미적분 해설 및 정답

Ⅰ-1 수열의 극한

01 수열의 극한

기본

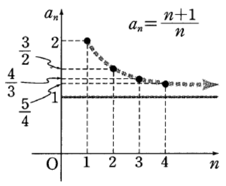
01 답 0

수열 $\left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right\}$은 n이 커지면 $(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 0으로 수렴한다.

02 답 2

03 답 1

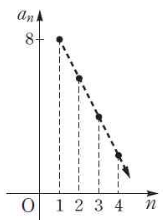
$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$: 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\cdots$, $\frac{n+1}{n}$, $\cdots$이므로 n이 한없이 커질 때, 항의 값이 변하는 상태를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽과 같다.



즉, n이 한없이 커질 때, $\frac{n+1}{n}$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$은 1에 수렴한다.

04 답 발산

오른쪽 그림에서 n이 한없이 커질 때, $a_n=-2n+10$의 값은 한없이 작아지므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.

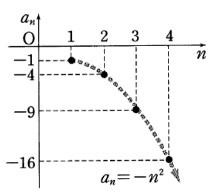


표준

01 답 발산

-1, -4, -9, $\cdots$, $-n^2$, $\cdots$

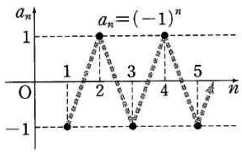
이므로 n이 한없이 커질 때, 항의 값이 변하는 상태를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽과 같다.



즉, n이 한없이 커질 때, $-n^2$의 값은 음수로서 그 절댓값이 한없이 커지므로 수열 $\{-n^2\}$은 음의 무한대로 발산한다.

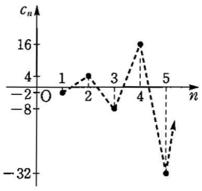
02 답 발산

n이 한없이 커질 때, $(-1)^n$의 값은 -1, 1이 교대로 나타나므로 $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$은 발산한다.



03 답 발산

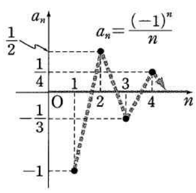
n이 한없이 커짐에 따라 일반항 $(-2)^n$의 값은 한없이 커지며 그 부호는 양과 음이 교대로 나타난다. 즉, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않는다. 이와 같은 수열을 진동한다고 하며 진동하는 수열은 발산하는 수열이다.



04 답 0

$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$: -1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $\cdots$, $\frac{(-1)^n}{n}$, $\cdots$

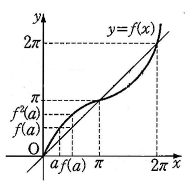
이므로 n이 한없이 커질 때, 항의 값이 변하는 상태를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다. 즉, n이 한없이 커질 때, $\frac{(-1)^n}{n}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 0에 수렴한다.



발전

01 답 π

$0<a<\pi$일 때, 오른쪽 그림에서 $\{f^n(a)\}$는 증가하면서 π에 수렴함을 알 수 있다.



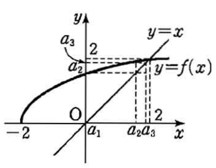
02 답 2

$f(x)=\sqrt{x+2}$로 놓으면

$a_1=0$, $a_{n+1}=f(a_n)$이므로

오른쪽 그림과 같이

a_1, a_2, a_3, $\cdots$의 값을 추정해



나가면 a_n의 값은 두 그래프의 교점의 x좌표에 가까워진다.
즉, $x=\sqrt{x+2}$의 양변을 제곱하면
$x^2=x+2$, $x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$
그런데 $x>0$이므로 $x=2$
따라서 $\lim_{n \to \infty} a_n = 2$

Ⅰ-1 수열의 극한

02 수열의 극한값의 계산

기본

01 답 ②

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-2\lim_{n\to\infty}b_n$$
$$=3-2\times2=-1$$

02 답 ①

분모, 분자를 각각 n^2으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-2n+1}{\sqrt{4n^4+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{4+\frac{1}{n^4}}}$$
$$=\frac{4}{\sqrt{4}}=2$$

03 답 ④

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+5n}-2n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+5n}-2n)(\sqrt{4n^2+5n}+2n)}{\sqrt{4n^2+5n}+2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{\sqrt{4n^2+5n}+2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt{4+\frac{5}{n}}+2}=\frac{5}{4}$$

04 답 ②

$\frac{2n+1}{n+1}<a_n<\frac{2n+2}{n+1}$에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}=2,$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=2$

표준

01 답 ⑤

① $\lim_{n\to\infty}\frac{-n+1}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}=-\frac{1}{2}$(수렴)

② $\lim_{n\to\infty}\frac{8n}{\sqrt{n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{\sqrt{\frac{1}{n}}+1}=8$(수렴)

③ $\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=3$(수렴)

④ $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-2n^2}{1+3n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}}{\frac{1}{n^3}+3}=\frac{1}{3}$(수렴)

⑤ $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-5}{-2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-\frac{5}{n}}{-2+\frac{3}{n}}=-\infty$

02 답 7

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-2a_nb_n\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)^2-2\lim_{n\to\infty}a_nb_n$$
$$=3^2-2\times1=7$$

03 답 (1) 54 (2) $\sqrt{2}-1$

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{n^2a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{1}{n}}{na_n}$

$$=\frac{6}{\frac{1}{9}}=54$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2n^2-n}+\sqrt{n^2-1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2-\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$$

04 답 ④

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{bn^3+cn-5}{an^2+3n-2}$가 0이 아닌 상수 2에 수렴하므로 분자와 분모의 차수는 같다.

즉, $a=0$, $b=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{bn^3+cn-5}{an^2+3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{cn-5}{3n-2}=\frac{c}{3}=2$$

즉, $c=6$

따라서 $a+b+c=0+0+6=6$

발전

01 답 ④

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2}{n\{1+3+5+\cdots+(2n-1)\}}$에서

$$\begin{aligned}2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2&=\sum_{k=1}^{n}(2k)^2=4\sum_{k=1}^{n}k^2\\&=\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}\\&=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1+3+5+\cdots+(2n-1)&=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\\&=2\sum_{k=1}^{n}k-n\\&=2\times\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}}{n\times n^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3n^3}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{3}=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

02 답 ①

$a_1=1$, $a_2=1+3$, $a_3=1+3+5$, $\cdots$ 이므로

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\times\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2$$

$b_1=1+2$, $b_2=1+2+3$, $b_3=1+2+3+4$, $\cdots$이므로

$$\begin{aligned}b_n&=1+2+3+\cdots+(n+1)\\&=\sum_{k=1}^{n+1}k=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\frac{n^2+3n+2}{2}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+3n+2}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}=2\end{aligned}$$

I-1 수열의 극한

03 등비수열의 극한

기본

01 답 (1) 수렴 (2) 발산 (3) 수렴 (4) 발산

(1) 주어진 수열은 공비가 $-\frac{1}{3}$인 등비수열이고,

$-1<-\frac{1}{3}<1$이므로 0으로 수렴한다.

(2) 주어진 수열은 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열이고,

$\sqrt{2}>1$이므로 발산한다.

(3) 주어진 수열의 공비는 $-\frac{3}{4}$이고, $-1<-\frac{3}{4}<1$

이므로 0으로 수렴한다.

(4) 주어진 수열의 공비는 -2이고, $-2<-1$이므로 발산(진동)한다.

02 답 (1) 3 (2) 발산 (3) 1

(1) $\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+3\right\}=0+3=3$

(2) $\lim_{n\to\infty}(3^n-4^n)=\lim_{n\to\infty}4^n\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n-1\right\}=-\infty$

(3) 분수식의 극한 ⇨ 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+(-3)^n}{5^n+(-2)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)^n}{1+\left(-\frac{2}{5}\right)^n}=\frac{1+0}{1+0}=1$$

03 답 ③

분모, 분자를 3^n으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^{n+2}+(-2)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{1}{9}$$

[참고] 등비수열로 이루어진 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값은 분모에서 밑의 절댓값이 가장 큰 항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

04 답 $-\frac{1}{2}\le r<\frac{1}{2}$

공비가 $-2r$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<-2r\le 1$

따라서 $-\frac{1}{2}\le r<\frac{1}{2}$

표준

01 답 ②

등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하기 위해서는

$-1<r\le 1$이어야 하므로

$-1<2x+1\le 1$

$-2<2x\le 0$

따라서 $-1<x\le 0$

02 답 -1

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 상수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^{n+1}+3^n\times a_n}{3^{n+1}-7^n\times a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{7+\left(\frac{3}{7}\right)^n\times a_n}{3\times\left(\frac{3}{7}\right)^n-a_n}=\frac{7}{-\alpha}$$

따라서 $\frac{7}{-\alpha}=7$이므로 $\alpha=-1$

03 답 5

$\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{5\sqrt{5}}=5^{\frac{1}{2}}\times 5^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$,

$\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}=5^{\frac{1}{2}}\times 5^{\frac{1}{4}}\times 5^{\frac{1}{8}}=5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}$이므로

$a_n=5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}5^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}=5$$

04 답 ④

$a_n = \dfrac{r^n - 1}{r^{n+1}+1}$에서

ㄱ. $|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{r^n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{r^n-1}{r^{n+1}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{r^n}}{r+\frac{1}{r^n}} = \frac{1}{r}$$

(참)

ㄴ. $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\dfrac{r^n-1}{r^{n+1}+1} = 0$ (참)

ㄷ. $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{r^n-1}{r^{n+1}+1} = -1 \text{ (참)}$$

ㄹ. ㄱ에서 $r<-1$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{r}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

발전

01 답 ②

$4 > 4-\sqrt{3}+2\sin\theta$이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{(4-\sqrt{3}+2\sin\theta)^{n+2}} = \infty$$

$4 < 4-\sqrt{3}+2\sin\theta$이면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{(4-\sqrt{3}+2\sin\theta)^{n+2}} = 0$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{4^n}{(4-\sqrt{3}+2\sin\theta)^{n+2}}$이 0 이외의 값에 수렴하려면 $4-\sqrt{3}+2\sin\theta=4$이어야 한다.

$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

그러므로 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

02 답 $\dfrac{3}{7}$

$14^n = 2^n \times 7^n$ 이므로

$T(n) = (1+2+\cdots+2^n)(1+7+\cdots+7^n)$

$$= \left\{\frac{1\times(2^{n+1}-1)}{2-1}\right\}\left\{\frac{1\times(7^{n+1}-1)}{7-1}\right\}$$

$$= (2^{n+1}-1)\left(\frac{7^{n+1}-1}{6}\right)$$

$$= \frac{14^{n+1}-7^{n+1}-2^{n+1}+1}{6}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{14^n}{T(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{6\times 14^n}{14^{n+1}-7^{n+1}-2^{n+1}+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{6\times\frac{1}{14}}{1-\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{7^{n+1}}+\frac{1}{14^{n+1}}}$$

$$= 6\times\frac{1}{14} = \frac{3}{7}$$

Ⅰ-1 수열의 극한

01 ④	02 1	03 3	04 ③	05 ①
06 ②	07 $\frac{1}{2}$	08 ①	09 $\frac{1}{2}$	10 ②
11 ④	12 ②	13 ④	14 ②	15 ⑤
16 ②	17 5	18 4	19 1	20 2
21 $\frac{\pi}{3}\le x<\frac{2}{3}\pi$	22 ②	23 0	24 $\frac{4}{3}$	

01 ① $\lim_{n\to\infty} 20-5n=-\infty$

② $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}n-3=\infty$

③ $\lim_{n\to\infty}\sin\frac{n\pi}{2}$에 $1, 2, 3, \cdots$을 차례대로 대입

하면 $\sin\frac{\pi}{2}$, $\sin\pi$, $\cdots$ 즉,

$1, 0, -1, 0, 1, \cdots$ 이므로 발산(진동)한다.

④ n이 한없이 커지면 $\frac{(-1)^n}{n}$은 0에 한없이

가까워지므로 $\lim_{n\to\infty}1+\frac{(-1)^n}{n}=1$(수렴)

⑤ $(-2)^{n-1}$에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례대로 대입

하면 $1, -2, 4, -8, \cdots$이므로 발산(진동)한다.

02 $\lim_{n\to\infty}\{\log_2(2n^2+1)-2\log_2 n\}$

$=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{2n^2+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{2+\frac{1}{n^2}}{1}$

$=\log_2 2=1$

03 (ⅰ) $|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\frac{1}{r^n}+1}=2$

(ⅱ) $r=1$이면, $\lim_{n\to\infty}r^n=1$

즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n}{1+r^n}=\frac{2}{1+1}=1$

(ⅲ) $|r|<1$이면, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n}{1+r^n}=\frac{0}{1+0}=0$

따라서 $a+b+c=2+1+0=3$

04 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$

(α는 상수)라 하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-3}{a_n+1}=\frac{3}{4}$에서

$\frac{2\alpha-3}{\alpha+1}=\frac{3}{4}$

$4(2\alpha-3)=3(\alpha+1)$, $5\alpha=15$

따라서 $\alpha=3$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=3$

05 ① $a_n-b_n=c_n$이라 하면 $\lim_{n\to\infty}c_n=0$

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(a_n-c_n)=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}c_n$

$=\alpha-0=\alpha$ (참)

② (반례) $a_n=(-1)^n$일 때

$\lim_{n\to\infty}a_n^2=\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n}=1$이지만

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^n$은 발산(진동)한다.

(거짓)

③, ④ (반례) $a_n=2n$, $b_n=n+1$일 때

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$ (거짓)

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}(n-1)=\infty$ (거짓)

⑤ (반례) $a_n=3^n$, $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$일 때

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=\infty$이지만

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ①이다.

