한눈에 보는 정답

01 이차곡선

유제
본문 5~11쪽

1 125　2 ③　3 ④　4 ③　5 ⑤
6 ②　7 ④　8 ②

Level 1 기초 연습
본문 12쪽

1 ③　2 ④　3 ①　4 ①　5 ⑤

Level 2 기본 연습
본문 13쪽

1 ③　2 ③　3 ④　4 ⑤

Level 3 실력 완성
본문 14쪽

1 ③　2 ②　3 ①　4 ③

02 평면 곡선의 접선

유제
본문 17~23쪽

1 ④　2 ②　3 ④　4 ③　5 ③
6 ①　7 ⑤　8 ③

Level 1 기초 연습
본문 24쪽

1 ⑤　2 ②　3 ③　4 ④　5 ③

Level 2 기본 연습
본문 25쪽

1 ③　2 ④　3 ③　4 ③

Level 3 실력 완성
본문 26쪽

1 ①　2 ③　3 ①　4 ③

03 벡터의 연산

유제
본문 29~33쪽

1 ③　2 61　3 ⑤　4 ③　5 ②
6 ①

Level 1 기초 연습
본문 34쪽

1 ④　2 ②　3 ②　4 3　5 ③

Level 2 기본 연습
본문 35쪽

1 ③　2 40　3 ①　4 ③

Level 3 실력 완성
본문 36쪽

1 ③　2 ③　3 13

04 평면벡터의 성분과 내적

유제
본문 39~47쪽

1 ③ 2 4 3 ④ 4 ① 5 ④
6 ④ 7 ⑤ 8 ② 9 ① 10 ③

Level 1 기초 연습
본문 48쪽

1 ② 2 ③ 3 ③ 4 ④ 5 ③

Level 2 기본 연습
본문 49쪽

1 ③ 2 6 3 ④ 4 ③

Level 3 실력 완성
본문 50쪽

1 ③ 2 ④ 3 ①

05 평면 운동

유제
본문 53~59쪽

1 ② 2 ① 3 ⑤ 4 ③ 5 ③
6 ⑤

Level 1 기초 연습
본문 60쪽

1 ② 2 ① 3 ⑤ 4 ④

Level 2 기본 연습
본문 61쪽

1 125 2 ④ 3 108 4 ②

Level 3 실력 완성
본문 62쪽

1 ⑤ 2 ② 3 49

06 공간도형

유제
본문 65~71쪽

1 ④ 2 ⑤ 3 3 4 ② 5 ②

Level 1 기초 연습
본문 72쪽

1 11 2 ③ 3 ⑤ 4 ②

Level 2 기본 연습
본문 73쪽

1 ③ 2 ④ 3 ① 4 15

Level 3 실력 완성
본문 74쪽

1 ③ 2 ② 3 ②

07 공간좌표

유제 본문 77~83쪽

1 ⑤ **2** ② **3** ② **4** ④ **5** ①
6 ④ **7** 17 **8** ⑤

Level 1 기초 연습 본문 84쪽

1 ② **2** ③ **3** ⑤ **4** 56

Level 2 기본 연습 본문 85쪽

1 ④ **2** ⑤ **3** ④ **4** 67

Level 3 실력 완성 본문 86쪽

1 ① **2** ③ **3** ② **4** 150

08 공간벡터

유제 본문 89~93쪽

1 ③ **2** 6 **3** ③ **4** ④ **5** 27
6 ③

Level 1 기초 연습 본문 94쪽

1 ④ **2** ⑤ **3** 32 **4** ④ **5** ③

Level 2 기본 연습 본문 95쪽

1 ② **2** ⑤ **3** 108 **4** ④

Level 3 실력 완성 본문 96쪽

1 6 **2** ⑤ **3** ⑤

09 도형의 방정식

유제 본문 99~105쪽

1 10 **2** ③ **3** ① **4** ③ **5** ⑤
6 16 **7** ③ **8** 8

Level 1 기초 연습 본문 106쪽

1 ④ **2** ② **3** 13 **4** ② **5** 9

Level 2 기본 연습 본문 107~108쪽

1 ① **2** ④ **3** ③ **4** ⑤ **5** ②
6 ⑤ **7** 36 **8** ③

Level 3 실력 완성 본문 109~110쪽

1 ③ **2** ① **3** ④ **4** 168 **5** ③
6 ④

01 이차곡선

유제 본문 5~11쪽

1 125	**2** ③	**3** ④	**4** ③	**5** ⑤
6 ②	**7** ④	**8** ②		

1 $x^2=ay=4\times\frac{a}{4}\times y$이므로 이 포물선의 준선의 방정식은

$y=-\frac{a}{4}$이다.

즉, $-\frac{a}{4}=-2$이므로 $a=8$

포물선 $x^2=8y$가 점 $(6, k)$를 지나므로

$6^2=8k$

$k=\frac{9}{2}$

따라서 $10(a+k)=10\left(8+\frac{9}{2}\right)=10\times\frac{25}{2}=125$이다.

답 125

2 포물선 $(y-1)^2=a(x+3)$ ...... ㉠

은 포물선 $y^2=ax$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2=ax=4\times\frac{a}{4}\times x$의 초점의 좌표는

$\left(\frac{a}{4}, 0\right)$

이므로 포물선 ㉠의 초점의 좌표는

$\left(\frac{a}{4}-3, 1\right)$

포물선 $(x+2)^2=-8(y-b)$ ...... ㉡

는 포물선 $x^2=-8y$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $x^2=-8y=4\times(-2)\times y$의 초점의 좌표는

$(0, -2)$

이므로 포물선 ㉡의 초점의 좌표는

$(-2, -2+b)$

두 포물선 ㉠, ㉡의 초점이 일치하므로

$\frac{a}{4}-3=-2$, $1=-2+b$

$a=4$, $b=3$

따라서 $a+b=7$

답 ③

3 두 점 $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$에 대하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}=14$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 두 초점이 F, F'이고 장축의 길이가 14인 타원이다.

이 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$

이라고 하면

$a^2-b^2=3^2$ ...... ㉠

$2a=14$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2=49$, $b^2=40$이므로 타원의 방정식은

$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{40}=1$

이다. 이 도형이 점 $(3, k)$를 지나므로

$\frac{9}{49}+\frac{k^2}{40}=1$

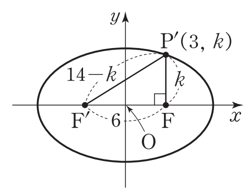
$k^2=\frac{40^2}{49}$

k는 양수이므로

$k=\frac{40}{7}$

답 ④

다른 풀이



좌표가 $(3, k)$인 점을 P′이라고 하면 그림과 같이 삼각형 P′F′F는 직각삼각형이고 $\overline{P'F}=k$, $\overline{P'F'}=14-k$, $\overline{FF'}=6$이므로 피타고라스 정리에 의하여

$k^2+6^2=(14-k)^2$

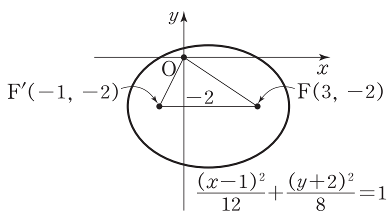
$k^2+6^2=k^2-28k+196$

$28k=160$

따라서 $k=\frac{40}{7}$

4 타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$의 두 초점의 좌표를 $(c, 0)$, $(-c, 0)$ $(c>0)$이라고 하면 $c^2=12-8=4=2^2$에서 $c=2$이므로 두 초점의 좌표는 $(2, 0)$, $(-2, 0)$이다.

타원 $\frac{(x-1)^2}{12}+\frac{(y+2)^2}{8}=1$은 타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 타원 $\frac{(x-1)^2}{12}+\frac{(y+2)^2}{8}=1$의 두 초점을 $F(3, -2)$, $F'(-1, -2)$이라고 하자.



따라서 삼각형 $\mathrm{OF'F}$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times2=4$

답 ③

5 두 초점이 $\mathrm{F}(0, 2)$, $\mathrm{F'}(0, -2)$이고 점 $\mathrm{A}(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$을 지나는 쌍곡선의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\ (a>0, b>0)$이라고 하면

$a^2+b^2=2^2=4$

$b^2=4-a^2$

쌍곡선이 점 $\mathrm{A}(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$을 지나므로

$\frac{3}{a^2}-\frac{12}{b^2}=-1$ …… ㉠

㉠에서 $3b^2-12a^2=-a^2b^2$

이 식에 $b^2=4-a^2$을 대입하면

$3(4-a^2)-12a^2=-a^2(4-a^2)$

$a^4+11a^2-12=0$

$(a^2+12)(a^2-1)=0$

$a^2+12\neq0$이므로

$a^2=1$

이때 $b^2=4-a^2=3$이므로 구하는 쌍곡선의 방정식은

$x^2-\frac{y^2}{3}=-1$

따라서 주축의 길이 l은 $l=2b$이므로

$l^2=4b^2=12$

답 ⑤

6 쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$의 두 초점의 좌표를

$\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F'}(-c, 0)$ $(c>0)$이라고 하면

$c^2=12+4=16$이므로

$\mathrm{F}(4, 0)$, $\mathrm{F'}(-4, 0)$이고

$\overline{\mathrm{FF'}}=8$

$\overline{\mathrm{PF}}:\overline{\mathrm{PF'}}=3:2$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=3k$, $\overline{\mathrm{PF'}}=2k\ (k>0)$

라고 하자.

쌍곡선의 주축의 길이가 $2\times\sqrt{12}=4\sqrt{3}$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}=4\sqrt{3}$에서

$3k-2k=4\sqrt{3}$

$k=4\sqrt{3}$

즉, $\overline{\mathrm{PF}}=12\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{PF'}}=8\sqrt{3}$

이때 삼각형 $\mathrm{PFF'}$의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{FF'}}=12\sqrt{3}+8\sqrt{3}+8$

$=8+20\sqrt{3}$

따라서 $p=8$, $q=20$이므로

$p+q=28$

답 ②

7 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1$의 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{3}{2}x$이고 a는 양수이므로

$\frac{3}{a}=\frac{3}{2}$

즉, $a=2$

따라서 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}}=2\times2=4$이고 $\overline{\mathrm{PF'}}=5$이므로

$\overline{\mathrm{PF}}=4+\overline{\mathrm{PF'}}=4+5=9$

답 ④

8 두 직선 $y=2x-3$, $y=-2x+5$의 교점의 좌표는 $(2, 1)$이고 원점 $\mathrm{O}(0, 0)$은 직선 $y=2x-3$의 윗부분과 직선 $y=-2x+5$의 아랫부분에 있으므로 쌍곡선의 방정식을

$\frac{(x-2)^2}{a^2}-\frac{(y-1)^2}{b^2}=1\ (a>0, b>0)$ …… ㉠

이라고 하면

$\frac{b}{a}=2$에서 $b=2a$

쌍곡선 ㉠이 원점 $\mathrm{O}(0, 0)$을 지나므로

$\frac{(0-2)^2}{a^2}-\frac{(0-1)^2}{(2a)^2}=1$

$\frac{4}{a^2}-\frac{1}{4a^2}=1$

$\frac{15}{4a^2}=1$, $a^2=\frac{15}{4}$

$b=2a$이므로 $b^2=4a^2=15$

따라서 쌍곡선 ㉠의 두 초점의 좌표를

$(c+2, 1)$, $(-c+2, 1)$ $(c>0)$

이라고 하면

$c=\sqrt{a^2+b^2}$

$=\sqrt{\frac{15}{4}+15}$

$=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

이므로 두 초점 사이의 거리는 $5\sqrt{3}$이다.

답 ②

다른 풀이

두 직선 $y=2x-3$, $y=-2x+5$의 교점의 좌표가 $(2, 1)$이므로 주어진 쌍곡선을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 두 직선 $y=2x$, $y=-2x$를 점근선으로 하고 점 $(-2, -1)$을 지나는 쌍곡선이 되며 두 초점 사이의 거리는 변하지 않는다. 평행이동한 쌍곡선의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0, b>0)$ …… ㉠

이라고 하면 $\frac{b}{a}=2$에서 $b=2a$

쌍곡선 ㉠이 점 $(-2, -1)$을 지나므로

$\frac{4}{a^2}-\frac{1}{(2a)^2}=1$에서 $a^2=\frac{15}{4}$

$b=2a$이므로 $b^2=4a^2=15$

따라서 쌍곡선 ㉠의 두 초점의 좌표를

$(c, 0), (-c, 0)\ (c>0)$이라고 하면

$c^2=a^2+b^2=\frac{15}{4}+15=\frac{75}{4}$에서

$c=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

이므로 두 초점 사이의 거리는 $5\sqrt{3}$이다.

Level 1 기초 연습

본문 12쪽

1 ③ **2** ④ **3** ① **4** ① **5** ⑤

1 $y^2+6y-4x+17=0$에서

$(y+3)^2=4(x-2)$

이 곡선은 초점이 $(1, 0)$인 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 포물선이므로 구하는 초점의 좌표는 $F(3, -3)$이다.

따라서 $a=3$, $b=-3$이므로

$ab=-9$

답 ③

2 $\overline{PF}=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

점 $P(x, y)$에서 직선 $x=4$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{PH}=|4-x|$

$\overline{PF}:\overline{PH}=1:2$이므로

$\overline{PH}=2\overline{PF}$

$|4-x|=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$16-8x+x^2=4(x^2-2x+1)+4y^2$

$3x^2+4y^2=12$

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

답 ④

3 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$에서 두 초점 F, F′과 네 꼭짓점 A, B, C, D의 좌표는

$F(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$, $F'(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$

$A(0, b)$, $B(-a, 0)$, $C(0, -b)$, $D(a, 0)$

이고

$\overline{AF}=\sqrt{(a^2-b^2)+b^2}=a$

이때 사각형 AF′CF는 넓이가 12인 정사각형이므로

$a^2=12$

$a>0$이므로 $a=2\sqrt{3}$

또한 $\overline{OA}=\overline{OF}=\overline{AF}\sin 45^\circ=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{6}$이므로

$b=\sqrt{6}$

따라서 $\overline{BD}=2a=4\sqrt{3}$, $\overline{AC}=2b=2\sqrt{6}$이므로 사각형 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times2\sqrt{6}$

$=12\sqrt{2}$

답 ①

4 쌍곡선의 두 점근선의 방정식이 $y=2x$, $y=-2x$이고 두 초점이 x축 위에 있으므로 주어진 쌍곡선의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4a^2}=1\ (a>0)$

이라고 하자. 점 $(2, 2\sqrt{2})$가 이 쌍곡선 위의 점이므로

$\frac{4}{a^2}-\frac{8}{4a^2}=1$, $\frac{2}{a^2}=1$

$a^2=2$

따라서 주어진 쌍곡선의 방정식은

$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{8}=1$

이므로 구하는 주축의 길이는 $2\sqrt{2}$이다.

답 ①

5 $3x^2-2y^2-6x-a+10=0$에서

$3(x^2-2x+1)-2y^2=a-7$

$3(x-1)^2-2y^2=a-7$ …… ㉠

이때 ㉠이 y축에 평행한 주축을 갖는 쌍곡선이므로

$a-7<0$

$a<7$

따라서 구하는 정수 a의 최댓값은 6이다.

답 ⑤

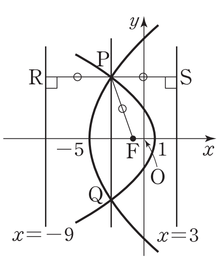
Level 2 기본 연습

본문 13쪽

1 ③ **2** ③ **3** ④ **4** ⑤

1 그림과 같이 두 포물선의 준선의 방정식은 각각

$x=-9$, $x=3$



위의 그림과 같이 두 포물선이 만나는 두 점을 각각 P, Q라고 하자. 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 두 준선과 만나는 점을 각각 R, S라고 하면

$\overline{FP}=\overline{RP}=\overline{PS}$

즉, 점 P는 선분 RS의 중점이므로 점 P의 x좌표는

$\dfrac{-9+3}{2}=-3$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $x=-3$이다.

답 ③

다른 풀이

점 $F(-1, 0)$을 초점으로 하고 점 $(-5, 0)$을 꼭짓점으로 하는 포물선의 방정식은

$y^2=16(x+5)$ …… ㉠

점 $F(-1, 0)$을 초점으로 하고 점 $(1, 0)$을 꼭짓점으로 하는 포물선의 방정식은

$y^2=-8(x-1)$ …… ㉡

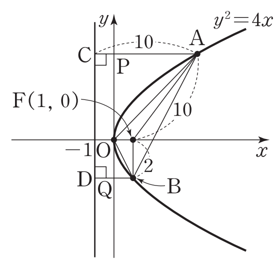
㉠, ㉡에서 $16(x+5)=-8(x-1)$, 즉 $x=-3$이므로

두 점 P, Q의 x좌표는 모두 -3이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $x=-3$이다.

2 포물선 $y^2=4x$의 초점은 $F(1, 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-1$이다.

포물선 위의 두 점 A, B에서 준선 $x=-1$에 내린 수선의 발을 각각 C, D라고 하면



$\overline{AC}=\overline{AF}=10$이므로 점 A의 x좌표는 9이다.

즉, $A(9, 6)$

$\overline{BD}=\overline{BF}=2$이므로 점 B의 x좌표는 1이다.

즉, $B(1, -2)$

두 직선 AC와 BD가 y축과 만나는 점을 각각 P, Q라고 하면 삼각형 AOB의 넓이 S는

$S=$(사각형 APQB의 넓이)$-$(삼각형 APO의 넓이)

$-$(삼각형 OQB의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times(9+1)\times8-\dfrac{1}{2}\times9\times6-\dfrac{1}{2}\times1\times2$

$=40-27-1$

$=12$

답 ③

3 타원 $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ 위의 점 P와 두 초점 F, F′에서 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF}+\overline{PF'}=10$ …… ㉠

원 C 위의 점 Q에 대하여 $\overline{FQ}\geq\overline{PF}-\overline{PQ}=\overline{PF}-\overline{PF'}$이고 선분 FQ의 길이의 최솟값이 4이므로

$\overline{PF}-\overline{PF'}=4$ …… ㉡

㉠－㉡을 하면

$2\overline{PF'}=6$

$\overline{PF'}=3$

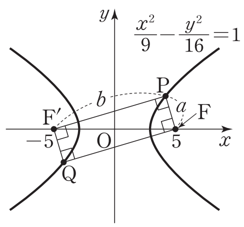
따라서 구하는 원 C의 넓이는 9π이다.

답 ④

4 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점은

$F(\sqrt{9+16}, 0)$, $F'(-\sqrt{9+16}, 0)$

즉, $F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$



직사각형 PF′QF에서 $\overline{PF}=a$, $\overline{PF'}=b$로 놓으면 점 P가 제1사분면 위에 있으므로 $b>a$이고 쌍곡선의 정의에 의하여 $b-a=6$, 즉 $b=a+6$이다.

이때 삼각형 PF′F는 $\angle FPF'=90°$인 직각삼각형이고 $\overline{FF'}=10$이므로

$a^2+b^2=a^2+(a+6)^2=10^2$

$a^2+6a-32=0$

따라서 $a=-3+\sqrt{41}$, $b=3+\sqrt{41}$이므로

직사각형 PF′QF의 둘레의 길이는

$2(a+b)=2\times2\sqrt{41}=4\sqrt{41}$

답 ⑤

Level 3 실력 완성

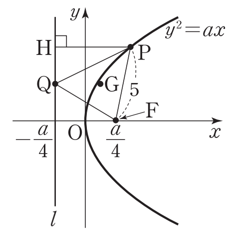
본문 14쪽

1 ③ **2** ② **3** ① **4** ③

1 $y^2=ax=4\times\frac{a}{4}x$이므로 이 포물선의

초점 F의 좌표는 $\left(\frac{a}{4}, 0\right)$

준선 l의 방정식은 $x=-\frac{a}{4}$



점 P에서 준선 l에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{PH}=\overline{PF}=5$이므로 점 P의 x좌표는 $5-\frac{a}{4}$이다.

따라서 점 P의 좌표를 $P\left(5-\frac{a}{4}, y_1\right)$, 점 Q의 좌표를

$Q\left(-\frac{a}{4}, y_2\right)$라고 하자. (단, $y_1>0$)

삼각형 PQF의 무게중심 G의 좌표가 $(1, \sqrt{6})$이므로

$\frac{5-\frac{a}{4}+\left(-\frac{a}{4}\right)+\frac{a}{4}}{3}=1$, $\frac{y_1+y_2+0}{3}=\sqrt{6}$

$5-\frac{a}{4}=3$, $y_1+y_2=3\sqrt{6}$

즉, $a=8$, $y_1+y_2=3\sqrt{6}$

따라서 포물선의 방정식은 $y^2=8x$이고 초점 F와 점 P는 각각 $F(2, 0)$, $P(3, 2\sqrt{6})$이므로

$y_1=2\sqrt{6}$, $y_2=\sqrt{6}$

즉, 점 Q의 좌표는 $(-2, \sqrt{6})$

따라서 $\overline{QF}=\sqrt{(2+2)^2+(0-\sqrt{6})^2}=\sqrt{22}$

답 ③

2 장축의 길이가 $2\sqrt{3}$, 단축의 길이가 2, 중심이 원점이고 점 $A(0, -1)$을 지나는 타원의 방정식은

$\frac{x^2}{(\sqrt{3})^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$

즉, $\frac{x^2}{3}+y^2=1$

점 $P(a, b)$가 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 위의 점이므로

$\frac{a^2}{3}+b^2=1$

$a^2=3(1-b^2)$

점 P가 제1사분면 위의 점이므로

$0<b<1$

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2&=a^2+(b+1)^2\\&=3(1-b^2)+(b+1)^2\\&=-2b^2+2b+4\\&=-2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}\end{aligned}$$

따라서 $b=\frac{1}{2}$ 일 때, 선분 AP의 길이의 최댓값은

$\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 이다.

답 ②

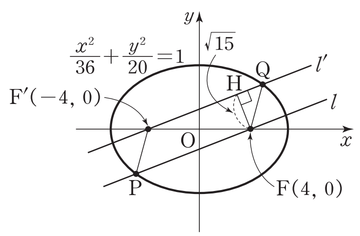
3 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$의 두 초점은

$\mathrm{F'}(-\sqrt{36-20},\ 0)$, $\mathrm{F}(\sqrt{36-20},\ 0)$

즉, $\mathrm{F'}(-4,\ 0)$, $\mathrm{F}(4,\ 0)$

점 F에서 직선 l'에 내린 수선의 발을 H라고 하면 평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리가 $\sqrt{15}$이므로

$\overline{\mathrm{FH}}=\sqrt{15}$



직각삼각형 F′FH에서

$\overline{\mathrm{FF'}}=8$, $\overline{\mathrm{FH}}=\sqrt{15}$

이므로

$\overline{\mathrm{F'H}}=\sqrt{64-15}=\sqrt{49}=7$

이때 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$의 장축의 길이는

$2\times6=12$이므로

$\overline{\mathrm{HQ}}=p$, $\overline{\mathrm{QF}}=q$라고 하면 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{F'H}}+\overline{\mathrm{HQ}}+\overline{\mathrm{QF}}$

$=7+p+q=12$

$p+q=5$ …… ㉠

또한 직각삼각형 FHQ에서

$q^2-p^2=15$

즉, $(q+p)(q-p)=15$

$5(q-p)=15$

$q-p=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$p=1$, $q=4$

$\overline{\mathrm{QF}}=q=4$

점 P와 점 Q는 서로 원점에 대하여 대칭이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=4$

따라서 $\overline{\mathrm{PF'}}+\overline{\mathrm{QF}}=8$

답 ①

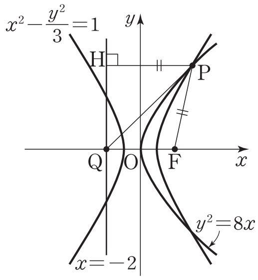
4 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$의 두 초점의 좌표는

$(-\sqrt{1+3},\ 0)$, $(\sqrt{1+3},\ 0)$

즉, $(-2,\ 0)$, $(2,\ 0)$이므로

점 $\mathrm{Q}(-2,\ 0)$은 쌍곡선의 한 초점이다.

또한 $y^2=4\times2x$에서 이 포물선의 초점의 좌표는 $(2,\ 0)$, 준선의 방정식은 $x=-2$이다.



따라서 $\mathrm{F}(2,\ 0)$으로 놓으면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF}}$

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{PF}}=2\times1=2$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{PH}}=2$

답 ③

02 평면 곡선의 접선

유제 본문 17~23쪽

1 ④	2 ②	3 ④	4 ③	5 ③
6 ①	7 ⑤	8 ③		

1 $ax^2+\sqrt{y}=b$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2ax+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\dfrac{dy}{dx}=0$ (단, $y\neq0$)

$\dfrac{dy}{dx}=-4ax\sqrt{y}$

점 $(1, 4)$에서의 접선의 기울기가 -2이므로

$-4a\sqrt{4}=-2$에서

$a=\dfrac{1}{4}$

또 점 $(1, 4)$가 곡선 $ax^2+\sqrt{y}=b$ 위의 점이므로

$a+2=b$

$b=\dfrac{1}{4}+2=\dfrac{9}{4}$

따라서 $a+b=\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4}=\dfrac{5}{2}$

답 ④

2 $x^2-2y^2=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x-4y\dfrac{dy}{dx}=0$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{2y}$ (단, $y\neq0$)

따라서 점 $(3, 2)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{3}{2\times2}=\dfrac{3}{4}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-2=\dfrac{3}{4}(x-3)$

즉, $3x-4y-1=0$

따라서 $a=3$, $b=-4$이므로

$a+b=-1$

답 ②

3 $y^2=12x=4\times3x$이므로 이 포물선 위의 점 $(3, -6)$에서의 접선의 방정식은

$-6y=2\times3(x+3)$

즉, $y=-x-3$

이 직선이 점 $(a, 2)$를 지나므로

$2=-a-3$

$a=-5$

답 ④

4 $x^2=8y=4\times2y$이므로 이 포물선 위의 점 $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$2x=2\times2\left(y+\dfrac{1}{2}\right)$

즉, $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$

따라서 이 직선에 평행하고 점 $(-4, 2)$를 지나는 직선 l의 방정식은

$y-2=\dfrac{1}{2}(x+4)$

즉, $x-2y+8=0$

한편, 포물선 $x^2=8y$의 초점의 좌표는 $(0, 2)$이다.

그러므로 점 $(0, 2)$와 직선 $x-2y+8=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|0-4+8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

답 ③

5 점 $(2, -1)$이 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$ …… ㉠

타원 위의 점 $(2, -1)$에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{-y}{b^2}=1$

즉, $y=\dfrac{2b^2}{a^2}x-b^2$

이 접선의 기울기가 1이므로

$\dfrac{2b^2}{a^2}=1$에서

$a^2=2b^2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{2}{b^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$

$b^2=3$

이것을 ㉡에 대입하면 $a^2=6$

따라서 두 초점의 좌표는

$(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$, $(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$

즉, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$

이므로 두 초점 사이의 거리는 $2\sqrt{3}$ 이다.

