$ 이라 하면

$$\begin{aligned} V_n &= S(x_1)\Delta x + S(x_2)\Delta x + S(x_3)\Delta x + \dots \\ &\quad + S(x_n)\Delta x = \sum_{k=1}^n S(x_k)\Delta x \end{aligned}$$

입체도형의 부피  $V$ 는 정적분과 급수의 관계에 의하여

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S(x_k)\Delta x = \int_a^b S(x) dx$$

예 곡선  $y = 3x^2 + 1$  과  $x$  축,  $y$  축 및 직선  $x = 1$  로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을  $x$  축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피  $V$ 를 구해 보자.  $0 \leq t \leq 1$  인 실수  $t$ 에 대하여 직선  $x = t$ 를 포함하고  $x$  축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를  $S(t)$ 라 하면



$$S(t) = (3t^2 + 1)^2 = 9t^4 + 6t^2 + 1$$

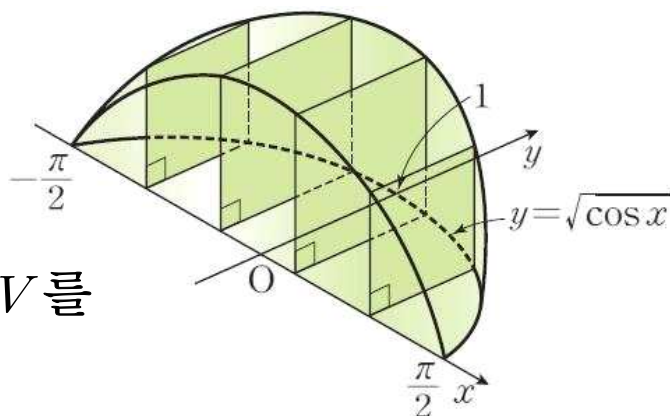
따라서 구하는 부피  $V$ 는

$$V = \int_0^1 S(t) dt = \int_0^1 (9t^4 + 6t^2 + 1) dt$$

$$= \left[ \frac{9}{5}t^5 + 2t^3 + t \right]_0^1 = \frac{9}{5} + 2 + 1 = \frac{24}{5}$$

예 곡선  $y = \sqrt{\cos x}$   $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 와  $x$  축으로 둘러싸인

도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 도형을  $x$  축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 그 부피  $V$ 를 구해 보자.



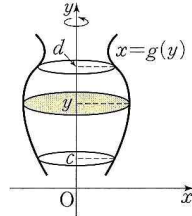
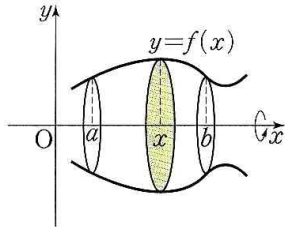
단면의 넓이는  $S(x) = (\sqrt{\cos x})^2 = \cos x$ 이므로

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left[ \sin x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 + 1 = 2$$

## ☆ 회전체의 부피

- (1)  $x$  축의 닫힌구간  $[a, b]$ 에서 연속인 곡선  $y = f(x)$ 를  $x$  축 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피  $V_x$

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

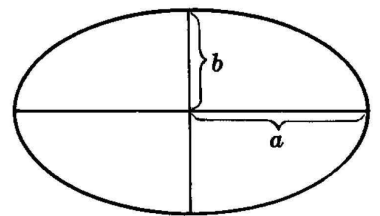


- (2)  $y$  축의 닫힌구간  $[c, d]$ 에서 연속인 곡선  $x = g(y)$ 를  $y$  축 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피  $V_y$

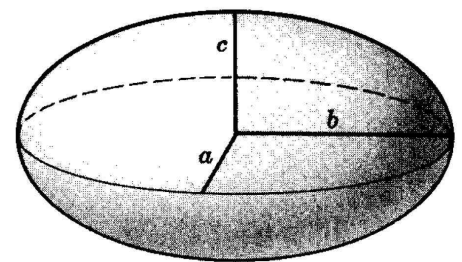
$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d \{g(y)\}^2 dy$$