06 $a_{n+1}\le\frac{99}{100}a_n$이므로

$a_n\le\frac{99}{100}a_{n-1}\le\left(\frac{99}{100}\right)^2a_{n-2}\le\cdots\le\left(\frac{99}{100}\right)^{n-1}a_1$

$0<a_n\le\left(\frac{99}{100}\right)^{n-1}a_1$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{99}{100}\right)^{n-1}a_1=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+n-2}{4a_n+3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\frac{a_n}{n}+1-\frac{2}{n}}{4\times\frac{a_n}{n}+3+\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}$$

07 $n^2<n^2+1<(n+1)^2$에서

$n<\sqrt{n^2+1}<n+1$이므로

$b_n=n$, $a_n=\sqrt{n^2+1}-n$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$$

08 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n=4\times2^{n-1}=2^{n+1}$

이때 $S_n=\frac{4(2^n-1)}{2-1}=2^{n+2}-4$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^{n+2}-4}$$
$$=\lim_{n\to\infty 2}\frac{\frac{1}{2}}{1-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}}=\frac{1}{2}$$

09 해결 과정 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$a_n=a+(n-1)d=dn+(a-d)$이므로

답 구하기 $\lim_{n\to\infty}\{\log(5n^2+4n+1)-\log na_n\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\log\frac{5n^2+4n+1}{na_n}$$ ▸ 2점

$$=\lim_{n\to\infty}\log\frac{5n^2+4n+1}{n\{dn+(a-d)\}}=\log\frac{5}{d}$$ ▸ 2점

$\log\frac{5}{d}=1$이므로 $\frac{5}{d}=10$, 즉 $d=\frac{1}{2}$

▸ 2점

10 주어진 수열이 1로 수렴하기 위해서는 분모와 분자의 차수가 같아야 하므로 $a=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-bn+4}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{-bn+4}{2n+3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-b+\frac{4}{n}}{2+\frac{3}{n}}=-\frac{b}{2}$$

$-\frac{b}{2}=1$ 이므로 $b=-2$

따라서 $b-a=-2-0=-2$

11 $2n^2-1<n^2a_n<2n^2+1$에서 양변을 n^2으로 나누면

$$\frac{2n^2-1}{n^2}<a_n<\frac{2n^2+1}{n^2}$$

$b_n=\frac{2n^2-1}{n^2}$, $c_n=\frac{2n^2+1}{n^2}$이라 하면

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n^2}}{1}=2$$

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{1}=2$$

따라서 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=2$

12 $-1<\frac{x^2+2x}{3}\le1$에서 $-3<x^2+2x\le3$

(ⅰ) $-3<x^2+2x$에서 $x^2+2x+3>0$

그런데 $x^2+2x+3=(x+1)^2+2\ge2$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ⅱ) $x^2+2x\le3$에서

$x^2+2x-3\le0$

$(x+3)(x-1)\le0$

$-3\le x\le1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $-3\le x\le1$이므로 정수 x는 -3, -2, -1, 0, 1의 5개이다.

13 $f(-4,\ 3)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-4)^n+3^{n+1}}{(-4)^{n+1}+3^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)^n}=-\frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{1}{2},\ 2\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+2^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n}=2$$

따라서 $f(-4,\ 3)+f\left(\frac{1}{2},\ 2\right)=-\frac{1}{4}+2=\frac{7}{4}$

14 $a_1=\sqrt{6}$ 이라 하고 a_1에서 네 개의 키를 순서대로 눌러 나오는 수를 a_2, a_2에서 네 개의 키를 순서대로 눌러 나오는 수를 a_3, $\cdots$ 이라 하면 $a_{n+1}=\sqrt{a_n+6}$

양변을 제곱하면 $a_{n+1}^2=a_n+6$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 상수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$이므로

$\alpha^2=\alpha+6,\ \alpha^2-\alpha-6=0,$

$(\alpha+2)(\alpha-3)=0$

그런데 $\alpha>0$이므로 $\alpha=3$

15 ㄱ. 수열 $\{|\cos n\pi|\}$의 각 항을 나열하면

$|-1|,\ |1|,\ |-1|,\ |1|,\ \cdots$

즉, $1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \cdots$이므로 1에 수렴한다.

ㄴ. 수열 $\left\{\sin\frac{n}{2}\pi\cos\frac{n}{2}\pi\right\}$의 각 항을 나열하면

$1\times0,\ 0\times(-1),\ -1\times0,\ 0\times1,\ \cdots$

즉, $0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots$이므로 0에 수렴한다.

ㄷ. 일반항이 $(-1)^{n+1}\times\frac{1}{2n}$이므로

$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\times\frac{1}{2n}=0$

ㄹ. 일반항이 $\frac{2^n-1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$

따라서 수렴하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

16 $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+(2n-1)+2n}{(5n-2)(n+2)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n(2n+1)}{2}}{(5n-2)(n+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{5n^2+8n-4}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{5+\frac{8}{n}-\frac{4}{n^2}}=\frac{2}{5}$$

17 해결 과정 $\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=2$에서

$2a_n-b_n=c_n$으로 놓으면

$2a_n-c_n=b_n$, $\lim_{n\to\infty}c_n=2$ ▸ 2점

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2b_n+1}{3a_n-b_n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2(2a_n-c_n)+1}{3a_n-(2a_n-c_n)-1}$$ ▸ 2점

답 구하기 $\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n-2c_n+1}{a_n+c_n-1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5-2\times\frac{c_n}{a_n}+\frac{1}{a_n}}{1-\frac{c_n}{a_n}-\frac{1}{a_n}}$$

$$=\frac{5-0+0}{1-0-0}=5$$ ▸ 2점

18 $(3n^2+n+1)a_n=b_n$으로 놓으면 $\lim_{n\to\infty}b_n=6$

$(3n^2+n+1)a_n=b_n$을 a_n에 관하여 풀면

$a_n=\frac{b_n}{3n^2+n+1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(2n^2+1)a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+n+1}\times b_n\right)$$

$$=\frac{2}{3}\times6=4$$

19 해결 과정 다항식 $x+x^2+x^3+\cdots+x^{n+1}$을 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ▸ 2점

즉, R_n은 첫째항이 $\frac{1}{2}$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제$(n+1)$항까지의 합이므로

$$R_n=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}$$

▸ 2점

답 구하기 따라서

$\lim\limits_{n\to\infty} R_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}=1$ ▸ 2점

20 **문제 이해** $\overline{\mathrm{BC}}=a$, $\overline{\mathrm{BP}_n}=x_n$, $\overline{\mathrm{BP}_{n+1}}=x_{n+1}$ 이라 하면

$\overline{\mathrm{BQ}_n}=\overline{\mathrm{BP}_n}\cos 60^\circ$

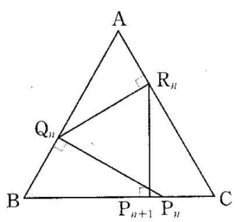
$\overline{\mathrm{AQ}_n}=a-\overline{\mathrm{BQ}_n}$

$\overline{\mathrm{AR}_n}=\overline{\mathrm{AQ}_n}\cos 60^\circ$

$\overline{\mathrm{CR}_n}=a-\overline{\mathrm{AR}_n}$

$\overline{\mathrm{CP}_{n+1}}=\overline{\mathrm{CR}_n}\cos 60^\circ$

$\overline{\mathrm{BP}_{n+1}}=a-\overline{\mathrm{CP}_{n+1}}$



해결 과정

$$x_{n+1}=a-\frac{1}{2}\left\{a-\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{2}x_n\right)\right\}$$

$$=\frac{3}{4}a-\frac{1}{8}x_n$$ ▸ 3점

$$x_{n+1}-\frac{2}{3}a=-\frac{1}{8}\left(x_n-\frac{2}{3}a\right)$$

$$x_n-\frac{2}{3}a=\left(x_1-\frac{2}{3}a\right)\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$

즉, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{2}{3}a$ ▸ 3점

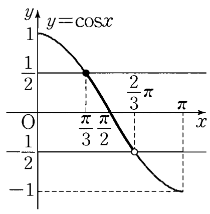
답 구하기 따라서 $\overline{\mathrm{BC}}$를 $2:1$로 내분하는 점에 가까워지므로 선분 BD의 길이 2이다. ▸ 2점

21 **문제 이해** 수열 $\{(2\cos x)^n\}$이 수렴하려면

$-1<2\cos x\le 1$

즉, $-\frac{1}{2}<\cos x\le\frac{1}{2}$ ▸ 2점

해결 과정 $y=\cos x$의 그래프를 그린 후 해당 범위의 부분만 잘라 내면 오른쪽 그림과 같다. ▸ 2점



답 구하기 따라서

$\frac{\pi}{3}\le x<\frac{2}{3}\pi$ ▸ 2점

22 $a_n=x$, $a_{n+1}=y$라 하고 주어진 식을 함수로 표현하면 $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{x}\right)$이 된다.

$y=f(x)$라 하면

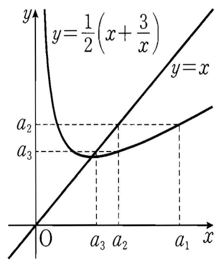
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} f^n(a_1)$

(단, $f^n(x)=f\circ f\circ\cdots\circ f$)

이므로 오른쪽 그래프에서 직선 $y=x$를 이용하여 $f^n(a_1)$을 진행시켜 보면 $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(a_1)$이 두 함수

$y=x$와 $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{x}\right)$

의 그래프의 교점으로 수렴함을 알 수 있다.



따라서 교점을 구해 보면

$x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{x}\right)$

$x=\frac{3}{x}$, $x^2=3$

$x>0$이므로 $x=\sqrt{3}$

그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{3}$

23 $-1\le\sin n\le 1$의 각 변에 $\frac{n+1}{n^2+n}$을 곱하면

$$-\frac{n+1}{n^2+n}\le\frac{n+1}{n^2+n}\sin n\le\frac{n+1}{n^2+n}$$

각 변에 $\lim\limits_{n\to\infty}$를 취하면

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n+1}{n^2+n}\right)}_{=0}\le\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+n}\sin n\le\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+n}}_{=0}$$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+n}\sin n=0$

24 문제 이해 근과 계수의 관계에서

$\alpha_n + \beta_n = -2n$, $\alpha_n\beta_n = 1$ ▸ 3점

해결 과정

$\alpha_n{}^2 + \beta_n{}^2 = (\alpha_n + \beta_n)^2 - 2\alpha_n\beta_n = 4n^2 - 2$

한편, $f(n) = n^2 + 2n^2 + 1 = 3n^2 + 1$이므로

▸ 3점

답 구하기

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n{}^2 + \beta_n{}^2}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{4n^2-2}{3n^2+1} = \dfrac{4}{3}$ ▸ 2점

I－2 급수

01 급수

기본

01 답 (1) 발산 (2) 발산 (3) 1 (4) 발산

02 답 (1) 발산 (2) 발산

(1) $a_n=\dfrac{2n}{3n+1}$ 으로 놓으면

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{3n+1}=\dfrac{2}{3}\neq 0$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

(2) $a_n=\log\dfrac{2n^2}{3+n^2}$ 으로 놓으면

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\log\dfrac{2n^2}{3+n^2}=\log 2\neq 0$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

03 답 8

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하고, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=3$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2a_n-3b_n)=7$

이므로 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=k$라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-3b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}2a_n-\sum_{n=1}^{\infty}3b_n$$
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n-3\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2k-9=7$$

따라서 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=k=8$

04 답 2

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-2)=3$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-2)=0$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$

표준

01 답 ②

제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{4}$

02 답 (1) -1 (2) $-\log 2$

(1) 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\log_2\frac{k^2-1}{k^2}$$
$$=\sum_{k=2}^{n}\log_2\left(\frac{k-1}{k}\times\frac{k+1}{k}\right)$$
$$=\log_2\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)+\log_2\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)+\cdots+\log_2\left(\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}\right)$$
$$=\log_2\left\{\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}\right)\right\}$$
$$=\log_2\left(\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}\right)=\log_2\frac{n+1}{2n}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n+1}{2n}=\log_2\frac{1}{2}=-1$$

(2) 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log\left\{1-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}=\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k}{k+1}\times\frac{k+2}{k+1}\right)$$

$$=\log\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)+\log\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)+\log\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\right)+\cdots+\log\left(\frac{n}{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$=\log\left\{\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\right)\cdots\left(\frac{n}{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\log\frac{n+2}{2(n+1)}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log\frac{n+2}{2(n+1)}=\log\frac{1}{2}=-\log 2$$

03 답 ②

$a_n+\dfrac{n-1}{n+1}=b_n$이라고 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(b_n-\dfrac{n-1}{n+1}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}b_n-\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=0-1=-1$$

04 답 $\dfrac{3}{4}$

첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n\{2\times3+(n-1)\times2\}}{2}=n(n+2)$$

즉, $\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{S_k}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

발전

01 답 ⑤

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.

그런데 이 명제의 역은 반드시 옳다고 할 수 없다.

즉, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이라 해도 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 반드시 수렴한다고 볼 수 없다.

주어진 급수 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots$은 이것을 보여 주는 대표적인 반례이다.

$a_n=\dfrac{1}{n+1}$에서 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이지만 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\infty$이다.

따라서 정답은 ⑤이다.