답 ③

6 $5x^2-y^2=10$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$10x-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5x}{y}\ (\text{단, } y\neq 0)$$

따라서 쌍곡선 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{5a}{b}$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-b=\frac{5a}{b}(x-a)$$

$$y=\frac{5a}{b}x-\frac{5a^2-b^2}{b} \quad \cdots\cdots ㉠$$

점 $\mathrm{P}(a, b)$는 쌍곡선 위의 점이므로

$$5a^2-b^2=10 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$$y=\frac{5a}{b}x-\frac{10}{b} \quad \cdots\cdots ㉢$$

따라서 이 직선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각

$\left(\frac{2}{a}, 0\right), \left(0, -\frac{10}{b}\right)$

이다. $a>0$, $b>0$이고 직선 ㉢과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 3이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{a}\times\frac{10}{b}=3$에서

$$ab=\frac{10}{3}$$

답 ①

7 $x=4\cos\theta$, $y=4\sin\theta$에서

$$\frac{dx}{d\theta}=-4\sin\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=4\cos\theta$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{4\cos\theta}{-4\sin\theta}=-\frac{1}{\tan\theta}\ (\text{단, } \sin\theta\neq 0)$$

이때 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$-\frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.

$\theta=\frac{\pi}{3}$ 일 때,

$$x=4\cos\frac{\pi}{3}=2,\ y=4\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 에 대응하는 곡선 위의 점의 좌표는

$(2, 2\sqrt{3})$ 이고 이 점에서의 접선의 기울기는 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

접선의 방정식은

$$y-2\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$$

즉, $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{8\sqrt{3}}{3}$

이 직선이 x축, y축과 만나는 점이 각각 A, B이므로

$\mathrm{A}(8, 0)$, $\mathrm{B}\left(0, \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$이다.

따라서 구하는 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 8\times\frac{8\sqrt{3}}{3}=\frac{32\sqrt{3}}{3}$$

답 ⑤

8 $x=2t-1$, $y=1-2t-t^2$에서

$\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=-2-2t$ 이므로

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{-2-2t}{2}$$

$$=-t-1$$

이때 $x=2t-1$에서 $t=\frac{x+1}{2}$ 이므로

$$f'(x)=-\frac{x+1}{2}-1=-\frac{1}{2}(x+3) \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{2h}\times 2$$

$$=2f'(3)$$

이고, ㉠에서

$f'(3)=-\frac{1}{2}(3+3)=-3$이므로

$$2f'(3)=-6$$

답 ③

다른 풀이

$x=2t-1$, $y=1-2t-t^2$에서

$\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=-2-2t$ 이므로

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{-2-2t}{2}$$

$$=-t-1$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{2h}\times2$$

$$=2f'(3)$$

이고 $x=2t-1$에서 $x=3$일 때 $t=2$이므로

$2f'(3)=2(-2-1)=-6$

Level 1 기초 연습

본문 24쪽

1 ⑤ **2** ② **3** ③ **4** ④ **5** ③

1 $x^2+y^2-2x-3y-4=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x+2y\frac{dy}{dx}-2-3\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x+2}{2y-3} \text{ (단, } 2y-3\neq0)$$

따라서 점 $(2, -1)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{-2\times2+2}{2\times(-1)-3}=\frac{2}{5}$$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-(-1)=\frac{2}{5}(x-2)$$

$2x-5y-9=0$

따라서 $a=-5$, $b=-9$이므로

$ab=45$

답 ⑤

2 $x^2-y\ln x+x-e=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x-\frac{dy}{dx}\ln x-y\cdot\frac{1}{x}+1-0=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\ln x}\left(2x-\frac{y}{x}+1\right) \text{ (단, } x>0,\ x\neq1)$$

따라서 곡선 $x^2-y\ln x+x-e=0$ 위의 점 (e, e^2)에서의 접선의 기울기는

$$\frac{1}{\ln e}\left(2e-\frac{e^2}{e}+1\right)=e+1$$

답 ②

3 포물선 $y^2=10x$는 x축에 대하여 대칭이므로 기울기가 1인 접선의 접점의 좌표를 $\left(\frac{t^2}{10}, t\right)(t>0)$라고 하자.

$y^2=10x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2y\frac{dy}{dx}=10$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5}{y} \text{ (단, } y\neq0)$$

접선의 기울기가 1이므로

$$\frac{5}{y}=1$$

$y=5$

즉, $t=5$이므로 접점의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, 5\right)$이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-5=1\times\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

$$y=x+\frac{5}{2}$$

이 직선이 점 $(a, 4)$를 지나므로

$$4=a+\frac{5}{2}$$

$$a=\frac{3}{2}$$

답 ③

4 $2x^2+y^2=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$4x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{y} \text{ (단, } y\neq0)$$

따라서 타원 $2x^2+y^2=1$과 직선 $y=3x$의 교점의 좌표를 $(a, 3a)$라고 하면 $a\neq0$이므로 교점에서의 타원의 접선의 기울기는

$$-\frac{2a}{3a}=-\frac{2}{3}$$

답 ④

5 $x=t^2+1$, $y=t^2+3at$에서

$\dfrac{dx}{dt}=2t$, $\dfrac{dy}{dt}=2t+3a$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{2t+3a}{2t}$ (단, $t\neq 0$)

$t=3$에 대응하는 점에서의 접선이 직선 $y=-x+3$과 평행하므로 접선의 기울기는 -1이다.

즉, $\dfrac{6+3a}{6}=-1$에서

$a=-4$

답 ③

Level 2 기본 연습

본문 25쪽

1 ③ **2** ④ **3** ③ **4** ③

1 $x^2+axy+y^2=b$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+ay+ax\dfrac{dy}{dx}+2y\dfrac{dy}{dx}=0$

$(ax+2y)\dfrac{dy}{dx}=-(2x+ay)$

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+ay}{ax+2y}$ (단, $ax+2y\neq 0$) …… ㉠

점 $(1, -2)$에서의 접선의 기울기가 $\dfrac{1}{3}$이므로

$x=1$, $y=-2$를 ㉠에 대입하면

$-\dfrac{2-2a}{a-4}=\dfrac{1}{3}$

$-3(2-2a)=a-4$

$-6+6a=a-4$

$5a=2$

$a=\dfrac{2}{5}$

또한 주어진 곡선이 점 $(1, -2)$를 지나므로

$1^2+\dfrac{2}{5}\times 1\times(-2)+(-2)^2=b$

$b=\dfrac{21}{5}$

따라서 $2b-a=2\times\dfrac{21}{5}-\dfrac{2}{5}=8$

답 ③

2 포물선 $y^2=8x$와 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{36}=1$이 만나는 점 P의 좌표를 (x_1, y_1)로 놓으면 두 곡선 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은 각각

$y_1y=2\times 2(x+x_1)$, $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{36}=1$

이때 두 접선이 서로 수직이므로 기울기의 곱은 -1이다.

$y_1\neq 0$이므로 $\dfrac{4}{y_1}\times\left(-\dfrac{36}{a^2}\times\dfrac{x_1}{y_1}\right)=-1$

$\dfrac{144}{a^2}\times\dfrac{x_1}{{y_1}^2}=1$ …… ㉠

한편, 점 $P(x_1, y_1)$은 포물선 $y^2=8x$ 위의 점이므로

${y_1}^2=8x_1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{144}{a^2}\times\dfrac{x_1}{8x_1}=1$

$a^2=18$

따라서 타원 $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{36}=1$의 두 초점의 좌표는

$(0, -\sqrt{36-18})$, $(0, \sqrt{36-18})$

즉, $(0, -3\sqrt{2})$, $(0, 3\sqrt{2})$

이므로 두 초점 사이의 거리는 $6\sqrt{2}$이다.

답 ④

3 $x=f(t)$, $y=f(t^2)$에서

$\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$, $\dfrac{dy}{dt}=2tf'(t^2)$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{2tf'(t^2)}{f'(t)}$

따라서 $t=1$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2f'(1)}{f'(1)}=2$

따라서 기울기가 2이고 점 $(2, -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-(-1)=2(x-2)$

$y=2x-5$

따라서 구하는 y절편은 -5이다.

답 ③

4 $x=nt^2+t$, $y=\dfrac{n}{3}t^3+8t-10$에서

$\dfrac{dx}{dt}=2nt+1$, $\dfrac{dy}{dt}=nt^2+8$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{nt^2+8}{2nt+1}$$

이므로 $t=3$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기 $f(n)$은

$$f(n)=\frac{9n+8}{6n+1}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(n)&=\lim_{n\to\infty}\frac{9n+8}{6n+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{9+\frac{8}{n}}{6+\frac{1}{n}}\\&=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 26쪽

1 ① **2** ③ **3** ① **4** ③

1 $x^2+3ye^x-y^2=-n^2+3n$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x+3\frac{dy}{dx}e^x+3ye^x-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+3ye^x}{2y-3e^x}\ (\text{단, } 2y\neq 3e^x)$$

위의 식에 $x=0$, $y=n$을 대입하면 $\frac{3n}{2n-3}$

즉, 주어진 곡선 위의 점 $(0, n)$에서의 접선의 기울기가 $\frac{3n}{2n-3}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y=\frac{3n}{2n-3}x+n$$

따라서 이 직선의 x절편 $f(n)$은

$$f(n)=-\frac{2n-3}{3}=-\frac{2}{3}n+1$$

이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{20}\{10-f(n)\}&=\sum_{n=1}^{20}\left(9+\frac{2}{3}n\right)\\&=9\times 20+\frac{2}{3}\times\frac{20\times 21}{2}\\&=180+140=320\end{aligned}$$

답 ①

2 $4n^2-(4n-1)=(2n-1)^2$이므로 타원

$\frac{x^2}{4n^2}+\frac{y^2}{4n-1}=1$의 초점의 좌표는

$(-2n+1, 0)$, $(2n-1, 0)$

이때 x좌표가 양수인 초점은 $F_n(2n-1, 0)$이므로

$a_n=2n-1$

점 $P_n(a_n, b_n)$ 이 타원 위의 점이므로

$$\frac{{a_n}^2}{4n^2}+\frac{{b_n}^2}{4n-1}=1$$

$$\frac{(2n-1)^2}{4n^2}+\frac{{b_n}^2}{4n-1}=1$$

$$\frac{{b_n}^2}{4n-1}=\frac{4n-1}{4n^2}$$

$${b_n}^2=\frac{(4n-1)^2}{4n^2}$$

$b_n>0$이므로

$$b_n=\frac{4n-1}{2n}$$

주어진 타원 위의 점 $P_n(a_n, b_n)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{a_n x}{4n^2}+\frac{b_n y}{4n-1}=1$$

이므로

$$\frac{2n-1}{4n^2}x+\frac{1}{2n}y=1$$

이 직선이 x축, y축과 만나는 점이 각각 A_n, B_n이므로

$A_n\left(\frac{4n^2}{2n-1}, 0\right)$, $B_n(0, 2n)$

따라서 삼각형 OA_nB_n의 넓이 S_n은

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2}\times\frac{4n^2}{2n-1}\times 2n\\&=\frac{4n^3}{2n-1}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3}{(2n-1)n^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{2n-1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{2-\frac{1}{n}}\\&=\frac{4}{2}=2\end{aligned}$$

답 ③

3 타원 C 위의 점 P와 직선 l 사이의 거리의 최솟값이 $\sqrt{5}$인

경우는 직선 l에 평행한 직선이 타원 C와 접할 때의 접점이 P이고 이 접선과 직선 l 사이의 거리가 $\sqrt{5}$인 경우이다.

타원 C : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{a^2}=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$\frac{x_1 x}{4}+\frac{y_1 y}{a^2}=1$

즉, $y=-\frac{a^2 x_1}{4y_1}x+\frac{a^2}{y_1}$

이 직선이 직선 l과 평행하므로

$-\frac{a^2 x_1}{4y_1}=-2$ …… ㉠

접선 위의 점 $\left(0, \frac{a^2}{y_1}\right)$과 직선 $y=-2x+10$, 즉

$2x+y-10=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{\left|\frac{a^2}{y_1}-10\right|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$

$\left|\frac{a^2}{y_1}-10\right|=5$

$\frac{a^2}{y_1}=15$ 또는 $\frac{a^2}{y_1}=5$

이때 접선의 y절편은 직선 l의 y절편보다 작으므로

$\frac{a^2}{y_1}=5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x_1=\frac{8}{5}$

이고 이때의 접선의 방정식은

$y=-2x+5$

이므로 접점 (x_1, y_1)의 좌표는

$\left(\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right)$

따라서 ㉡에서 $a^2=5y_1=5\times\frac{9}{5}=9$

이므로 양수 a의 값은 3이다.

답 ①

4 $x=t+1$, $y=t^3+t^2$에서

$\frac{dx}{dt}=1$, $\frac{dy}{dt}=3t^2+2t$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=3t^2+2t$

점 $(a+1, a^3+a^2)$은 $t=a$에 대응하는 점이므로

점 $(a+1, a^3+a^2)$에서의 접선의 방정식은

$y-(a^3+a^2)=(3a^2+2a)\{x-(a+1)\}$

$y=(3a^2+2a)x-(3a^2+2a)(a+1)+a^3+a^2$

$\quad=(3a^2+2a)x-2a^3-4a^2-2a$

이므로 y절편은 $g(a)=-2a^3-4a^2-2a$이다.

이때 $g(1)=-8$이므로

$\lim_{a\to1}\frac{g(a)+8}{a^2-1}=\lim_{a\to1}\left\{\frac{g(a)-g(1)}{a-1}\times\frac{1}{a+1}\right\}$

$=\frac{1}{2}g'(1)$

한편, $g(a)=-2a^3-4a^2-2a$에서

$g'(a)=-6a^2-8a-2$이므로

$g'(1)=-16$

따라서 $\frac{1}{2}g'(1)=-8$

답 ③

다른 풀이

$x=t+1$, $y=t^3+t^2$에서 t를 소거하면

$y=(x-1)^3+(x-1)^2$

이므로

$\frac{dy}{dx}=3(x-1)^2+2(x-1)$

따라서 점 $(a+1, a^3+a^2)$에서의 접선의 방정식은

$y-(a^3+a^2)=(3a^2+2a)\{x-(a+1)\}$

$y=(3a^2+2a)x-2a^3-4a^2-2a$

이므로 y절편은 $g(a)=-2a^3-4a^2-2a$이다.

따라서

$\lim_{a\to1}\frac{g(a)+8}{a^2-1}=\lim_{a\to1}\frac{-2a^3-4a^2-2a+8}{a^2-1}$

$=\lim_{a\to1}\frac{-2(a-1)(a^2+3a+4)}{(a+1)(a-1)}$

$=\lim_{a\to1}\frac{-2(a^2+3a+4)}{a+1}$

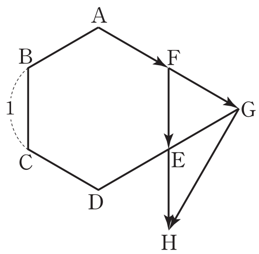
$=-8$

03 벡터의 연산

유제 본문 29~33쪽

1 ③ **2** 61 **3** ⑤ **4** ③ **5** ②
6 ①

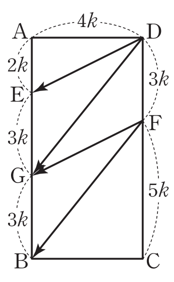
1 벡터 $\overrightarrow{AF}$와 같은 벡터 $\overrightarrow{FG}$, 벡터 $\overrightarrow{FE}$와 같은 벡터 $\overrightarrow{EH}$는 그림과 같다.



이때 $\angle EGF=60°$이고
이등변삼각형 EHG에서 $\angle GEH=120°$이므로
$\angle EGH=30°$
$\angle FGH=60°+30°=90°$
따라서 직각삼각형 FHG에서
$|\overrightarrow{FG}|=1$, $|\overrightarrow{FH}|=2$이므로
$|\overrightarrow{GH}|=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

답 ③

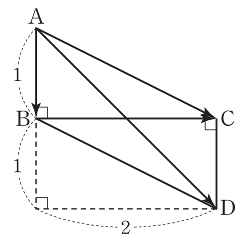
2 $\overline{AE}:\overline{DF}=2:3$이므로
$\overline{AE}=2k$, $\overline{DF}=3k\,(k>0)$로 놓을 수 있다.



$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{FG}$이므로 사각형 DEGF는 평행사변형이고
$\overline{EG}=\overline{DF}=3k$
$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{FB}$이므로 사각형 DGBF는 평행사변형이고
$\overline{GB}=\overline{DF}=3k$
$\overline{AB}=2k+3k+3k=8k$이므로
$\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{AB}=4k$
$\overline{FC}=8k-3k=5k$
따라서
$|\overrightarrow{DE}|^2=(4k)^2+(2k)^2=20k^2$,
$|\overrightarrow{FB}|^2=(4k)^2+(5k)^2=41k^2$
이므로
$\frac{|\overrightarrow{DE}|^2}{|\overrightarrow{FB}|^2}=\frac{20k^2}{41k^2}=\frac{20}{41}$
따라서 $m+n=41+20=61$

답 61

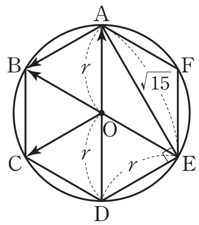
3 $\vec{b}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}$
$=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})-\overrightarrow{AB}$
$=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}$
$=\vec{0}$
이므로
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+\vec{0}$
$=\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$



그림과 같이 사각형 ABDC가 평행사변형이 되도록 점 D를 잡으면 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$이므로
$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|=|\overrightarrow{AD}|$
$=\sqrt{2^2+2^2}$
$=2\sqrt{2}$

답 ⑤

4 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{AB}$
$=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{AB})$
$=\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA})$
$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$
$=\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OA}$
$=\overrightarrow{EA}$
따라서 $|\overrightarrow{EA}|=\sqrt{15}$



중심이 O인 원의 반지름의 길이를 r라고 하면
직각삼각형 ADE에서
$\overline{AD}=2r$, $\overline{DE}=r$, $\overline{EA}=\sqrt{15}$이므로
$(2r)^2=r^2+(\sqrt{15})^2$
$3r^2=15$, $r^2=5$
따라서 중심이 O인 원의 넓이는
$\pi\times r^2=5\pi$

답 ③

5 $3(\vec{x}+\vec{a}-2\vec{b})=4\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)-\vec{x}$에서
$3\vec{x}+3\vec{a}-6\vec{b}=4\vec{a}+2\vec{b}-\vec{x}$
$4\vec{x}=4\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{a}+6\vec{b}$
$\quad=\vec{a}+8\vec{b}$
$\vec{x}=\frac{1}{4}\vec{a}+2\vec{b}$
따라서 $m=\frac{1}{4}$, $n=2$이므로
$mn=\frac{1}{2}$

답 ②

6 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라고 하자.
$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$
$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{a}$
$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$이므로
$\overrightarrow{CP}=m\overrightarrow{BQ}+n\overrightarrow{PR}$에서
$\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}=m\left(\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{a}\right)+n\left(\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)$
$\qquad=\left(-m-\frac{1}{2}n\right)\vec{a}+\left(\frac{1}{3}m+\frac{2}{3}n\right)\vec{b}$
이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않으므로
$\frac{1}{2}=-m-\frac{1}{2}n$ …… ㉠
$-1=\frac{1}{3}m+\frac{2}{3}n$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$m=\frac{1}{3}$, $n=-\frac{5}{3}$이므로
$m+n=-\frac{4}{3}$

답 ①

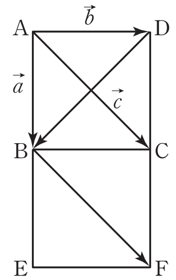
다른 풀이
$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라고 하자.
$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{a}$ …… ㉠
$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$ …… ㉡
㉠에서
$2\overrightarrow{BQ}=\frac{2}{3}\vec{b}-2\vec{a}$ …… ㉢
㉡, ㉢에서
$\overrightarrow{PR}-2\overrightarrow{BQ}=\frac{3}{2}\vec{a}$
$\vec{a}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{BQ}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PR}$
㉠에서
$\vec{b}=3\overrightarrow{BQ}+3\vec{a}$
$\quad=3\overrightarrow{BQ}-4\overrightarrow{BQ}+2\overrightarrow{PR}$
$\quad=-\overrightarrow{BQ}+2\overrightarrow{PR}$
$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}$
$\quad=\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$
$\quad=\left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{BQ}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PR}\right)-(-\overrightarrow{BQ}+2\overrightarrow{PR})$
$\quad=\frac{1}{3}\overrightarrow{BQ}-\frac{5}{3}\overrightarrow{PR}$
따라서 $m=\frac{1}{3}$, $n=-\frac{5}{3}$이므로
$m+n=-\frac{4}{3}$

Level 1 기초 연습 본문 34쪽

1 ④ **2** ② **3** ② **4** 3 **5** ③

1 $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$

그림과 같이 사각형 BEFC가 사각형 ABCD와 한 평면 위에 있는 정사각형이 되도록 두 점 E, F를 잡으면



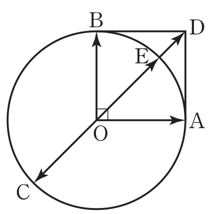
$\vec{c}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BF}$이므로

$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{DF}$

따라서 $|\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|=|\overrightarrow{DF}|=2$

답 ④

2 그림과 같이 사각형 OADB가 정사각형이 되도록 점 D를 잡고, 중심이 O인 원과 선분 OD의 교점을 E라고 하자.



$\overline{OE}=1$, $\overline{OD}=\sqrt{2}$이므로

$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{OD}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OE}$이고,

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}&=-\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OD}\\&=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\\&=-\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OA}-\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

따라서 $m=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $n=-\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$m+n=-\sqrt{2}$

답 ②

3 두 벡터 $\vec{x}$, $\vec{y}$가 서로 평행하므로

$\vec{y}=k\vec{x}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재한다.

즉, $3\vec{a}+(m-2)\vec{b}=2k\vec{a}+km\vec{b}$에서

$3=2k$, $m-2=km$이므로

$k=\frac{3}{2}$이고,

$m-2=\frac{3}{2}m$에서 $m=-4$

답 ②

4 $\vec{a}+2\vec{b}=\vec{0}$에서

$\vec{a}=-2\vec{b}$

$-3\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$에서

$-3(-2\vec{b})+\vec{b}=\vec{c}$

$7\vec{b}=\vec{c}$

$|\vec{c}|=|7\vec{b}|=7|\vec{b}|=7$이므로

$|\vec{b}|=1$

$|\vec{a}|=|-2\vec{b}|=2|\vec{b}|=2\times1=2$

따라서 $|\vec{a}|+|\vec{b}|=2+1=3$

답 3

5 $$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=\vec{b}-\vec{a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}&=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\\&=4\vec{a}+k\vec{b}-\vec{a}\\&=3\vec{a}+k\vec{b}\end{aligned}$$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{AC}=l\,\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 l이 존재한다.

즉,

$$\begin{aligned}3\vec{a}+k\vec{b}&=l(\vec{b}-\vec{a})\\&=-l\vec{a}+l\vec{b}\end{aligned}$$

이므로

$3=-l$, $k=l$에서

$l=-3$, $k=-3$

답 ③

Level 2 기본 연습

본문 35쪽

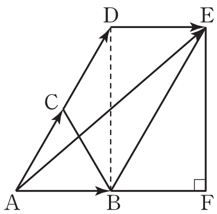
1 ③ **2** 40 **3** ① **4** ③

1 그림과 같이 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CD}$인 점 D와 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AB}$인 점 E를 잡

으면 사각형 ABED는 평행사변형이므로

$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{AE}$



$\angle ABC=60^\circ$이고, $\angle CBD=\angle CDB=30^\circ$이므로

$\angle ABD=90^\circ$이다.

따라서 점 E에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 F라고 하면

$\overline{BF}=\overline{DE}$

정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 a라고 하면

직각삼각형 AFE에서

$\overline{AF}=2a$,

$\overline{EF}=\overline{DB}=\sqrt{(2a)^2-a^2}=\sqrt{3}a$이므로

$\overline{AE}=\sqrt{(2a)^2+(\sqrt{3}a)^2}=\sqrt{7}a$

따라서 $|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{21}$에서

$\sqrt{7}a=\sqrt{21}$

$a=\sqrt{3}$

답 ③

2 $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$이므로

$\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{ED}$

$=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$

$=\overrightarrow{CE}=-\overrightarrow{EC}$

$2\overrightarrow{EC}=\vec{0}$, $\overrightarrow{EC}=\vec{0}$

따라서 점 E는 점 C와 일치한다.

$\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DB}$이므로

$|\overrightarrow{DB}|=\overline{DB}=10$

$\overline{AB}=a$라고 하면 $\overline{AD}=2a$이므로

$\overline{DB}=\sqrt{a^2+(2a)^2}=10$에서

$5a^2=100$, $a^2=20$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$a\times 2a=2a^2=2\times 20=40$

답 40

3 $2\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}$에서

$2\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{PC}$

$=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}$

$=\overrightarrow{BP}$

이므로

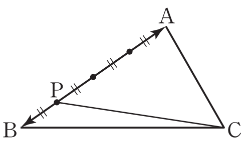
$2\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{BP}-5\overrightarrow{PB}$

$=-\overrightarrow{PB}-5\overrightarrow{PB}$

$=-6\overrightarrow{PB}$

즉, $\overrightarrow{PA}=-3\overrightarrow{PB}$

따라서 세 점 P, A, B는 한 직선 위에 있고, 그림과 같이 점 P는 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점이다.



따라서 $S:T=3:1$이므로

$\frac{T}{S}=\frac{1}{3}$

답 ①

4 ㄱ. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}$

$=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}$

$=\vec{0}$ (참)

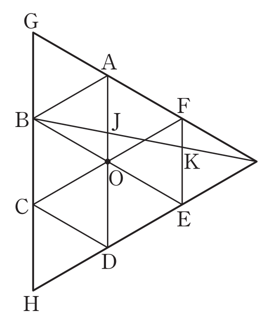
ㄴ. $2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DE}$

$=\overrightarrow{EA}$

삼각형 ADE는 $\angle AED=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$|\overrightarrow{EA}|=\overline{EA}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ (참)

ㄷ. 그림과 같이 두 직선 AF, BC가 만나는 점을 G, 두 직선 BC, DE가 만나는 점을 H, 두 직선 DE, AF가 만나는 점을 I라고 하자.



