

## I\_2. 타원

[12기하01-02] 타원의 뜻을 알고,

타원의 방정식을 구할 수 있다.

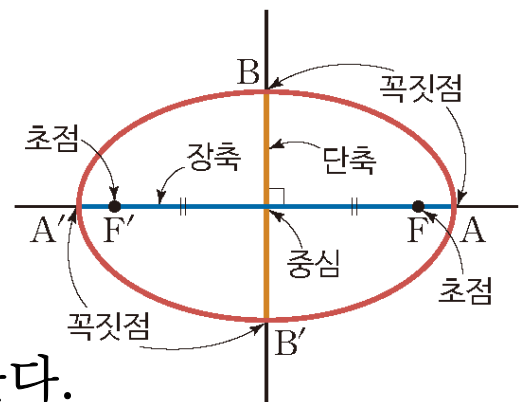
[12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고,

접선의 방정식을 구할 수 있다.

### 1 타원(ellipse)의 뜻

(1) 평면 위의 서로 다른 두 점  $F, F'$  으로부터의 거리의 합이 일정한 점들의 집합을 ‘타원’이라 한다.

(2) 두 점  $F, F'$  을 타원의 ‘초점’이라 한다.

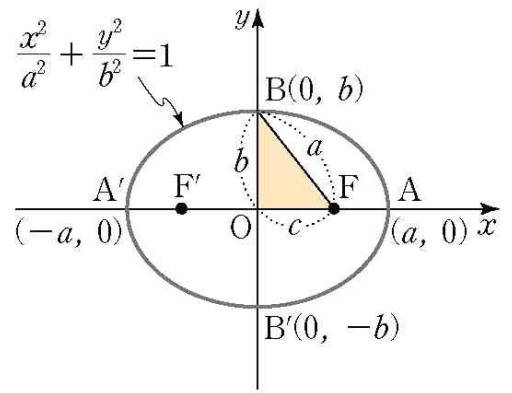


두 초점을 잇는 직선이 타원과 만나는 점을 각각  $A, A'$  이라 하고, 선분  $FF'$  의 수직이등분선이 타원과 만나는 점을 각각  $B, B'$  이라 할 때, 네 점  $A, A', B, B'$  을 타원의 ‘꼭짓점’ 이라 하고, 선분  $AA'$  을 타원의 ‘장축’, 선분  $BB'$  을 타원의 ‘단축’이라 하며, 장축과 단축이 만나는 점을 타원의 ‘중심’ 이라 한다.

## ② 타원의 방정식 ①

(1) 두 초점  $F(c, 0)$ ,  $F'(-c, 0)$  으로부터의 거리의 합이  $2a$  ( $a > c > 0$ ) 인 타원의 방정식은

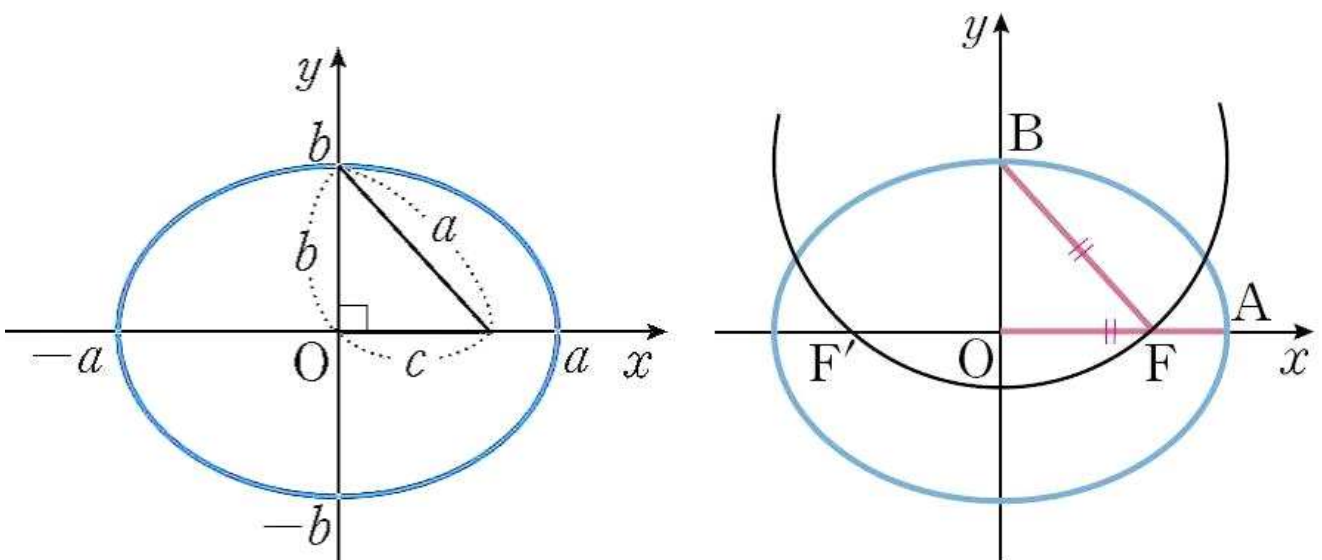
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } c^2 = a^2 - b^2, b > 0)$$