02 답 6

주어진 급수의 제n항을 a_n, 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$a_n=\frac{2n+1}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}=\frac{2n+1}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$=\frac{6}{n(n+1)}=6\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

따라서

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}6\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=6\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=6\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}6\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=6$$

Ⅰ- 2 급수

02 등비급수

기본

01 답 (1) 수렴, $\frac{3}{2}$ (2) 발산

02 답 (1) 수렴, $\frac{\sqrt{5}+5}{20}$ (2) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (3) 발산

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{n+1}=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}$

$=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5}+5}{20}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(2-\sqrt{3})^n=\frac{2-\sqrt{3}}{1-(2-\sqrt{3})}=\frac{2-\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}}$

$=\frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

03 답 ④

$\sum_{n=0}^{\infty}2^n\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{3}{1-\frac{2}{3}}=9$

04 답 (1) $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$ (2) $0<x<1$

표준

01 답 (1) -2 (2) 23

02 답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $-\frac{1}{5}$ (4) $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

(1) (주어진 식)

$=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin\frac{3}{2}\pi+\left(\frac{1}{2}\right)^3\sin\frac{5}{2}\pi+\cdots$

$=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3-\cdots$

$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3}$

(2) (주어진 식)

$=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin\pi$

$+\left(\frac{1}{2}\right)^3\sin\frac{3}{2}\pi+\left(\frac{1}{2}\right)^4\sin 2\pi+\cdots$

$=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5-\cdots$

$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{2}{5}$

(3) (주어진 식)

$=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cos\pi+\left(\frac{1}{2}\right)^3\cos\frac{3}{2}\pi$

$+\left(\frac{1}{2}\right)^4\cos 2\pi+\cdots$

$=-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots$

$=\frac{-\frac{1}{4}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=-\frac{1}{5}$

(4) (주어진 식)

$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{5}{4}\pi+\frac{1}{2}\cos\frac{9}{4}\pi$

$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{13}{4}\pi+\cdots$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{4}+\cdots$

$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

03 답 ②

첫째항이 1, 공비가 $\frac{1-x}{2}$인 등비급수의 합이 6 이므로

$\frac{1}{1-\frac{1-x}{2}}=6,\ \frac{2}{1+x}=6$

따라서 $x=-\frac{2}{3}$

04 답 $\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

따라서

(주어진 식)$=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^m=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$

발전

01 답 $\frac{\pi}{6}$

공비가 $\sqrt{2}\sin x$이므로

$-1<\sqrt{2}\sin x<1$,

$-\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin x<\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로 수렴,

이때 이 등비급수의 합이 $2+\sqrt{2}$가 되려면

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}\sin x}=2+\sqrt{2}$$

따라서 $\sin x=\frac{1}{2}$

그런데 $0\le x<\frac{\pi}{4}$이므로 $x=\frac{\pi}{6}$

02 답 ⑤

⑤는 반드시 수렴한다고 볼 수 없다.

$-1<r<1 \rightarrow -\frac{1}{3}<\frac{r}{3}<\frac{1}{3} \rightarrow -\frac{4}{3}<\frac{r}{3}-1<-\frac{2}{3}$

Ⅰ-2 급수

03 등비급수의 활용

기본

01 답 (1) $\frac{26}{45}$ (2) $\frac{47}{33}$

(1) $0.5\dot{7}=0.5+0.07+0.007+0.0007+\cdots$

$=0.5+\frac{0.07}{1-0.1}=0.5+\frac{0.07}{0.9}$

$=\frac{5}{10}+\frac{7}{90}=\frac{52}{90}=\frac{26}{45}$

(2) $1.\dot{4}\dot{2}=1+0.42+0.0042+0.000042+\cdots$

$=1+\frac{0.42}{1-0.01}=1+\frac{0.42}{0.99}$

$=1+\frac{42}{99}=\frac{141}{99}=\frac{47}{33}$

02 답 ③

전체 일의 양이 1인 일을 다연, 종현 두 사람이 교대로 남은 작업량의 $\frac{1}{2}$씩 계속해 나가므로 다연이 한 일의 전체 양은

$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots$

이고, 이는 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$인 등비급수이므로 그 합을 구하면

$$\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$$

03 답 ②

처음 떨어진 거리는 10, 첫 번째 튀었다가 떨어진 거리는

$\left(10\times\frac{3}{5}\right)\times 2=20\times\frac{3}{5}$

두 번째 튀었다가 떨어진 거리는

$\left\{\left(10\times\frac{3}{5}\right)\times\frac{3}{5}\right\}\times 2=20\times\left(\frac{3}{5}\right)^2$

$\cdots$

따라서 이동한 거리 l은

$l=10+20\times\frac{3}{5}+20\times\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cdots$

$=10+20\times\frac{\frac{3}{5}}{1-\left(\frac{3}{5}\right)}=40(\mathrm{m})$

04 답 $\sqrt{2}+1$

$\triangle OP_1P_2$에서 $\frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{OP_1}}=\sin 45^\circ$

$\overline{OP_1}=1$이므로 $\overline{P_1P_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\triangle OP_2P_3$에서 $\frac{\overline{P_2P_3}}{\overline{OP_2}}=\sin 45^\circ$

$\overline{OP_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로 $\overline{P_2P_3}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$\triangle OP_3P_4$에서 $\frac{\overline{P_3P_4}}{\overline{OP_3}}=\sin 45^\circ$

$\overline{OP_3}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$이므로 $\overline{P_3P_4}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$

따라서

$\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\cdots$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3+\cdots$

$=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}+1$

표준

01 답 $\left(\frac{9}{13},\ \frac{6}{13}\right)$

점 A_n의 좌표를 $(x_n,\ y_n)$이라고 하자.

$x_1=\overline{OA_1}=1,\ x_2=x_1,$

$x_3=x_1-\overline{A_2A_3}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2,\ x_4=x_3,$

$x_5=x_3+\overline{A_4A_5}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4,\ \cdots$

따라서

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4-\cdots$$
$$=\frac{1}{1-\left(-\frac{4}{9}\right)}=\frac{9}{13}$$

또, $y_1=0$, $y_2=\overline{A_1A_2}=\frac{2}{3}$,

$y_3=y_2$, $y_4=y_3-\overline{A_3A_4}=\left(\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{2}{3}\right)^3$,

$y_5=y_4$, $\cdots$

따라서 $\lim_{n\to\infty} y_n=\left(\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^5-\cdots$
$$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\left(-\frac{4}{9}\right)}=\frac{6}{13}$$

그러므로 점 A_n의 극한의 좌표는 $\left(\frac{9}{13}, \frac{6}{13}\right)$이다.

02 답 ②

처음 12만 톤의 40 %가 정수되어 재활용되고, 재활용될 때마다 40 %씩 재활용되므로 이러한 과정을 무한히 반복할 때, 사용할 수 있는 물의 양은

$12+12\times\frac{2}{5}+12\times\left(\frac{2}{5}\right)^2+\cdots=\frac{12}{1-\frac{2}{5}}=20$ (만 톤)

03 답 3

$\triangle A_nB_nC_n$의 넓이를 S_n이라고 하자.

$\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 넓이는 $\triangle A_nB_nC_n$의 넓이의 $\frac{1}{4}$이므로 $S_{n+1}=\frac{1}{4}S_n$

또, $S_1=\frac{1}{4}\triangle ABC=\frac{9}{4}$이므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{9}{4}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{\frac{9}{4}}{1-\frac{1}{4}}=3$

04 답 ④

$a_n=0.7+0.07+0.007+\cdots+0.0\cdots07$
$$=\frac{0.7\{1-(0.1)^n\}}{1-0.1}=\frac{7}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{7}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}=\frac{7}{9}$

발전

01 답 $\frac{27}{8}\sqrt{3}$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times3\times3\times\sin 60^\circ=\frac{9\sqrt{3}}{4}$

$\triangle A_1BB_1$에서

$\overline{A_1B_1}^2=\overline{A_1B}^2+\overline{BB_1}^2-2\overline{A_1B}\times\overline{BB_1}\times\cos 60^\circ$
$$=1^2+2^2-2\times1\times2\times\frac{1}{2}=3$$

따라서 $\overline{A_1B_1}=\sqrt{3}$

$\triangle A_1B_1C_1=\frac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2\times\sin 60^\circ=\frac{3}{4}\sqrt{3}$

각 정삼각형의 넓이는 첫째항이 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열을 이루므로 구하는 넓이의 합 S는

$$S=\frac{\frac{9}{4}\sqrt{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27}{8}\sqrt{3}$$

02 답 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$

$x=\overline{OP_1}\cos30^\circ-\overline{P_1P_2}\cos30^\circ+\overline{P_2P_3}\cos30^\circ-\cdots$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-\cdots$$
$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$y=\overline{OP_1}\sin30^\circ+\overline{P_1P_2}\sin30^\circ+\overline{P_2P_3}\sin30^\circ+\cdot$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

따라서 점 P_n은 점 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$에 가까워진다.

Ⅰ-2 급수

01 ㄴ	**02** ③	**03** ②	**04** ②
05 ④	**06** ①	**07** ①	**08** ③
09 발산	**10** ①	**11** ②	**12** ④
13 1	**14** 6	**15** 2	**16** ②
17 $\frac{721}{909}$	**18** 5	**19** ②	**20** -2
21 ②	**22** $2\sqrt{2}$	**23** ④	**24** 36억 원

01 ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{4n-1}=\frac{1}{2}$이므로 급수

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{4n-1}$ 은 발산한다.

ㄴ. 제n항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{4}$

따라서 주어진 급수는 $\frac{3}{4}$ 으로 수렴한다.

ㄷ. 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$=\sqrt{n+1}-1$$

이므로 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$은 발산한다.

ㄹ. 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_{2n-1}=-1,\ S_{2n}=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

이상에서 수렴하는 것은 ㄴ뿐이다.

02 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1$$

03 $1.5\dot{4}$를 분수로 나타내면

$1.5\dot{4}=1.5+0.04+0.004+0.0004+\cdots$

$$=\frac{3}{2}+\frac{\frac{4}{100}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{2}+\frac{2}{45}=\frac{139}{90}$$

오차가 8이므로

$1.5\dot{4}x-1.54x=8,\quad \frac{139}{90}x-\frac{154}{100}x=8$

$\frac{1}{225}x=8$

따라서 $x=1800$

04 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하고 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=-3$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-3b_n)=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n-3\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n-3\times(-3)=13$$

$2\sum_{n=1}^{\infty}a_n=4$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$

05 $a_{n+1}=\frac{1}{5}a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4이고 공비가 $\frac{1}{5}$ 인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{4}{1-\frac{1}{5}}=5$$

06 ㄱ, ㄴ

07 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^n-1)^2}{5^n}$

$\displaystyle=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}-2\times2^n+1}{5^n}$

$\displaystyle=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}2\times\left(\frac{2}{5}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$

$\displaystyle=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}-\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{2}{5}}+\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}$

$\displaystyle=4-\frac{4}{3}+\frac{1}{4}=\frac{35}{12}$

08 문제 이해 그림 R_1에서 색칠된 부분의 넓이는 정사각형의 넓이에서 사분원 4개의 넓이를 빼면 된다. ▸ 2점

해결 과정 $S_1=2^2-4\times\frac{\pi}{4}=4-\pi$

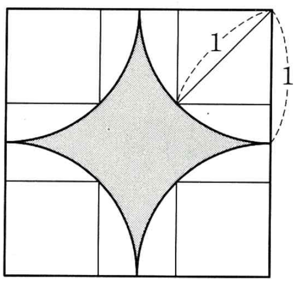


그림 R_2에서 작은 정사각형의 대각선의 길이가 그림 R_1의 사분원의 반지름의 길이와 같으므로 1이다.
따라서 작은 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.
그림 R_2의 바깥쪽 큰 정사각형과 안쪽의 작은 정사각형 한 개의 닮음비가 $2:\frac{\sqrt{2}}{2}$, 즉 $1:\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{1}{8}$이다.

그림 R_n에서 새로 그려지는  모양 전체의 넓이의 합을 T_n이라 하면 $T_1=S_1=4-\pi$이고

$T_{n+1}=4\times\frac{1}{8}T_n=\frac{1}{2}T_n\ (n\geq1)$ ▸ 2점

답 구하기 따라서

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}T_n=\sum_{n=1}^{\infty}(4-\pi)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\displaystyle=\frac{4-\pi}{1-\frac{1}{2}}=8-2\pi$ ▸ 2점

09 주어진 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n 이라 하면

$S_1=2,\ S_2=\frac{1}{2},\ S_3=2,\ S_4=\frac{2}{3},\ S_5=2,\ \cdots$

이므로

$S_{2n-1}=2,\ S_{2n}=\frac{n}{n+1}$

즉, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=2,\ \lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to}S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

10 n이 홀수이면

$\cos\frac{\pi}{2}=0,\ \cos\frac{3\pi}{2}=0,\ \cdots$

따라서 n이 짝수인 경우만 생각하면 된다.
$n=2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots$일 때

$\cos\frac{2\pi}{2}=-1,\ \cos\frac{4\pi}{2}=1,\ \cos\frac{6\pi}{2}=-1,$

$\cos\frac{8\pi}{2}=1,\ \cdots$이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\cos\frac{n\pi}{2}=-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4-\cdots$

$\displaystyle=\frac{-\frac{4}{9}}{1+\frac{4}{9}}=\frac{-4}{9+4}=-\frac{4}{13}$

11 $\displaystyle S_n=\frac{n^2+2}{1+2+3+\cdots+n}$

$\displaystyle=\frac{n^2+2}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2(n^2+2)}{n^2+n}$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n^2+2)}{n^2+n}=2$

12 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{1}{k^2+2k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \log \frac{k^2+2k+1}{k^2+2k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$$

$$= \log\frac{2^2}{1\cdot 3} + \log\frac{3^2}{2\cdot 4} + \cdots + \log\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

$$= \log\left\{\frac{2^2}{1\times 3}\times\frac{3^2}{2\times 4}\times\frac{4^2}{3\times 5}\times\cdots\times\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right\}$$

$$= \log\frac{2(n+1)}{n+2}$$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \log\frac{2(n+1)}{n+2} = \log 2$

13 넓이가 S_1인 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$$S_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

넓이가 S_2인 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{1}{2}$이므로

$$S_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

넓이가 S_3인 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 이므로

$$S_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

14 해결 과정 $a_1 = 10 - 10\times\frac{1}{2} + 2 = 7$,

$$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}a_n + 2 = \frac{1}{2}a_n + 2$$

$(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로

$a_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}(a_n - 4)$ ▸ 2점

따라서 수열 $\{a_n - 4\}$는 첫째항이

$a_1 - 4 = 7 - 4 = 3$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로 $a_n - 4 = 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ▸ 2점

답 구하기 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - 4) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$= \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = 6$ ▸ 2점

15 주어진 등비급수에서 공비는 $x(2-x)$라는 것을 알 수 있다.

등비급수가 수렴하기 위해서는

$-1 < x(2-x) < 1$을 만족해야 하므로

(ⅰ) $-1 < x(2-x) \iff x^2 - 2x - 1 < 0$

$\iff 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$

(ⅱ) $x(2-x) < 1 \iff x^2 - 2x + 1 > 0 \iff$

$(x-1)^2 > 0 \iff x \neq 1$인 모든 실수

(ⅰ), (ⅱ)에서 $1-\sqrt{2} < x < 1$ 또는

$1 < x < 1+\sqrt{2}$

따라서 정수 x는 0, 2의 두 개이다.