$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{EP}$에서

$3\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI}$

$=\overrightarrow{IB}$

이므로

$\overrightarrow{EP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$

삼각형 GHI에서 두 점 A, F는 선분 GI의 삼등분점이고, 두 점 D, E는 선분 HI의 삼등분점이므로 선분 IB와 두 선분 AD, FE의 교점을 각각 J, K라고 하면

$\overrightarrow{KJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$

따라서 $\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{KJ}$이므로 점 P는 선분 OD 위에 있다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 36쪽

1 ③ **2** ③ **3** 13

1 $|\overrightarrow{OP}|=a$라고 하면

$\overrightarrow{OX}=\frac{2}{a}\overrightarrow{OP}$이므로

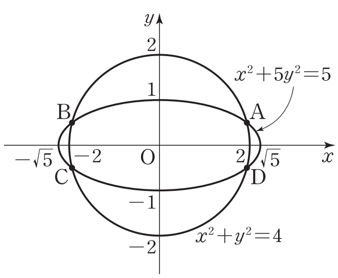
$|\overrightarrow{OX}|=\left|\frac{2}{a}\overrightarrow{OP}\right|=\frac{2}{a}|\overrightarrow{OP}|$

$=\frac{2}{a}\times a$

$=2$

점 P가 중심이 O인 타원 위를 움직이므로 점 X가 나타내는 도형은 중심이 O이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

따라서 점 X가 나타내는 도형의 방정식은 $x^2+y^2=4$이다.



원 $x^2+y^2=4$와 타원 $x^2+5y^2=5$의 교점의 좌표를 구하면

$x^2+y^2=4$에서 $x^2=4-y^2$ …… ㉠

㉠을 $x^2+5y^2=5$에 대입하면

$(4-y^2)+5y^2=5$

$y^2=\frac{1}{4}$

$y=\pm\frac{1}{2}$

이것을 ㉠에 대입하면

$x^2=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$

$x=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$

따라서 원 $x^2+y^2=4$와 타원 $x^2+5y^2=5$의 교점을

$A\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

$B\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

$C\left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$,

$D\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

이라고 하면 네 점 A, B, C, D 중에서 서로 다른 두 점 사이의 거리의 최댓값은

$\overline{AC}=\overline{OA}+\overline{OC}=2+2=4$

이고, 최솟값은

$\overline{AD}=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

그러므로 최댓값과 최솟값의 합은

$4+1=5$

답 ③

참고

네 점 A, B, C, D 중에서 서로 다른 두 점 사이의 거리는 다음과 같다.

$\overline{AB}=\sqrt{15}$, $\overline{AC}=4$, $\overline{AD}=1$,

$\overline{BC}=1$, $\overline{BD}=4$, $\overline{CD}=\sqrt{15}$

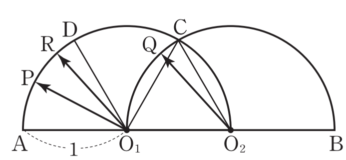
2 삼각형 CO_1O_2는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이므로

$\angle CO_2O_1=60^\circ$이다.

따라서 호 AC 위에 $\angle DO_1A=60^\circ$인 점을 D라고 하면

$\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_1R}$

를 만족시키는 점 R는 호 AD 위에 있다.



$\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1R}$이므로

벡터 $\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1R}$의 크기가 최대인 경우는 두 점 P, R가 일치하는 경우이다. 따라서

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1R}| &\le |\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1P}|\\ &=2|\overrightarrow{O_1P}|\\ &=2\times 1=2\end{aligned}$$

이므로 $M=2$

벡터 $\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1R}$의 크기가 최소인 경우는 $\angle PO_1R$의 크기가 최대일 때이며, 이때 점 R가 점 A와 일치하고, 점 P가 점 C와 일치한다. 따라서

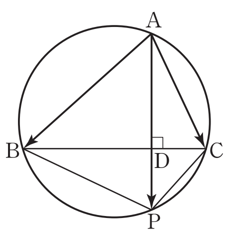
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1R}| &\ge |\overrightarrow{O_1C}+\overrightarrow{O_1A}|\\ &=|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{O_1A}|\\ &=|\overrightarrow{O_1D}|=1\end{aligned}$$

이므로 $m=1$

따라서 $Mm=2\times 1=2$

답 ③

3 두 선분 AP, BC의 교점을 D라고 하자.



$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$에서

$\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

이므로 두 벡터 $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{AB}$는 서로 평행하다.

또 사각형 ABPC가 원에 내접하고 두 변 AB, CP가 평행하므로 사각형 ABPC는 등변사다리꼴이고,

$\overline{AC}=\overline{BP}$

이때 등변사다리꼴 ABPC에서

$\overline{AD}=\overline{BD}$, $\overline{CD}=\overline{PD}$

이다.

두 직각이등변삼각형 ABD, PCD는 서로 닮음이고,

$|\overrightarrow{CP}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$이므로

$$\begin{aligned}\overline{BD}:\overline{CD}&=\overline{AD}:\overline{PD}\\ &=2:1\end{aligned}$$

이때 $\overline{BC}=3$이므로

$\overline{BD}=\overline{AD}=2$, $\overline{CD}=\overline{PD}=1$

직각삼각형 ABD에서

$\overline{AB}^2=2^2+2^2=8$

직각삼각형 ADC에서

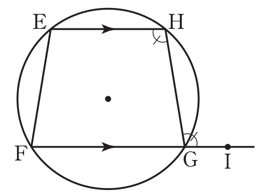
$\overline{AC}^2=2^2+1^2=5$

따라서 $|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2=8+5=13$

답 13

참고

그림과 같이 원 위의 점 E, F, G, H에 대하여 두 직선 EH, FG가 서로 평행할 때,



사각형 EFGH가 원에 내접하므로

$\angle EFG=180^\circ-\angle EHG$ …… ㉠

$\overline{EH}\,/\!/\,\overline{FG}$이므로

$\angle HGF=180^\circ-\angle HGI=180^\circ-\angle EHG$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\angle EFG=\angle HGF$

따라서 사각형 EFGH는 등변사다리꼴이다.

04 평면벡터의 성분과 내적

유제 본문 39~47쪽

1 ③	**2** 4	**3** ④	**4** ①	**5** ④
6 ④	**7** ⑤	**8** ②	**9** ①	**10** ③

1 점 P는 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AP}=\frac{2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}}{2+1}$$
$$=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}$$

점 Q는 선분 BC를 $2:1$로 외분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}}{2-1}$$
$$=2\vec{b}-\vec{a}$$

$$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}\right)+(2\vec{b}-\vec{a})$$
$$=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{8}{3}\vec{b}$$

따라서 $m=-\frac{2}{3}$, $n=\frac{8}{3}$이므로

$$m-n=-\frac{10}{3}$$

답 ③

2 $\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{CP}=\vec{0}$에서

$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

$$-\overrightarrow{PC}=\frac{\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}}{3} \quad \cdots\cdots ㉠$$

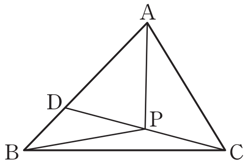
선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 D라고 하면

$$\overrightarrow{PD}=\frac{\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}}{3} \quad \cdots\cdots ㉡$$

이므로 ㉠, ㉡에서

$\overrightarrow{PD}=-\overrightarrow{PC}$

따라서 점 P는 선분 CD의 중점이다.



삼각형 PBD의 넓이를 S라고 하면 세 삼각형 PAD, PBC, PCA의 넓이는 각각 $2S$, S, $2S$이므로 삼각형 PAB의 넓이는

$S+2S=3S$

이고, $3S=6$에서 $S=2$

따라서 삼각형 PCA의 넓이는

$2S=4$

답 4

3 $|\vec{c}|=\sqrt{4^2+t^2}=5$이므로

$16+t^2=25$에서 $t^2=9$

$t>0$이므로 $t=3$

$\vec{c}=(4,3)$

$\vec{a}+\vec{b}=(2,-1)+(0,s)$
$=(2,s-1)$

이고, 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$와 벡터 $\vec{c}$가 방향이 같으므로

$\vec{a}+\vec{b}=k\vec{c}\ (k>0)$

로 놓을 수 있다.

$(2,s-1)=k(4,3)$에서

$2=4k$, $s-1=3k$

따라서 $k=\frac{1}{2}$이고,

$s=3k+1=3\times\frac{1}{2}+1=\frac{5}{2}$이므로

$s+t=\frac{5}{2}+3=\frac{11}{2}$

답 ④

4 $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$

$=(1,-3)+t(2,1)$

$=(2t+1,\ t-3)$

따라서 벡터 $\vec{p}$의 크기는

$|\vec{p}|=\sqrt{(2t+1)^2+(t-3)^2}$

$=\sqrt{5t^2-2t+10}$

$=\sqrt{5\left(t-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{49}{5}}$

$0\leq t\leq 3$이므로

$t=\frac{1}{5}$일 때, $|\vec{p}|$의 최솟값은

$m=\sqrt{\frac{49}{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$

$t=3$일 때, $|\vec{p}|$의 최댓값은

$M=\sqrt{49}=7$

따라서 $\frac{m}{M}=\frac{7\sqrt{5}}{5}\times\frac{1}{7}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

답 ①

5 $\vec{a}+2\vec{b}=(1, 2)+(4, 2k)$

$=(5, 2+2k)$

$3\vec{a}-\vec{b}=(3, 6)-(2, k)$

$=(1, 6-k)$

이므로

$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=(5, 2+2k)\cdot(1, 6-k)$

$=5+(2+2k)(6-k)$

$=-2k^2+10k+17$

따라서 $-2k^2+10k+17=5$에서

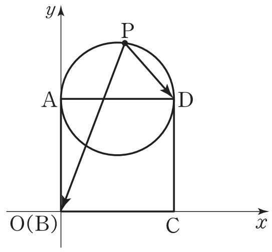
$k^2-5k-6=0$

$(k+1)(k-6)=0$

$k>0$이므로 $k=6$

답 ④

6 주어진 도형을 점 B가 원점 O와 일치하고 반직선 BC, BA를 각각 x축, y축의 양의 방향으로 하는 좌표평면 위에 놓으면 그림과 같다.



정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 2이므로

점 D의 좌표는 $(2, 2)$이다.

점 P의 좌표를 (x, y)로 놓으면

$\overrightarrow{PB}=-\overrightarrow{BP}=(-x, -y)$

$\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BP}$

$=(2, 2)-(x, y)$

$=(2-x, 2-y)$

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=(-x, -y)\cdot(2-x, 2-y)$

$=x(x-2)+y(y-2)$

$=x^2+y^2-2x-2y$

$=(x-1)^2+(y-1)^2-2$

이때 $(x-1)^2+(y-1)^2$은 두 점 $\mathrm{P}(x, y)$, $(1, 1)$ 사이의 거리의 제곱이고, 점 P는 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 위를 움직이므로 $(x-1)^2+(y-1)^2$은 점 P의 좌표가 $(1, 3)$일 때 최대이고, 최댓값은 4이다.

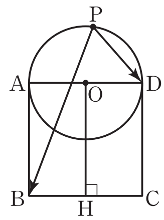
따라서 $(x-1)^2+(y-1)^2-2$의 최댓값은

$4-2=2$

답 ④

다른 풀이

원의 중심을 O라 하고 점 O에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OD})$

$=|\overrightarrow{PO}|^2+\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$

$=1+\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$

$=1+\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OH}-|\overrightarrow{OA}|^2$

$=1+\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OH}-1$

$=\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OH}$

따라서 $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OH}$는 두 벡터 $\overrightarrow{PO}$, $\overrightarrow{OH}$가 이루는 각의 크기가 0일 때 최댓값을 가지므로 구하는 최댓값은

$|\overrightarrow{PO}||\overrightarrow{OH}|\cos 0=1\times2\times1=2$

7 $|2\vec{a}+\vec{b}|^2=(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})$

$=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=4\times1^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+(\sqrt{10})^2$

$=4\vec{a}\cdot\vec{b}+14$

따라서 $4\vec{a}\cdot\vec{b}+14=4^2$에서

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$

벡터 $\vec{a}+t\vec{b}$와 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직이려면

$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$이어야 하므로

$|\vec{a}|^2+(t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}-t|\vec{b}|^2=0$

$1+\frac{1}{2}(t-1)-10t=0$

$\frac{1}{2}-\frac{19}{2}t=0$

$t=\frac{1}{19}$

답 ⑤

8 $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\vec{u}$, $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\vec{v}$라고 하면

$|\vec{u}|=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|}=1$, $|\vec{v}|=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{b}|}=1$

이고, $\vec{a}\perp\vec{b}$이므로 $\vec{u}\perp\vec{v}$이고

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

$|\vec{c}|^2=|\vec{u}+\vec{v}|^2$

$=|\vec{u}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2$

$=1+0+1$

$=2$

따라서 $|\vec{c}|=\sqrt{2}$

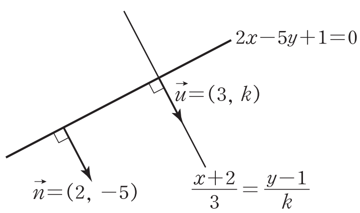
답 ②

9 직선 $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{k}$의 방향벡터를 $\vec{u}$라고 하면

$\vec{u}=(3, k)$

직선 $2x-5y+1=0$의 법선벡터를 $\vec{n}$이라고 하면

$\vec{n}=(2, -5)$



두 직선이 서로 수직이므로 두 벡터 $\vec{u}$, $\vec{n}$은 평행하다.

따라서 $\vec{u}=t\vec{n}$ (t는 0이 아닌 실수)으로 놓으면

$(3, k)=t(2, -5)$

$3=2t$, $k=-5t$

따라서 $t=\frac{3}{2}$이므로

$k=-5\times\frac{3}{2}=-\frac{15}{2}$

답 ①

10 점 $(-2, 1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(a, b)$인 직선을 l이라고 하면 직선 l의 방정식은

$\frac{x+2}{a}=\frac{y-1}{b}$이므로

$\frac{x+2}{a}=\frac{y-1}{b}=t$ (t는 실수)에서

$x=at-2$, $y=bt+1$

즉, 직선 l 위의 점은 $(at-2, bt+1)$로 나타내어진다.

직선 l과 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$이 만나므로 방정식 $(at-5)^2+(bt-1)^2=1$을 만족시키는 실수 t가 존재한다.

즉, $(a^2+b^2)t^2-2(5a+b)t+25=0$에서 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4}=(5a+b)^2-25(a^2+b^2)\geq 0$

$10ab-24b^2\geq 0$

$b>0$이므로 $10a-24b\geq 0$

$5a\geq 12b$

$a>0$이므로 $\frac{5}{12}\geq\frac{b}{a}$

따라서 $\frac{b}{a}$의 최댓값은 $\frac{5}{12}$이다.

답 ③

Level 1 기초 연습

본문 48쪽

1 ② **2** ③ **3** ③ **4** ④ **5** ③

1 $\overrightarrow{GM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BM}$

$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB})$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

따라서 $p=-\frac{1}{3}$, $q=\frac{1}{6}$이므로

$p+q=-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$

$=-\frac{1}{6}$

답 ②

2 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(-2, 2)-(3, -1)$

$=(-5, 3)$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OB}=(-5, 3)+(-2, 2)$

$=(-7, 5)$

따라서

$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OB}|=\sqrt{(-7)^2+5^2}$

$=\sqrt{74}$

답 ③

3 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 수직이려면
$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이어야 한다.
즉, $(k, -3)\cdot(2, k+2)=0$
$2k-3(k+2)=0$
$-k-6=0$
$k=-6$

답 ③

4 $|2\vec{a}-\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$
$=4\times3-4\vec{a}\cdot\vec{b}+6$
$=18-4\vec{a}\cdot\vec{b}$
따라서 $(\sqrt{6})^2=18-4\vec{a}\cdot\vec{b}$에서
$4\vec{a}\cdot\vec{b}=18-6=12$
$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$
따라서
$|\vec{a}+3\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$
$=3+6\times3+9\times6$
$=75$
이므로
$|\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$

답 ④

5 직선 $x+2=\dfrac{y-1}{-5}$의 방향벡터를 $\vec{u}$라고 하면
$\vec{u}=(1, -5)$
직선 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{3}$의 방향벡터를 $\vec{v}$라고 하면
$\vec{v}=(2, 3)$
따라서

$$\cos\theta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$
$$=\frac{|1\times2+(-5)\times3|}{\sqrt{1^2+(-5)^2}\sqrt{2^2+3^2}}$$
$$=\frac{13}{\sqrt{26}\sqrt{13}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

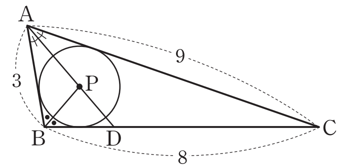
답 ③

Level 2 기본 연습

본문 49쪽

1 ③ **2** 6 **3** ④ **4** ③

1 직선 AP가 변 BC와 만나는 점을 D라고 하자.



선분 AD는 $\angle$BAC의 이등분선이므로
$\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{AB}:\overline{AC}=3:9=1:3$이고
$\overline{BC}=8$이므로
$\overline{BD}=2$, $\overline{DC}=6$
삼각형 ABD에서 선분 BP는 $\angle$ABD의 이등분선이므로
$\overline{DP}:\overline{PA}=\overline{BD}:\overline{BA}=2:3$
$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AD}$ …… ㉠
점 D는 선분 BC를 $1:3$으로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB}}{1+3}$$
$$=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

따라서 ㉠에서

$$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{5}\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)$$
$$=\frac{9}{20}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{20}\overrightarrow{AC}$$

그러므로 $m=\dfrac{9}{20}$, $n=\dfrac{3}{20}$이므로
$m-n=\dfrac{6}{20}=\dfrac{3}{10}$

답 ③

2 $\angle\mathrm{AMD}=90^\circ$, $\overline{DM}=\sqrt{3}$이고, 사각형 DABC는 평행사변형이므로
$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AD}$
$=\overrightarrow{DM}\cdot(-\overrightarrow{DA})$
$=-|\overrightarrow{DM}||\overrightarrow{DA}|\cos(\angle\mathrm{ADM})$
$=-|\overrightarrow{DM}|^2$
$=-(\sqrt{3})^2$
$=-3$
한편, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$로 놓으면

$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$,

$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}=(\vec{a}+\vec{b})-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$

이므로

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MC}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}\right)$

$=\frac{1}{2}|\vec{a}|^2+\frac{3}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=\frac{1}{2}|\vec{a}|^2+\frac{3}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ+|\vec{b}|^2$

$=\frac{1}{2}\times 2^2+\frac{3}{2}\times 2^2\times\frac{1}{2}+2^2$

$=9$

따라서

$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MC}=(-3)+9$

$=6$

답 6

3 $t\vec{a}+\vec{b}=(2t, 4t)+(4, 2)=(2t+4, 4t+2)$

$t\vec{b}+\vec{c}=(4t, 2t)+(n, -2)=(4t+n, 2t-2)$

$(t\vec{a}+\vec{b})\cdot(t\vec{b}+\vec{c})$

$=(2t+4, 4t+2)\cdot(4t+n, 2t-2)$

$=(2t+4)(4t+n)+(4t+2)(2t-2)$

$=8t^2+(2n+16)t+4n+8t^2-4t-4$

$=16t^2+2(n+6)t+4n-4$

따라서 부등식 $16t^2+2(n+6)t+4n-4>0$이 실수 t의 값에 관계없이 항상 성립하려면

방정식 $16t^2+2(n+6)t+4n-4=0$의 판별식을 D라고 할 때,

$\frac{D}{4}=(n+6)^2-16(4n-4)<0$

이어야 한다. 즉,

$n^2-52n+100<0$

$(n-2)(n-50)<0$

$2<n<50$

따라서 정수 n은 3, 4, 5, ⋯, 49의 47개이다.

답 ④

4 점 P는 직선 $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{3}$ 위의 점이므로

$\frac{x-2}{2}=\frac{y}{3}=t$ (t는 실수)

에서 점 P의 좌표를 $(2t+2, 3t)$로 놓을 수 있다.

이때 점 Q의 좌표는 $(2t+2, 0)$, 점 R의 좌표는 $(0, 3t)$이므로 두 점 Q, R를 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라고 하면

$\vec{u}=\overrightarrow{QR}=(-2t-2, 3t)$

직선 $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{3}$의 방향벡터를 $\vec{v}$라고 하면

$\vec{v}=(2, 3)$

이고, 직선 QR와 직선 $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{3}$가 서로 수직이므로

두 직선의 방향벡터도 서로 수직이다.

따라서 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$이므로

$(-2t-2, 3t)\cdot(2, 3)=-4t-4+9t=0$에서

$t=\frac{4}{5}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{18}{5}, \frac{12}{5}\right)$이므로

$a+b=\frac{18}{5}+\frac{12}{5}=6$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 50쪽

1 ③ **2** ④ **3** ①

1 ㄱ. $2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{CP}=\vec{0}$에서

$3\overrightarrow{CP}=-2\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{BP}$

$=2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}$

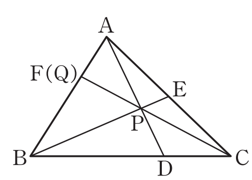
$\overrightarrow{CP}=\frac{2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{3}$

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점을 Q라고 하면

$\overrightarrow{PQ}=\frac{2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{3}$이므로

$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PQ}$

즉, 세 점 C, P, Q는 한 직선 위의 점이므로 두 점 F, Q는 일치한다.



따라서 점 F는 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$\overline{AF}:\overline{FB}=1:2$ (참)

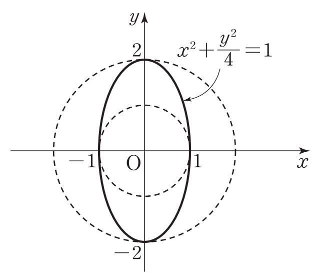
ㄴ. ㄱ에서 $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PQ}$, 즉 $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PF}$이므로
점 P는 선분 CF의 중점이다.
따라서 $\overrightarrow{BP}=\dfrac{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BF}}{2}$이므로
$2\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BF}$ (참)
ㄷ. $2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{CP}=\vec{0}$에서
$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP}&=-2\overrightarrow{AP}-3\overrightarrow{CP}\\&=2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PC}\\&=\frac{2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PC}}{5}\times 5\end{aligned}$$
선분 AC를 $3:2$로 내분하는 점을 R라고 하면
$\overrightarrow{BP}=5\overrightarrow{PR}$
즉, 세 점 B, P, R는 한 직선 위의 점이므로 두 점 E, R는 일치하고, 점 P는 선분 BE를 $5:1$로 내분하는 점이다.
따라서 삼각형 APE의 넓이가 3이면 삼각형 ABP의 넓이는 15이고, $\overline{AF}:\overline{FB}=1:2$이므로 삼각형 AFP의 넓이는
$15\times\dfrac{1}{3}=5$ (거짓)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

2 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$
$$\begin{aligned}&=(1,\,-3)+(x,\,y)+(-4,\,1)\\&=(x-3,\,y-2)\end{aligned}$$
두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$가 서로 평행하므로
$\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{BC}$ (k는 0이 아닌 실수)
로 놓을 수 있다.
따라서 $(x-3,\,y-2)=k(x,\,y)$에서
$x-3=kx,\ y-2=ky$
이고, $xy\neq 0$이므로
$\dfrac{x-3}{x}=\dfrac{y-2}{y}=k$
$xy-3y=xy-2x$
$y=\dfrac{2}{3}x$
$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OP}=(x,\,y)$에서 점 P의 좌표는 $(x,\,y)$이고,
$y=\dfrac{2}{3}x\ (6\le x\le 12)$
이므로 점 P가 나타내는 도형은 두 점 $(6,\,4)$, $(12,\,8)$을 연결한 선분이다.
따라서 점 P가 나타내는 도형의 길이는
$\sqrt{(12-6)^2+(8-4)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

답 ④

3 점 A의 좌표가 $(3,\,0)$이므로
$\vec{a}=(3,\,0)$
점 C의 좌표는
$\left(\dfrac{2\times0+1\times3}{2+1},\,\dfrac{2\times3+1\times0}{2+1}\right)$, 즉 $(1,\,2)$이므로
$\vec{c}=(1,\,2)$
$\vec{p}=\vec{a}+\vec{c}=(3,\,0)+(1,\,2)=(4,\,2)$
$$\begin{aligned}\vec{q}&=\frac{2}{3}\vec{a}-\vec{c}\\&=\frac{2}{3}(3,\,0)-(1,\,2)\\&=(1,\,-2)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}x\vec{p}+y\vec{q}&=x(4,\,2)+y(1,\,-2)\\&=(4x+y,\,2x-2y)\end{aligned}$$
이므로 $|x\vec{p}+y\vec{q}|=2\sqrt{5}$에서
$\sqrt{(4x+y)^2+(2x-2y)^2}=2\sqrt{5}$
양변을 제곱하여 정리하면
$16x^2+8xy+y^2+4x^2-8xy+4y^2=20$
$20x^2+5y^2=20$
$x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$
따라서 점 $\mathrm{P}(x,\,y)$가 나타내는 도형은 장축의 길이가 4, 단축의 길이가 2인 타원이다.



그러므로 타원 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 위의 점 P에 대하여 선분 OP의 길이의 최댓값은 2, 최솟값은 1이므로 최댓값과 최솟값의 합은 3이다.