## ☆ 타원의 넓이와 회전체의 부피

- (1) 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 넓이 :  $S = \pi ab$



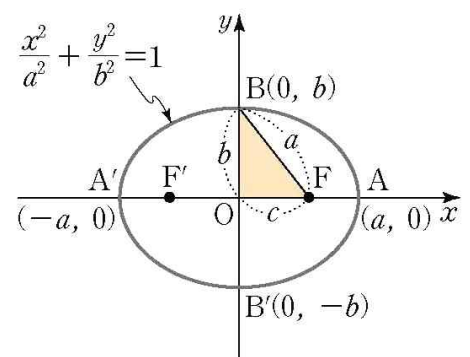
- (2) 럭비공 모양의 부피 :  $V = \frac{4}{3} \pi abc$



- (3) 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 회전체 부피

①  $x$  축 둘레로 회전 :  $V_x = \frac{4}{3} \pi ab^2$

②  $y$  축 둘레로 회전 :  $V_y = \frac{4}{3} \pi a^2 b$



## ☆ 직선 위를 움직이는 점의 위치와 움직인 거리

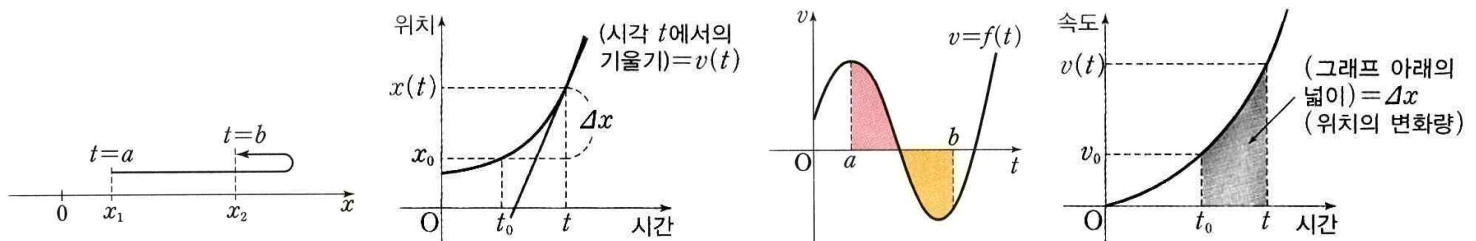
수직선 위를 움직이는 점 P의 시각  $t$ 에서의 속도가  $v(t)$ 일 때,

(1) 시각  $t = a$ 에서 점 P의 위치가  $x(0)$ 일 때,

$$\text{시각 } t \text{에서 점 P의 위치는 } x(t) = x(0) + \int_a^t v(t) dt$$

(2) 시각  $t = a$ 에서  $t = b$ 까지 점 P가 움직인 거리  $s$ 는

$$s = \int_a^b |v(t)| dt$$



## ☆ 속도가 0 $\Leftrightarrow v(t) = 0$

(1) 운동 방향이 바뀔 때

☑ 운동 방향이 바뀐다.  $\Leftrightarrow v(t) = 0$

( $\Leftarrow$ ) 극값이 되어야(위치의 증감이 변화해야) 한다.