16 다항식 $a_n x^2 + a_n x - 2$가 $x-n$으로 나누어떨어지므로 $a_n n^2 + a_n n - 2 = 0$에서

$$a_n = \frac{2}{n(n+1)}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 2$$

17 해결 과정 7^n을 10으로 나눈 나머지는 7^n의 일의 자릿수와 같으므로

$a_1=7,\ a_2=9,\ a_3=3,\ a_4=1,$

$a_5=7,\ a_6=9,\ a_7=3,\ a_8=1,\ \cdots$ ▸ 2점

답 구하기 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\frac{a_4}{10^4}+\frac{a_5}{10^5}+\cdots$$

$$=0.7+0.09+0.003+0.0001+0.00007+0.000009+\cdots$$

$$=0.\dot{7}93\dot{1}=\frac{7931}{9999}=\frac{721}{909}$$ ▸ 4점

18 $y=8^n x^2-2^n(2^n+1)x+1$이 x축과 만나는 점의 x좌표를 구하면

$4^n\cdot 2^n x^2-(4^n+2^n)x+1=0$

$(4^n x-1)(2^n x-1)=0$

즉, $x=\dfrac{1}{4^n}$ 또는 $x=\dfrac{1}{2^n}$

이때 n은 자연수로 $\dfrac{1}{4^n}<\dfrac{1}{2^n}$에서

$l_n=\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{4^n}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

따라서 $p+q=5$

19 $a+a^2+a^3+a^4+\cdots=\dfrac{a}{1-a}=2$

$a=2-2a$, 즉 $a=\dfrac{2}{3}$

따라서

$$a-a^2+a^3-a^4+\cdots=\frac{a}{1+a}=\frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{2}{5}$$

20 해결 과정 주어진 급수의 제n항을 b_n이라 하면

$b_n=\dfrac{a_n}{n^2}-5$이다. ▸ 2점

또 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$,

$b_n=\dfrac{a_n}{n^2}-5$에서 $\dfrac{a_n}{n^2}=b_n+5$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}(b_n+5)=\lim_{n\to\infty}b_n+5=5$$ ▸ 2점

답 구하기 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+3a_n}{n^2+2n-2a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{3a_n}{n^2}}{1+\frac{2}{n}-\frac{2a_n}{n^2}}$$

$$=\frac{3-0+3\times5}{1+0-2\times5}=-2$$ ▸ 2점

21 등비급수의 첫째항이 $\cos^2\theta$, 공비가 $\sin\theta$이고,

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $0<\sin\theta<1$이므로

주어진 등비급수의 합 S는

$S=\dfrac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}=\dfrac{3}{2}$이므로

$\dfrac{1-\sin^2\theta}{1-\sin\theta}=\dfrac{3}{2}$, $1+\sin\theta=\dfrac{3}{2}$

즉, $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

그런데 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

22 해결 과정 $\overline{AA_1}=a$로 놓으면

$\overline{A_1B_1}=\overline{A_1B}$에서 $a=2-a$, $a=1$이므로

$\overline{AB_1}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\overline{A_1A_2}=\dfrac{1}{2}$, $\overline{A_2A_3}=\dfrac{1}{4}$, $\overline{A_3A_4}=\dfrac{1}{8}$, $\cdots$이고

$\overline{A_1B_2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\overline{A_2B_3}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $\overline{A_3B_4}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$,

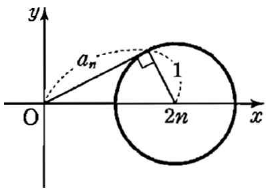
$\cdots$

답 구하기 따라서

$\overline{AB_1}+\overline{A_1B_2}+\overline{A_2B_3}+\overline{A_3B_4}+\cdots$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{1-\dfrac{1}{2}}=2\sqrt{2}$ ▸ 2점

23 오른쪽 그림과 같이 원점에서 원에 그은 접선과 원의 반지름이 서로 수직이므로 피타고라스 정리에 의하여



$a_n{}^2=(2n)^2-1^2=(2n-1)(2n+1)$

따라서 구하는 급수의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{a_n{}^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1$$

24 해결 과정 (ⅰ) 21억 원의 기금을 운영하여 연말까지 20 % 의 이익을 내므로 1 년 후에 기금과 이익을 합한 금액은

$21+21\times\dfrac{1}{5}=21\times\dfrac{6}{5}$(억 원)

이 금액의 40% 를 장학금으로 지급하므로

$21\times\dfrac{6}{5}\times\dfrac{2}{5}$(억 원) …… ㉠ ▸ 3점

(ⅱ) 1 년 후에 장학금을 지급하고 남은 금액이

$21\times\dfrac{6}{5}\times\dfrac{3}{5}$(억 원)

이므로 이 금액에 대하여 2 년 후에 기금과 이익을 합한 금액은

$21\times\dfrac{6}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{6}{5}$(억 원)

이 금액의 40 % 를 장학금으로 지급하므로

$21\times\dfrac{6}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{6}{5}\times\dfrac{2}{5}$

$=\left(21\times\dfrac{6}{5}\times\dfrac{2}{5}\right)\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{6}{5}$(억 원) …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 지급되는 장학금의 총액은 첫째항이 $21\times\dfrac{6}{5}\times\dfrac{2}{5}$, 공비가 $\dfrac{3}{5}\times\dfrac{6}{5}$ 인 등비급수이다. ▸ 3점

답 구하기 따라서 구하는 극한값은

$$\frac{21\times\dfrac{6}{5}\times\dfrac{2}{5}}{1-\dfrac{3}{5}\times\dfrac{6}{5}}=\frac{\dfrac{21\times 12}{25}}{1-\dfrac{18}{25}}=36\text{(억 원)}$$ ▸ 2점

Ⅰ 수열의 극한

01 ④	**02** ③	**03** ②	**04** 17	**05** ④
06 ②	**07** ③	**08** ①	**09** ⑤	**10** ④
11 ⑤	**12** ③	**13** $\frac{1}{2}$	**14** ⑤	**15** ③
16 ⑤	**17** ④	**18** ②	**19** ④	**20** -1
21 $\frac{4}{13}$	**22** $\frac{\pi}{3}$	**23** $\frac{8}{3}$	**24** $-\frac{2}{3}$	**25** 4

01 ④ $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n}{3b_n}=\frac{2\times2}{3\times(-3)}=-\frac{4}{9}$

02 $\lim_{n\to\infty}\frac{n-\sqrt{n^2+9}}{\sqrt{n^2+10}-n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-\sqrt{n^2+9})(n+\sqrt{n^2+9})(\sqrt{n^2+10}+n)}{(\sqrt{n^2+10}-n)(\sqrt{n^2+10}+n)(n+\sqrt{n^2+9})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-9(\sqrt{n^2+10}+n)}{10(n+\sqrt{n^2+9})}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-9\left(\sqrt{1+\frac{10}{n^2}}+1\right)}{10\left(1+\sqrt{1+\frac{9}{n^2}}\right)}=-\frac{9}{10}$

03 $a_{n+1}=\frac{1999}{2000}a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비 $r=\frac{1999}{2000}$인 등비수열이다.

이때 $|r|<1$이므로 이 수열의 극한값은 0이다.

즉, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+10}{4a_n+2}=\frac{0+10}{0+2}=5$

04 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+4}+2x}{x^{2n}+1}$에서

$f(2)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+4}+2\times2}{2^{2n}+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^4+\frac{2^2}{2^{2n}}}{1+\frac{1}{2^{2n}}}=16$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+4}+2\times\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}+1}=1$

따라서 $f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=16+1=17$

05 $n+1>0$이므로

$2n-1<(n+1)a_n<2n+4$에서

$\frac{2n-1}{n+1}<a_n<\frac{2n+4}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1}\le\lim_{n\to\infty}a_n\le\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{n+1}$

그런데 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{n+1}=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=2$

06 $a_n=2n-1$이므로

$a_{2n}=2(2n)-1=4n-1$,

$a_{2n-1}=2(2n-1)-1=4n-3$에서

$a_2+a_4+\cdots+a_{2n}$

$=\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=\sum_{k=1}^{n}(4k-1)$

$=4\times\frac{n(n+1)}{2}-n=2n^2+n$

$a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}$

$=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}(4k-3)$

$=4\times\frac{n(n+1)}{2}-3n=2n^2-n$

따라서

(주어진 식)

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n^2+n}-\sqrt{2n^2-n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2n^2+n}-\sqrt{2n^2-n})(\sqrt{2n^2+n}+\sqrt{2n^2-n})}{\sqrt{2n^2+n}+\sqrt{2n^2-n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{2n^2+n}+\sqrt{2n^2-n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}}$

$=\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

07 $\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{n^2-4n}-n\right)}{n^p}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{n^2-4n}-n\right)\left(\sqrt{n^2-4n}+n\right)}{n^p\left(\sqrt{n^2-4n}+n\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^2-4n-n^2)}{n^p\left(\sqrt{n^2-4n}+n\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-4n^2}{n^p\left(\sqrt{n^2-4n}+n\right)}$$

$=q$

이때 0이 아닌 극한값 q가 존재하므로 분모와 분자의 차수가 같아야 하므로

$p=1$

이때의 극한값은

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{-4n^2}{n\left(\sqrt{n^2-4n}+n\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{1-\frac{4}{n}}+1}$$

$$=-\frac{4}{2}$$

$=-2$

따라서

$p-q=1-(-2)=3$

08 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-2}-n}{n-\sqrt{n^2-1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-2}-n\right)\left(\sqrt{n^2-2}+n\right)\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)}{\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)\left(\sqrt{n^2-2}+n\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)}{\sqrt{n^2-2}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)}{\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}+1}$$

$$=\frac{-4}{2}$$

$=-2$

09 ⑤ 수렴하는 수열이라 해도 $b_n=0$ 또는 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$일 땐 성립하지 않는다.

10 $S_n=2n^2+3n$에서

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2n^2+3n)-\{2(n-1)^2+3(n-1)\}$

$=(2n^2+3n)-(2n^2-n-1)$

$=4n+1\ (n\geq 2)$

이때 $a_1=S_1=5$이므로

$a_n=4n+1\ (n\geq 1)$에서

$a_n^2=(4n+1)^2=16n^2+8n+1$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n^{\ 2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{16n^2+8n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{16+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{8}$$

11 분모, 분자를 3^n으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}a_n-2^n}{2^{n+1}a_n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n a_n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}3a_n=15$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=5$

12 $\frac{2+3}{6}+\frac{2^2+3^2}{6^2}+\frac{2^3+3^3}{6^3}+\cdots$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^3}\right)+\cdots$$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

13 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$

14 ㄱ. 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_1=2,\ S_2=0,\ S_3=2,\ S_4=0,\ \cdots$이므로

$S_{2n-1}=2,\ S_{2n}=0$에서

$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n-1}=2,\ \lim S_{2n}=0$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

ㄴ. $S_n=0+0+0+\cdots+0=0$ 이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=0$

따라서 주어진 급수는 0 으로 수렴한다.

ㄷ. 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{3}$

따라서 주어진 급수는 $\frac{1}{3}$로 수렴한다.

이상에서 수렴하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

15 $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\sin\left(\frac{\pi}{6}+n\pi\right)$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^1\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^3\left(-\frac{1}{2}\right)+\cdots$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

16 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log_4\frac{k+2}{k+1}$$
$$=\log_4\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$=\log_4\frac{n+2}{2}$$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\log_4\frac{n+2}{2}=\infty$ (발산)

17 $$a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$$
$$=\frac{2}{n(n+1)}$$
$$=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$$

따라서

(주어진 식)$=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$

18 주어진 수열은

$5^{\frac{1}{2}},\ 5^{\frac{1}{4}},\ 5^{\frac{1}{8}},\ \cdots$

이므로 $a_n=5^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log_5 a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\log_5 5^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

19 ㄱ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

이때 $\lim_{n\to}\left(a_n+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\neq 0$이므로 급수

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{1}{4}\right)$은 발산한다. (거짓)

ㄴ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$

즉, $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다. (참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty} a_n=0$, $\lim_{n\to\infty} b_n=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n\times\lim_{n\to\infty} b_n=0$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

20 해결 과정 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-1\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-1\right)=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=1$ ▸ 4점

답 구하기 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-4a_n}{2n-a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-4\times\frac{a_n}{n}}{2-\frac{a_n}{n}}$$

$$=\frac{3-4\times 1}{2-1}=-1$$ ▸ 4점

21 해결 과정 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면

$a_n=ar^{n-1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{a}{1-r}=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\,2}=\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{a^2}{(1-r)(1+r)}=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡으로부터 $a=\frac{2}{3}$, $r=\frac{1}{3}$ ▸ 4점

답 구하기 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\,3}=\frac{a^3}{1-r^3}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^3}=\frac{4}{13}$$ ▸ 2점

22 해결 과정 $-1\leq\cos\theta\leq 1$이므로

$-\frac{1}{4}\leq\frac{1}{4}\cos\theta\leq\frac{1}{4}$

즉, $-1\leq\frac{1}{4}\cos\theta\leq 1$ ▸ 2점

주어진 급수는 수렴하고 그 합이 $\frac{8}{7}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\cos\theta\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}\cos\theta}=\frac{8}{7}\text{에서}$$

$1-\frac{1}{4}\cos\theta=\frac{7}{8}$, $\frac{1}{4}\cos\theta=\frac{1}{8}$

즉, $\cos\theta=\frac{1}{2}$ ▸ 2점

답 구하기 이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로

$\theta=\frac{\pi}{3}$ ▸ 2점

23 해결 과정 수열 $\{\log_2 a_n\}$이 첫째항이 1이고, 공차가 -2인 등차수열을 이루고 있으므로

$\log_2 a_n=1+(n-1)\times(-2)=3-2n$ ▸ 3점

$a_n=2^{3-2n}=\frac{8}{4^n}$ ▸ 3점

답 구하기 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{8}{3}$$ ▸ 2점

24 해결 과정 등비급수의 공비가 $\frac{3}{4}x$이므로 등비급수의 수렴할 조건에 의하여

$-1<\frac{3}{4}x<1$

즉, $-\frac{4}{3}<x<\frac{4}{3}$ $\cdots\cdots ㉠$

첫째항이 1이므로 등비급수의 합은

$$\frac{1}{1-\frac{3}{4}x}=\frac{4}{4-3x}=-x$$ ▸ 2점

그러므로 $3x^2-4x-4=0$에서

$(3x+2)(x-2)=0$

$x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$ ▸ 2점

답 구하기 따라서 ㉠을 만족하는 x의 값은

$-\frac{2}{3}$이다. ▸ 2점

25 해결 과정 $\overline{\mathrm{OA}_n}=a_n$이라 하면

$\overline{\mathrm{OC}_1}=2=\sqrt{a_1^2+a_1^2}$에서

$a_1=\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{OC}_2}=\sqrt{2}=\sqrt{a_2^2+a_2^2}$에서