답 ①

05 평면 운동

유제

본문 53~59쪽

1 ② **2** ① **3** ⑤ **4** ③ **5** ③ **6** ⑤

1 시각 t에서 점 P의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라고 하면

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=1+\frac{2t}{t^2+4}$$

$$a(t)=\frac{d}{dt}v(t)$$
$$=\frac{2(t^2+4)-2t\times 2t}{(t^2+4)^2}$$
$$=-\frac{2(t^2-4)}{(t^2+4)^2}$$

따라서 점 P의 $t=2$에서의 속도와 가속도는

$$v(2)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\ a(2)=0$$

답 ②

2 $v(t)=\dfrac{1}{(t+1)^2}$이므로 시각 t에서 점 P의 위치를 $x(t)$라고 하면

$$x(3)=x(0)+\int_0^3 v(t)\,dt$$
$$=2+\int_0^3 \frac{1}{(t+1)^2}\,dt$$
$$=2+\int_0^3 (t+1)^{-2}\,dt$$
$$=2+\left[-\frac{1}{t+1}\right]_0^3$$
$$=2-\frac{1}{4}+1$$
$$=\frac{11}{4}$$

답 ①

3 $x=2t^2+\cos 2t,\ y=3-\dfrac{1}{2}\sin 2t$에서

$$\frac{dx}{dt}=4t-2\sin 2t,\ \frac{dy}{dt}=-\cos 2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=4-4\cos 2t,\ \frac{d^2y}{dt^2}=2\sin 2t$$

이므로 점 P의 시각 t에서의 가속도를 $\vec{a}$라고 하면

$$\vec{a}=(4-4\cos 2t,\ 2\sin 2t)$$

따라서 시각 $t=\dfrac{\pi}{4}$에서의 가속도는 $\vec{a}=(4,\ 2)$이므로 가속도의 크기는

$$|\vec{a}|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$$

답 ⑤

4 $x=2\sqrt{2}\,t$에서 $\dfrac{dx}{dt}=2\sqrt{2}$

$y=e^t+2e^{-t}$에서 $\dfrac{dy}{dt}=e^t-2e^{-t}$

이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(2\sqrt{2})^2+(e^t-2e^{-t})^2$$
$$=8+(e^{2t}-4+4e^{-2t})$$
$$=e^{2t}+4+4e^{-2t}$$
$$=(e^t+2e^{-t})^2$$

따라서 $t=0$에서 $t=\ln 2$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^{\ln 2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\ln 2}\sqrt{(e^t+2e^{-t})^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\ln 2}(e^t+2e^{-t})\,dt$$
$$=\Big[e^t-2e^{-t}\Big]_0^{\ln 2}$$
$$=\left(2-\frac{2}{2}\right)-(1-2)$$
$$=2$$

답 ③

5 $x=e^t\sin t$에서 $\dfrac{dx}{dt}=e^t(\sin t+\cos t)$

$y=e^t\cos t$에서 $\dfrac{dy}{dt}=e^t(\cos t-\sin t)$

주어진 곡선의 길이를 l이라고 하면

$$l=\int_0^a\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^a\sqrt{e^{2t}(\sin t+\cos t)^2+e^{2t}(\cos t-\sin t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^a\sqrt{e^{2t}(1+2\sin t\cos t)+e^{2t}(1-2\sin t\cos t)}\,dt$$
$$=\int_0^a\sqrt{2e^{2t}}\,dt=\int_0^a\sqrt{2}e^t\,dt$$
$$=\sqrt{2}\Big[e^t\Big]_0^a$$
$$=\sqrt{2}(e^a-1)=4-\sqrt{2}$$

에서 $\sqrt{2}e^a=4$

즉, $e^a=2\sqrt{2}$ 이므로

$a=\ln 2\sqrt{2}=\frac{3}{2}\ln 2$

답 ③

6 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}\ln x$에서

$\frac{dy}{dx}=x-\frac{1}{4}\times\frac{1}{x}=x-\frac{1}{4x}$ 이므로

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\left(x-\frac{1}{4x}\right)^2$$
$$=1+\left(x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^2}\right)$$
$$=x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^2}$$
$$=\left(x+\frac{1}{4x}\right)^2$$

따라서 구하는 곡선의 길이를 l 이라고 하면

$$l=\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^e\sqrt{\left(x+\frac{1}{4x}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^e\left(x+\frac{1}{4x}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\ln x\right]_1^e$$
$$=\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}$$

답 ⑤

Level 1 기초 연습

본문 60쪽

1 ② **2** ① **3** ⑤ **4** ④

1 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t}}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{2t}{2\sqrt{t^2+3}}=\frac{t}{\sqrt{t^2+3}}$

이므로 점 P의 시각 t 에서의 속도를 $\vec{v}$라고 하면

$$\vec{v}=\left(\frac{1}{2\sqrt{t}},\ \frac{t}{\sqrt{t^2+3}}\right)$$

이고 속력은

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^2+\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+3}}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{4t}+\frac{t^2}{t^2+3}}$$

따라서 $t=1$에서 점 P의 속력은

$$\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 ②

2 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y)가

$x=2t+1,\ y=t^3-2t^2-4$

이므로

$\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=3t^2-4t$

$\frac{d^2x}{dt^2}=0$, $\frac{d^2y}{dt^2}=6t-4$

점 P의 시각 t 에서의 가속도를 $\vec{a}$라고 하면

$\vec{a}=(0,\ 6t-4)$

가속도의 크기는

$$|\vec{a}|=\sqrt{0^2+(6t-4)^2}$$
$$=|6t-4|$$

이므로 $|\vec{a}|=0$이 되는 시각은 $t=\frac{2}{3}$이다.

답 ①

3 $x=3t^2$에서

$\frac{dx}{dt}=6t$

$y=t^3-3t$ 에서

$\frac{dy}{dt}=3t^2-3$

이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(6t)^2+(3t^2-3)^2$$
$$=36t^2+9t^4-18t^2+9$$
$$=9t^4+18t^2+9$$
$$=(3t^2+3)^2$$

따라서 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 s라고 하면

$$s=\int_1^3\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_1^3\sqrt{(3t^2+3)^2}\,dt$$
$$=\int_1^3(3t^2+3)dt$$
$$=\Big[t^3+3t\Big]_1^3$$
$$=(27+9)-(1+3)=32$$

답 ⑤

4 $y=\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$에서 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$이므로

구하는 곡선의 길이를 l이라고 하면

$$l=\int_0^{12}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^{12}\sqrt{1+\frac{1}{4}x}\,dx$$
$$=\int_0^{12}\left(1+\frac{1}{4}x\right)^{\frac{1}{2}}dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\times 4\right]_0^{12}$$
$$=\frac{8}{3}(8-1)=\frac{56}{3}$$

답 ④

Level 2 기본 연습

본문 61쪽

1 125 **2** ④ **3** 108 **4** ②

1 $\frac{dx}{dt}=-\sin 2t$, $\frac{dy}{dt}=\cos t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속도를 $\vec{v}$라고 하면

$\vec{v}=(-\sin 2t, \cos t)$

이고 속력은

$$|\vec{v}|=\sqrt{(-\sin 2t)^2+\cos^2 t}$$
$$=\sqrt{\sin^2 2t+\cos^2 t}$$
$$=\sqrt{4\sin^2 t\cos^2 t+\cos^2 t}$$
$$=\sqrt{4(1-\cos^2 t)\cos^2 t+\cos^2 t}$$
$$=\sqrt{-4\cos^4 t+5\cos^2 t}$$

$\cos^2 t=s$로 놓으면 $0\le s\le 1$이고

$$|\vec{v}|=\sqrt{-4s^2+5s}$$
$$=\sqrt{-4\left(s-\frac{5}{8}\right)^2+\frac{25}{16}}$$

점 P의 속력은 $s=\frac{5}{8}$일 때, 최댓값 $\frac{5}{4}$를 가지므로

$M=\frac{5}{4}$이다.

따라서 $100M=125$

답 125

참고

$$\sin 2t=\sin(t+t)$$
$$=\sin t\cos t+\cos t\sin t$$
$$=2\sin t\cos t$$

2 시각 t에서 점 P의 위치를 (x, y)라고 하면

$\overrightarrow{OP}=\cos t\,\overrightarrow{OA}-\sin t\,\overrightarrow{OB}$에서

$$(x, y)=\cos t(2, 1)-\sin t(2, -1)$$
$$=(2\cos t-2\sin t, \cos t+\sin t)$$

이므로

$x=2\cos t-2\sin t$, $y=\cos t+\sin t$

$\frac{dx}{dt}=-2\sin t-2\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-\sin t+\cos t$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-2\cos t+2\sin t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\cos t-\sin t$

시각 t에서 점 P의 가속도를 $\vec{a}$라고 하면

$$|\vec{a}|=\sqrt{4(\sin t-\cos t)^2+(\sin t+\cos t)^2}$$
$$=\sqrt{5-6\sin t\cos t}=\sqrt{5-3\sin 2t}$$

따라서 $0\le t\le\pi$에서 점 P의 가속도의 크기의 최댓값은

$\sin 2t=-1$, 즉 $t=\frac{3}{4}\pi$일 때,

$$\sqrt{5-3\sin\frac{3}{2}\pi}=\sqrt{5+3}=2\sqrt{2}$$

답 ④

3 $x=2\cos\frac{t^3}{4}$에서

$$\frac{dx}{dt}=2\left(-\sin\frac{t^3}{4}\right)\times\frac{3}{4}t^2$$
$$=-\frac{3}{2}t^2\sin\frac{t^3}{4}$$

$y=2\sin\frac{t^3}{4}$에서

$$\frac{dy}{dt}=2\left(\cos\frac{t^3}{4}\right)\times\frac{3}{4}t^2$$
$$=\frac{3}{2}t^2\cos\frac{t^3}{4}$$

이므로

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\frac{9}{4}t^4\sin^2\frac{t^3}{4}+\frac{9}{4}t^4\cos^2\frac{t^3}{4}$$
$$=\frac{9}{4}t^4$$

따라서 $t=0$에서 $t=6$까지 점 P가 움직인 거리를 s라고 하면

$$s=\int_0^6\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^6\sqrt{\frac{9}{4}t^4}\,dt$$
$$=\int_0^6\frac{3}{2}t^2\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^3\right]_0^6$$
$$=108$$

답 108

4 $1\le t\le a$에서 $x=\ln t^2=2\ln|t|=2\ln t$이므로

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{t}$$

$y=t+\frac{1}{t}$에서 $\frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{t^2}$

주어진 곡선의 길이를 l이라고 하면

$$l=\int_1^a\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_1^a\sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2+\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_1^a\sqrt{\frac{4}{t^2}+1-\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}}\,dt$$
$$=\int_1^a\sqrt{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_1^a\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$$
$$=\left[t-\frac{1}{t}\right]_1^a$$
$$=\left(a-\frac{1}{a}\right)-(1-1)$$
$$=\frac{3}{2}$$

에서 $a-\frac{3}{2}-\frac{1}{a}=0$

$2a^2-3a-2=0,\ (2a+1)(a-2)=0$

$a\ge 1$이므로 $a=2$

답 ②

Level 3 실력 완성

본문 62쪽

1 ⑤ **2** ② **3** 49

1 점 $\mathrm{P}(x, y)$가 점 $(1, 0)$을 출발하여 원 위를 시계 반대 방향으로 매초 두 바퀴씩 일정한 속력으로 회전하므로 t초 후의 점 P의 위치 (x, y)는

$x=\cos 4\pi t,\ y=\sin 4\pi t$

t초 후의 점 P의 속도를 $\vec{v}$, 가속도를 $\vec{a}$라고 하면

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$
$$=(-4\pi\sin 4\pi t, 4\pi\cos 4\pi t)$$
$$\vec{a}=\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$
$$=(-16\pi^2\cos 4\pi t, -16\pi^2\sin 4\pi t)$$

따라서 $t=\frac{1}{3}$일 때

$$\vec{a}=\left(-16\pi^2\cos\frac{4}{3}\pi, -16\pi^2\sin\frac{4}{3}\pi\right)$$
$$=(8\pi^2, 8\sqrt{3}\pi^2)$$

답 ⑤

2 $\frac{dx}{dt}=\cos t+\sin t,\ \frac{dy}{dt}=-\cos t\sin t$이므로

$t=\frac{\pi}{2}$일 때 곡선 C 위의 점 P에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{0}{1}=0$$

$t=\frac{\pi}{2}$일 때 점 P의 좌표는 $(1, 1)$이므로 곡선 C 위의 점 P에서의 접선 l의 방정식은 $y=1$이다.

$t=a$일 때, 점 P가 직선 $y=1$ 위에 있으므로

$y=\frac{1}{2}\cos^2 a+1=1$에서

$\cos a=0$

$\frac{\pi}{2}<a<2\pi$이므로 $a=\frac{3}{2}\pi$

따라서 $t=\frac{\pi}{2}$에서 $t=\frac{3}{2}\pi$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{(\cos t+\sin t)^2+(-\cos t\sin t)^2}\,dt$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{1+2\sin t\cos t+(\sin t\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{(1+\sin t\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2}\,dt$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \left(1+\frac{1}{2}\sin 2t\right)dt$$
$$=\left[t-\frac{1}{4}\cos 2t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}$$
$$=\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\right)$$
$$=\pi$$

답 ②

참고

$$\sin 2t=\sin(t+t)$$
$$=\sin t\cos t+\cos t\sin t$$
$$=2\sin t\cos t$$

에서

$\sin t\cos t=\frac{1}{2}\sin 2t$이므로

$1+\sin t\cos t=1+\frac{1}{2}\sin 2t>0$

따라서

$$\sqrt{(1+\sin t\cos t)^2}=\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2}$$
$$=1+\frac{1}{2}\sin 2t$$

3 $y=\int_0^x \frac{(e^t+e^{-t})(x-t)}{2}\,dt$

$$=x\int_0^x \frac{e^t+e^{-t}}{2}\,dt-\int_0^x \frac{t(e^t+e^{-t})}{2}\,dt$$

이므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{dy}{dx}=\int_0^x \frac{e^t+e^{-t}}{2}\,dt+\frac{x(e^x+e^{-x})}{2}-\frac{x(e^x+e^{-x})}{2}$$
$$=\left[\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right]_0^x$$
$$=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$$
$$=1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}$$
$$=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}$$
$$=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2$$

따라서 구하는 곡선의 길이 l은

$$l=\int_{\ln 4}^{\ln 8}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_{\ln 4}^{\ln 8}\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_{\ln 4}^{\ln 8}\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\right]_{\ln 4}^{\ln 8}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(8-\frac{1}{8}\right)-\left(4-\frac{1}{4}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(4+\frac{1}{8}\right)$$
$$=\frac{33}{16}$$

즉, $p=16$, $q=33$이므로

$p+q=16+33=49$

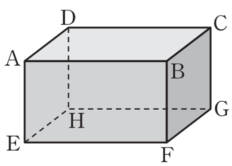
답 49

06 공간도형

유제 본문 65~71쪽

1 ④ **2** ⑤ **3** 3 **4** ② **5** ②

1



그림과 같은 직육면체 ABCD−EFGH에서 직선 AB와 평행한 직선은 세 직선 DC, EF, HG이므로

$a=3$

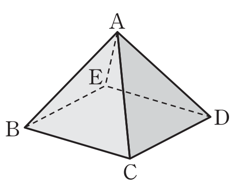
직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선은 네 직선 DH, CG, EH, FG이므로

$b=4$

따라서 $a+b=3+4=7$

답 ④

2



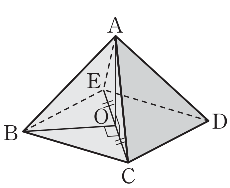
그림과 같은 정사각뿔 A−BCDE에서 $\overline{BC}\,/\!/\,\overline{DE}$이므로 직선 AB와 직선 DE가 이루는 각의 크기 α는 직선 AB와 직선 BC가 이루는 예각의 크기와 같다.

즉, $\angle ABC=\alpha$이고, 이때 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$\alpha=\frac{\pi}{3}$

$\sin^2\alpha=\sin^2\frac{\pi}{3}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

또 다음 그림과 같이 선분 CE의 중점을 O라고 하자.



삼각형 AEC가 이등변삼각형이므로

$\overline{AO}\perp\overline{CE}$ ...... ㉠

삼각형 BCE가 이등변삼각형이므로

$\overline{BO}\perp\overline{CE}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에 의하여 직선 CE가 평면 ABO와 수직이므로 $\overline{CE}\perp\overline{AB}$이다.

즉, $\beta=\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin^2\beta=\sin^2\frac{\pi}{2}=1^2=1$

따라서

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\frac{3}{4}+1$

$=\frac{7}{4}$

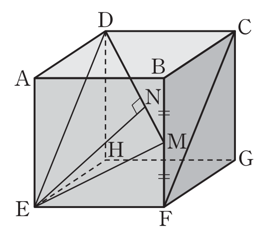
답 ⑤

3 직선 CF는 직선 DE와 평행하므로 두 직선 DM, CF가 이루는 예각의 크기는 두 직선 DM, DE가 이루는 예각의 크기와 같다.

따라서 $\theta=\angle EDM$이다.

이때 정육면체의 한 모서리의 길이가 2이므로 삼각형 DEM에서

$\overline{DE}=2\sqrt{2}$, $\overline{EM}=\sqrt{5}$, $\overline{DM}=3$이다.



위 그림과 같이 삼각형 DEM의 꼭짓점 E에서 선분 DM에 내린 수선의 발을 N이라 하고 $\overline{DN}=x$라고 하면

$\overline{MN}=3-x$이고

$\overline{EN}^2=\overline{DE}^2-\overline{DN}^2=\overline{EM}^2-\overline{MN}^2$이므로

$(2\sqrt{2})^2-x^2=(\sqrt{5})^2-(3-x)^2$

$8-x^2=5-9+6x-x^2$

$6x=12$

$x=2$

따라서

$\cos\theta=\cos(\angle EDM)$

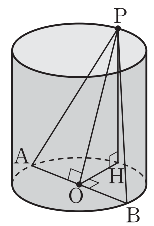
$=\frac{\overline{DN}}{\overline{DE}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이므로 $\cos^2\theta=\frac{1}{2}$

그러므로 $p+q=2+1=3$

답 3

4 그림과 같이 점 P에서 원기둥의 아래쪽에 있는 밑면에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



$\overline{PO}\perp\overline{AB}$, $\overline{PH}\perp$(평면 HAB)이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HO}\perp\overline{AB}$

즉, $\overline{PO}\perp\overline{AB}$, $\overline{HO}\perp\overline{AB}$이므로 두 평면 PAB와 HAB가 이루는 예각의 크기는 두 직선 PO와 HO가 이루는 예각의 크기와 같다. 따라서

$\theta=\angle POH$

이때 삼각형 POH는 각 PHO가 직각인 직각삼각형이고

$\overline{HO}=1$, $\overline{PH}=2$이므로

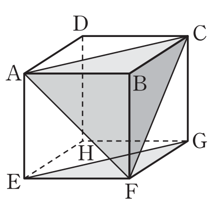
$\overline{PO}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

따라서

$$\cos\theta=\cos(\angle POH)$$
$$=\frac{\overline{HO}}{\overline{PO}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

답 ②

5 두 점 A, C에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발이 각각 E, G이므로 삼각형 AFC의 평면 EFGH 위로의 정사영이 삼각형 EFG이다.



$\overline{AB}=a$라고 하면 삼각형 AFC는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}a$인 정삼각형이므로

$$\triangle AFC=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2}a)^2$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

또 삼각형 EFG는 빗변이 아닌 한 변의 길이가 a인 직각이등변삼각형이므로

$$\triangle EFG=\frac{1}{2}a^2$$

이때 $\triangle EFG=\triangle AFC\times\cos\theta$이므로

$$\cos\theta=\frac{\triangle EFG}{\triangle AFC}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 ②

Level 1 기초 연습

본문 72쪽

1 11 **2** ③ **3** ⑤ **4** ②

1 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 한 평면을 결정한다. 삼각기둥의 꼭짓점 6개 중에서 서로 다른 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

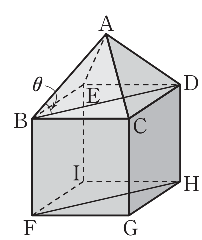
하지만 세 평면 ADEB, BEFC, ADFC에서 각각 서로 다른 세 점을 선택하는 경우는 각각 4가지씩인데 이 4가지가 결정하는 평면은 모두 같은 평면이다.

따라서 주어진 삼각기둥의 각 꼭짓점으로 결정되는 서로 다른 평면의 개수는

$20-3\times3=11$

답 11

2



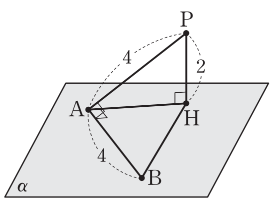
그림과 같은 입체도형에서 $\overline{FH}\,/\!/\,\overline{BD}$이므로 직선 AB와 직선 FH가 이루는 예각의 크기는 직선 AB와 직선 BD가

이루는 예각의 크기와 같다.
즉, $\angle \mathrm{ABD}=\theta$이다.
이때 삼각형 ABD에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}=1$이고, $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{2}$이므로 삼각형 ABD는 $\angle \mathrm{BAD}=\frac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이다.
따라서 $\angle \mathrm{ABD}=\frac{\pi}{4}$이므로

$\cos\theta=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 ③

3

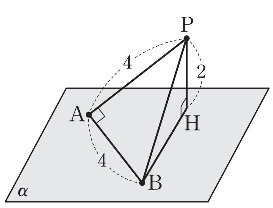


그림과 같이 선분 PH는 평면 α에 수직이므로
$\overline{\mathrm{PH}}\perp\overline{\mathrm{AH}}$
따라서 삼각형 PAH는 각 PHA가 직각인 직각삼각형이므로
$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$
또 $\overline{\mathrm{PA}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{PH}}\perp\alpha$이므로 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{AH}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$
따라서 삼각형 ABH는 각 HAB가 직각인 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2}$
$=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

답 ⑤

다른 풀이



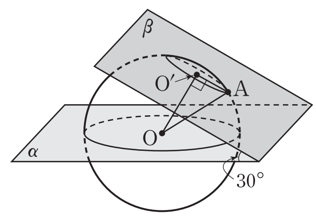
그림과 같이 삼각형 PAB는 각 PAB가 직각인 직각삼각형이므로
$\overline{\mathrm{PB}}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$
또 선분 PH는 평면 α에 수직이므로
$\overline{\mathrm{PH}}\perp\overline{\mathrm{BH}}$
따라서 삼각형 PBH는 각 PHB가 직각인 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-2^2}$
$=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

4 평면 β와 구의 교선은 원이므로 이 원의 반지름의 길이를 r라고 하면 넓이는 πr^2이다.
이 원의 평면 α 위로의 정사영의 넓이가 $2\sqrt{3}\pi$이고 두 평면이 이루는 예각의 크기가 $30°$이므로

$2\sqrt{3}\pi=\pi r^2\times\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi r^2$

에서 $r=2$
그림과 같이 평면 β와 구의 교선인 원의 중심을 O′이라 하고, 원 위의 임의의 점을 A라고 하자.



직선 OO′이 평면 β에 수직이므로
$\overline{\mathrm{OO'}}\perp\overline{\mathrm{O'A}}$
따라서 삼각형 OAO′은 각 OO′A가 직각인 직각삼각형이고, $\overline{\mathrm{OA}}=5$, $\overline{\mathrm{O'A}}=r=2$이므로
$\overline{\mathrm{OO'}}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$
즉, 구의 중심 O와 평면 β 사이의 거리는 $\sqrt{21}$이다.

답 ②

Level 2 기본 연습

본문 73쪽

1 ③ **2** ④ **3** ① **4** 15

1 ㄱ. 직선 l이 평면 β와 한 점 P에서 만난다고 가정하자. 점 P에서 두 평면 α, β의 교선에 내린 수선의 발을 H라고 하면 직선 PH가 평면 α에 수직이므로 직선 PH와 직선 l이 일치한다. 따라서 직선 l이 평면 β에 포함되고 이것은 평면 β가 직선 l을 포함하지 않는다는 가정에 모순이다. 따라서 직선 l이 평면 β와 만나지 않으므로 $l\,/\!/\,\beta$이다. (참)

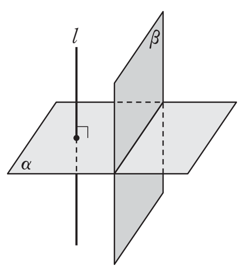
ㄴ. 평면 β와 수직인 직선 m이 평면 α 위에 있으면 직선 l과 수직임이 자명하다. 만일 직선 m이 평면 α 위에 있지 않으면 평면 α와 평행하다. 이때 직선 m을 평면 α에 포함되도록 평행이동한 직선을 m'이라고 하면 $l \perp m'$이므로 $l \perp m$이다. 따라서 평면 β와 수직인 직선 m은 직선 l과 수직이다. (참)

ㄷ. [반례] 두 평면 α, β의 교선은 평면 α 위에 있으므로 직선 l과 수직이다. 하지만 평면 β에 포함되므로 평면 β와 수직이 아니다. (거짓)

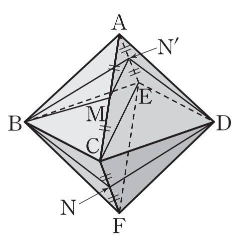
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

참고



2 그림과 같이 선분 AE의 중점을 N′이라고 하자.



이때 $\overline{BN}=\overline{ND}=\overline{DN'}=\overline{N'B}$이므로 사각형 BNDN′은 마름모이다. 따라서

$\overline{BN'} /\!/ \overline{DN}$

또 삼각형 ACE에서 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분의 성질에 의하여

$\overline{MN'}=\frac{1}{2}\overline{CE}$

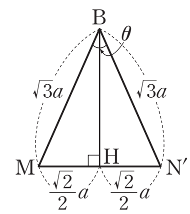
정팔면체의 한 모서리의 길이를 $2a$라고 하면 다음 그림과 같이 삼각형 BMN′은

$\overline{BM}=\overline{BN'}=\sqrt{3}a$,

$\overline{MN'}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}a=\sqrt{2}a$

인 이등변삼각형이고 점 B에서 선분 MN′에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{MH}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$



이때 직선 BM과 직선 DN이 이루는 예각의 크기는 직선 BM과 직선 BN′이 이루는 예각의 크기와 같으므로

$\theta=\angle MBN'$이다.

따라서 $\angle MBH=\frac{\theta}{2}$이고

$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{6}}{6}$이므로

$$\begin{aligned}\cos\theta&=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\\&=1-2\times\frac{1}{6}\\&=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

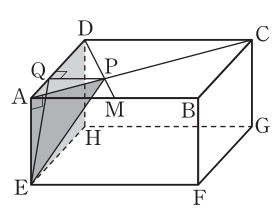
답 ④

참고

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

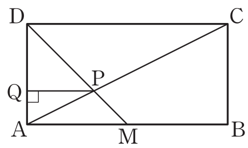
$$\begin{aligned}\cos\theta&=\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\\&=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\\&=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

3 두 평면 AEHD, BFGC가 서로 평행하므로 α는 직선 PE와 평면 AEHD가 이루는 예각의 크기와 같고, β는 평면 AEP와 평면 AEHD가 이루는 예각의 크기와 같다. 그림과 같이 점 P에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 Q라고 하자.



두 평면 ABCD와 AEHD가 수직이므로 직선 PQ는 평면 AEHD에 수직이다. 따라서 선분 PE의 평면 AEHD 위

로의 정사영은 선분 QE이고, 삼각형 AEP의 평면 AEHD 위로의 정사영은 삼각형 AEQ이다.
다음은 직사각형 ABCD를 위에서 본 그림이다.