(2) 물체가 최고 높이에 도달할 때

(3) 물체가 정지할 때

## ☆ 위치가 0 $\Leftrightarrow x(t) = 0$

(1) 물체가 땅에 떨어질 때

(2) 출발점으로 되돌아올 때

## ☆ 평면 위를 움직이는 점의 속도와 속력

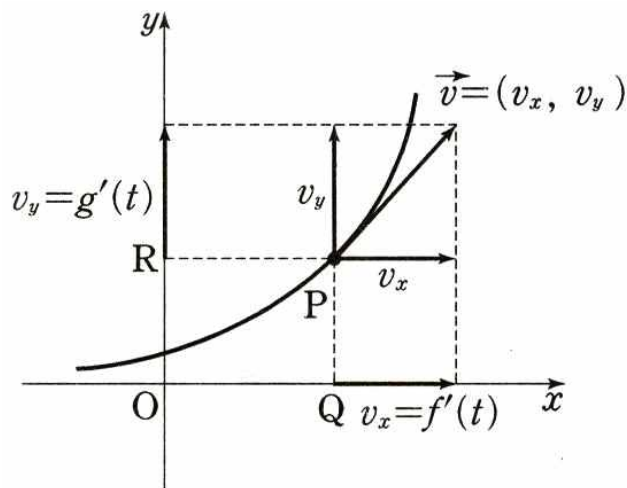
좌표평면 위를 움직이는 점  $P(x, y)$ 의 시각  $t$ 에서의 위치가 함수  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$ 로 나타내어질 때,

(1) 시각  $t$ 에서의 점  $P$ 의 속도(벡터)

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (v_x, v_y) = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \\ &= (f'(t), g'(t))\end{aligned}$$

(2) 시각  $t$ 에서의 점  $P$ 의 속력

$$\begin{aligned}|\vec{v}| &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}\end{aligned}$$



## ⑤ 좌표평면 위를 움직이는 점이 움직인 거리

좌표평면 위를 움직이는 점  $P$ 의 시각  $t$ 에서의 위치  $(x, y)$ 가  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$

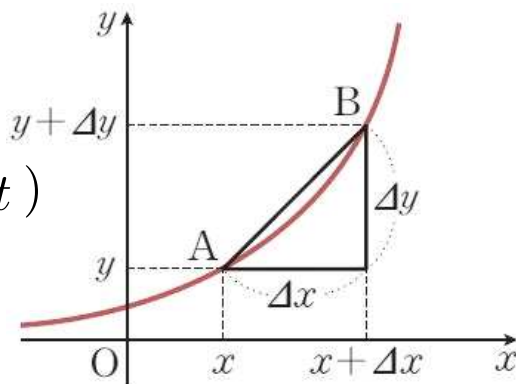
일 때, 시각  $t = a$ 에서  $t = b$ 까지 점  $P$ 가 움직인 거리  $s$ 는

$$\begin{aligned}s &= \int_a^b |\vec{v}| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt\end{aligned}$$

☑ 점  $P$ 가 움직인 거리는 시각  $t$

$(a \leq t \leq b)$ 의 함수이므로  $s = s(t)$

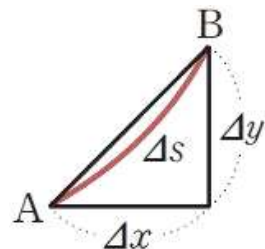
로 나타내기로 하자. 그림과 같이  
시각  $t$ 에서 점  $A(x, y)$ 에 있던



점 P가 시각  $t + \Delta t$ 에서 점  $B(x + \Delta x, y + \Delta y)$ 로 이동했을 때  $s$ 의 증분  $\Delta s$ 는  $\Delta t$ 가 충분히 작으면

$\overline{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ 에 가까워지므로

$$s'(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

따라서 시각  $t = a$ 에서  $t = b$ 까지 점 P가 움직인 거리  $s$ 는

$$\begin{aligned} s &= s(b) - s(a) = \left[ s(t) \right]_a^b \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \end{aligned}$$

☞ 좌표평면 위를 움직이는 점  $P(x, y)$ 의 시각  $t$ 에서의 위치가

$x = \frac{1}{3}t^3 - t, y = t^2$ 일 때, 시각  $t = 0$ 에서  $t = 1$ 까지 점 P가

움직인 거리  $s$ 를 구해 보자.