$a_2=1$

$\overline{\mathrm{OC}_{n+1}}=\overline{\mathrm{OA}_n}$, $\overline{\mathrm{OC}_{n+1}}=\sqrt{2}\,\overline{\mathrm{OA}_{n+1}}$이므로

$\overline{\mathrm{OA}_n}=\sqrt{2}\,\overline{\mathrm{OA}_{n+1}}$

즉, $a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}a_n$ ▸ 3점

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\sqrt{2}$, 공비가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$인 등비수열이므로

$a_n=\sqrt{2}\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

$S_n=a_n^2=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ▸ 3점

답 구하기 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$$

▸ 2점

Ⅱ-1 여러 가지 함수의 미분

01 지수함수와 로그함수의 극한

기본

01 답 (1) ∞ 발산 (2) 0 (3) ∞ 발산 (4) 0

02 답 (1) ∞ 발산 (2) $-\infty$ 발산 (3) $-\infty$ (4) ∞ 발산

03 답 (1) $e^{\frac{3}{2}}$ (2) e^{12} (3) $e^{-\frac{3}{2}}$ (4) e^2

(1) (주어진 식)$=\lim_{x\to0}\left\{(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right\}^{\frac{3}{2}}=e^{\frac{3}{2}}$

(2) (주어진 식)$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right\}^{12}=e^{12}$

(3) $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

(주어진 식) $=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{2t}\right)^{-3t}$

$=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2t}\right)^{2t}\right\}^{-\frac{3}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}$

(4) $x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이고 $x=t+1$이므로

(주어진 식)$=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{2}{t}}$

$=\lim_{t\to0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^2=e^2$

04 답 (1) 2 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{\ln3}$ (4) $\ln3$

(1) (주어진 식)$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\times2$

$=1\times2=2$

(2) (주어진 식) $=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\times\frac{1}{2}$

$=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(3) (주어진 식)$=\lim_{x\to0}\frac{\log_3(1+3x)}{3x}\times3$

$=3\times\frac{1}{\ln3}=\frac{3}{\ln3}$

(4) (주어진 식) $=\lim_{x\to0}\frac{(6^x-1)-(2^x-1)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{(6^x-1)}{x}-\frac{(2^x-1)}{x}\right)$

$=\ln6-\ln2=\ln3$

표준

01 답 (1) -1 (2) 9 (3) $\log_5 2$ (4) $\log\frac{2}{9}$

02 답 (1) e (2) 2

(1) $x-1=t$로 놓으면 $x=1+t$이고, $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{e^x-e}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{e^{1+t}-e}{t}=e\times\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}$

$=e\times1=e$

(2) $x\to0$일 때, $x\sin2x\to0$이므로
주어진 식의 분모, 분자에 $x\sin2x$를 곱하면

$\lim_{x\to0}\frac{e^{x\sin2x}-1}{x\ln(1+x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\sin2x}-1}{x\sin2x}\times\frac{\sin2x}{x}\times\frac{x}{\ln(1+x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\sin2x}-1}{x\sin2x}\times\frac{\sin2x}{x}\times\frac{1}{\frac{\ln(1+x)}{x}}$

$=1\times2\times1=2$

03 답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{e}$

(1) 주어진 식의 분모, 분자를 x로 나누면

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{\ln(1+2x)}{x}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}}{2\times\frac{\ln(1+2x)}{2x}}=\frac{1}{2}$$

(2) $x-e=t$로 놓으면 $x=t+e$이고, $x\to e$일 때, $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(t+e)-\ln e}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\ln\frac{t+e}{e}}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)}{t}$$

$$=\frac{1}{e}\lim_{t\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)}{\frac{t}{e}}=\frac{1}{e}\times1=\frac{1}{e}$$

04 답 (1) 6 (2) -1

(1) 분모, 분자를 3^x으로 나누어서 극한값을 계산하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a\times3^x}{3^{x+1}-2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{3-\left(\frac{2}{3}\right)^x}=\frac{a}{3}=2$$

따라서 $a=6$

(2) $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이므로

$$\lim_{x\to2}\{\ln(x+a)+b\}=0$$

$$\ln(2+a)+b=0$$

$$b=-\ln(2+a)\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

또 ㉠을 주어진 식에 대입한 후, $x-2=t$로 놓으면

$x=2+t$이고, $x\to2$일 때, $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{\ln(x+a)-\ln(2+a)}{x^2-4}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\ln(x+a)-\ln(2+a)}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{t\to0}\frac{\ln(2+t+a)-\ln(2+a)}{t(4+t)}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{t\to0}\frac{\ln\left(\frac{2+t+a}{2+a}\right)}{t(4+t)}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{t\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{2+a}\right)}{(4+t)\times(2+a)\times\frac{t}{2+a}}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{t\to0}\frac{1}{2+a}\times\frac{1}{4+t}\times\frac{\ln\left(1+\frac{t}{2+a}\right)}{\frac{t}{2+a}}=\frac{1}{4}$$

즉, $\frac{1}{2+a}\times\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{4}$이므로 $a=-1$

㉠에 $a=-1$을 대입하면 $b=0$

따라서 $a+b=-1+0=-1$

발전

01 답 $\frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right\}^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{n+3}{n+2}\right)\times\cdots\times\left(\frac{2n+1}{2n}\right)\right\}^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n\times\frac{1}{2}}$$

$$=\ln e^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

02 답 $\frac{1}{3}$

$\mathrm{A_k}(k,\ln(k+1))$, $\mathrm{B_k}(3k,\ln(3k+1))$이므로

$$\lim_{k\to0}\frac{\overline{\mathrm{OA_k}}}{\overline{\mathrm{OB_k}}}=\lim_{k\to0}\frac{\sqrt{k^2+\{\ln(k+1)\}^2}}{\sqrt{9k^2+\{\ln(3k+1)\}^2}}$$

$$=\lim_{k\to0}\frac{\sqrt{1+\left\{\frac{\ln(k+1)}{k}\right\}^2}}{\sqrt{9+\left\{\frac{\ln(3k+1)}{k}\right\}^2}}$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{\sqrt{1+\left\{\frac{\ln(k+1)}{k}\right\}^2}}{\sqrt{9+9\left\{\frac{\ln(3k+1)}{3k}\right\}^2}}$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{\sqrt{1+1^2}}{\sqrt{9+9\times 1^2}}=\frac{1}{3}$$

Ⅱ-1 여러 가지 함수의 미분

02 지수함수와 로그함수의 미분

기본

01 답 (1) $y'=3e^x$ (2) $y'=5^x\ln 5$
(3) $y'=3e^{3x}$ (4) $y'=4\times 2^{4x}\ln 2$

02 답 (1) $y'=\dfrac{1}{x}$ (2) $y'=\dfrac{1}{x\ln 2}$
(3) $y'=\dfrac{3}{x}$ (4) $y'=\dfrac{1}{x\ln 3}$

03 답 (1) $y'=e^x+xe^x$
(2) $y'=4\times 3^x(x\ln 3+1)$
(3) $y'=xe^x$
(4) $y'=2^x\{(2x+3)+(x^2+3x)\ln 2\}$

04 답 (1) $y'=\ln 3x+1$
(2) $y'=\log_2 x+\dfrac{1}{\ln 2}$
(3) $y'=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$
(4) $y'=\dfrac{(2x+1)\ln 8x+x+1}{\ln 2}$

(3) $y'=(e^x)'\ln x+e^x(\ln x)'$
$=e^x\ln x+e^x\times\dfrac{1}{x}$
$=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$

(4) $y'=(x^2+x)'\log_2 8x+(x^2+x)\{3+\log_2 x\}'$
$=(2x+1)\log_2 8x+(x^2+x)\left(\dfrac{1}{x\ln 2}\right)$
$=\dfrac{(2x+1)\ln 8x}{\ln 2}+\dfrac{x(x+1)}{x\ln 2}$
$=\dfrac{(2x+1)\ln 8x+x+1}{\ln 2}$

표준

01 답 ③

02 답 11

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-4}{x-1}=7$ 에서 $x\to 1$ 일 때 (분모)$\to 0$ 이고,
극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$ 이어야 한다.
즉, $\displaystyle\lim_{x\to 1}\{f(x)-4\}=0$ 이므로
$f(1)-4=a-4=0$
즉, $a=4$
$f(x)=4+b\ln x$ 에서 $f'(x)=\dfrac{b}{x}$ 이고
$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-4}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=7$ 이므로
$f'(1)=\dfrac{b}{1}=7$
즉, $b=7$
따라서 $a+b=4+7=11$

03 답 2

$f(x)=\begin{cases} g(x)=\ln x & (x\ge 1)\\ h(x)=ax+b & (x<1)\end{cases}$ 로 놓으면 함수
$f(x)$가 $x=1$에서 미분 가능할 조건은
(ⅰ) $g(1)=h(1)$
(ⅱ) $g'(1)=h'(1)$
이때 $f'(x)$를 구하면
$f'(x)=\begin{cases} g'(x)=\dfrac{1}{x} & (x>1)\\ h'(x)=a & (x<1)\end{cases}$
(ⅰ) $g(1)=h(1)$에 의하여
$\ln 1=a+b$, 즉 $a+b=0$
(ⅱ) $g'(1)=h'(1)$에 의하여
$1=a$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a=1$, $b=-1$
따라서 $a-b=1-(-1)=2$

04 답 $16\ln 2$

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$
$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)-f(1-h)+f(1)}{h}$
$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$
$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$

$f(x)=2^{2x}=4^{x}$에서 $f'(x)=4^{x}\ln4$
따라서 $2f'(1)=2\times4\times\ln4=16\ln2$

발전

01 답 -1

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로
극한값 $\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$이 존재해야 한다.

(i) $h\to+0$일 때

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to+0}\frac{|\ln(1+h)|+a|h|}{h}$$
$$=\lim_{h\to+0}\frac{\ln(1+h)+ah}{h}$$
$$=\lim_{h\to+0}\left\{\ln(1+h)^{\frac{1}{h}}+a\right\}$$
$$=\ln e+a=1+a$$

(ii) $h\to-0$일 때

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to-0}\frac{|\ln(1+h)|+a|h|}{h}$$
$$=\lim_{h\to-0}\frac{-\ln(1+h)-ah}{h}$$
$$=\lim_{h\to-0}\left\{-\ln(1+h)^{\frac{1}{h}}-a\right\}$$
$$=-\ln e-a=-1-a$$

따라서 극한값이 존재하려면 좌극한과 우극한이 같아야 하므로 (i), (ii)에서
$1+a=-1-a$
$a=-1$

02 답 1

$x\neq1$일 때, $f(x)=\frac{e^{x}-e}{e(x-1)}=\frac{e^{x-1}-1}{x-1}$이고
$f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로
$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}$
$g(x)=e^{x-1}$으로 놓으면 $g(1)=1$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$$

이때 $g'(x)=e^{x-1}$이므로
$f(1)=g'(1)=1$

Ⅱ-1 여러 가지 함수의 미분

03 삼각함수의 덧셈정리

기본

01 답 (1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

(3) $2+\sqrt{3}$

02 답 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) 1

03 답 (1) $\frac{2+2\sqrt{42}}{15}$ (2) $\frac{\sqrt{21}+4\sqrt{2}}{15}$

두 각 α, β가 제1사분면의 각이므로

$\cos\alpha>0$, $\sin\beta>0$ ⋯⋯ ㉠

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$에서

$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, $\sin\beta=\pm\sqrt{1-\cos^2\beta}$

이때 ㉠에 의해

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(1) $$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{21}}{5}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{2+2\sqrt{42}}{15}$$

(2) $$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{21}}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{21}+4\sqrt{2}}{15}$$

04 답 (1) 1 (2) $\sqrt{17}$

이차방정식 $2x^2-3x-1=0$의 두 근이 $\tan\alpha$, $\tan\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{3}{2}$, $\tan\alpha\tan\beta=-\frac{1}{2}$

(1) $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{3}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=1$$

(2) $$(\tan\alpha-\tan\beta)^2=(\tan\alpha+\tan\beta)^2-4\tan\alpha\tan\beta=\left(\frac{3}{2}\right)^2-4\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{4}$$

그런데 $\tan\alpha>\tan\beta$이므로

$$\tan\alpha-\tan\beta=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

따라서

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{\sqrt{17}}{2}}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{17}$$

표준

01 답 ④

$0<A<\frac{\pi}{2}$, $0<B<\frac{\pi}{2}$이므로

$$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$A+B+C=\pi$ 이므로

$$\sin C=\sin\{\pi-(A+B)\}=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{2\sqrt{15}+\sqrt{5}}{12}$$

02 답 $-\frac{5}{8}$

$\sin\alpha-\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}$ ⋯⋯ ㉠

$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{4}$

…… ㉡

㉠+㉡을 하면

$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)$

$+2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=\dfrac{3}{4}$

$2+2\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{3}{4}$

따라서 $\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{5}{8}$

03 답 ②

$\sec^2 x=1+\tan^2 x$ 에서

$\sec^2 x=1+\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{25}{16}$, $\cos^2 x=\dfrac{16}{25}$

$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$이므로 $\cos x=-\dfrac{4}{5}$