$\triangle PAM \backsim \triangle PCD$, $\triangle APQ \backsim \triangle ACD$이고
$\overline{AM} : \overline{CD} = 1 : 2$이므로

$\overline{AQ} = \frac{1}{3}\overline{AD} = 1$

$\overline{AP} = \frac{1}{3}\overline{AC}$
$= \frac{1}{3} \times \sqrt{3^2+6^2}$
$= \sqrt{5}$

$\overline{PQ} = \frac{1}{3}\overline{CD} = \frac{1}{3} \times 6 = 2$

따라서

$\overline{PE} = \sqrt{\overline{PA}^2 + \overline{AE}^2}$
$= \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

$\overline{QE} = \sqrt{\overline{AQ}^2 + \overline{AE}^2}$
$= \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

이므로

$\cos\alpha = \frac{\overline{QE}}{\overline{PE}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$

$\cos\beta = \frac{\triangle AEQ}{\triangle AEP}$
$= \frac{\frac{1}{2} \times \overline{AE} \times \overline{AQ}}{\frac{1}{2} \times \overline{AE} \times \overline{AP}}$
$= \frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}}$
$= \frac{1}{\sqrt{5}}$

따라서

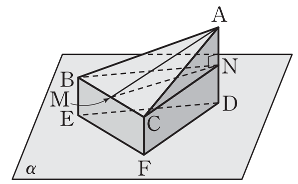
$\cos^2\alpha \times \cos^2\beta = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\right)^2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2$
$= \frac{1}{7}$

답 ①

참고
두 평면 AEP와 AEHD의 교선 AE 위의 점 A에 대하여 $\overline{PA} \perp \overline{AE}$, $\overline{DA} \perp \overline{AE}$이므로 두 평면이 이루는 예각의 크기 β는 각 PAD의 크기와 같다.
한편, 점 P는 선분 AC 위의 점이고 삼각형 ACD는 각 ADC가 직각인 직각삼각형이므로

$\cos\beta = \cos(\angle PAD)$
$= \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$
$= \frac{3}{3\sqrt{5}}$
$= \frac{1}{\sqrt{5}}$

4 그림과 같이 세 점 A, B, C에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하고, 점 M에서 직선 AD에 내린 수선의 발을 N이라고 하면
$\overline{AD} = 2$,
$\overline{BE} = \overline{CF} = 1$,
$\overline{AB} = \overline{AC} = 2+1 = 3$,
$\overline{BC} = 1+1 = 2$,
$\overline{AN} = \overline{ND} = 1$
이고 평면 BCN은 평면 α와 평행하다.



삼각형 ABC는 이등변삼각형이고 점 M은 선분 BC의 중점이므로
$\overline{AM} \perp \overline{BC}$
직각삼각형 ABM에서
$\overline{AB} = 3$, $\overline{BM} = 1$이므로
$\overline{AM} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$
또 직각삼각형 AMN에서
$\overline{AM} = 2\sqrt{2}$, $\overline{AN} = 1$이므로
$\overline{MN} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 1^2}$
$= \sqrt{7}$
이때 평면 BCN이 평면 α와 평행하므로 직선 AM이 평면 α와 이루는 예각의 크기는 직선 AM이 평면 BCN과 이루는 예각의 크기와 같고, 선분 AM의 평면 BCN 위로의 정사영이 선분 NM이므로

$\cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{NM}}}{\overline{\mathrm{AM}}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

따라서 $\cos^2\theta=\dfrac{7}{8}$ 이므로

$p+q=8+7$

$=15$

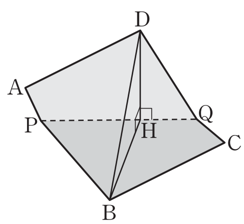
답 15

Level 3 실력 완성

본문 74쪽

1 ③ **2** ② **3** ②

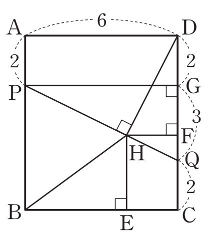
1



위의 그림과 같이 점 D에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라고 하면 두 평면 APQD, BCQP가 수직이므로 직선 DH는 평면 BCQP에 수직이다.

따라서 $\overline{\mathrm{DH}}\perp\overline{\mathrm{BH}}$이므로 삼각형 DBH는 각 DHB가 직각인 직각삼각형이다.

다음 그림과 같이 접어 올린 부분을 다시 편평하게 펼친 후 점 H에서 두 선분 BC, CD에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하고, 점 P에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 G라고 하자.



직각삼각형 PGQ에서

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{6^2+3^2}$

$=3\sqrt{5}$

$\triangle\mathrm{PQG}\backsim\triangle\mathrm{DQH}$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{DQ}}=\overline{\mathrm{PG}}:\overline{\mathrm{DH}}$에서

$\overline{\mathrm{DH}}=\dfrac{\overline{\mathrm{DQ}}\times\overline{\mathrm{PG}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}$

$=\dfrac{5\times6}{3\sqrt{5}}$

$=2\sqrt{5}$

직각삼각형 DHQ에서

$\overline{\mathrm{QH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{DQ}}^2-\overline{\mathrm{DH}}^2}$

$=\sqrt{5^2-(2\sqrt{5})^2}$

$=\sqrt{5}$

$\triangle\mathrm{DQH}\backsim\triangle\mathrm{DHF}$이므로

$\overline{\mathrm{DQ}}:\overline{\mathrm{DH}}=\overline{\mathrm{QH}}:\overline{\mathrm{HF}}$에서

$\overline{\mathrm{HF}}=\dfrac{\overline{\mathrm{DH}}\times\overline{\mathrm{QH}}}{\overline{\mathrm{DQ}}}$

$=\dfrac{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{5}$

$=2$

직각삼각형 DHF에서

$\overline{\mathrm{DF}}=\sqrt{\overline{\mathrm{DH}}^2-\overline{\mathrm{HF}}^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}$

$=4$

따라서

$\overline{\mathrm{HE}}=\overline{\mathrm{FC}}$

$=\overline{\mathrm{DC}}-\overline{\mathrm{DF}}$

$=7-4$

$=3$

$\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{EC}}$

$=\overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{HF}}$

$=6-2$

$=4$

이므로

직각삼각형 BEH에서

$\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{3^2+4^2}$

$=5$

이때 접은 도형에서 삼각형 DBH는 각 DHB가 직각인 직각삼각형이므로

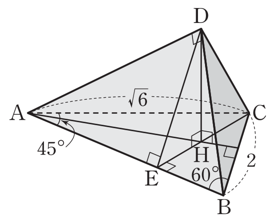
$\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{\overline{\mathrm{DH}}^2+\overline{\mathrm{BH}}^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+5^2}$

$=3\sqrt{5}$

답 ③

2 그림과 같이 직선 CH와 선분 AB의 교점을 E라고 하자.



$\overline{HE}\perp\overline{AB}$이고 $\overline{DH}\perp$(평면 ABC)이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{DE}\perp\overline{AB}$

한편, 삼각형 ABC에서

$$\overline{AE}=\overline{AC}\times\cos 45^\circ=\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{3}$$

$$\overline{BE}=\overline{BC}\times\cos 60^\circ=2\times\frac{1}{2}=1$$

이고, 직각삼각형 DAB에서

$\triangle ADE \backsim \triangle DBE$이므로

$\overline{AE}:\overline{DE}=\overline{DE}:\overline{BE}$

$$\overline{DE}^2=\overline{AE}\times\overline{BE}=\sqrt{3}\times 1=\sqrt{3}$$

또 $\angle HAE=90^\circ-\angle ABC=30^\circ$이므로

$$\overline{EH}=\overline{AE}\times\tan 30^\circ=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=1$$

따라서

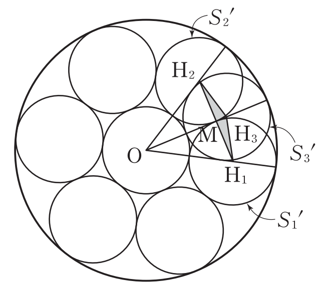
$$d^2=\overline{DH}^2=\overline{DE}^2-\overline{EH}^2=\sqrt{3}-1$$

답 ②

3 세 구 S_1, S_2, S_3이 서로 외접하고 있으므로 삼각형 $O_1O_2O_3$은 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

$$\triangle O_1O_2O_3=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$$

그림과 같이 원기둥의 밑면인 원의 중심을 O라 하고, 세 구 S_1, S_2, S_3의 원기둥의 밑면 위로의 정사영을 각각 S_1', S_2', S_3', 세 점 O_1, O_2, O_3에서 원기둥의 밑면에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2, H_3, 선분 H_1H_2의 중점을 M이라고 하자.



두 원 S_1', S_2'이 서로 외접하므로

$\overline{H_1H_2}=2$

원 S_3'이 반지름의 길이가 1인 원에 외접하고 반지름의 길이가 3인 원에 내접하므로

$\overline{OH_3}=2$

또 삼각형 OH_1H_2는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로

$\overline{OM}=\sqrt{3}$, $\overline{MH_3}=2-\sqrt{3}$

$$\triangle H_1H_2H_3=\frac{1}{2}\times 2\times(2-\sqrt{3})=2-\sqrt{3}$$

이때 삼각형 $H_1H_2H_3$은 삼각형 $O_1O_2O_3$의 반지름의 길이가 3인 원기둥의 밑면 위로의 정사영이므로

$$\cos\theta=\frac{\triangle H_1H_2H_3}{\triangle O_1O_2O_3}=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$$

답 ②

07 공간좌표

유제 본문 77~83쪽

1 ⑤ **2** ② **3** ② **4** ④ **5** ①
6 ④ **7** 17 **8** ⑤

1 점 P의 좌표는 P(4, 2, 2)이므로
$a=4$
점 Q의 좌표는 Q(2, 4, 2)이므로
$b=4$
점 R의 좌표는 R(2, 2, 4)이므로
$c=4$
따라서 $a+b+c=4+4+4=12$

답 ⑤

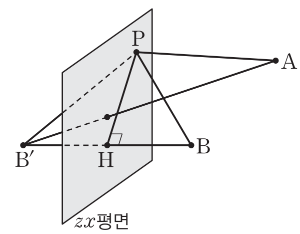
2 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라고 하면 xy평면에 대한 대칭점 Q의 좌표는 $Q(x,\ y,\ -z)$, z축에 대한 대칭점 R의 좌표는 $R(-x,\ -y,\ z)$이므로 두 점 Q, R는 원점에 대하여 대칭이다.
따라서 $Q(a+b,\ a-b,\ c)$, $R(2a-2,\ 2b,\ c-4)$에서
$a+b=-2a+2$ …… ㉠
$a-b=-2b$ …… ㉡
$c=-c+4$ …… ㉢
㉠, ㉡에서 $a=1$, $b=-1$
㉢에서 $c=2$
따라서 $a+b+c=1+(-1)+2=2$

답 ②

3 두 점 $A(1,\ -3,\ 2)$, $B(-2,\ 1,\ 4)$에서 같은 거리에 있는 z축 위의 점 P의 좌표를 $(0,\ 0,\ c)$라고 하자.
$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로
$(0-1)^2+\{0-(-3)\}^2+(c-2)^2$
$=\{0-(-2)\}^2+(0-1)^2+(c-4)^2$
$c^2-4c+14=c^2-8c+21$
$4c=7$
$c=\frac{7}{4}$
따라서 점 P의 좌표가 $P\left(0,\ 0,\ \frac{7}{4}\right)$이므로 선분 OP의 길이는
$\overline{OP}=\frac{7}{4}$

답 ②

4 그림과 같이 점 B의 zx평면에 대한 대칭점을 B′이라 하고 선분 BB′과 zx평면의 교점을 H라고 하자.



zx평면 위의 임의의 점 P에 대하여
$\triangle PBH \equiv \triangle PB'H$
이므로
$\overline{BP}=\overline{B'P}$
따라서
$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P} \geq \overline{AB'}$
이므로 점 P가 선분 AB′과 zx평면의 교점일 때 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소가 되고 최솟값은 $\overline{AB'}$이다.
한편, 점 B의 zx평면에 대한 대칭점 B′의 좌표는
$B'(2,\ -2,\ 1)$
이므로
$\overline{AB'}=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(-2-3)^2+(1-a)^2}$
$=\sqrt{a^2-2a+35}$
이때 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값, 즉 $\overline{AB'}$의 값이 $\sqrt{43}$이므로
$a^2-2a+35=43$, $a^2-2a-8=0$
$(a-4)(a+2)=0$
$a>0$이므로 $a=4$

답 ④

5 두 점 $A(1,\ 3,\ 5)$, $B(-2,\ -3,\ 2)$에 대하여
선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는
$$P\left(\frac{2\times(-2)+1\times1}{2+1},\ \frac{2\times(-3)+1\times3}{2+1},\ \frac{2\times2+1\times5}{2+1}\right)$$
즉, $P(-1,\ -1,\ 3)$
선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점 Q의 좌표는
$$Q\left(\frac{1\times(-2)-2\times1}{1-2},\ \frac{1\times(-3)-2\times3}{1-2},\ \frac{1\times2-2\times5}{1-2}\right)$$
즉, $Q(4,\ 9,\ 8)$
따라서 선분 PQ의 중점 M의 좌표는
$$M\left(\frac{-1+4}{2},\ \frac{-1+9}{2},\ \frac{3+8}{2}\right)$$

즉, $M\left(\frac{3}{2}, 4, \frac{11}{2}\right)$

따라서 $a+b+c=\frac{3}{2}+4+\frac{11}{2}=11$

답 ①

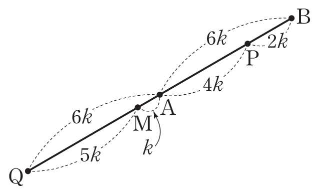
다른 풀이

$\overline{AB}=6k$라고 하면

$\overline{AP}=4k$, $\overline{QA}=6k$

이므로

$\overline{QM}=5k$, $\overline{MA}=k$



따라서 점 M은 선분 AB를 1 : 7로 외분하는 점이므로 점 M의 좌표는

$M\left(\frac{1\times(-2)-7\times1}{1-7}, \frac{1\times(-3)-7\times3}{1-7}, \frac{1\times2-7\times5}{1-7}\right)$

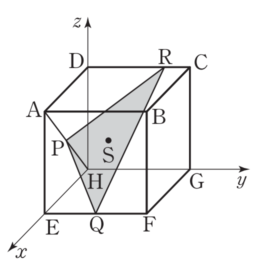
즉, $M\left(\frac{3}{2}, 4, \frac{11}{2}\right)$

따라서 $a+b+c=\frac{3}{2}+4+\frac{11}{2}=11$

6 그림과 같이 정육면체 ABCD−EFGH를 꼭짓점 H가 좌표공간의 원점에 있고 세 점 E, G, D의 좌표가 각각

E(4, 0, 0), G(0, 4, 0), D(0, 0, 4)

가 되도록 좌표공간에 놓는다.



두 점 A, H의 좌표가 각각

A(4, 0, 4), H(0, 0, 0)

이므로 선분 AH의 중점 P의 좌표는

P(2, 0, 2) …… ㉠

두 점 E, F의 좌표가 각각

E(4, 0, 0), F(4, 4, 0)

이므로 선분 EF의 중점 Q의 좌표는

Q(4, 2, 0) …… ㉡

두 점 C, D의 좌표가 각각

C(0, 4, 4), D(0, 0, 4)이므로

선분 CD를 1 : 3으로 내분하는 점 R의 좌표는

$R\left(\frac{1\times0+3\times0}{1+3}, \frac{1\times0+3\times4}{1+3}, \frac{1\times4+3\times4}{1+3}\right)$

즉, R(0, 3, 4) …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 삼각형 PQR의 무게중심 S의 좌표는

$S\left(\frac{2+4+0}{3}, \frac{0+2+3}{3}, \frac{2+0+4}{3}\right)$

즉, $S\left(2, \frac{5}{3}, 2\right)$

이때 점 B의 좌표는 B(4, 4, 4)이므로

$\overline{BS}=\sqrt{(2-4)^2+\left(\frac{5}{3}-4\right)^2+(2-4)^2}$

$=\frac{11}{3}$

답 ④

7 두 점 P(1, −2, −4), Q(−3, −4, 0)을 지름의 양 끝점으로 하는 구의 중심을 R라고 하면 점 R는 선분 PQ의 중점이므로

$R\left(\frac{1+(-3)}{2}, \frac{-2+(-4)}{2}, \frac{-4+0}{2}\right)$

즉, R(−1, −3, −2)

구의 반지름의 길이는

$\overline{PR}=\sqrt{(-1-1)^2+\{-3-(-2)\}^2+\{-2-(-4)\}^2}$

$=\sqrt{4+1+4}$

$=3$

따라서 구의 방정식은

$(x+1)^2+(y+3)^2+(z+2)^2=9$

즉, $x^2+y^2+z^2+2x+6y+4z+5=0$

따라서 $A=2$, $B=6$, $C=4$, $D=5$이므로

$A+B+C+D=2+6+4+5=17$

답 17

8 $x^2+y^2+z^2-4x+6y+2z+k=0$에서

$(x-2)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=14-k$

이고, 이 구가 zx평면에 접하므로 중심의 y좌표의 절댓값이 반지름의 길이와 같아야 한다.

즉, $|-3|=\sqrt{14-k}$

$9=14-k$

$k=5$

답 ⑤

Level 1 기초 연습
본문 84쪽

1 ② **2** ③ **3** ⑤ **4** 56

1 삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\sqrt{(0-4)^2+(b-3)^2+\{0-(-2)\}^2}$
$=\sqrt{(b-3)^2+20}$

$\overline{BC}=\sqrt{\{0-(-1)\}^2+(b-2)^2+(0-1)^2}$
$=\sqrt{(b-2)^2+2}$

$\overline{AC}=\overline{BC}$에서

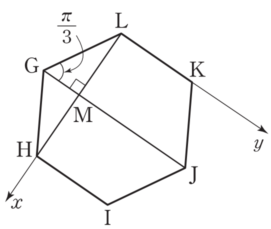
$\sqrt{(b-3)^2+20}=\sqrt{(b-2)^2+2}$

$b^2-6b+29=b^2-4b+6$

$b=\frac{23}{2}$

답 ②

2 그림과 같이 xy평면 위에 놓인 정육각기둥의 밑면에서 선분 LH와 선분 GJ의 교점을 M이라고 하자.



삼각형 LGM은 각 GML이 직각이고 $\angle LGM=\frac{\pi}{3}$인 직각삼각형이므로

$\overline{LM}=\overline{LG}\times\sin\frac{\pi}{3}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\overline{GM}=\overline{LG}\times\cos\frac{\pi}{3}=2\times\frac{1}{2}=1$

또 $\overline{GJ}=4$이므로

$\overline{MJ}=\overline{GJ}-\overline{GM}=4-1=3$

따라서 xy평면 위의 점 J의 좌표는

J$(\sqrt{3}, 3, 0)$

한편, 점 D에서 xy평면에 내린 수선의 발이 점 J이고 $\overline{DJ}=2$이므로 점 D의 좌표는

D$(\sqrt{3}, 3, 2)$

따라서

$a^2+b^2+c^2=(\sqrt{3})^2+3^2+2^2=16$

답 ③

3 두 점 A$(4, 2, -3)$, B(a, b, c)에 대하여 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점을 P라고 하면 점 P가 x축 위에 있으므로 점 P의 y좌표와 z좌표가 모두 0이다. 따라서

$\frac{2\times b+3\times 2}{2+3}=0$에서

$b=-3$

$\frac{2\times c+3\times(-3)}{2+3}=0$에서

$c=\frac{9}{2}$

또 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점을 Q라고 하면 점 Q가 yz평면 위에 있으므로 점 Q의 x좌표가 0이다. 따라서

$\frac{3\times a-2\times 4}{3-2}=0$에서

$a=\frac{8}{3}$

따라서 $a+b+c=\frac{8}{3}+(-3)+\frac{9}{2}=\frac{25}{6}$

답 ⑤

4 좌표공간에서 yz평면에 접하는 구의 반지름의 길이는 중심의 x좌표의 절댓값과 같다. 따라서 중심의 좌표가 $(-4, 1, 1)$이고 yz평면에 접하는 구의 방정식은

$(x+4)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=16$ …… ㉠

㉠에 $y=0$, $z=0$을 대입하면

$(x+4)^2=14$

$x=-4\pm\sqrt{14}$

따라서 주어진 구가 x축과 만나는 두 점의 좌표는 각각

$(-4+\sqrt{14}, 0, 0)$, $(-4-\sqrt{14}, 0, 0)$

이므로 두 점 사이의 거리 d는

$d=|(-4+\sqrt{14})-(-4-\sqrt{14})|=2\sqrt{14}$

$d^2=(2\sqrt{14})^2=56$

답 56

Level 2 기본 연습
본문 85쪽

1 ④ **2** ⑤ **3** ④ **4** 67

1 좌표공간에서 점 A가 원점 O에 오도록 선분 AB를 평행이동하였을 때 점 B가 옮겨진 점을 C라 하고 점 C의 좌표

를 C(a, b, c)라고 하자.

선분 AB의 각 평면 위로의 정사영의 길이는 선분 OC의 각 평면 위로의 정사영의 길이와 같고, 점 C에서 xy평면, yz평면, zx평면에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R라고 하면 이 세 점의 좌표는 각각

P(a, b, 0), Q(0, b, c), R(a, 0, c)

이다.

선분 OC의 xy평면, yz평면, zx평면 위로의 정사영은 각각 선분 OP, 선분 OQ, 선분 OR이고, 각 정사영의 길이는 다음과 같다.

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{a^2+b^2+0^2}=\sqrt{5}$에서 $a^2+b^2=5$ ...... ㉠

$\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{0^2+b^2+c^2}=\sqrt{7}$에서 $b^2+c^2=7$ ...... ㉡

$\overline{\mathrm{OR}}=\sqrt{a^2+0^2+c^2}=2$에서 $c^2+a^2=4$ ...... ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $a^2+b^2+c^2=8$

따라서

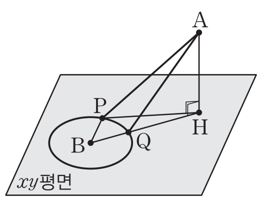
$\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=2\sqrt{2}$

이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{OC}}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$

답 ④

2 그림과 같이 점 A에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 BH와 원의 교점을 Q라고 하자.



주어진 원 위의 임의의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AH}}\perp\overline{\mathrm{PH}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{PH}}^2$

이때

$\overline{\mathrm{PH}}\geq\overline{\mathrm{BH}}-\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{BH}}-\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{QH}}$

이다. 한편, 점 B(2, 2, 0)을 중심으로 하고 x축과 y축에 모두 접하는 원의 반지름의 길이는 2이고 점 H의 좌표는 H(-2, 5, 0)이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{QH}}&=\overline{\mathrm{BH}}-2\\&=\sqrt{(-2-2)^2+(5-2)^2+(0-0)^2}-2\\&=3\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}^2&=\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{PH}}^2\\&\geq\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{QH}}^2\\&=4^2+3^2=25\end{aligned}$$

이므로 선분 AP의 길이의 최솟값은 5이다.

답 ⑤

3 점 P는 선분 AB 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=m:n\,(m>0,\ n>0)$

이라고 하면 점 P는 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점이다.

따라서 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}\left(\dfrac{-3m+2n}{m+n},\ \dfrac{4m+3n}{m+n},\ \dfrac{2m-n}{m+n}\right)$

이때 점 P가 yz평면 위에 있으므로 x좌표가 0이다.

즉, $\dfrac{-3m+2n}{m+n}=0$이므로

$3m=2n$

$m:n=2:3$

즉, $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PB}}=2:3$이므로 점 P는 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점이다. 따라서 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}\left(\dfrac{2\times(-3)+3\times2}{2+3},\ \dfrac{2\times4+3\times3}{2+3},\ \dfrac{2\times2+3\times(-1)}{2+3}\right)$

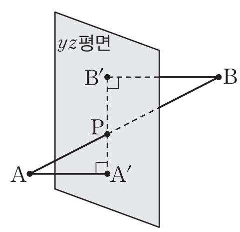
즉, $\mathrm{P}\left(0,\ \dfrac{17}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$

따라서 $a+b+c=0+\dfrac{17}{5}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{18}{5}$

답 ④

다른 풀이 1

점 A의 x좌표는 0보다 크고 점 B의 x좌표는 0보다 작으므로 두 점 A, B는 서로 yz평면의 반대쪽에 있다. 그림과 같이 두 점 A, B에서 yz평면에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라고 하자.



두 직선 AA′, BB′이 서로 평행하므로 네 점 A, A′, B, B′은 한 평면을 결정한다. 이 평면을 α라고 하자.

선분 AB가 평면 α 위에 있으므로 점 P도 평면 α 위에 있다.

평면 α 위의 두 삼각형 PAA′과 PBB′에 대하여

$\overline{\mathrm{AA'}}\perp\overline{\mathrm{A'P}}$, $\overline{\mathrm{BB'}}\perp\overline{\mathrm{B'P}}$이므로

$\angle\mathrm{AA'P}=\angle\mathrm{BB'P}=\dfrac{\pi}{2}$ ...... ㉠

$\overline{AA'} /\!/ \overline{BB'}$이므로

$\angle PAA' = \angle PBB'$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\triangle PAA' \backsim \triangle PBB'$

이므로

$\overline{PA} : \overline{PB} = \overline{AA'} : \overline{BB'}$

이때 두 점 A′, B′의 좌표는 각각

$A'(0, 3, -1)$, $B'(0, 4, 2)$

이므로

$\overline{AA'} = 2$, $\overline{BB'} = 3$

즉, $\overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 3$이므로 점 P는 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점이다. 따라서 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{2\times(-3)+3\times2}{2+3}, \frac{2\times4+3\times3}{2+3}, \frac{2\times2+3\times(-1)}{2+3}\right)$$

즉, $P\left(0, \frac{17}{5}, \frac{1}{5}\right)$

따라서 $a+b+c = 0+\frac{17}{5}+\frac{1}{5} = \frac{18}{5}$

다른 풀이 2

두 점 $A(2, 3, -1)$, $B(-3, 4, 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{-3}$ …… ㉠

이고 yz평면의 방정식은

$x=0$ …… ㉡

이므로 ㉡을 ㉠에 대입하면

$-\frac{2}{5} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{-3}$

$-\frac{2}{5} = \frac{y-3}{-1}$에서 $y = \frac{17}{5}$

$-\frac{2}{5} = \frac{z+1}{-3}$에서 $z = \frac{1}{5}$

따라서 점 P의 좌표가 $P\left(0, \frac{17}{5}, \frac{1}{5}\right)$이므로

$a+b+c = 0+\frac{17}{5}+\frac{1}{5} = \frac{18}{5}$

4 $S_1 : x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+1=0$에서

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=5$

$S_2 : x^2+y^2+z^2-4x-8y-6z+25=0$에서

$(x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=4$

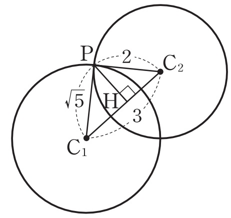
따라서 두 구 S_1, S_2의 중심을 각각 C_1, C_2라고 하면 두 점 C_1, C_2의 좌표는 각각

$C_1(1, 2, 1)$, $C_2(2, 4, 3)$

이고, 두 구의 중심 사이의 거리는

$\overline{C_1C_2} = \sqrt{(2-1)^2+(4-2)^2+(3-1)^2} = 3$

한편, 두 구 S_1, S_2의 반지름의 길이는 각각 $\sqrt{5}$, 2이므로 두 구의 중심을 지나는 한 평면으로 자른 단면은 다음 그림과 같다.