- ① 장축의 길이 :  $2a$ , 단축의 길이 :  $2b$
- ② 초점의 좌표 :  $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ ,  $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$
- ③ 꼭짓점의 좌표 :  $(a, 0)$ ,  $(-a, 0)$ ,  $(0, b)$ ,  $(0, -b)$
- ④ 중심의 좌표 :  $(0, 0)$

☆ 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > c > 0$ )의 초점의 위치

Let 초점 :  $F(c, 0)$ ,  $F'(-c, 0) \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2$

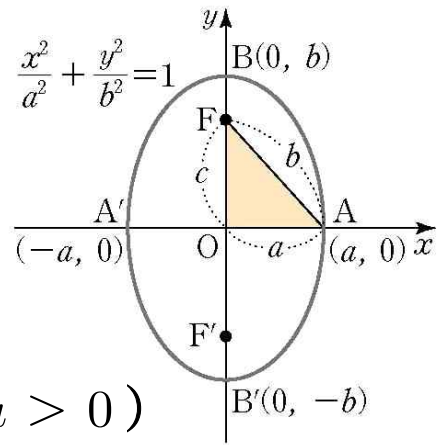


$\Rightarrow \overline{OA} = \overline{BF}$  가 되도록  $F$ ,  $F'$ 를 결정

## ② 타원의 방정식 ②

(2) 두 초점  $F(0, c)$ ,  $F'(0, -c)$  으로부터의 거리의 합이  $2b$  ( $b > c > 0$ )인 타원의 방정식은

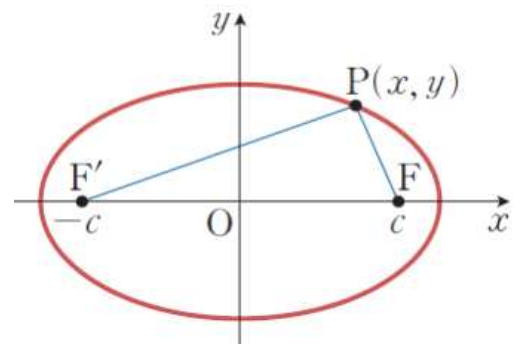
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } c^2 = b^2 - a^2, a > 0)$$



- ① 장축의 길이 :  $2b$ , 단축의 길이 :  $2a$
- ② 초점의 좌표 :  $(0, \sqrt{b^2 - a^2})$ ,  $(0, -\sqrt{b^2 - a^2})$
- ③ 꼭짓점의 좌표 :  $(a, 0)$ ,  $(-a, 0)$ ,  $(0, b)$ ,  $(0, -b)$
- ④ 중심의 좌표 :  $(0, 0)$

## ② 타원의 방정식 ③

☑ 두 초점  $F(c, 0)$ ,  $F'(-c, 0)$  으로부터의 거리의 합이  $2a$  ( $a > c > 0$ )인 타원의 방정식을 구해 보자.



타원 위의 임의의 점을  $P(x, y)$  라 하면

$$\overline{PF} = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \quad \overline{PF'} = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

이고,  $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$  이므로

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$cx + a^2 = a\sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

## ② 타원의 방정식 ④

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$a > c > 0$ 이므로  $a^2 - c^2 = b^2$ 이라 하면