또, $\sin^2 x+\cos^2 x=1$에서

$\sin^2 x=1-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}$

$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$이므로 $\sin x=\dfrac{3}{5}$

따라서

$\sin 2x+\cos 2x=2\sin x\cos x+1-2\sin^2 x$

$=2\times\dfrac{3}{5}\times\left(-\dfrac{4}{5}\right)+1-2\times\dfrac{9}{25}$

$=-\dfrac{17}{25}$

04 답 $\dfrac{5}{6}$

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ 에서 $\cos\theta<0$ 이므로

$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=-\dfrac{2}{3}$

따라서

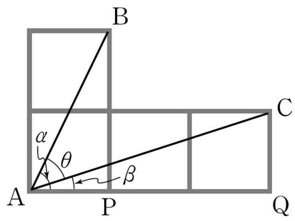
$\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\tan\dfrac{\theta}{2}=\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\times\dfrac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\theta}{2}}$

$=\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}=\dfrac{1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)}{2}=\dfrac{5}{6}$

발전

01 답 45°

오른쪽 그림과 같이 정사각형의 한 꼭짓점을 각각 P, Q라 하고 $\angle\mathrm{BAP}=\alpha$, $\angle\mathrm{CAQ}=\beta$라 하면



정사각형의 한 변의 길이가 1이므로

$\tan\alpha=2$, $\tan\beta=\dfrac{1}{3}$

이때 $\theta=\alpha-\beta$

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{2-\dfrac{1}{3}}{1+2\times\dfrac{1}{3}}=1$

따라서 $\theta=45^\circ$

02 답 $\dfrac{1}{2}$

방정식 $2x^2-7xy+5x+3y^2-5y+2=0$의 좌변을 인수분해하면

$2x^2-(7y-5)x+(3y-2)(y-1)=0$

$(2x-y+1)(x-3y+2)=0$

$\therefore 2x-y+1=0$ 또는 $x-3y+2=0$

이때 두 직선 $2x-y+1=0$, $x-3y+2=0$

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=2$, $\tan\beta=\dfrac{1}{3}$

따라서 두 직선이 이루는 예각의 크기 θ에 대하여

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\dfrac{2-\dfrac{1}{3}}{1+2\times\dfrac{1}{3}}\right|=1$

즉, $\theta = 45^\circ$ 이므로

$\sin\theta\cos\theta = \sin45^\circ\cos45^\circ = \frac{1}{2}$

Ⅱ-1 여러 가지 함수의 미분

04 삼각함수의 극한

기본

01 답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) 0

02 답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $2\sqrt{2}$ (3) 1

(1) 주어진 식의 분모, 분자에 $1+\cos x$를 곱하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin^2 x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$$

(2) 주어진 식을 변형하면

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 x-1}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 x-1}{\cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x}-1\right)}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\tan x+1)(\tan x-1)}{\cos x(\tan x-1)}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x+1}{\cos x}$$
$$=\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}$$

03 답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) 2 (3) $\frac{3}{2}$ (4) 2

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{2x}{3x}=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{2x}\times\frac{2x}{x}=1\times2=2$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{3x}{2x}}{\frac{\sin 2x}{2x}}=\frac{\frac{3}{2}}{1}=\frac{3}{2}$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{6x}{\tan 3x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{6x}{3x}}{\frac{\tan 3x}{3x}}=\frac{2}{1}=2$

04 답 (1) 1 (2) $\frac{2}{\pi}$ (3) 1

(1) $x-\pi=t$로 놓으면

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\pi-x}{\sin x}=\lim_{t\to0}\frac{-t}{\sin(t+\pi)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{-t}{-\sin t}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t}=1$$

(2) $x-3=t$로 놓으면

$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\cos\frac{\pi}{2}(t+3)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin\frac{\pi}{2}t}=\frac{2}{\pi}$$

(3) $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\sin t=1$

표준

01 답 (1) 2 (2) -3 (3) $\ln 2$ (4) $\frac{1}{2}$

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 4x}{4x}\times\frac{4x}{e^{2x}-1}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 4x}{4x}\times\frac{2x}{e^{2x}-1}\times2\right)$$
$$=1\times1\times2=2$$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{\tan 6x}{\ln(1-2x)}$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan 6x}{6x}\times\frac{6x}{\ln(1-2x)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan 6x}{6x}\times\frac{-2x}{\ln(1-2x)}\times(-3)\right\}$$
$$=1\times1\times(-3)=-3$$

(3) $\lim_{x\to0}\{\ln(x\sin x)-\ln(1-\cos x)\}$

$$=\lim_{x\to0}\ln\frac{x\sin x}{1-\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\ln\frac{x\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to0}\ln\left\{\frac{x}{\sin x}\times(1+\cos x)\right\}$$
$$=\ln\left\{\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\times(1+\cos x)\right\}$$
$$=\ln(1\times2)=\ln 2$$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\ln(1+x)}$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1-\cos^2 x}{x\ln(1+x)}\times\frac{1}{1+\cos x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{x}{\ln(1+x)}\times\frac{1}{1+\cos x}\right\}$$
$$=1^2\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

02 답 (1) 8 (2) 2 (3) $\frac{4}{3}$ (4) $\frac{2}{5}$

(1) $\lim_{x\to0}\frac{5x+\sin3x}{\sin x}$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{5x}{\sin x}+\frac{\sin3x}{\sin x}\right)$$
$$=5\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}+\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}\times\frac{x}{\sin x}\times3$$
$$=5\times1+1\times1\times3=8$$

(2) $x\to0$일 때, $(3x^2+2x)\to0$이므로
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x^2+2x)}{2x^2+x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x^2+2x)}{3x^2+2x}\times\frac{3x^2+2x}{2x^2+x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x^2+2x)}{3x^2+2x}\times\frac{3x+2}{2x+1}$$
$$=1\times2=2$$

(3) $x\to2$일 때, $(x^2-4)\to0$이므로
$$\lim_{x\to2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}\times\frac{x^2-4}{x^2-x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}\times\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}\times\frac{x+2}{x+1}$$
$$=1\times\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$$

(4) $x\to1$일 때, $(x^3-x)\to0$, $(x^2+3x-4)\to0$이므로
$$\lim_{x\to1}\frac{\tan(x^3-x)}{\sin(x^2+3x-4)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\tan(x^3-x)}{x^3-x}\times\frac{x^2+3x-4}{\sin(x^2+3x-4)}\times\frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+4)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\tan(x^3-x)}{x^3-x}\times\frac{x^2+3x-4}{\sin(x^2+3x-4)}\times\frac{x(x+1)}{x+4}$$
$$=1\times1\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$$

03 답 (1) 0 (2) $\frac{1}{2}$ (3) 2

(1) 주어진 식의 분모와 분자에 $1+\cos x$를 곱하면
$$\lim_{x\to0}\frac{x(1-\cos x)}{\sin2x}=\lim_{x\to0}\frac{x(1-\cos^2x)}{\sin2x(1+\cos x)}$$
$1-\cos^2x=\sin^2x$, $\sin2x=2\sin x\cos x$이므로
$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin^2x}{2\sin x\cos x(1+\cos x)}=0$$

(2) 주어진 식의 분모와 분자에 $1+\cos x$를 곱하면
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos x}$$
$$=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{1-(1-2\sin^2x)}{x\sin x}$
$$=2\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x\sin x}$$
$$=2\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=2\times1=2$$

04 답 (1) $\frac{7}{3}$ (2) $\pi-2$

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{\sqrt{ax+b}-1}=3$에서 (분자)→0이고 극한

값이 0이 아니므로 (분모)→0이다.

즉, $\sqrt{b}-1=0$에서 $b=1$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{ax+b}-1}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{ax+1}-1}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{ax}\times(\sqrt{ax+1}+1)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{2}{a}\times(\sqrt{ax+1}+1)$$
$$=1\times\frac{2}{a}\times2=\frac{4}{a}$$

$\frac{4}{a}=3$이므로 $a=\frac{4}{3}$

따라서 $a+b=\frac{7}{3}$

(2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax+b}{\cos x}=2$에서 (분모)→0이고, 극한값이 존재하므로 (분자)→0이다.

즉, $\frac{\pi}{2}a+b=0$에서 $b=-\frac{\pi}{2}a$ ……㉠

$x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x=t+\frac{\pi}{2}$이고, $x\to\frac{\pi}{2}$일 때, $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax+b}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{a\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos x}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{at}{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{at}{-\sin t}=-a=2$$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $b=\pi$

따라서 $a+b=\pi-2$

발전

01 답 $\frac{4}{3}$

$\triangle$AOP는 $\overline{\text{AO}}=\overline{\text{OP}}=1$인 이등변삼각형이므로

$\angle\text{PAO}=\theta$

$\triangle$AQP에서 $\angle\text{QPA}=2\theta$이므로

$\angle\text{PQA}=\pi-3\theta$

$\overline{\text{OP}}=1$ 이고 $\triangle$POQ에 사인법칙을 이용하면

$$\frac{\overline{\text{OP}}}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\overline{\text{OQ}}}{\sin\theta},\ \frac{1}{\sin3\theta}=\frac{\overline{\text{OQ}}}{\sin\theta}$$

$\overline{\text{OQ}}=\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}$ ……㉠

이때 $\overline{\text{AQ}}=\overline{\text{AO}}+\overline{\text{OQ}}=1+\overline{\text{OQ}}$ 이므로

㉠에 의해 $\overline{\text{AQ}}=1+\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}$

그런데 P→B일 때, $\theta\to0$이므로

$$\lim_{\text{P}\to\text{B}}\overline{\text{AQ}}=\lim_{\theta\to0}\left(1+\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}\right)$$
$$=\lim_{\theta\to0}\left(1+\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\theta}{\sin3\theta}\right)$$
$$=1+1\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

02 답 6

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos(x^2)}=4$ 이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x)}{1-\cos(x^2)}\times\frac{1-\cos(x^2)}{x^n}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x)}{1-\cos(x^2)}\times\frac{1-\cos^2(x^2)}{x^n}\times\frac{1}{1+\cos(x^2)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x)}{1-\cos(x^2)}\times\frac{\sin^2(x^2)}{x^n}\times\frac{1}{1+\cos(x^2)}\right\}$$
$$=4\times\lim_{x\to0}\frac{\sin^2(x^2)}{x^n}\times\frac{1}{2}$$
$$=2\times\lim_{x\to0}\frac{\sin^2(x^2)}{x^n}=\alpha$$

등식이 성립하려면 $n=4$일 때,

$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2(x^2)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2(x^2)}{(x^2)^2}=1$ 이므로

$n=4$, $\alpha=2$

따라서 $n+\alpha=6$

Ⅱ-1 여러 가지 함수의 미분

05 삼각함수의 미분

기본

01 답 (1) $y' = \cos x + \sin x$
(2) $y' = \cos x - 2\sin x$

02 답 (1) $y' = x(2\cos x - x\sin x)$
(2) $y' = x\cos x$

(1) $y' = 2x\cos x + x^2 \times (-\sin x)$
$= x(2\cos x - x\sin x)$
(2) $y' = \{x' \times \sin x + x \times (\sin x)'\} + (\cos x)'$
$= (\sin x + x\cos x) - \sin x = x\cos x$

03 답 (1) $y' = e^x(\cos x - \sin x)$
(2) $= 2e^x \cos x$

(2) $y' = (e^x)'(\sin x + \cos x) + e^x(\sin x + \cos x)'$
$= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x)$
$= 2e^x \cos x$

04 답 (1) $y' = \dfrac{\sin x}{x} + \ln x \times \cos x$
(2) $y = \dfrac{\cos x}{x\ln 3} - \log_3 x \times \sin x$

(1) $y' = (\ln x)' \times \sin x + \ln x \times (\sin x)'$
$= \dfrac{\sin x}{x} + \ln x \times \cos x$
(2) $y' = (\log_3 x)' \times \cos x + \log_3 x \times (\cos x)'$
$= \dfrac{\cos x}{x\ln 3} - \log_3 x \times \sin x$

표준

01 답 $-\dfrac{\pi}{2}$

$f'(x) = \cos x - x\sin x$에서 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$

02 답 -1

$f(x) = x\cos x$에서
$f'(x) = \cos x + x(-\sin x) = \cos x - x\sin x$
따라서 $f'(\pi) = \cos\pi - \pi\sin\pi = -1$

03 답 1

$f'(x) = \cos x$이므로
(주어진 식)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left\{f\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}-\left\{f\left(\frac{\pi}{3}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{3}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{-h}$$

$$= f'\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$$

04 답 $-\dfrac{2}{\pi}$

$f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to 1+0}\left(b\cos\frac{\pi}{2}x + 2\right) = \lim_{x\to 1-0}(e^{x-1} + a) = f(1)$$

$2 = 1 + a$, 즉 $a = 1$
또한, $f'(1)$의 값이 존재해야 하므로

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}b\sin\dfrac{\pi}{2}x & (x > 1) \\ e^{x-1} & (x < 1) \end{cases}$$

에서 $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\left(-\frac{\pi}{2}b\sin\frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x\to 1-0} e^{x-1}$

$-\dfrac{\pi}{2}b = 1$, 즉 $b = -\dfrac{2}{\pi}$

따라서 $ab = -\dfrac{2}{\pi}$

발전

01 답 -1

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\pi - \sin x) - f(\pi)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(\pi - \sin x) - f(\pi)}{(\pi - \sin x) - \pi} \times \frac{-\sin x}{x}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{f(\pi - \sin x) - f(\pi)}{(\pi - \sin x) - \pi}$$

이때 $\pi - \sin x = t$로 놓으면 $x\to 0$일 때 $t\to\pi$이므로

$=-\lim_{x\to 0}\frac{f(\pi-\sin x)-f(\pi)}{(\pi-\sin x)-\pi}=-\lim_{t\to\pi}\frac{f(t)-f(\pi)}{t-\pi}$