두 구의 교선 위의 한 점을 P라고 하면

$\overline{PC_1}^2 + \overline{PC_2}^2 = \overline{C_1C_2}^2$

이므로 삼각형 PC_1C_2는 각 C_1PC_2가 직각인 직각삼각형이고, 점 P에서 선분 C_1C_2에 내린 수선의 발을 H라고 하면

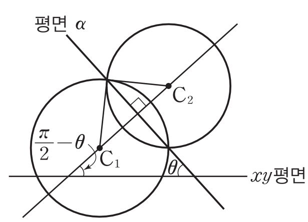
$\overline{PC_1} \times \overline{PC_2} = \overline{PH} \times \overline{C_1C_2}$에서

$$\overline{PH} = \frac{\overline{PC_1}\times\overline{PC_2}}{\overline{C_1C_2}} = \frac{\sqrt{5}\times2}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

이때 선분 PH의 길이는 두 구의 교선인 원의 반지름의 길이와 같으므로 두 구가 만나서 생기는 도형인 원의 넓이를 S라고 하면

$$S = \left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2\pi = \frac{20}{9}\pi$$

한편, 다음 그림과 같이 두 구가 만나서 생기는 원을 포함하는 평면을 α라고 하면 평면 α는 직선 C_1C_2와 수직이므로 평면 α와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면 직선 C_1C_2와 xy평면이 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta$이다.



두 점 C_1, C_2의 xy평면 위로의 정사영을 각각 D_1, D_2라고 하면 두 점 D_1, D_2의 좌표는 각각

$D_1(1, 2, 0)$, $D_2(2, 4, 0)$

이다. 따라서

$\overline{C_1C_2} = 3$, $\overline{D_1D_2} = \sqrt{(2-1)^2+(4-2)^2+0^2} = \sqrt{5}$이므로

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{\overline{D_1D_2}}{\overline{C_1C_2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

즉, $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$이므로

$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$

따라서 두 구가 만나서 생기는 원의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는

$S\cos\theta=\dfrac{20}{9}\pi\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{40}{27}\pi$

따라서 $p+q=27+40=67$

답 67

참고

두 구

$x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+1=0$ …… ㉠

$x^2+y^2+z^2-4x-8y-6z+25=0$ …… ㉡

이 만나서 생기는 원을 포함하는 평면 α의 방정식은

㉠−㉡에서

$x+2y+2z=12$

따라서 평면 α의 법선벡터는 $(1, 2, 2)$이고 xy평면, 즉 평면 $z=0$의 법선벡터는 $(0, 0, 1)$이므로 평면 α와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면

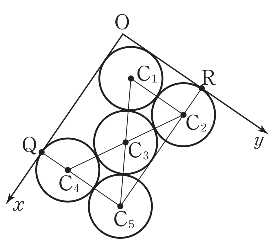
$$\cos\theta=\frac{|1\times0+2\times0+2\times1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\times\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{2}{3}$$

Level 3 실력 완성

본문 86쪽

1 ① **2** ③ **3** ② **4** 150

1 그림과 같이 xy평면에 놓인 5개의 원기둥의 밑면의 중심을 각각 C_1, C_2, C_3, C_4, C_5라 하고, 중심이 C_4인 원과 x축의 교점을 Q, 중심이 C_2인 원과 y축의 교점을 R라고 하자.



두 삼각형 $C_1C_2C_3$, $C_3C_4C_5$가 모두 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로

$\overline{C_2C_5}=2\sqrt{3}$

이고, $\overline{C_2R}=1$이므로 점 C_5의 x좌표는 $2\sqrt{3}+1$이다.

또 $\overline{C_5Q}=3$이므로 점 C_5의 y좌표는 3이다.

즉, 점 C_5의 좌표는

$C_5(2\sqrt{3}+1, 3, 0)$

이때 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발이 C_5이고

$\overline{PC_5}=2$이므로 점 P의 좌표는

$P(2\sqrt{3}+1, 3, 2)$

따라서 $a=2\sqrt{3}+1$, $b=3$, $c=2$이므로

$(a-b+c)^2=(2\sqrt{3}+1-3+2)^2=12$

답 ①

2 두 점 A, B에서 같은 거리에 있는 xy평면 위의 점을 Q라 하고 점 Q의 좌표를 $Q(a, b, 0)$이라고 하자.

$\overline{AQ}=\overline{BQ}$, 즉 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이면

$(a-2)^2+(b-3)^2+4=(a-3)^2+(b-4)^2+16$

$a^2-4a+b^2-6b+17=a^2-6a+b^2-8b+41$

$2a+2b=24$

$a+b=12$

따라서 점 Q의 좌표를 $Q(a, 12-a, 0)$이라고 하면

$\overline{CQ}^2=\{a-(-2)\}^2+\{(12-a)-2\}^2+(0-1)^2$

$=2a^2-16a+105$

$=2(a-4)^2+73$

이므로 $a=4$일 때 선분 CQ의 길이가 최소가 된다.

즉, 점 P의 좌표는 $P(4, 8, 0)$이므로

$\overline{OP}=\sqrt{4^2+8^2+0^2}=4\sqrt{5}$

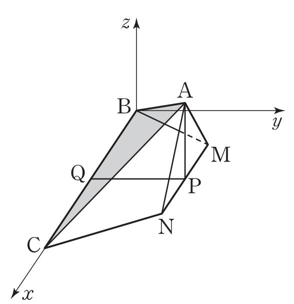
답 ③

참고

(1) 좌표공간의 두 점 A, B에서 같은 거리에 있는 xy평면 위의 점들의 집합은 선분 AB의 중점을 지나고 직선 AB에 수직인 평면과 xy평면의 교선이다.

(2) 공간의 직선 l 위의 점 중에서 직선 l 위에 있지 않은 점 C에서의 거리가 최소인 점은 점 C에서 직선 l에 내린 수선의 발이다.

3



위의 그림과 같이 두 점 B, C의 좌표가 각각

$B(0,0,0)$, $C(4,0,0)$

이 되고 사각형 BCNM이 xy평면 위에 있도록 주어진 [그림 2]의 도형을 좌표공간에 놓자.

선분 MN의 중점을 P, 선분 BC의 중점을 Q라고 하면

$\overline{PQ}\perp\overline{BC}$, $\overline{AP}\perp(xy\text{평면})$

이고

$\overline{BQ}=2$, $\overline{PQ}=\sqrt{3}$, $\overline{AP}=\sqrt{3}$

이므로 점 A의 좌표는

$A(2, \sqrt{3}, \sqrt{3})$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$G\left(\frac{2+0+4}{3}, \frac{\sqrt{3}+0+0}{3}, \frac{\sqrt{3}+0+0}{3}\right)$$

즉, $G\left(2, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

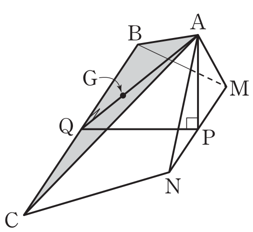
이때 점 B는 좌표공간의 원점이므로

$$\overline{BG}=\sqrt{2^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$
$$=\sqrt{4+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$$
$$=\frac{\sqrt{42}}{3}$$

답 ②

다른 풀이

다음 그림과 같이 선분 MN의 중점을 P, 선분 BC의 중점을 Q라고 하자.



선분 AP가 평면 BCNM에 수직이므로

$\overline{AP}\perp\overline{PQ}$

이때 $\overline{AP}=\overline{PQ}=\sqrt{3}$ 이므로

$\overline{AQ}=\sqrt{6}$

삼각형 ABC의 무게중심 G는 선분 AQ를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\overline{GQ}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

또 삼각형 BQG에서 $\angle BQG=90°$이고 $\overline{BQ}=2$이므로

$$\overline{BG}=\sqrt{2^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{42}}{3}$$

4 구 $S: x^2+y^2+z^2-6x-2y-2az+b=0$이 점 $(-1, 1, 1)$을 지나므로

$1+1+1+6-2-2a+b=0$

$b=2a-7$

따라서 구 S의 방정식은

$(x-3)^2+(y-1)^2+(z-a)^2=a^2-b+10$

$(x-3)^2+(y-1)^2+(z-a)^2=a^2-2a+17$ …… ㉠

방정식 ㉠에 $x=0$을 대입하면

$(y-1)^2+(z-a)^2=a^2-2a+8$ …… ㉡

방정식 ㉠에 $y=0$을 대입하면

$(x-3)^2+(z-a)^2=a^2-2a+16$ …… ㉢

방정식 ㉠에 $z=0$을 대입하면

$(x-3)^2+(y-1)^2=-2a+17$ …… ㉣

㉡에서 모든 자연수 a에 대하여

$a^2-2a+8=(a-1)^2+7>0$

㉢에서 모든 자연수 a에 대하여

$a^2-2a+16=(a-1)^2+15>0$

따라서 구 S가 조건 (나)를 만족하려면 ㉣에서

$-2a+17<0$

이어야 한다.

$a>\frac{17}{2}$

이때 구 S가 yz평면, zx평면과 각각 만나서 생기는 두 원의 넓이의 합을 $f(a)$라고 하면

$$f(a)=(a^2-2a+8)\pi+(a^2-2a+16)\pi$$
$$=(2a^2-4a+24)\pi$$
$$=\{2(a-1)^2+22\}\pi\ \left(\text{단, } a>\frac{17}{2}\right)$$

이고, a는 자연수이므로 $f(a)$는 $a=9$일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 $f(9)=(2\times 8^2+22)\pi=150\pi$

이므로 k의 최솟값은 150이다.

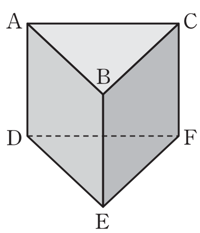
답 150

08 공간벡터

유제 본문 89~93쪽

1 ③ **2** 6 **3** ③ **4** ④ **5** 27
6 ③

1 크기가 1인 벡터는 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$의 8개이다.
또한 크기가 $\sqrt{2}$인 벡터는
정사각형 ADEB에서 $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$의 4개,
정사각형 BEFC에서 $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{EC}$의 4개,
정사각형 ADFC에서 $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$의 4개
이므로 총 12개이다.
따라서 구하는 서로 다른 벡터의 개수는 $8+12=20$이다.

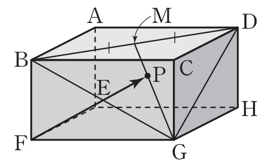


답 ③

2 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$
$=-2\vec{a}+4\vec{b}-(\vec{a}+5\vec{b})$
$=-3\vec{a}-\vec{b}$
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$
$=4\vec{a}+k\vec{b}-(\vec{a}+5\vec{b})$
$=3\vec{a}+(k-5)\vec{b}$
세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로 $\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 t가 존재한다.
$3\vec{a}+(k-5)\vec{b}=t(-3\vec{a}-\vec{b})$
$3=-3t$, $k-5=-t$
따라서 $t=-1$, $k=6$

답 6

3 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$이고
선분 BD의 중점을 M이라고 하면
$$\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{2}$$



또 삼각형 BGD의 무게중심 P는 선분 GM을 $2:1$로 내분하는 점이므로
$$\overrightarrow{AP}=\frac{2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AG}}{2+1}$$
$$=\frac{2\times\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{2}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})}{3}$$
$$=\frac{2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}}{3}$$
$$\overrightarrow{FP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AF}$$
$$=\frac{2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}}{3}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE})$$
$$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$$
따라서 $l=-\frac{1}{3}$, $m=\frac{2}{3}$, $n=-\frac{2}{3}$이므로
$$l+m+n=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)$$
$$=-\frac{1}{3}$$

답 ③

다른 풀이

$$\overrightarrow{FP}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{FD})$$
$$=\frac{1}{3}\{(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF})+(\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AF})+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AF})\}$$
$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AG}-3\overrightarrow{AF})$$
$$=\frac{1}{3}\{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})-3(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE})\}$$
$$=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$$
따라서 $l=-\frac{1}{3}$, $m=\frac{2}{3}$, $n=-\frac{2}{3}$이므로
$$l+m+n=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)$$
$$=-\frac{1}{3}$$

4 $\vec{a}=(1, 0, -3)$이므로
$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+0^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$

$2\vec{a}+\vec{b}=2(1, 0, -3)+(2, -5, 3)$

$\quad\quad=(4, -5, -3)$

이므로

$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{4^2+(-5)^2+(-3)^2}=5\sqrt{2}$

$$\left|\frac{1}{|\vec{a}|}(2\vec{a}+\vec{b})\right|=\frac{1}{|\vec{a}|}|2\vec{a}+\vec{b}|$$

$$=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{10}}=\sqrt{5}$$

답 ④

5 $\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$\vec{a}+\vec{b}=(3, 2, -1)+(4, -1, -3)=(7, 1, -4)$

이므로

$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=(3, 2, -1)\cdot(7, 1, -4)$

$=3\times7+2\times1+(-1)\times(-4)$

$=27$

답 27

다른 풀이

$\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=(3, 2, -1)\cdot(3, 2, -1)+(3, 2, -1)\cdot(4, -1, -3)$

$=14+13$

$=27$

6 $\overrightarrow{OA}=(3, 0, a)$, $\overrightarrow{OB}=(2, \sqrt{5}, 0)$, $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$이므로

$$\cos(\angle AOB)=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$$

$$=\frac{3\times2+0\times\sqrt{5}+a\times0}{\sqrt{3^2+0^2+a^2}\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2+0^2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{9+a^2}}=\frac{1}{2}$$

에서 $\sqrt{9+a^2}=4$

양변을 제곱하면

$9+a^2=16$, $a^2=7$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{7}$

답 ③

Level 1 기초 연습

본문 94쪽

1 ④ **2** ⑤ **3** 32 **4** ④ **5** ③

1 $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{BG}$

$\quad=\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BG}$

$\quad=\overrightarrow{GF}$

벡터 $\overrightarrow{GF}$와 서로 같은 벡터는 $\overrightarrow{DA}$이다.

답 ④

2 세 점 $A(a, -2, 2)$, $B(3, b, 5)$, $C(-1, 0, 1)$이 한 직선 위에 있으므로 $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재한다. 점 O가 좌표공간의 원점일 때,

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(3, b, 5)-(a, -2, 2)$

$=(-a+3, b+2, 3)$ …… ㉠

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$

$=(-1, 0, 1)-(a, -2, 2)$

$=(-a-1, 2, -1)$

이므로

$(-a+3, b+2, 3)=k(-a-1, 2, -1)$

즉, $-a+3=k(-a-1)$, $b+2=2k$, $3=-k$

이므로 $k=-3$, $a=0$, $b=-8$

㉠에 $a=0$, $b=-8$을 대입하면

$\overrightarrow{AB}=(3, -6, 3)$

따라서 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+(-6)^2+3^2}=3\sqrt{6}$

답 ⑤

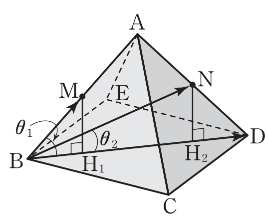
3 정사각형 BCDE에서

$|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

두 점 M, N에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라고 하면

$\overline{BH_1}=\frac{1}{4}|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{2}$,

$\overline{BH_2}=\frac{3}{4}|\overrightarrow{BD}|=3\sqrt{2}$



두 벡터 $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BN}$이 벡터 $\overrightarrow{BD}$와 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라고 하면

$\overrightarrow{BD}\cdot(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN})$

$=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BN}$

$=|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{BM}|\cos\theta_1+|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{BN}|\cos\theta_2$

$= |\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{BH_1}| + |\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{BH_2}|$

$= 4\sqrt{2}\times\sqrt{2}+4\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}=32$

답 32

다른 풀이 1

정사각형 BCDE에서

$|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

이때 삼각형 ABD는 $\angle BAD=\frac{\pi}{2}$이고 $\overline{AB}=\overline{AD}$인 직각이등변삼각형이므로

$\angle ABD=\frac{\pi}{4}$

$\overrightarrow{BD}\cdot(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN})$

$=\overrightarrow{BD}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}}{2}\right)$

$=\overrightarrow{BD}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right)$

$=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BD}$

$=|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{BA}|\cos\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|^2$

$=4\sqrt{2}\times 4\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times(4\sqrt{2})^2$

$=16+16=32$

다른 풀이 2

두 선분 MN, BD의 중점을 각각 P, Q라 하고 두 벡터 $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{BD}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하자.

$\overrightarrow{BD}\cdot(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN})=\overrightarrow{BD}\cdot 2\overrightarrow{BP}$

$=2|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{BP}|\cos\theta$

$=2|\overrightarrow{BD}||\overrightarrow{BQ}|$

$=2\times 4\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=32$

4 $\vec{b}+\vec{c}=(0,3,-1)+(-1,-4,3)=(-1,-1,2)$

이므로

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})}{|\vec{a}||\vec{b}+\vec{c}|}$

$=\frac{(2,-1,-1)\cdot(-1,-1,2)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}}$

$=\frac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=-\frac{1}{2}$

따라서 $\theta=\frac{2}{3}\pi$

답 ④

5 $\overrightarrow{AB}=(2,0,3)-(1,-2,k)=(1,2,3-k)$

$\overrightarrow{BC}=(-2,k,6)-(2,0,3)=(-4,k,3)$

두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$가 서로 수직이므로

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(1,2,3-k)\cdot(-4,k,3)$

$=1\times(-4)+2\times k+(3-k)\times 3$

$=-k+5=0$

따라서 $k=5$

답 ③

Level 2 기본 연습

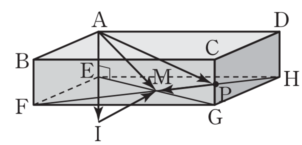
본문 95쪽

1 ② **2** ⑤ **3** 108 **4** ④

1 $\overrightarrow{FP}=3\overrightarrow{PH}$에서 점 P는 선분 FH를 3 : 1로 내분하는 점이므로 사각형 EFGH의 두 대각선의 교점을 M이라고 하면

$\overrightarrow{HP}=\overrightarrow{PM}$

또한 $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AE}$이므로 $2\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AI}$를 만족시키도록 점 I를 잡으면



$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{HP}-2\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}-2\overrightarrow{AE}$

$=\overrightarrow{AM}-2\overrightarrow{AE}$

$=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AI}$

$=\overrightarrow{IM}$

이때 $|\overrightarrow{IM}|=|\overrightarrow{AM}|$이고

$|\overrightarrow{EM}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{EG}|=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{5}$

이므로 직각삼각형 AEM에서

$|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{6}$

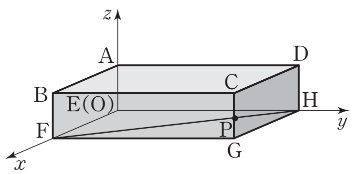
따라서 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{HP}-2\overrightarrow{CG}|=|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{6}$

답 ②

다른 풀이

그림과 같이 점 E를 원점으로 하고, 세 반직선 EF, EH, EA를 각각 x축, y축, z축의 양의 방향으로 하는 좌표공간을 설정하면 다섯 개의 점 A, F, H, C, G의 좌표는

A(0, 0, 1), F(2, 0, 0), H(0, 4, 0), C(2, 4, 1), G(2, 4, 0)이다.



$\overrightarrow{FP}=3\overrightarrow{PH}$에서 점 P는 선분 FH를 3 : 1로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{3\times0+1\times2}{3+1}, \frac{3\times4+1\times0}{3+1}, \frac{3\times0+1\times0}{3+1}\right)$$

즉, $P\left(\frac{1}{2}, 3, 0\right)$

따라서

$$\overrightarrow{AP}=\left(\frac{1}{2}, 3, 0\right)-(0, 0, 1)=\left(\frac{1}{2}, 3, -1\right)$$

$$\overrightarrow{HP}=\left(\frac{1}{2}, 3, 0\right)-(0, 4, 0)=\left(\frac{1}{2}, -1, 0\right)$$

$$\overrightarrow{CG}=(2, 4, 0)-(2, 4, 1)=(0, 0, -1)$$

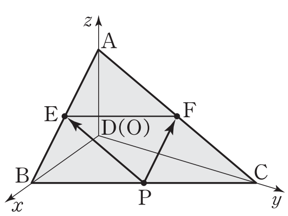
이므로

$$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{HP}-2\overrightarrow{CG}$$
$$=\left(\frac{1}{2}, 3, -1\right)+\left(\frac{1}{2}, -1, 0\right)-(0, 0, -2)$$
$$=(1, 2, 1)$$

따라서

$$|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{HP}-2\overrightarrow{CG}|=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$$

2



위의 그림과 같이 점 D를 원점으로 하고, 세 반직선 DB, DC, DA를 각각 x축, y축, z축의 양의 방향으로 하는 좌표공간을 설정하면 세 점 A, B, C의 좌표는 각각

$A(0, 0, 2)$, $B(2, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$이므로

모서리 AB의 중점 E의 좌표는 $E(1, 0, 1)$,

모서리 AC의 중점 F의 좌표는 $F(0, 2, 1)$

이다.

또한 xy평면 위에 있는 두 점 B, C를 지나는 직선 위의 점의 x좌표 a와 y좌표 b는 $\frac{a}{2}+\frac{b}{4}=1$을 만족시키므로 점 P의 좌표는

$P(t, -2t+4, 0)\ (0\le t\le 2)$

으로 놓을 수 있다.

$$\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OP}$$
$$=(1, 0, 1)-(t, -2t+4, 0)$$
$$=(-t+1, 2t-4, 1)$$

$$\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OP}$$
$$=(0, 2, 1)-(t, -2t+4, 0)$$
$$=(-t, 2t-2, 1)$$

이므로

$$\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF}=(-t+1, 2t-4, 1)+(-t, 2t-2, 1)$$
$$=(-2t+1, 4t-6, 2)$$

$$|\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF}|=\sqrt{(-2t+1)^2+(4t-6)^2+2^2}$$
$$=\sqrt{20t^2-52t+41}$$
$$=\sqrt{20\left(t-\frac{13}{10}\right)^2+\frac{36}{5}}$$

따라서 $|\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF}|$의 최솟값은 $t=\frac{13}{10}$일 때

$\sqrt{\frac{36}{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$이다.

답 ⑤

다른 풀이 1

위 풀이의 그림에서 두 점 $B(2, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$을 지나는 직선을 l이라고 하면 직선 l의 방정식은

$$\frac{x-2}{0-2}=\frac{y-0}{4-0},\ z=0$$

즉, $-x+2=\frac{y}{2},\ z=0$

두 점 $E(1, 0, 1)$, $F(0, 2, 1)$을 이은 선분 EF의 중점을 M이라고 하면

$$M\left(\frac{1+0}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{1+1}{2}\right)$$

즉, $M\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$

점 M에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 H의 좌표는

$-x+2=\frac{y}{2}=t$ (t는 실수)에서

$H(-t+2, 2t, 0)$

으로 나타낼 수 있다.

$$\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OM}$$
$$=(-t+2, 2t, 0)-\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$$
$$=\left(-t+\frac{3}{2}, 2t-1, -1\right) \quad \cdots\cdots ㉠$$

직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$라고 하면 $\vec{u}=(-1, 2, 0)$이고 벡터 $\overrightarrow{MH}$와 벡터 $\vec{u}$는 서로 수직이므로

$\overrightarrow{\mathrm{MH}}\cdot\vec{u}=\left(-t+\frac{3}{2},\ 2t-1,\ -1\right)\cdot(-1,\ 2,\ 0)$

$\quad=t-\frac{3}{2}+4t-2$

$\quad=5t-\frac{7}{2}=0$

에서 $t=\frac{7}{10}$

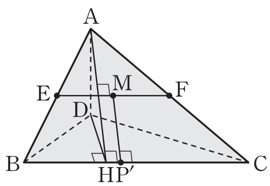
따라서 ㉠에서 $\overrightarrow{\mathrm{MH}}=\left(\frac{4}{5},\ \frac{2}{5},\ -1\right)$이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{MH}}|=\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2+(-1)^2}=\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

$\overrightarrow{\mathrm{PE}}+\overrightarrow{\mathrm{PF}}=2\overrightarrow{\mathrm{PM}}$이고 $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|$의 값은 점 P가 점 H와 일치할 때 최소가 되므로 $|\overrightarrow{\mathrm{PE}}+\overrightarrow{\mathrm{PF}}|$의 최솟값은

$2|\overrightarrow{\mathrm{MH}}|=\frac{6\sqrt{5}}{5}$이다.

다른 풀이 2



선분 EF의 중점을 M이라 하고, 점 M에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 P′이라고 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{PE}}+\overrightarrow{\mathrm{PF}}|=2\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PE}}+\overrightarrow{\mathrm{PF}}}{2}\right|=2|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|\geq 2|\overrightarrow{\mathrm{P'M}}|$

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$2|\overrightarrow{\mathrm{P'M}}|=\overline{\mathrm{AH}}$이므로 선분 AH의 길이가 $|\overrightarrow{\mathrm{PE}}+\overrightarrow{\mathrm{PF}}|$의 최솟값이 된다.

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{DH}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이므로

직각삼각형 DBC에서

$\overline{\mathrm{DH}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{DB}}\times\overline{\mathrm{DC}}$

즉, $\overline{\mathrm{DH}}=\frac{\overline{\mathrm{DB}}\times\overline{\mathrm{DC}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=\frac{2\times4}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

직각삼각형 ADH에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{DH}}^2}$

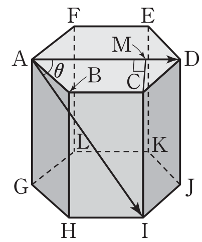
$\quad=\sqrt{2^2+\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2}$

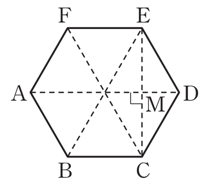
$\quad=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{PE}}+\overrightarrow{\mathrm{PF}}|$의 최솟값은 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$이다.

3 $\overrightarrow{\mathrm{FJ}}=\overrightarrow{\mathrm{AI}}$이고 점 I에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 M이라고 하면 $\overline{\mathrm{IC}}\perp$(평면 ABCDEF), $\overline{\mathrm{IM}}\perp\overline{\mathrm{AD}}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{CM}}\perp\overline{\mathrm{AD}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|=\frac{3}{4}|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\frac{3}{4}\times12=9$





두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FJ}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AI}}$

$\quad=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}||\overrightarrow{\mathrm{AI}}|\cos\theta$

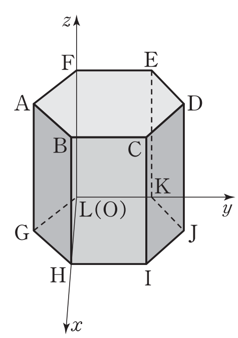
$\quad=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|$

$\quad=12\times9$

$\quad=108$

답 108

다른 풀이



그림과 같이 점 L을 원점 O로 하고, 세 반직선 LH, LK, LF를 각각 x축, y축, z축의 양의 방향으로 하는 좌표공간을 설정하면 네 점 A, D, F, J의 좌표는 각각

$\mathrm{A}(3\sqrt{3},\ -3,\ 10)$, $\mathrm{D}(3\sqrt{3},\ 9,\ 10)$, $\mathrm{F}(0,\ 0,\ 10)$, $\mathrm{J}(3\sqrt{3},\ 9,\ 0)$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(3\sqrt{3},\ 9,\ 10)-(3\sqrt{3},\ -3,\ 10)$

$\quad=(0,\ 12,\ 0)$

$\overrightarrow{\mathrm{FJ}}=(3\sqrt{3},\ 9,\ 0)-(0,\ 0,\ 10)$

$\quad=(3\sqrt{3},\ 9,\ -10)$

따라서

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FJ}}=(0,\ 12,\ 0)\cdot(3\sqrt{3},\ 9,\ -10)$

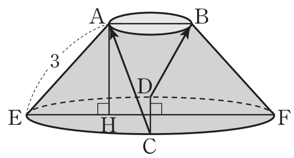
$\quad=0\times3\sqrt{3}+12\times9+0\times(-10)$

$\quad=108$

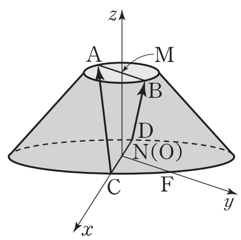
4 점 A에서 지름 CD를 포함하는 밑면에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AE}}^2-\overline{\mathrm{EH}}^2}$

$=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$



두 지름 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라고 하자.