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

이 식의 양변을  $a^2b^2$ 으로 나누면

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

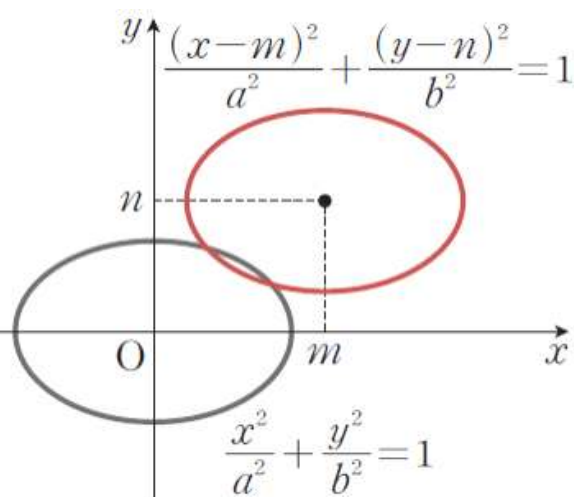
## ③ 타원의 평행이동 ①

타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  을  $x$  축의 방향

으로  $m$  만큼,  $y$  축의 방향을  $n$  만큼

평행이동한 타원의 방정식은

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$



이때 두 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

( $a > b > 0$ )의 초점의 좌표, 꼭짓점의 좌표, 중심의 좌표는 다음과 같다.

### ③ 타원의 평행이동 ②

방정식	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$
초점의 좌표	$(\sqrt{a^2-b^2}, 0), (-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$	$(\sqrt{a^2-b^2}+m, n), (-\sqrt{a^2-b^2}+m, n)$
꼭짓점의 좌표	$(a, 0), (-a, 0),$ $(0, b), (0, -b)$	$(a+m, n), (-a+m, n),$ $(m, b+n), (m, -b+n)$
중심의 좌표	$(0, 0)$	$(m, n)$

☑ (1) 타원  $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$  ( $b > a > 0$ )의 초점, 꼭짓점, 중심의 좌표도 평행이동을 이용하여 구할 수 있다.

### ③ 타원의 평행이동 ③

(2) 타원을 평행이동하여도 그 모양과 크기는 변하지 않으므로 장축의 길이, 단축의 길이는 변하지 않는다.

즉, 타원  $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ )의

장축의 길이는  $2a$ , 단축의 길이는  $2b$ 이고,

타원  $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$  ( $b > a > 0$ )의

장축의 길이는  $2b$ , 단축의 길이는  $2a$ 이다.

#### ④ 타원과 직선의 위치 관계 ①

타원과 직선의 방정식을 각각  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $y = mx + n$

이라 할 때,  $y = mx + n$  을  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  에 대입하여 정리하면

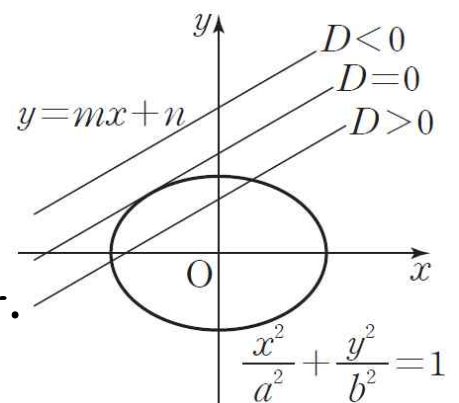
$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2(n^2 - b^2) = 0 \quad \cdots \textcircled{7}$$

타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  과 직선  $y = mx + n$  의 교점의 개수는  $x$  에 대한 이차방정식  $\textcircled{7}$  의 서로 다른 실근의 개수와 같으므로 이차방정식  $\textcircled{7}$  의 판별식을  $D$  라 하면

#### ④ 타원과 직선의 위치 관계 ②

타원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

- (1)  $D > 0 \Leftrightarrow$  서로 다른 두 점에서 만난다.
- (2)  $D = 0 \Leftrightarrow$  한 점에서 만난다(접한다).
- (3)  $D < 0 \Leftrightarrow$  만나지 않는다.



## ⑤ 타원의 접선 ①

(1) 기울기가 주어진 타원의 접선의 방정식

타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  에 접하고 기울기가  $m$  인 직선의 방정식은

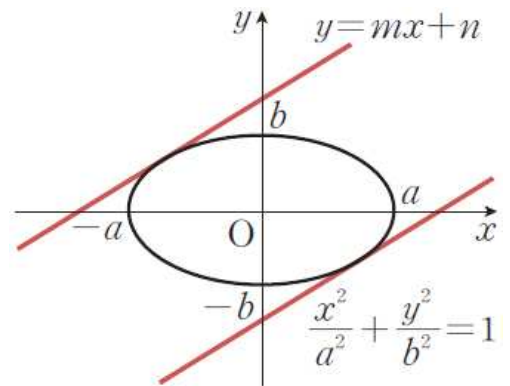
$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