$=-f'(\pi)$

$f(x)=\sin x\cos x$에서

$f'(x)=\cos x\cos x+\sin x(-\sin x)$

$\quad\quad=\cos^2 x-\sin^2 x$

따라서 $-f'(\pi)=-(\cos^2\pi-\sin^2\pi)=-1$

02 답 3

$f(x)=\lim_{t\to x}\frac{t\sin x-x\sin t}{t-x}$

$=\lim_{t\to x}\frac{t\sin x-x\sin x-x\sin t+x\sin x}{t-x}$

$=\lim_{t\to x}\frac{(t-x)\sin x-x(\sin t-\sin x)}{t-x}$

$=\sin x-x\lim_{t\to x}\frac{\sin t-\sin x}{t-x}$

$=\sin x-x(\sin x)'$

$=\sin x-x\cos x$

따라서 $f'(x)=\cos x-\cos x+x\sin x=x\sin x$ 이므로

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\times 1=\frac{\pi}{2}$

즉, $m=2$, $n=1$이므로 $m+n=3$

Ⅱ-1 여러 가지 함수의 미분

01 ④	02 ④	03 ②	04 ③	05 ①
06 ①	07 $5\sqrt{2}$	08 ①	09 3	10 ④
11 ④	12 ③	13 ③	14 ①	15 ②
16 49	17 $\frac{2}{e}$	18 ②	19 4	20 ③
21 $\frac{\sqrt{10}}{3}$	22 ②	23 $\frac{1}{2}$	24 $\frac{1}{2}$	

01 $\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{3x}}=\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\times\frac{2}{3}}$

$=\lim_{x\to0}\left\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right\}^{\frac{2}{3}}$

$=e^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{e^2}$

02 $\lim_{x\to4}\{\log_2|x^2+8x-48|-\log_2|x-4|\}$

$=\lim_{x\to4}\log_2\left|\frac{x^2+8x-48}{x-4}\right|$

$=\lim_{x\to4}\log_2\left|\frac{(x+12)(x-4)}{x-4}\right|$

$=\lim_{x\to4}\log_2|x+12|$

$=\log_2 16=4$

03 $f(x)=x^2\ln x$로 놓으면

$f'(x)=(x^2)'\ln x+x^2(\ln x)'$

$=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}$

$=x(2\ln x+1)$

따라서 점 $(e,\ e^2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(e)=e(2\ln e+1)=3e$

04 분모, 분자를 각각 3^{x-1}으로 나누면

$\lim_{x\to\infty}\frac{a\times3^{x+1}+5}{3^{x-1}-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{a\times3^2+\frac{5}{3^{x-1}}}{1-\frac{1}{3^{x-1}}}=9a$

따라서 $9a=27$이므로 $a=3$

05 $f'(x)=(x^3)'\sin x+x^3(\sin x)'$

$=3x^2\sin x+x^3\cos x$

따라서 $f'(\pi)=3\pi^2\sin\pi+\pi^3\cos\pi=-\pi^3$

06 $x-2\pi=t$로 놓으면 $x=t+2\pi$이고,

$x\to2\pi$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to2\pi}\frac{\sin x}{x^2-4\pi^2}=\lim_{x\to2\pi}\frac{\sin x}{(x+2\pi)(x-2\pi)}$

$=\lim_{t\to0}\frac{\sin(t+2\pi)}{(t+4\pi)t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\times\frac{1}{t+4\pi}$

$=1\times\frac{1}{4\pi}=\frac{1}{4\pi}$

07 두 직선 $2x-y+1=0$, $x-3y+2=0$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=2,\ \tan\beta=\frac{1}{3}$

두 직선 $2x-y+1=0$, $x-3y+2=0$이 이루는 예각의 크기가 θ이므로

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\frac{2-\frac{1}{3}}{1+2\times\frac{1}{3}}\right|=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}}=1$

따라서 $\theta=45°$이므로

$10\sin\theta=10\sin45°=10\times\frac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$

08 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{4}$ …… ㉠

$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{3}{4}$의 양변을 제곱하면

$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{9}{16}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\frac{13}{16}$에서

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{19}{32}$

09 문제 이해 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{e^{bx+c}-1}=3$ 에서

$x\to0$ 일 때 (분자)$\to0$ 이고, 0 이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$ 이어야 한다.

해결 과정 즉, $\lim_{x\to0}(e^{bx+c}-1)=0$ 이므로

$e^c-1=0$에서 $c=0$ ▸ 2점

$c=0$ 을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{e^{bx}-1}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{ax}\times\frac{bx}{e^{bx}-1}\times\frac{a}{b}$$
$$=1\times1\times\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$$

즉, $\frac{a}{b}=3$ 이므로 $a=3b$ ▸ 3점

답 구하기 따라서 $\frac{a}{b+c}=\frac{3b}{b+0}=3$ ▸ 1점

10 $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos kx}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos kx)(1+\cos kx)}{x^2(1+\cos kx)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 kx}{x^2(1+\cos kx)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 kx}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos kx}$$
$$=k^2\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin kx}{kx}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos kx}$$

$k^2\times1\times\frac{1}{2}=8$, $k^2=16$

그런데 $k>0$이므로 $k=4$

11 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$에서 $\cos\alpha<0$ 이므로

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$$
$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{4}{5}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{24}{25}$$
$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}=\frac{4}{5}$$

따라서 $\sin2\alpha+\sin^2\frac{\alpha}{2}=-\frac{24}{25}+\frac{4}{5}=-\frac{4}{25}$

12 $$f'(x)=(e^x\sin x)'$$
$$=(e^x)'\sin x+e^x(\sin x)'$$
$$=e^x\sin x+e^x\cos x$$
$$=e^x(\sin x+\cos x)$$
$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=f'(\pi)=-e^\pi$$

13 $\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{4}{5}$ 에서

$4(1+\tan^2\theta)=10\tan\theta$

$2\tan^2\theta-5\tan\theta+2=0$

$(2\tan\theta-1)(\tan\theta-2)=0$

$\tan\theta=\frac{1}{2}$ 또는 $\tan\theta=2$

$0<\theta<\frac{\pi}{4}$일 때, $0<\tan\theta<1$이므로

$\tan\theta=\frac{1}{2}$

따라서

$$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=\frac{2}{\sec^2\theta}-1$$
$$=\frac{2}{1+\tan^2\theta}-1$$
$$=\frac{2}{1+\frac{1}{4}}-1=\frac{8}{5}-1=\frac{3}{5}$$

14 $$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\ln\left|1+\frac{h}{x}\right|$$
$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$f'(1)=1$

15 $f(x)=3x\ln x-x^2$ 에서

$f'(x)=3\ln x+3-2x$

이때 $f(1)=-1$ 이고, $f'(1)=1$ 이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}$$

16 해결 과정 $\angle \mathrm{CAB} = \alpha$라 하면

$\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

$\angle \mathrm{FAE} = \beta$라 하면 $\sin\beta = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$

▸ 2점

이때 $\theta = \alpha - \beta$이므로

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos(\alpha-\beta)\\ &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\\ &= \frac{3}{5}\times\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\times\frac{3}{5} = \frac{24}{25}\end{aligned}$$ ▸ 3점

답 구하기 따라서 $p+q = 25+24 = 49$ ▸ 1점

17 해결 과정 $g(e) = f(e)\ln e = 1\times1 = 1$이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{g(e+2h)-1}{h}\\ &= \lim_{h\to0}\frac{g(e+2h)-g(e)}{h}\\ &= 2\lim_{h\to0}\frac{g(e+2h)-g(e)}{2h} = 2g'(e)\end{aligned}$$ ▸ 2점

한편, $g'(x) = f'(x)\ln x + f(x)\times\frac{1}{x}$에서

$$\begin{aligned}g'(e) &= f'(e)\ln e + f(e)\times\frac{1}{e}\\ &= 0\times1 + 1\times\frac{1}{e} = \frac{1}{e}\end{aligned}$$ ▸ 3점

답 구하기 따라서

$$\lim_{h\to0}\frac{g(e+2h)-1}{h} = 2g'(e) = \frac{2}{e}$$ ▸ 1점

18 $f(x) = 12^x + 4^x + 3^x$이라 놓으면

$\lim_{x\to0}\frac{12^x+4^x+3^x-3}{x}$ 에서

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0)$

$f'(x) = 12^x\ln12 + 4^x\ln4 + 3^x\ln3$

$\therefore f'(0) = \ln12 + \ln4 + \ln3 = 4\ln2 + 2\ln3$

19 문제 이해 $f(x) = \begin{cases} a\sin x + 2\cos x & (x \ge 0) \\ be^x & (x < 0) \end{cases}$ 이

$x=0$에서 미분가능하므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다. ▸ 1점

해결 과정 $\lim_{x\to0+}f(x) = \lim_{x\to0-}f(x) = f(0)$이므로

$\lim_{x\to0+}(a\sin x + 2\cos x) = \lim_{x\to0-}be^x = 2$

$a\times0 + 2\times1 = b\times1 = 2$, 즉 $b=2$ ▸ 2점

또한 $x=0$에서의 미분계수 $f'(0)$이 존재하므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(x)}{x-0}$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{a\sin x + 2\cos x - 2}{x} = \lim_{x\to0-}\frac{2e^x-2}{x}$$

$$\lim_{x\to0+}\left(\frac{a\sin x}{x} + \frac{2\cos x - 2}{x}\right) = 2\lim_{x\to0-}\frac{e^x-1}{x}$$

$$a\lim_{x\to0+}\frac{\sin x}{x} + 2\lim_{x\to0+}\frac{\cos x - 1}{x} = 2\times1$$

$a\times1 + 2\times0 = 2$, 즉 $a=2$ ▸ 2점

답 구하기 따라서 $a+b = 2+2 = 4$ ▸ 1점

20 해결 과정 $f(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$ 이므로

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}f(1)\times f(2)\times\cdots\times f(n)\\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n}(n+1) = \frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n}\end{aligned}$$ ▸ 4점

답 구하기 따라서

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}f(1)\times f(2)\times\cdots\times f(n)\right\}^n\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\end{aligned}$$ ▸ 2점

21 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x, e^{3x})$이라 하면

$\mathrm{R}(0, 1)$, $\mathrm{S}(x, 1)$이므로

$\overline{\mathrm{PR}} = \sqrt{x^2 + (e^{3x}-1)^2}$, $\overline{\mathrm{PS}} = e^{3x} - 1$

이때 제1사분면 위의 점 P가 점 R에 한없이 가까이 가면 $x\to0+$이다.

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}\frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{\mathrm{PS}}} &= \lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{x^2+(e^{3x}-1)^2}}{e^{3x}-1}\\ &= \lim_{x\to0+}\frac{\frac{\sqrt{x^2+(e^{3x}-1)^2}}{x}}{\frac{e^{3x}-1}{x}}\end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{\frac{x^2+(e^{3x}-1)^2}{x^2}}}{\frac{e^{3x}-1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{1+9\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\right)^2}}{3\times\frac{e^{3x}-1}{3x}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

22 $f(t)$ 는 직선 AP의 기울기와 같으므로 $\lim_{t\to 1} f(t)$ 는 곡선 $y=\log_3 x$ 위의 점 $A(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기와 같다.

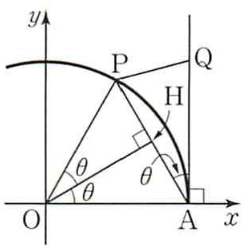
즉, $y'=\frac{1}{x}\times\frac{1}{\ln 3}$ 이므로

$\lim_{t\to 1} f(t)=\frac{1}{1}\times\frac{1}{\ln 3}=\log_3 e$

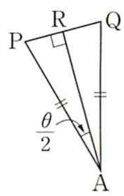
23 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면 $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$이어야 하므로

$f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^x+3x-1}=\frac{1}{2}$

24



[그림1]



[그림2]

해결 과정 (i) [그림1]과 같이 $\angle PAQ=\theta$, 원점에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle OAH=\frac{\pi}{2}-\theta$

$\triangle OAH$ 에서 $\angle HOA+\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\pi$

즉, $\angle HOA=\theta$ 이므로

$\overline{PH}=\overline{HA}$ …… ㉠ ▸ 2점

(ii) [그림2]와 같이 점 A에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 R라 하면

$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{PR}}{\overline{AP}}$이므로

$\overline{PQ}=2\overline{PR}=2\overline{AP}\sin\frac{\theta}{2}$

한편, $\triangle OAP$ 에서 ㉠에 의해 $\overline{AP}=2\overline{PH}$이고, $\sin\theta=\overline{PH}$ 이므로 $\overline{AP}=2\sin\theta$

따라서 $\overline{PQ}=2\overline{AP}\sin\frac{\theta}{2}=4\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}$

▸ 4점

(iii) 부채꼴 OAP 에서 $\overset{\frown}{AP}=1\times 2\theta=2\theta$

답 구하기 그러므로

$$\lim_{P\to A}\frac{\overline{PQ}}{\overset{\frown}{AP}^2}=\lim_{\theta\to 0}\frac{4\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}{4\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\times\frac{1}{2}$$

$$=1\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$ ▸ 2점

Ⅱ-2 여러 가지 미분법

01 함수의 몫의 미분법

기 본

01 답 (1) $y'=\dfrac{3}{x^4}$ (2) $y'=9x^2-\dfrac{10}{x^6}$

(1) $y=-\dfrac{1}{x^3}=-x^{-3}$이므로

$$y'=-(-3)x^{-3-1}=3x^{-4}=\dfrac{3}{x^4}$$

(2) $y=3x^3+\dfrac{2}{x^5}=3x^3+2x^{-5}$이므로

$$y'=3\cdot 3x^2+2\cdot(-5)x^{-5-1}$$
$$=9x^2-10x^{-6}=9x^2-\dfrac{10}{x^6}$$

02 답 (1) $y'=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ (2) $y'=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$

(2) $y'=-\dfrac{(x-2)'}{(x-2)^2}=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$

03 답 (1) $y'=-\dfrac{5}{(2x+1)^2}$

(2) $y'=-\dfrac{x^2+4x+1}{(x^2-1)^2}$

04 답 (1) $y'=\dfrac{x(3x-4)}{(3x-2)^2}$

(2) $y'=\dfrac{-2x^2+9x-16}{x^5}$

표 준

01 답 4

$f'(x)=\dfrac{-(2x+a)}{(x^2+ax-2)^2}$에서

$f'(0)=\dfrac{-a}{4}=-1$

따라서 $a=4$

02 답 ②

$$f'(x)=\dfrac{(x^2-x+1)'(x-1)-(x^2-x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$$
$$=\dfrac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2}$$
$$=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

따라서 $x=3$에서의 미분계수는

$f'(3)=\dfrac{3^2-2\times 3}{2^2}=\dfrac{3}{4}$

03 답 2

$f(x)=\dfrac{(x+1)e^x}{x-3}$에서

$$f'(x)=\dfrac{\{e^x+(x+1)e^x\}(x-3)-(x+1)e^x}{(x-3)^2}$$
$$=\dfrac{e^x(x^2-2x-7)}{(x-3)^2}$$

$f'(x)\le 0$에서

$\dfrac{e^x(x^2-2x-7)}{(x-3)^2}\le 0$

$e^x>0$, $(x-3)^2\ge 0$이므로

$x^2-2x-7\le 0$, $x\ne 3$

즉, $1-2\sqrt{2}\le x<3$ 또는 $3<x\le 1+2\sqrt{2}$

따라서 $f'(x)\le 0$을 만족시키는 정수 x의 합은

$-1+0+1+2=2$이다.