그림과 같이 점 N을 원점으로 하고, 세 반직선 NC, NF, NM을 각각 x축, y축, z축의 양의 방향으로 하는 좌표공간을 설정하면 네 점 A, B, C, D의 좌표는 각각

$\mathrm{A}(0,\ -1,\ \sqrt{5})$, $\mathrm{B}(0,\ 1,\ \sqrt{5})$, $\mathrm{C}(3,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{D}(-3,\ 0,\ 0)$

이므로

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(0,\ -1,\ \sqrt{5})-(3,\ 0,\ 0)$

$=(-3,\ -1,\ \sqrt{5})$

$\overrightarrow{\mathrm{DB}}=(0,\ 1,\ \sqrt{5})-(-3,\ 0,\ 0)$

$=(3,\ 1,\ \sqrt{5})$

따라서

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{DB}}|}$$

$$=\frac{-3\times3+(-1)\times1+\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+(\sqrt{5})^2}\sqrt{3^2+1^2+(\sqrt{5})^2}}$$

$$=\frac{-5}{\sqrt{15}\sqrt{15}}$$

$$=-\frac{1}{3}$$

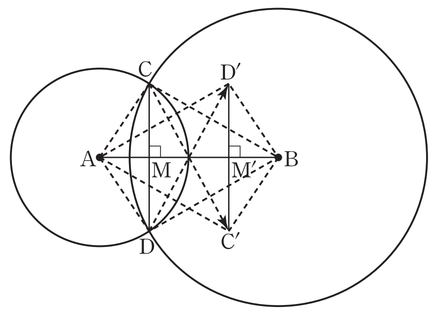
답 ④

Level 3 실력 완성

본문 96쪽

1 6 **2** ⑤ **3** ⑤

1 구 S_1은 중심이 점 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0)$이고 반지름의 길이가 5이고, 구 S_2는 중심이 점 $\mathrm{B}(0,\ 6,\ 8)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{65}$이다. 두 구 S_1, S_2를 두 점 A, B를 지나는 평면으로 자른 단면은 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 두 원의 교점을 각각 C, D라 하고 두 선분 AB, CD의 교점을 M이라고 하면 두 구 S_1, S_2가 만나서 생기는 원 C는 중심이 M이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{CM}}$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{6^2+8^2}=10$이므로 $\overline{\mathrm{AM}}=x$라고 하면

$\overline{\mathrm{MB}}=10-x$이고, $\overline{\mathrm{CM}}=y$라고 하자.

두 직각삼각형 CAM, CMB에서

$x^2+y^2=25$ …… ㉠

$(10-x)^2+y^2=65$ …… ㉡

㉠ − ㉡에서

$20x-100=-40$

$x=3$

$x=3$을 ㉠에 대입하면 $y=4$

위의 그림과 같이 점 P가 점 C의 위치에 있을 때 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\overrightarrow{\mathrm{CC'}}$을 만족시키는 점 C′을 잡고, 점 P가 점 D의 위치에 있을 때 $\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\overrightarrow{\mathrm{DD'}}$을 만족시키는 점 D′을 잡으면 중심이 M이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{CM}}$인 원 C 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$를 만족시키는 점 Q가 나타내는 도형 C'은 두 점 C′, D′을 지름의 양 끝점으로 하는 원이 된다. 이때 두 원 C, C'을 포함하는 평면을 각각 α, β라고 하면 α, β는 서로 평행하다.

선분 C′D′의 중점을 M′이라고 하면 $\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{BM'}}$이므로 $\overline{\mathrm{BM'}}=3$이고 $\overline{\mathrm{C'D'}}=8$이다.

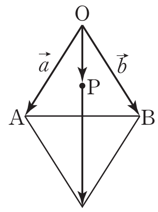
중심이 M′이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{C'M'}}$인 원 위를 움직이는 두 점 S, T에 대하여 선분 ST의 중점을 X라고 하면

$|\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{BT}|=2|\overrightarrow{BX}|$이므로 $|\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{BT}|$의 값은 두 점 S, T가 지름의 양 끝점이 될 때 최소이다.
따라서 $|\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{BT}|$의 최솟값은 $2\overline{BM'}=6$이다.

답 6

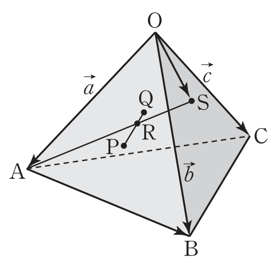
2 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$로 놓으면

$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$ 이고,



$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{c})$ 이므로

$$\overrightarrow{OR}=\frac{2\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OP}}{2+1}$$
$$=\frac{2\times\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{c})+\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})}{3}$$
$$=\frac{3\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}}{9}$$



이때 세 점 A, R, S가 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AR}\ (k\text{는 실수})$$
$$=\overrightarrow{OA}+k(\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OA})$$
$$=(1-k)\vec{a}+k\times\frac{3\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}}{9}$$
$$=\left(1-\frac{2}{3}k\right)\vec{a}+\frac{k}{9}\vec{b}+\frac{2k}{9}\vec{c} \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

그런데 점 S는 삼각형 OBC의 내부의 점이므로

$\overrightarrow{OS}=l\vec{b}+m\vec{c}$ (단, l, m은 양의 실수) ⋯⋯ ㉡

㉠=㉡에서

$$\left(1-\frac{2}{3}k\right)\vec{a}+\frac{k}{9}\vec{b}+\frac{2k}{9}\vec{c}=l\vec{b}+m\vec{c}$$

따라서 $1-\frac{2}{3}k=0$에서 $k=\frac{3}{2}$이고

$l=\frac{k}{9}=\frac{1}{6}$, $m=\frac{2}{9}k=\frac{1}{3}$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OS}$$
$$=(\vec{b}-\vec{a})\cdot\left(\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)$$
$$=\frac{1}{6}|\vec{b}|^2+\frac{1}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{6}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}$$

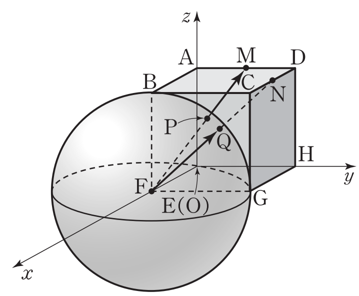
이때 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}$이고

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$이므로

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OS}=\frac{1}{6}|\vec{b}|^2-\frac{1}{6}\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=\frac{1}{6}\times1^2-\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{12}$$

답 ⑤

3



그림과 같이 점 E를 원점으로 하고, 세 반직선 EF, EH, EA를 각각 x축, y축, z축의 양의 방향으로 하는 좌표공간을 설정하면 세 점 F, M, N의 좌표는 각각
F$(2, 0, 0)$, M$(0, 1, 2)$, N$(1, 2, 2)$이다.

$\overline{FM}=\sqrt{(0-2)^2+(1-0)^2+(2-0)^2}=3$

이므로

$|\overrightarrow{PM}|=\overline{FM}-\overline{FP}=3-2=1$

또한 두 벡터 $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{FQ}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 두 벡터 $\overrightarrow{FM}$, $\overrightarrow{FN}$이 이루는 각의 크기도 θ이다.

$\overrightarrow{FM}=(0, 1, 2)-(2, 0, 0)=(-2, 1, 2)$

$\overrightarrow{FN}=(1, 2, 2)-(2, 0, 0)=(-1, 2, 2)$

이므로

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}}{|\overrightarrow{FM}||\overrightarrow{FN}|}$$
$$=\frac{-2\times(-1)+1\times2+2\times2}{\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}}$$
$$=\frac{8}{9}$$

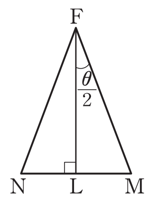
따라서

$$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{FQ}=|\overrightarrow{PM}||\overrightarrow{FQ}|\cos\theta$$
$$=1\times2\times\frac{8}{9}=\frac{16}{9}$$

답 ⑤

참고 1

$\overline{FM}=\overline{FN}=3$이므로 삼각형 FNM은 이등변삼각형이다.
삼각형 FNM에서 선분 MN의 중점을 L이라고 하면
$\angle MFL=\frac{\theta}{2}$이다.



$\overline{MN}=\sqrt{2}$에서 $\overline{ML}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$$\overline{FL}=\sqrt{3^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

직각삼각형 MFL에서

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{34}}{6},\ \sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

따라서

$$\cos\theta=\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=\cos\frac{\theta}{2}\times\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\times\sin\frac{\theta}{2}$$
$$=\frac{34}{36}-\frac{2}{36}=\frac{8}{9}$$

참고 2

세 점 F, P, M이 한 직선 위에 있고
$\overline{FM}=3$, $\overline{PM}=\overline{FM}-\overline{FP}=3-2=1$이므로

$$\overrightarrow{PM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{FM}=\frac{1}{3}(-2,1,2)$$

세 점 F, Q, N이 한 직선 위에 있고
$\overline{FN}=3$, $\overline{FQ}=2$이므로

$$\overrightarrow{FQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{FN}=\frac{2}{3}(-1,2,2)$$

따라서

$$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{FQ}=\frac{1}{3}(-2,1,2)\cdot\frac{2}{3}(-1,2,2)$$
$$=\frac{2}{9}\{(-2)\times(-1)+1\times2+2\times2\}$$
$$=\frac{2}{9}\times8$$
$$=\frac{16}{9}$$

09 도형의 방정식

유제

본문 99~105쪽

1 10	**2** ③	**3** ①	**4** ③	**5** ⑤
6 16	**7** ③	**8** 8		

1 $\vec{a}=(0,2,3)$, $\vec{b}=(2,-1,5)$이므로
$2\vec{a}-\vec{b}=(0,4,6)-(2,-1,5)=(-2,5,1)$
따라서 점 $A(0,2,3)$을 지나고 방향벡터가 $(-2,5,1)$인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-3}{1}$$
$$\frac{x}{2}=\frac{2-y}{5}=3-z$$

따라서 $l=2$, $m=5$, $n=3$이므로
$l+m+n=2+5+3=10$

답 10

2 두 점 $A(3,2,-2)$, $B(3,7,-4)$를 지나는 직선의 방정식은

$$x=3,\ \frac{y-2}{7-2}=\frac{z-(-2)}{-4-(-2)}$$
$$x=3,\ \frac{y-2}{5}=\frac{z+2}{-2}$$

이 직선이 xy평면과 만나는 점 P의 z좌표는 0이므로

$$x=3,\ \frac{y-2}{5}=\frac{0+2}{-2}\text{에서 } y=-3$$

따라서 $P(3,-3,0)$이므로
$a=3$, $b=-3$, $c=0$
$a+b+c=3+(-3)+0=0$

답 ③

3 직선 $\frac{x}{2}=\frac{y}{a}=z+1$의 방향벡터를 $\overrightarrow{u_1}$이라고 하면
$\overrightarrow{u_1}=(2,a,1)$
직선 $1-2x=2y=bz$의 방향벡터를 $\overrightarrow{u_2}$라고 하면

$$\overrightarrow{u_2}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{b}\right)$$

직선 $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{c}=\frac{3-z}{2}$의 방향벡터를 $\overrightarrow{u_3}$이라고 하면
$\overrightarrow{u_3}=(3,c,-2)$
$\overrightarrow{u_1}\,/\!/\,\overrightarrow{u_2}$이므로

$$\frac{2}{-\frac{1}{2}}=\frac{a}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{b}}$$

$-4=2a=b$ …… ㉠

$\overrightarrow{u_1}\perp\overrightarrow{u_3}$이므로

$2\times3+a\times c+1\times(-2)=0$

$ac+4=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a=-2,\ b=-4,\ c=2$

$a+b+c=-2+(-4)+2=-4$

답 ①

4 $\frac{x-2}{2}=y-1=z=t$ (t는 실수) 로 놓으면

$x=2t+2,\ y=t+1,\ z=t$

점 H는 이 직선 위의 점이므로 H$(2t+2,\ t+1,\ t)$ 로 놓을 수 있다. 점 O가 좌표공간의 원점일 때,

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}$

$=(2t+2,\ t+1,\ t)-(1,\ 0,\ -3)$

$=(2t+1,\ t+1,\ t+3)$

벡터 $\overrightarrow{AH}$와 직선 $\frac{x-2}{2}=y-1=z$의 방향벡터

$\vec{u}=(2,\ 1,\ 1)$은 서로 수직이므로

$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=(2t+1,\ t+1,\ t+3)\cdot(2,\ 1,\ 1)$

$=4t+2+t+1+t+3$

$=6t+6=0$

에서 $t=-1$

따라서 H$(0,\ 0,\ -1)$이므로 $a=0,\ b=0,\ c=-1$

$a+b+c=0+0+(-1)=-1$

답 ③

다른 풀이

직선 위의 임의의 점을 P$(x,\ y,\ z)$라고 하면

$x=2t+2,\ y=t+1,\ z=t$ (t는 실수) …… ㉠

$\overline{AP}^2=(x-1)^2+y^2+(z+3)^2$

$=(2t+1)^2+(t+1)^2+(t+3)^2$

$=6t^2+12t+11$

$=6(t+1)^2+5$

따라서 $\overline{AP}$의 값은 $t=-1$일 때 최소이고, 이때의 점 P가 점 H이므로 ㉠에서 H$(0,\ 0,\ -1)$이다.

즉, $a=0,\ b=0,\ c=-1$이므로

$a+b+c=0+0+(-1)=-1$

참고

점 A$(1,\ 0,\ -3)$과 직선 $\frac{x-2}{2}=y-1=z$ 사이의 거리는

(1) 벡터 $\overrightarrow{AH}=(-1,\ 0,\ 2)$의 크기와 같으므로

$|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{(-1)^2+0^2+2^2}=\sqrt{5}$

(2) 선분 AP의 길이의 최솟값과 같으므로

$\overline{AP}=\sqrt{6(t+1)^2+5}$ 에서

$t=-1$일 때 $\sqrt{5}$

5 구 $x^2+(y+1)^2+(z-6)^2=6$의 중심을 C라고 하면 C$(0,\ -1,\ 6)$이고 점 O가 좌표공간의 원점일 때,

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$

$=(0,\ -1,\ 6)-(1,\ -2,\ 4)$

$=(-1,\ 1,\ 2)$

따라서 $\overrightarrow{AC}=(-1,\ 1,\ 2)$에 수직이고 점 A$(1,\ -2,\ 4)$를 지나는 평면의 방정식은

$-(x-1)+(y+2)+2(z-4)=0$

$x-y-2z+5=0$

따라서 $a=-1,\ b=-2,\ c=5$이므로

$a+b+c=-1+(-2)+5=2$

답 ⑤

6 두 평면 $2x-\sqrt{2}y-2z=1,\ x-3z=0$의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1},\ \overrightarrow{n_2}$라고 하면

$\overrightarrow{n_1}=(2,\ -\sqrt{2},\ -2)$,

$\overrightarrow{n_2}=(1,\ 0,\ -3)$

이 두 평면이 이루는 각의 크기를 θ $\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라고 하면

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$$

$$=\frac{|2\times1+(-\sqrt{2})\times0+(-2)\times(-3)|}{\sqrt{2^2+(-\sqrt{2})^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+0^2+(-3)^2}}$$

$$=\frac{8}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}$$

$$=\frac{4}{5}$$

따라서 도형 F의 넓이를 S, 도형 F'의 넓이를 S'이라고 하면

$S'=S\cos\theta$

$=20\times\frac{4}{5}=16$

답 16

7 구 $(x-2)^2+(y+3)^2+z^2=2$는 중심의 좌표가 $(2,\ -3,\ 0)$이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이다.

평면 $x+y-4z+k=0$과 구 $(x-2)^2+(y+3)^2+z^2=2$

가 접하므로 구의 중심에서 평면까지의 거리가 구의 반지름의 길이와 같다.

$$\frac{|1\times2+1\times(-3)+(-4)\times0+k|}{\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}}$$

$$=\frac{|-1+k|}{\sqrt{18}}=\sqrt{2}$$

에서 $|-1+k|=6$

$k>0$이므로 $k=7$

답 ③

8 점 P의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라고 하면

$\overrightarrow{AP}=(x-2,\ y-1,\ z-3)$,

$\overrightarrow{BP}=(x-4,\ y-3,\ z+1)$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$에서

$(x-2)(x-4)+(y-1)(y-3)+(z-3)(z+1)=0$

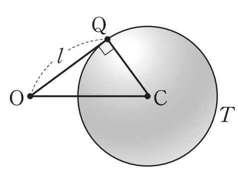
$x^2+y^2+z^2-6x-4y-2z+8=0$

$(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$

따라서 점 P가 나타내는 도형 T는 중심의 좌표가 $C(3,\ 2,\ 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$인 구이다.

$\overline{OC}=\sqrt{3^2+2^2+1^2}=\sqrt{14}$

원점 O를 지나는 직선이 도형 T와 한 점 Q에서 만나므로 $\overline{CQ}=\sqrt{6}$이고 삼각형 OCQ는 $\angle OQC=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.



따라서

$l^2=\overline{OQ}^2=\overline{OC}^2-\overline{CQ}^2$

$\quad=(\sqrt{14})^2-(\sqrt{6})^2=8$

답 8

참고

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$에서 $\overline{AP}\perp\overline{BP}$

따라서 $\angle APB=90^\circ$이므로 점 P가 나타내는 도형 T는 선분 AB를 지름으로 하는 구이다.

Level 1 기초 연습

본문 106쪽

1 ④ **2** ② **3** 13 **4** ② **5** 9

1 점 $A(2,\ 0,\ a)$를 지나고 벡터 $\vec{u}=(1,\ -2,\ 4)$에 평행한 직선의 방정식은

$x-2=\frac{y}{-2}=\frac{z-a}{4}$

이 직선이 점 $P(b,\ 2,\ 1)$을 지나므로

$b-2=\frac{2}{-2}=\frac{1-a}{4}$

따라서 $a=5$, $b=1$이므로

$a+b=5+1=6$

답 ④

2 두 점 $A(0,\ 0,\ 2)$, $B(3,\ -2,\ 3)$을 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{u_1}$이라고 하자. 점 O가 좌표공간의 원점일 때,

$\vec{u_1}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3,\ -2,\ 1)$

직선 $1-x=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{3}$의 방향벡터를 $\vec{u_2}$라고 하면

$\vec{u_2}=(-1,\ 2,\ 3)$이므로

$$\cos\theta=\frac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}$$

$$=\frac{|3\times(-1)+(-2)\times2+1\times3|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2}}$$

$$=\frac{2}{7}$$

답 ②

3 주어진 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$라고 하면 주어진 직선의 방정식의 t의 계수로부터

$\vec{u}=(2,\ -3,\ -5)$

따라서 벡터 $\vec{u}=(2,\ -3,\ -5)$에 수직이고 점 $(0,\ 2,\ 3)$을 지나는 평면의 방정식은

$2x-3(y-2)-5(z-3)=0$

$2x-3y-5z+21=0$

따라서 $a=-3$, $b=-5$, $c=21$이므로

$a+b+c=-3+(-5)+21=13$

답 13

4 직선 $x=\frac{y}{a}=\frac{2-z}{a+2}$의 방향벡터를 $\vec{u}$라고 하면

$\vec{u}=(1,\ a,\ -a-2)$

평면 $2x-y+3z=7$의 법선벡터를 $\vec{n}$이라고 하면
$\vec{n}=(2,\ -1,\ 3)$
주어진 직선과 평면이 평행하므로 벡터 $\vec{u}$와 벡터 $\vec{n}$은 서로 수직이다.
즉, $\vec{u}\cdot\vec{n}=1\times2+a\times(-1)+(-a-2)\times3=0$이므로
$-4a-4=0$
$a=-1$

답 ②

5 법선벡터가 $(2,\ 3,\ -6)$인 평면의 방정식을
$2x+3y-6z+d=0$ (d는 실수)이라고 하면
점 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ -1)$과 평면 $2x+3y-6z+d=0$ 사이의 거리가 3이므로

$$\frac{|2\times0+3\times0+(-6)\times(-1)+d|}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}$$
$$=\frac{|6+d|}{7}=3$$

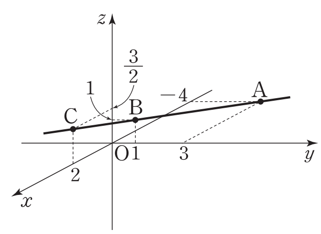
에서 $|6+d|=21$
$d=15$ 또는 $d=-27$
따라서 구하는 평면의 방정식은
$2x+3y-6z+15=0$ …… ㉠
또는 $2x+3y-6z-27=0$ …… ㉡
㉠에 $x=0,\ y=k,\ z=0$을 대입하면 $k=-5$
㉡에 $x=0,\ y=k,\ z=0$을 대입하면 $k=9$
$k>0$이므로 $k=9$

답 9

Level 2 기본 연습 본문 107~108쪽

1 ① **2** ④ **3** ③ **4** ⑤ **5** ②
6 ⑤ **7** 36 **8** ③

1 직선 $\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{-y-1}{2}=z-2$가 xy평면, yz평면, zx평면과 만나는 점을 각각 A, B, C라고 할 때, 세 점 A, B, C의 좌표는 다음과 같다.
$z=0$을 직선의 방정식에 대입하면
$\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{-y-1}{2}=-2$에서 $x=-4,\ y=3$
즉, $\mathrm{A}(-4,\ 3,\ 0)$
$x=0$을 직선의 방정식에 대입하면
$-1=\dfrac{-y-1}{2}=z-2$에서 $y=1,\ z=1$
즉, $\mathrm{B}(0,\ 1,\ 1)$
$y=0$을 직선의 방정식에 대입하면
$\dfrac{x-4}{4}=-\dfrac{1}{2}=z-2$에서 $x=2,\ z=\dfrac{3}{2}$
즉, $\mathrm{C}\left(2,\ 0,\ \dfrac{3}{2}\right)$



따라서 직선 $\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{-y-1}{2}=z-2$에서 $x\le0$이고 $z\ge0$인 부분은 선분 AB이다.
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{0-(-4)\}^2+(1-3)^2+(1-0)^2}=\sqrt{21}$

답 ①

다른 풀이
직선 $\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{-y-1}{2}=z-2=t$ (t는 실수)로 놓으면
$x=4t+4,\ y=-2t-1,\ z=t+2$이고 이 직선 위의 임의의 점의 좌표는 $(4t+4,\ -2t-1,\ t+2)$이다.
$x=4t+4\le0$에서 $t\le-1$
$z=t+2\ge0$에서 $t\ge-2$
따라서 $x\le0$이고 $z\ge0$인 t의 값의 범위는 $-2\le t\le-1$이다.
$t=-2$일 때 직선 위의 점의 좌표는 $(-4,\ 3,\ 0)$이고,
$t=-1$일 때 직선 위의 점의 좌표는 $(0,\ 1,\ 1)$이므로 이 두 점 사이의 거리가 $x\le0$이고 $z\ge0$인 부분의 길이이다.
따라서 구하는 길이는
$\sqrt{\{0-(-4)\}^2+(1-3)^2+(1-0)^2}=\sqrt{21}$

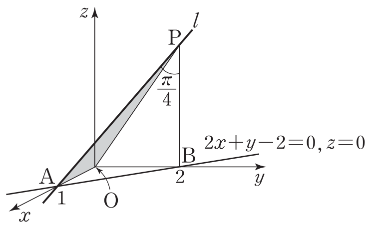
2 직선 l의 xy평면 위로의 정사영이 y축과 만나는 점을 B라고 할 때 점 B의 x좌표는 0이므로
$2\times0+y-2=0$에서
$y=2$
따라서 $\mathrm{B}(0,\ 2,\ 0)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(0-1)^2+(2-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{5}$

점 P의 xy평면 위로의 정사영이 점 B이므로 직선 PB는 z축과 평행하다.

직선 l과 z축이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

직선 l과 직선 PB가 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이다.



즉, $\angle APB=\frac{\pi}{4}$, $\angle ABP=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle PAB=\frac{\pi}{4}$이다.

$\overline{PB}=\overline{AB}=\sqrt{5}$

따라서

$\overline{OP}=\sqrt{\overline{OB}^2+\overline{PB}^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}=3$

이므로 삼각형 OAP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OP}=\frac{1}{2}\times1\times3=\frac{3}{2}$

답 ④

3 방정식 $(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{a})=3$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 A이고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 구이다.

직선 $x-1=y-2=\frac{z+2}{2}$ 위의 임의의 점을 $Q(x, y, z)$라고 하면

$x-1=y-2=\frac{z+2}{2}=t$ (t는 실수) 에서

$x=t+1$, $y=t+2$, $z=2t-2$

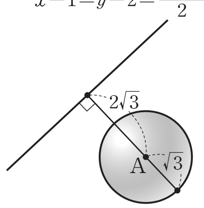
$\overline{AQ}^2=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2$

$=t^2+t^2+(2t-6)^2$

$=6t^2-24t+36$

$=6(t-2)^2+12$

따라서 $\overline{AQ}$의 값은 $t=2$일 때 $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$으로 최소가 된다.



즉, 구의 중심 A와 직선 사이의 거리는 $2\sqrt{3}$이므로 점 P와 직선 사이의 거리의 최댓값은

$2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

답 ③

참고

점 $A(1, 2, 4)$에서 직선 $x-1=y-2=\frac{z+2}{2}$에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

$x-1=y-2=\frac{z+2}{2}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=t+1$, $y=t+2$, $z=2t-2$

점 H는 이 직선 위의 점이므로 $H(t+1, t+2, 2t-2)$로 놓을 수 있다. 점 O가 좌표공간의 원점일 때,

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}$

$=(t+1, t+2, 2t-2)-(1, 2, 4)$

$=(t, t, 2t-6)$ …… ㉠

벡터 $\overrightarrow{AH}$와 직선 $x-1=y-2=\frac{z+2}{2}$의 방향벡터 $\vec{u}=(1, 1, 2)$는 서로 수직이므로

$\overrightarrow{AH}\cdot\vec{u}=(t, t, 2t-6)\cdot(1, 1, 2)$

$=t+t+4t-12$

$=6t-12=0$

에서 $t=2$

$t=2$를 ㉠에 대입하면

$\overrightarrow{AH}=(2, 2, -2)$

이므로

$\overline{AH}=|\overrightarrow{AH}|$

$=\sqrt{2^2+2^2+(-2)^2}$

$=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

4 $y=1$, $x-2=\frac{2-z}{2}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=t+2$, $y=1$, $z=-2t+2$

점 P는 이 직선 위의 점이므로 $P(t+2, 1, -2t+2)$로 놓을 수 있다.