☑ 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  에 접하고

기울기가  $m$  인 직선의 방정식을

구해 보자. 구하는 접선의 방정식을  $y = mx + n$  이라 하고,

타원의 방정식  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  에 대입하여 정리하면



## ⑤ 타원의 접선 ②

$$(a^2 m^2 + b^2)x^2 + 2a^2 m n x + a^2(n^2 - b^2) = 0$$

위의  $x$ 에 대한 이차방정식의 판별식을  $D$ 라 하면

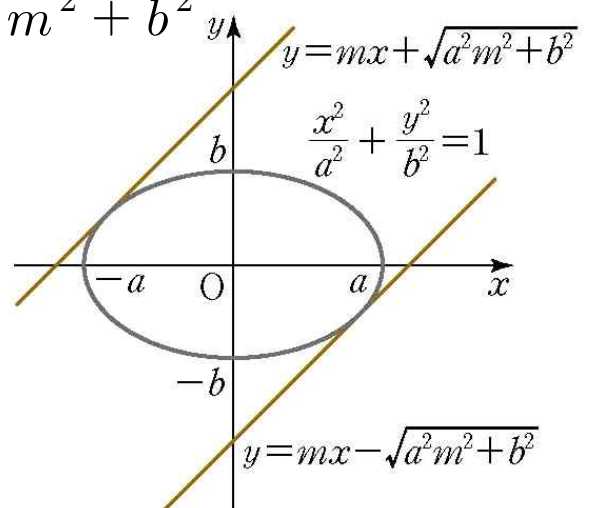
$$D = 4a^2 b^2 (a^2 m^2 + b^2 - n^2) = 0$$

이때  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ 이므로  $a^2 m^2 + b^2 - n^2 = 0$ , 즉

$$n^2 = a^2 m^2 + b^2 \text{ 에서 } n = \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

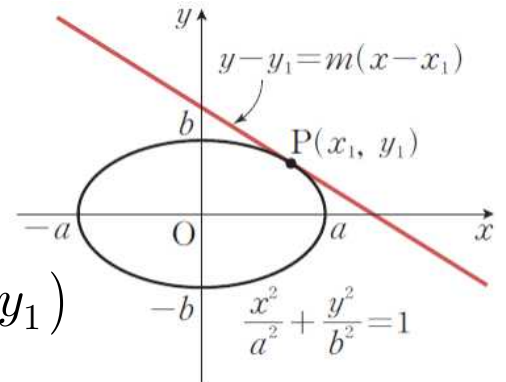


## 5 타원의 접선 ③

(2) 타원 위의 점에서의 접선의 방정식

타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  위의 점  $(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$



☑ 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  위의 점  $P(x_1, y_1)$

에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

$y_1 \neq 0$  일 때 접선의 기울기를  $m$ 이라 하면 직선의 방정식은

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

## 5 타원의 접선 ④

또 기울기가  $m$ 인 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 접선의 방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑧의 2개의 직선 중 하나가 ⑦과 같은 직선이므로  $y$ 절편의 제공이 같다. 즉,

$$(-mx_1 + y_1)^2 = a^2 m^2 + b^2$$

$$(a^2 - x_1^2)m^2 + 2x_1 y_1 m + b^2 - y_1^2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \text{ 에서 } a^2 - x_1^2 = \frac{a^2 y_1^2}{b^2}, \quad b^2 - y_1^2 = \frac{b^2 x_1^2}{a^2}$$

이므로 이를 ⑨에 대입하여 정리하면



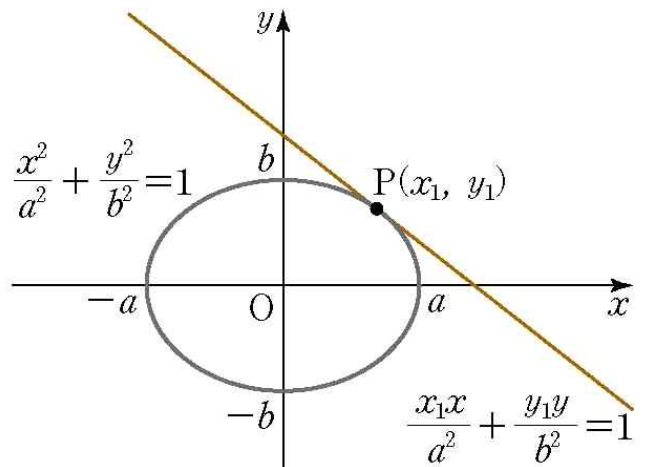
## 5 타원의 접선 5

$$\left( \frac{a}{b} y_1 m + \frac{b}{a} x_1 \right)^2 = 0, \text{ 즉 } m = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면  $y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x + \frac{b^2 x_1^2}{a^2 y_1}$  이고,