$v_x = t^2 - 1, v_y = 2t$ 이므로

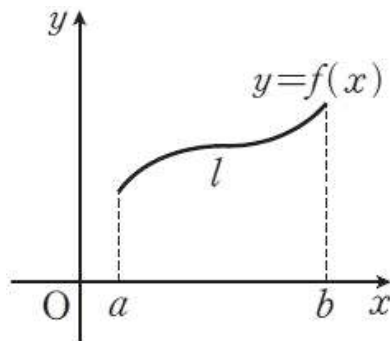
$$|\vec{v}|^2 = (t^2 - 1)^2 + (2t)^2 = (t^2 + 1)^2 \quad \therefore |\vec{v}| = t^2 + 1$$

$$s = \int_0^1 |\vec{v}| dt = \left[ \frac{1}{3}t^3 + t \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

## 6 곡선의 길이

- (1) 곡선 위의 점  $(x, y)$ 가 각각  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$ 이고 겹쳐지는 부분이 없을 때,  $a \leq t \leq b$ 에서 이 곡선의 길이  $l$ 은

$$\begin{aligned} l &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt \end{aligned}$$



- (2)  $a \leq x \leq b$ 에서 곡선  $y = f(x)$ 의 길이  $l$ 은

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

### ☑ $a \leq x \leq b$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 의 길이

곡선  $y = f(x)$ 에 대하여

- (1) 점  $P(x, y)$ 의 시각  $t$ 에서의 위치 :  $x = t$ ,  $y = f(t)$   
 (2) 시각  $t$ 에서의 점  $P$ 의 속도(벡터)

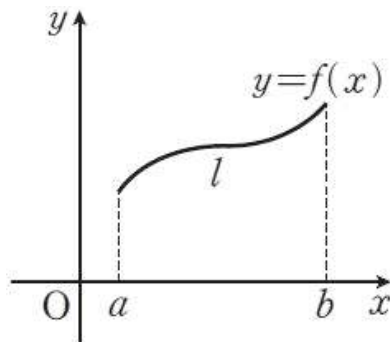
$$v_x = 1, v_y = f'(t)$$

- (3) 시각  $t$ 에서의 점  $P$ 의 속력

$$|\vec{v}| = \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2}$$

- (4)  $a \leq x \leq b$ 에서의 곡선의 길이

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$



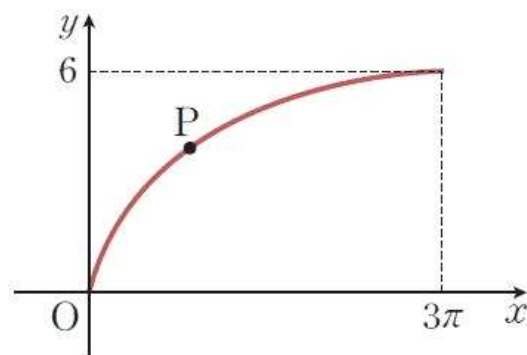


☞ 어느 미끄럼틀 위를 움직이는 점

$P(x, y)$ 의 시각  $t$ 에서의 위치가

$$x = 3(t - \sin t), \quad y = 3(1 - \cos t)$$

일 때, 시각  $t = 0$ 에서  $t = \pi$ 까지의 점  $P$ 가 움직인 거리  $l$ 을 구해 보자.



$$v_x = 3(1 - \cos t), \quad v_y = 3 \sin t \text{ 이므로}$$

$$|\vec{v}| = 3\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = 3\sqrt{2(1 - \cos t)}$$

$$= 3\sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} = 6 \sin \frac{t}{2}$$

$$l = \int_0^\pi |\vec{v}| dt = 6 \left[ -2 \cos \frac{t}{2} \right]_0^\pi = 12$$

☞ 닫힌구간  $[1, e]$ 에서 곡선  $y = \frac{1}{4}x^2 - \ln \sqrt{x}$ 의 길이  $l$ 를 구해 보자.

$$v_x = 1, \quad v_y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{x} \right) \text{ 이므로}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left( x - \frac{1}{x} \right)^2} = \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{x} \right)$$

$$l = \int_1^e |\vec{v}| dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} x^2 + \ln |x| \right]_1^e$$

$$= \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} (e^2 + 1)$$