점 P가 평면 α 위의 점이므로

$2(t+2)+1-(-2t+2)=-5$에서

$4t+8=0$

$t=-2$

따라서 $P(0, 1, 6)$이다.

직선 $y=1$, $x-2=\frac{2-z}{2}$가 xy평면과 만나는 점 Q의 z좌표는 0이므로

$x-2=\frac{2-0}{2}$에서

$x=3$

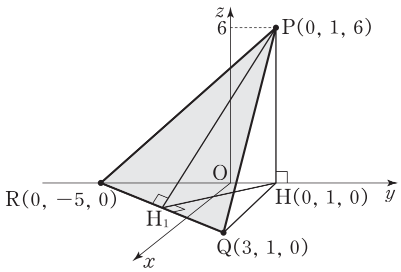
따라서 Q(3, 1, 0)이다.

또한 평면 $2x+y-z=-5$가 y축과 만나는 점 R의 x좌표, z좌표는 모두 0이므로

$2\times0+y-0=-5$에서

$y=-5$

즉, R(0, -5, 0)



점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H(0, 1, 0), 점 H에서 직선 RQ에 내린 수선의 발을 H_1이라고 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PH_1}\perp\overline{RQ}$이다.

직각삼각형 HRQ에서 $\overline{RH}\times\overline{HQ}=\overline{RQ}\times\overline{HH_1}$이므로

$$\overline{HH_1}=\frac{\overline{RH}\times\overline{HQ}}{\overline{RQ}}=\frac{6\times3}{\sqrt{3^2+6^2+0^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

이때 직각삼각형 PH_1H에서

$$\overline{PH_1}=\sqrt{\overline{PH}^2+\overline{HH_1}^2}$$
$$=\sqrt{6^2+\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2}$$
$$=\frac{6\sqrt{30}}{5}$$

따라서 삼각형 PQR의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{RQ}\times\overline{PH_1}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times\frac{6\sqrt{30}}{5}=9\sqrt{6}$$

답 ⑤

참고

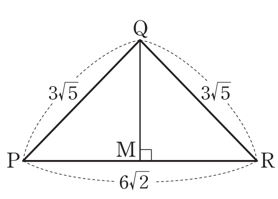
삼각형 QPR에서

$\overline{PQ}=\sqrt{3^2+0^2+(-6)^2}=3\sqrt{5}$,

$\overline{QR}=\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+0^2}=3\sqrt{5}$,

$\overline{PR}=\sqrt{0^2+(-6)^2+(-6)^2}=6\sqrt{2}$

이므로 삼각형 QPR는 $\overline{QP}=\overline{QR}$인 이등변삼각형이다.



선분 PR의 중점을 M이라고 하면 $\overline{PM}=3\sqrt{2}$이므로

$\overline{QM}=\sqrt{(3\sqrt{5})^2-(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{3}$

따라서 삼각형 QPR의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}\times3\sqrt{3}=9\sqrt{6}$$

5 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB의 중점을 포함하고 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 법선벡터로 가지는 평면이다.

점 O가 좌표공간의 원점일 때,

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(3, -1, -1)-(1, -4, 5)$

$=(2, 3, -6)$

또한 평면 $y=-2$는 zx평면과 평행하므로 평면 $y=-2$의 법선벡터를 $\vec{n}$이라고 하면

$\vec{n}=(0, 1, 0)$

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{AB}||\vec{n}|}$$
$$=\frac{|2\times0+3\times1+(-6)\times0|}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}\sqrt{0^2+1^2+0^2}}=\frac{3}{7}$$

답 ②

6 두 직선 $x+1=y-2=\frac{z+1}{2}$, $\frac{x-2}{2}=y-4=z-2$의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$라고 하면

$\vec{u_1}=(1, 1, 2)$, $\vec{u_2}=(2, 1, 1)$

평면 α의 법선벡터를 $\vec{n}=(a, b, c)$라고 하면 $\vec{n}$은 두 직선의 방향벡터 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$와 각각 서로 수직이므로

$\vec{n}\cdot\vec{u_1}=(a, b, c)\cdot(1, 1, 2)=0$에서

$a+b+2c=0$ …… ㉠

$\vec{n}\cdot\vec{u_2}=(a, b, c)\cdot(2, 1, 1)=0$에서

$2a+b+c=0$ …… ㉡

㉡$-$㉠에서 $a-c=0$

$a=c$를 ㉠에 대입하면

$b=-3c$

$\vec{n}=(a, b, c)=c(1, -3, 1)$

따라서 평면 α의 또 다른 법선벡터를 $\vec{h}=(1, -3, 1)$로 놓을 수 있다.

z축의 방향벡터를 $\vec{d}$라고 하면

$\vec{d}=(0, 0, 1)$

z축과 평면 α가 이루는 각의 크기가 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$이므로

두 벡터 $\vec{d}$, $\vec{h}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\theta$ 또는 $\frac{\pi}{2}+\theta$이다.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{|\vec{d}\cdot\vec{h}|}{|\vec{d}||\vec{h}|}$$
$$=\frac{|0\times1+0\times(-3)+1\times1|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\sqrt{1^2+(-3)^2+1^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{11}}{11}$$

따라서 $\sin\theta=\frac{\sqrt{11}}{11}$

답 ⑤

참고

두 직선 $x+1=y-2=\frac{z+1}{2}$, $\frac{x-2}{2}=y-4=z-2$의 방향벡터 $\vec{u_1}=(1, 1, 2)$, $\vec{u_2}=(2, 1, 1)$에 대하여 $\vec{u_1}=t\vec{u_2}$를 만족시키는 실수 t가 존재하지 않으므로 두 직선은 평행하지 않다.

그런데 두 직선 $x+1=y-2=\frac{z+1}{2}$, $\frac{x-2}{2}=y-4=z-2$가 모두 평면 α에 포함되므로 두 직선은 한 점 P에서 만난다.

$x+1=y-2=\frac{z+1}{2}=t$ (t는 실수)로 놓으면

$x=t-1$, $y=t+2$, $z=2t-1$

점 P는 이 직선 위의 점이므로 $\mathrm{P}(t-1,\ t+2,\ 2t-1)$로 놓을 수 있다.

또 점 P는 직선 $\frac{x-2}{2}=y-4=z-2$ 위의 점이므로

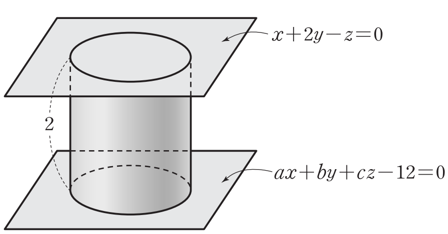
$$\frac{(t-1)-2}{2}=(t+2)-4=(2t-1)-2$$

즉, $\frac{t-3}{2}=t-2=2t-3$에서

$t=1$

따라서 두 직선의 교점 P의 좌표는 $(0, 3, 1)$이다.

7



두 평면 $x+2y-z=0$, $ax+by+cz-12=0$은 서로 평행하고 두 평면 사이의 거리가 2이므로 평면 $x+2y-z=0$ 위의 점 $(0, 0, 0)$과 평면 $ax+by+cz-12=0$ 사이의 거리가 2이다.

즉, $\frac{|a\times0+b\times0+c\times0-12|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=2$에서

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=6$

$a^2+b^2+c^2=36$

답 36

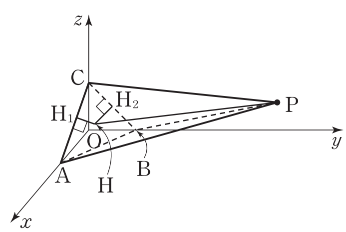
8 평면 $x+y+z=1$이 x축, y축, z축과 만나는 세 점 A, B, C의 좌표는 각각

$\mathrm{A}(1, 0, 0)$, $\mathrm{B}(0, 1, 0)$, $\mathrm{C}(0, 0, 1)$

이다. 이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{2}$이므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

점 P에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 직선 AC, 직선 BC에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라고 하면 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{PH_1}}\perp\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{PH_2}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$가 된다.

조건 (가)에서 두 삼각형 PCA와 PCB의 넓이가 서로 같고, $\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{CB}}$이므로 $\overline{\mathrm{PH_1}}=\overline{\mathrm{PH_2}}$이다.



이때 두 직각삼각형 $\mathrm{PHH_1}$, $\mathrm{PHH_2}$에서 $\overline{\mathrm{PH_1}}=\overline{\mathrm{PH_2}}$이므로 $\overline{\mathrm{HH_1}}=\overline{\mathrm{HH_2}}$이다.

따라서 선분 AB의 중점을 M이라고 할 때 점 H는 직선 CM 위의 점이다. 그러므로 점 P의 x좌표와 y좌표는 서로 같아야 하므로 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(5, 5, b)$이다.

점 P와 평면 $x+y+z=1$ 사이의 거리를 d라고 하면

$$d=\frac{|1\times5+1\times5+1\times b-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$$
$$=\frac{|9+b|}{\sqrt{3}}$$

조건 (나)에서 사면체 PABC의 부피가 4이므로

$$\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}\times d=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2\right\}\times\frac{|9+b|}{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{|9+b|}{6}=4$$

에서 $|9+b|=24$

$9+b=\pm24$

$b=15$ 또는 $b=-33$

즉, 점 P의 좌표는 $(5, 5, 15)$ 또는 $(5, 5, -33)$이므로

$a=5$이고 $b=15$ 또는 $b=-33$이다.

따라서 $\frac{b}{a}$의 값은 $\frac{15}{5}=3$ 또는 $-\frac{33}{5}$이므로

최댓값은 3이다.

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 109~110쪽

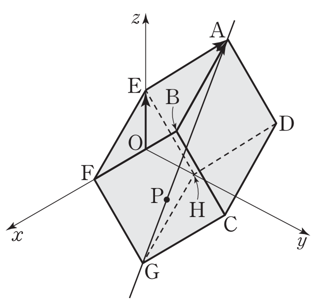
1 ③ **2** ① **3** ④ **4** 168 **5** ③ **6** ④

1 세 점 $E(0, 0, 1)$, $F(1, 0, 0)$, $H(0, 1, 0)$을 지나는 평면의 방정식은

$x+y+z=1$

이므로 밑면 EFGH를 포함하는 평면의 법선벡터는

$\vec{n}=(1, 1, 1)$이다.



$\overrightarrow{EA}\perp$(평면 EFGH)이므로

$\overrightarrow{EA}=t\vec{n}=(t, t, t)$ (t는 실수)로 놓으면

$|\overrightarrow{EA}|=|t\vec{n}|=\sqrt{t^2+t^2+t^2}=\sqrt{2}$

양변을 제곱하면

$3t^2=2$

$t^2=\frac{2}{3}$

$t=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

그런데 점 A의 x좌표는 양수이므로

$t=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EA}$

$=(0, 0, 1)+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

즉, $A\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{3+\sqrt{6}}{3}\right)$

한편, 점 G의 좌표를 $G(p, q, r)$라고 하면 마름모 EFGH에서 두 대각선 FH, EG의 중점은 일치하므로

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)=\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}, \frac{1+r}{2}\right)$에서

$p=1, q=1, r=-1$

즉, $G(1, 1, -1)$

따라서 두 점 A, G를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{1-\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{y-1}{1-\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{z+1}{-1-\frac{3+\sqrt{6}}{3}}$$

이 직선이 xy평면과 만나는 점이 $P(a, b, 0)$이므로

$$\frac{a-1}{1-\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{b-1}{1-\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{0+1}{-1-\frac{3+\sqrt{6}}{3}}$$

$\dfrac{a-1}{\frac{3-\sqrt{6}}{3}}=\dfrac{1}{\frac{-6-\sqrt{6}}{3}}$에서

$$a-1=\frac{-3+\sqrt{6}}{6+\sqrt{6}}$$

$$=\frac{(-3+\sqrt{6})(6-\sqrt{6})}{(6+\sqrt{6})(6-\sqrt{6})}$$

$$=\frac{-8+3\sqrt{6}}{10}$$

$$a=\frac{2+3\sqrt{6}}{10}$$

마찬가지로 $b=\frac{2+3\sqrt{6}}{10}$

따라서 $a+b=\frac{2+3\sqrt{6}}{5}$

답 ③

참고

좌표공간에서 세 점 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ $(abc\neq0)$를 지나는 평면의 방정식은

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$이다.

2 구 S_1은 xy평면, yz평면, zx평면에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 1이고 중심의 x좌표, y좌표, z좌표는 모두 양수이므로 중심 A의 좌표는 $A(1, 1, 1)$이다.

구 S_2는 xy평면, yz평면에 동시에 접하면서 반지름의 길

이가 3이고 중심의 x좌표, y좌표, z좌표는 모두 양수이므로 중심 B의 y좌표를 b $(b>0)$라고 하면 점 B의 좌표는 $B(3, b, 3)$이다.
두 구 S_1, S_2가 서로 외접하므로 $\overline{AB}=1+3=4$이다.
즉, $\sqrt{(3-1)^2+(b-1)^2+(3-1)^2}=4$
$4+(b-1)^2+4=16$
$(b-1)^2=8$
$b>0$이므로 $b=1+2\sqrt{2}$
따라서 두 점 $A(1, 1, 1)$, $B(3, 1+2\sqrt{2}, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-1}{1+2\sqrt{2}-1}=\frac{z-1}{3-1}$$

$$x-1=\frac{y-1}{\sqrt{2}}=z-1$$

직선 AB 위의 임의의 점을 $P(x, y, z)$라고 하면
$x=t+1$, $y=\sqrt{2}t+1$, $z=t+1$ (t는 실수)

$$\begin{aligned}\overline{CP}^2&=(x-0)^2+(y-0)^2+(z-2)^2\\&=(t+1)^2+(\sqrt{2}t+1)^2+(t-1)^2\\&=4t^2+2\sqrt{2}t+3\\&=4\left(t+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\frac{5}{2}\end{aligned}$$

점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하면 선분 CH의 길이는 $\overline{CP}$의 최솟값과 같으므로

$$\overline{CH}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CH}=\frac{1}{2}\times4\times\frac{\sqrt{10}}{2}=\sqrt{10}$$

답 ①

참고
점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 $H(\alpha, \beta, \gamma)$, 직선 AB의 방향벡터를 $\vec{u}$라고 하면
$\overrightarrow{CH}\perp\vec{u}$이므로 $\overrightarrow{CH}\cdot\vec{u}=0$이다.
$\alpha=t+1$, $\beta=\sqrt{2}t+1$, $\gamma=t+1$ (t는 실수)이라고 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH}\cdot\vec{u}&=(t+1, \sqrt{2}t+1, t-1)\cdot(1, \sqrt{2}, 1)\\&=t+1+2t+\sqrt{2}+t-1\\&=4t+\sqrt{2}=0\end{aligned}$$

에서 $t=-\frac{\sqrt{2}}{4}$
따라서

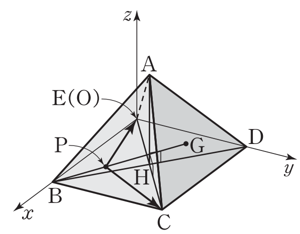
$$\overrightarrow{CH}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}+1, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}-1\right)$$ 이므로

$$\overline{CH}=|\overrightarrow{CH}|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}+1\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}-1\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

3 꼭짓점 A에서 밑면에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

$\overline{BH}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{AH}&=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BH}^2}\\&=\sqrt{4-2}\\&=\sqrt{2}\end{aligned}$$



그림과 같이 점 E를 원점으로 하고, 두 반직선 EB, ED를 각각 x축, y축의 양의 방향으로 하고 벡터 $\overrightarrow{HA}$의 방향이 z축의 양의 방향이 되도록 좌표공간을 설정하면 다섯 개의 점 A, B, C, D, E의 좌표는 각각
$A(1, 1, \sqrt{2})$, $B(2, 0, 0)$, $C(2, 2, 0)$,
$D(0, 2, 0)$, $E(0, 0, 0)$
따라서 삼각형 ACD의 무게중심 G의 좌표는

$$G\left(\frac{1+2+0}{3}, \frac{1+2+2}{3}, \frac{\sqrt{2}+0+0}{3}\right)$$

즉, $G\left(1, \frac{5}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$
이므로 두 점 B, G를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{\frac{5}{3}}=\frac{z}{\frac{\sqrt{2}}{3}}$$

즉, $\frac{x-2}{-3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{\sqrt{2}}$

이때 $\frac{x-2}{-3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{\sqrt{2}}=t$ (t는 실수)에서
$x=-3t+2$, $y=5t$, $z=\sqrt{2}t$
점 P는 선분 BG 위의 점이므로
$P(-3t+2, 5t, \sqrt{2}t)$ $\left(\text{단, } 0\le t\le\frac{1}{3}\right)$
로 놓을 수 있다.

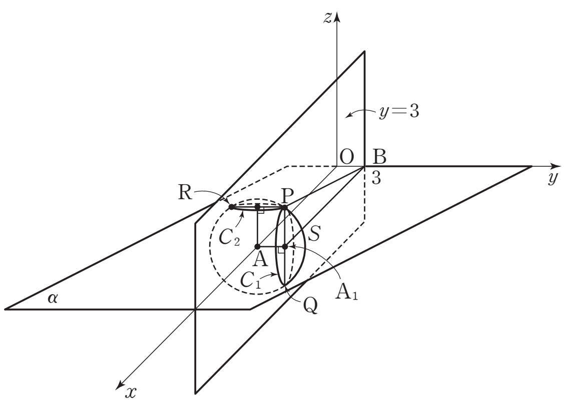
$\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PC}$
$=-\overrightarrow{EP} \cdot (\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{EP})$
$=(3t-2, -5t, -\sqrt{2}t) \cdot (3t, -5t+2, -\sqrt{2}t)$
$=(3t-2)\times 3t+(-5t)\times(-5t+2)+(-\sqrt{2}t)^2$
$=36t^2-16t$
$=36\left(t-\frac{2}{9}\right)^2-\frac{16}{9}$

따라서 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PC}$의 최솟값은 $t=\frac{2}{9}$, 즉 점 P의 좌표가

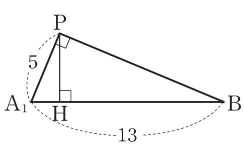
$P\left(\frac{4}{3}, \frac{10}{9}, \frac{2\sqrt{2}}{9}\right)$일 때 $-\frac{16}{9}$이다.

답 ④

4 구 S와 원 C_1의 중심을 각각 A, A_1이라고 하자.
직각삼각형 PAA_1에서
$\overline{PA_1}=\sqrt{\overline{PA}^2-\overline{AA_1}^2}$
$=\sqrt{(\sqrt{34})^2-3^2}$
$=5$



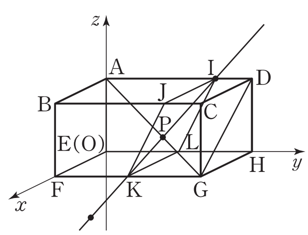
원 C_1 위의 점 중에서 점 P까지의 거리가 최대가 되는 점이 Q, 원 C_2 위의 점 중에서 점 P까지의 거리가 최대가 되는 점이 R이므로 두 선분 PQ, PR는 각각 원 C_1, C_2의 지름이다.
또한 $\angle RPQ=90°$이므로 선분 RQ는 구 S의 지름이다.
평면 $y=3$이 y축과 만나는 점을 B, 점 P에서 선분 A_1B에 내린 수선의 발을 H라고 하면



직각삼각형 PA_1B에서
$\overline{PB}=\sqrt{\overline{A_1B}^2-\overline{PA_1}^2}$
$=\sqrt{13^2-5^2}=12$
또 $\overline{PA_1}\times\overline{PB}=\overline{A_1B}\times\overline{PH}$이므로
$\overline{PH}=\frac{\overline{PA_1}\times\overline{PB}}{\overline{A_1B}}$
$=\frac{5\times 12}{13}$
$=\frac{60}{13}$
또한 $\overline{PB}:\overline{HB}=\overline{A_1B}:\overline{PB}$이므로
$\overline{HB}=\frac{\overline{PB}^2}{\overline{A_1B}}=\frac{12^2}{13}=\frac{144}{13}$
따라서 점 P의 좌표는
$P\left(\frac{144}{13}, 3, \frac{60}{13}\right)$
세 점 P, Q, R를 지나는 평면은 점 $A(13, 0, 0)$을 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{BP}$이다.
$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}$
$=\left(\frac{144}{13}, 3, \frac{60}{13}\right)-(0, 3, 0)$
$=\left(\frac{144}{13}, 0, \frac{60}{13}\right)$
이므로 구하는 평면의 방정식은
$\frac{144}{13}(x-13)+\frac{60}{13}z=0$
즉, $12x+5z-156=0$
따라서 $a=12$, $b=0$, $c=156$이므로
$a+b+c=12+0+156=168$

답 168

5



네 점 I, J, K, L의 좌표는
$I\left(0, \frac{3}{2}, 1\right)$, $J\left(1, \frac{3}{2}, 1\right)$, $K(1, 1, 0)$, $L(0, 1, 0)$
두 직선 IL, JK는 평행하므로 평면 IJKL의 방정식은
$z=2y-2$
또한 두 점 A, G의 좌표는
$A(0, 0, 1)$, $G(1, 2, 0)$

이므로 직선 AG의 방정식은

$$\frac{x}{1-0}=\frac{y}{2-0}=\frac{z-1}{0-1}$$

$$x=\frac{y}{2}=1-z$$

이때 $x=\frac{y}{2}=1-z=t$ (t는 실수)라고 하면

$x=t,\ y=2t,\ z=-t+1$이므로 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}(t,\ 2t,\ -t+1)$로 놓을 수 있다.

점 P는 평면 $z=2y-2$ 위의 점이므로

$-t+1=2\times 2t-2$

$$t=\frac{3}{5}$$

따라서 점 P의 좌표는

$$\mathrm{P}\left(\frac{3}{5},\ \frac{6}{5},\ \frac{2}{5}\right)$$

두 점 I, P를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{\frac{3}{5}-0}=\frac{y-\frac{3}{2}}{\frac{6}{5}-\frac{3}{2}}=\frac{z-1}{\frac{2}{5}-1}$$

즉, $x=3-2y=1-z$ …… ㉠

직선 ㉠과 zx평면의 교점은 y좌표가 0이므로

$x=3-2\times 0=1-z$에서

$x=3,\ z=-2$

따라서 직선 IP와 zx평면이 만나는 점의 좌표는

$(3,\ 0,\ -2)$이므로

$a=3,\ b=0,\ c=-2$

즉, $a+b+c=3+0+(-2)=1$

답 ③

참고

직선 IP는 평면 IJKL과 평면 AGD의 교선과 같다. 그런데 평면 AGD와 평면 AFGD는 같은 평면이므로 직선 IP는 평면 IJKL과 평면 AFGD의 교선인 직선 IK와 같다.

6 $x^2+y^2+z^2-2x+6z=6$ …… ㉠

$x^2+y^2+z^2+6x=2$ …… ㉡

㉡－㉠에서 $8x-6z=-4$

즉, 두 구가 만나서 생기는 원 C를 포함하는 평면의 방정식은 $4x-3z+2=0$이다.

두 구 ㉠, ㉡의 중심을 각각 $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{C_2}$라고 하면

㉠에서 $(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=4^2$

즉, $\mathrm{C_1}(1,\ 0,\ -3)$

㉡에서 $(x+3)^2+y^2+z^2=(\sqrt{11})^2$

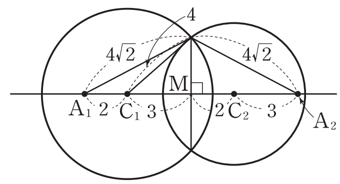
즉, $\mathrm{C_2}(-3,\ 0,\ 0)$

두 점 $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{C_2}$에서 평면 $4x-3z+2=0$까지의 거리를 각각 d_1, d_2라고 하면

$$d_1=\frac{|4\times 1+0\times 0+(-3)\times(-3)+2|}{\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}}=\frac{15}{5}=3$$

$$d_2=\frac{|4\times(-3)+0\times 0+(-3)\times 0+2|}{\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}}=\frac{10}{5}=2$$

두 구 S_1, S_2를 두 점 $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{C_2}$를 지나는 평면으로 자른 단면은 다음 그림과 같다.



원 C의 반지름의 길이는

$\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

이고 원 C의 중심을 M이라고 하면 점 M은 선분 $\mathrm{C_1C_2}$를 $3:2$로 내분하는 점이다.

따라서 $|\vec{p}-\vec{a}|=4\sqrt{2}$를 만족시키는 점 P는 중심이 A이고 반지름의 길이가 $4\sqrt{2}$인 구 위의 점이고 점 A는 직선 $\mathrm{C_1C_2}$ 위의 점이다.

$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-(\sqrt{7})^2}=5$이므로 점 A는 선분 $\mathrm{C_1C_2}$를 $2:7$로 외분하는 점 $\mathrm{A_1}$이거나 선분 $\mathrm{C_1C_2}$를 $8:3$으로 외분하는 점 $\mathrm{A_2}$이다.

점 $\mathrm{A_1}$의 좌표는

$$\mathrm{A_1}\left(\frac{2\times(-3)-7\times 1}{2-7},\ \frac{2\times 0-7\times 0}{2-7},\ \frac{2\times 0-7\times(-3)}{2-7}\right)$$

즉, $\mathrm{A_1}\left(\frac{13}{5},\ 0,\ -\frac{21}{5}\right)$이므로

$$a+b+c=\frac{13}{5}+0+\left(-\frac{21}{5}\right)=-\frac{8}{5}$$

점 $\mathrm{A_2}$의 좌표는

$$\mathrm{A_2}\left(\frac{8\times(-3)-3\times 1}{8-3},\ \frac{8\times 0-3\times 0}{8-3},\ \frac{8\times 0-3\times(-3)}{8-3}\right)$$

즉, $\mathrm{A_2}\left(-\frac{27}{5},\ 0,\ \frac{9}{5}\right)$이므로

$$a+b+c=-\frac{27}{5}+0+\frac{9}{5}=-\frac{18}{5}$$

따라서 $a+b+c$의 최댓값은 $-\frac{8}{5}$이다.

답 ④

참고

구의 중심 C와 구 위의 점 P의 위치벡터를 각각 $\vec{c}$, $\vec{x}$라고 할 때, 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$|\vec{x}-\vec{c}|=r$