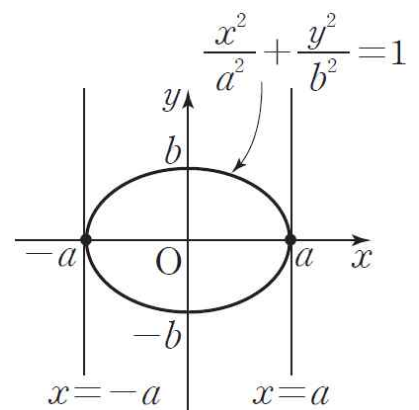
$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \text{ 이므로}$$

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$



## 5 타원의 접선 6

한편,  $y_1 = 0$  일 때  $x_1 = a$ ,  $x_1 = -a$  이므로 이를 ㉡에 대입하면 접선의 방정식은 각각  $x = a$ ,  $x = -a$  이고, 그림과 같이 타원 위의 두 점  $(a, 0)$ ,  $(-a, 0)$ 에서의 접선이 각각 직선



$x = a$ ,  $x = -a$  이므로  $y_1 = 0$  일 때에도 ㉡이 성립한다.

☆ 곡선 위의 점  $(x_1, y_1)$ 에서의 접선

①  $x^2 \rightarrow x_1 x$ ,  $y^2 \rightarrow y_1 y$

②  $x \rightarrow \frac{x_1 + x}{2}$ ,  $y \rightarrow \frac{y_1 + y}{2}$

## ☆ 타원의 성질 ①

타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  의  $x$  축 위의

꼭짓점을  $A(a, 0)$ ,  $B(-a, 0)$

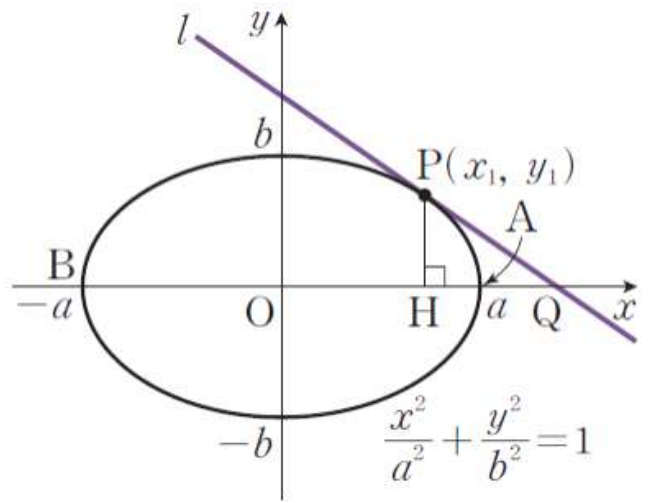
이라 하고, 타원 위의 한 점

$P(x_1, y_1)$  에서의 접선  $l$  이  $x$  축

과 만나는 점을  $Q$ , 점  $P$  에서  $x$  축에 내린 수선의 발을  $H$ ,  
두 점  $A$ ,  $B$  에서의 접선이  $l$  과 만나는 두 점을 각각  $C$ ,  $D$  라  
할 때, (단, 점  $P$  는 좌표축 위에 있지 않다.)

$$(1) Q\left(\frac{a^2}{x_1}, 0\right)$$

$$(2) \overline{OH} \times \overline{OQ} = |x_1| \times \frac{a^2}{|x_1|} = a^2$$



## ☆ 타원의 성질 ②

$$(3) \overline{AC} \times \overline{BD} = \left| \frac{(a - x_1)b^2}{ay_1} \right| \times \left| \frac{(a + x_1)b^2}{ay_1} \right|$$

$$= \left| \frac{(a^2 - x_1^2)b^4}{a^2 y_1^2} \right| = \frac{1}{b^2} \times b^4 = b^2$$

$$\because \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \text{ 에서 } \frac{y_1^2}{b^2} = 1 - \frac{x_1^2}{a^2} = \frac{a^2 - x_1^2}{a^2}$$

$$\therefore \frac{a^2 - x_1^2}{a^2 y_1^2} = \frac{1}{b^2}$$