04 답 ④

$$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\dfrac{\{f(2h)-f(0)\}-\{f(-2h)-f(0)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(0)}{2h}\times 2-\lim_{h\to 0}\dfrac{f(-2h)-f(0)}{-2h}\times(-2)$$
$$=f'(0)\times 2-f'(0)\times(-2)=4f'(0)$$

$f(x)=-\dfrac{1}{x-1}$ 에서

$f'(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ 이므로

$4f'(0)=4\times 1=4$

발전

01 답 ④

$f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x+\cos x}$에서

$$f'(x)=\frac{-\sin x(\sin x+\cos x)-\cos x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}$$

$$=\frac{-\sin^2 x-\sin x\cos x-\cos^2 x+\sin x\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}$$

$$=\frac{-1}{1+2\sin x\cos x}=-\frac{1}{1+\sin 2x}$$

$-1\le \sin 2x\le 1$에서

$0\le 1+\sin 2x\le 2,\ \dfrac{1}{1+\sin 2x}\ge \dfrac{1}{2}$

$-\dfrac{1}{1+\sin 2x}\le -\dfrac{1}{2}$

따라서 $f'(x)$의 최댓값은 $-\dfrac{1}{2}$이다.

02 답 ④

$(x^3-2)(x^6+2x^3+4)+8=x^9-8+8=x^9$ 이므로

$f(x)=\dfrac{x^9}{x^3+1}$ 에서

$$f'(x)=\frac{9x^8(x^3+1)-x^9\times 3x^2}{(x^3+1)^2}=\frac{3x^8(2x^3+3)}{(x^3+1)^2}$$

따라서

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+4h)-f(1)}{h}=4f'(1)=4\times\frac{15}{4}=15$$

Ⅱ-2 여러 가지 미분법

02 합성함수의 미분법

기본

01 답 $u=f(x)$라 하면 $y=u^n$이고,

$\frac{dy}{du}=nu^{n-1}$, $\frac{du}{dx}=f'(x)$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=\nu^{n-1}\times f'(x)$$
$$=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$$

02 답 (1) $y'=20(2x+3)^9$
(2) $y'=4\cos(4x-3)$

03 답 (1) $y'=2(5x^2-3x+1)(10x-3)$
(2) $y'=-\frac{8x}{(x^2+1)^5}$

(1) $y'=2(5x^2-3x+1)(5x^2-3x+1)'$
$=2(5x^2-3x+1)(10x-3)$

(2) $y'=\left\{\frac{1}{(x^2+1)^4}\right\}'=-\frac{\{(x^2+1)^4\}'}{(x^2+1)^8}$
$=-\frac{4(x^2+1)^3\times 2x}{(x^2+1)^8}=-\frac{8x}{(x^2+1)^5}$

04 답 $y'=6(3x-1)^3(x^2+1)^2(5x^2-x+2)$

$y'=\{(3x-1)^4\}'(x^2+1)^3+(3x-1)^4\{(x^2+1)^3\}'$
$=4(3x-1)^3\times 3\times(x^2+1)^3+(3x-1)^4$
$\times 3(x^2+1)^2\times 2x$
$=3(3x-1)^3(x^2+1)^2\{4(x^2+1)+(3x-1)2x\}$
$=6(3x-1)^3(x^2+1)^2(5x^2-x+2)$

표준

01 답 (1) $y'=3^{4x+1}\times 4\ln 3$
(2) $y'=e^{3x+1}(3x+1)$

(1) $y'=(3^{4x+1})'(4x+1)'=3^{4x+1}\times 4\ln 3$

(2) $y'=(x)'e^{3x+1}+x(e^{3x+1})'(3x+1)'$
$=e^{3x+1}(3x+1)$

02 답 400

$f'(x)=5\left(x^2-\frac{4}{x}\right)^4\left(2x+\frac{4}{x^2}\right)$ 이므로

$f'(2)=5\times 2^4\times 5=400$

03 답 ②

$f(2x-1)=x^3-x-4$에서

$2f'(2x-1)=3x^2-1$

$x=1$을 대입하면 $2f'(1)=2$

따라서 $f'(1)=1$

04 답 60

$g(x)'=3\{xf(x)\}^2\times\{xf(x)\}'$
$=3\{xf(x)\}^2\{f(x)+xf'(x)\}$

이므로 $x=1$ 에서의 미분계수는

$3\{1\times f(1)\}^2\{f(1)+1\times f'(1)\}=3\times 2^2(2+3)=60$

발전

01 답 ③

$f(x)=\ln(e^x+e^{3x}+e^{5x}+e^{7x}+e^{9x})$으로 놓으면

$f(0)=\ln 5$이므로

(주어진 식)

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\{\ln(e^x+e^{3x}+e^{5x}+e^{7x}+e^{9x})-\ln 5\}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$

$f'(x)=\frac{e^x+3e^{3x}+5e^{5x}+7e^{7x}+9e^{9x}}{e^x+e^{3x}+e^{5x}+e^{7x}+e^{9x}}$이므로

$f'(0)=\frac{1+3+5+7+9}{5}=5$

02 답 $\frac{3}{2}$

$f(x)=\ln(x^2+2x)$에서

$f'(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x}=\frac{2(x+1)}{x(x+2)}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'(n)}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2(n+1)}{n(n+2)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$$

$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{2}$$

Ⅱ-2 여러 가지 미분법

03 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

기본

01 답 (1) $\frac{dy}{dx}=2t^3$ (2) $\frac{dy}{dx}=2t$

(1) $\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=4t^3$

따라서 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4t^3}{2}=2t^3$

(2) $\frac{dx}{dt}=1$, $\frac{dy}{dt}=2t$

따라서 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{1}=2t$

02 답 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{t^2+1}{t^2-1}$ (단, $t\neq\pm1$)

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{t^2-1}{2t}$ (단, $t\neq0$)

(1) $x=t+\frac{1}{t}=t+t^{-1}$에서 $\frac{dx}{dt}=1-\frac{1}{t^2}$이고,

$y=t-\frac{1}{t}=t-t^{-1}$에서 $\frac{dy}{dt}=1+\frac{1}{t^2}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1+\frac{1}{t^2}}{1-\frac{1}{t^2}}=\frac{t^2+1}{t^2-1}\ (\text{단, } t\neq\pm1)$$

(2) $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$에서

$$\frac{dx}{dt}=\frac{-2t(1+t^2)-(1-t^2)\times2t}{(1+t^2)^2}=\frac{-4t}{(1+t^2)^2}$$

$y=\frac{2t}{1+t^2}$에서

$$\frac{dy}{dt}=\frac{2(1+t^2)-2t\times2t}{(1+t^2)^2}=\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

따라서 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t^2-1}{2t}$ (단, $t\neq0$)

03 답 $16\sqrt{t}(2t+1)^3$

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t}}$, $\frac{dy}{dt}=4(2t+1)^3\times2=8(2t+1)^3$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{8(2t+1)^3}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}=16\sqrt{t}(2t+1)^3$$

04 답 2

$x=t^2+2$, $y=t^2+2t$에서

$\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=2t+2$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t+2}{2t}=\frac{t+1}{t}(\text{단, } t\neq0)$$

이때 $t^2+2=3$과 $t^2+2t=3$을 모두 만족시키는 t의 값은 1이므로 점 $(3, 3)$에서의 접선의 기울기는 $t=1$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값인 2이다.

표준

01 답 $\frac{5}{4}$

$$\lim_{t\to1}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to1}\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\lim_{t\to1}\frac{2t+4t^3+6t^5+8t^7}{1+3t^2+5t^4+7t^6}=\frac{5}{4}$$

02 답 ①

$\frac{dx}{dt}=1-\frac{1}{t^2}=\frac{t^2-1}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=2t-\frac{2}{t^3}=\frac{2(t^4-1)}{t^3}$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{2(t^4-1)}{t^3}}{\frac{t^2-1}{t^2}}=\frac{2(t^2+1)}{t}$$

따라서 $t=-1$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$\frac{2(1+1)}{-1}=-4$

03 답 ②

$\frac{dx}{dt}=\frac{a(1+t^2)-at\times2t}{(1+t^2)^2}=\frac{-a(t^2-1)}{(1+t^2)^2}$,

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{-2t(1+t^2)-(1-t^2)\times 2t}{(1+t^2)^2}=\dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{4t}{a(t^2-1)}$(단, $t\neq\pm1$)

$t=2$일 때의 접선의 기울기가 $\dfrac{4}{3}$이므로

$\dfrac{4\times2}{a(2^2-1)}=\dfrac{8}{3a}=\dfrac{4}{3}$

따라서 $a=2$

04 답 $\dfrac{4}{3}$

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2(1+t^2)-2t(2t)}{(1+t^2)^2}=\dfrac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}$

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{-2t(1+t^2)-(1-t^2)(2t)}{(1+t^2)^2}=\dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}$

따라서 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-4t}{2-2t^2}=\dfrac{2t}{t^2-1}$이므로

$t=2$일 때, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4}{3}$

발전

01 답 3

$x=\sum_{k=1}^{n}(1+t)^{1-k}$에서 $\dfrac{dx}{dt}=\sum_{k=1}^{n}(1-k)(1+t)^{-k}$

$t=0$에서 $\dfrac{dx}{dt}$의 값은 -3이므로

$\sum_{k=1}^{n}(1-k)=-\dfrac{(n-1)n}{2}=-3$

즉, $n=3$이므로 $y=\sum_{k=1}^{3}\left(2-\dfrac{1}{k}\right)(1-t)^k$에서

$\dfrac{dy}{dt}=\sum_{k=1}^{3}\left(2-\dfrac{1}{k}\right)k(1-t)^{k-1}(1-t)'$

$=\sum_{k=1}^{3}(1-2k)(1-t)^{k-1}$

$t=0$에서 $\dfrac{dy}{dt}$의 값은

$\sum_{k=1}^{3}(1-2k)=3-2\times\dfrac{3\times4}{2}=-9$

따라서 $t=0$에서 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\times\dfrac{dt}{dx}$

$=(-9)\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=3$

02 답 ④

$x=e^t\sin t,\ y=e^t\cos t$에서

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{e^t(\cos t-\sin t)}{e^t(\sin t+\cos t)}=\dfrac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}$

따라서 $t=\dfrac{\pi}{3}$에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=-2+\sqrt{3}$

Ⅱ-2 여러 가지 미분법

04 음함수와 역함수의 미분법

기본

01 답 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{3x}{y}$

(2) $\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2+4y}{4x+3y^2-2}$

02 답 (1) $\frac{dy}{dx}=-\frac{x-1}{y+1}$ (단, $y\neq-1$)

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{9x}{4y}$ (단, $y\neq0$)

(1) 음함수의 미분법을 이용하여 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2(x-1)+2(y+1)\frac{dy}{dx}=0$

따라서 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x-1}{y+1}$ (단, $y\neq-1$)

(2) 음함수의 미분법을 이용하여 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$\frac{x}{2}-\frac{2y}{9}\frac{dy}{dx}=0$

따라서 $\frac{dy}{dx}=\frac{9x}{4y}$ (단, $y\neq0$)

03 답 ③

합성함수 $f\circ g$는 항등함수이므로 모든 실수 x에 대하여

$(f\circ g)(x)=x$, 즉 $f(g(x))=x$

위의 식 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$

따라서 $f'(g(a))g'(a)=1$에서

$g(a)=b$이므로

$f'(b)g'(a)=1$

즉, $g'(a)=\frac{1}{f'(b)}$

04 답 (1) $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{9y^2-4y}$ (단, $y\neq0$, $y\neq\frac{4}{9}$)

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}$ $\left(단,\ x\neq\frac{1}{2}\right)$

(1) 역함수의 미분법을 이용하기 위하여 주어진 식의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=9y^2-4y$

따라서

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{9y^2-4y}$ (단, $y\neq0$, $y\neq\frac{4}{9}$)

(2) 주어진 식의 양변을 세제곱하면

$y^3=2x-1$

역함수의 미분법을 이용하기 위하여 양변을 y 에 대하여 미분하면

$3y^2=2\frac{dx}{dy}$, 즉 $\frac{dx}{dy}=\frac{3y^2}{2}$

따라서

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{2}{3y^2}=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}$ $\left(단,\ x\neq\frac{1}{2}\right)$

표준

01 답 ④

$x^3+y^3=8(xy+1)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+3y^2\times\frac{dy}{dx}=8\left(1\times y+x\times\frac{dy}{dx}\right)$

$(8x-3y^2)\frac{dy}{dx}=3x^2-8y$

$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-8y}{8x-3y^2}$ (단, $8x\neq3y^2$)

따라서 점 (0, 2)에서의 접선의 기울기는

$\frac{0-16}{0-12}=\frac{4}{3}$

02 답 ④

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x+a\left(1\times y+x\times\frac{dy}{dx}\right)+4y\frac{dy}{dx}=0$

$(ax+4y)\frac{dy}{dx}=-(2x+ay)$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+ay}{ax+4y}$ (단, $ax\neq-4y$)

점 (2, 1)에서의 접선의 기울기가 $-\frac{3}{4}$이므로

$-\dfrac{4+a}{2a+4}=-\dfrac{3}{4}$

$a=2$

또, 곡선이 점 (2, 1)을 지나므로

$4+2a+2+b=0$

위의 식에 $a=2$를 대입하면 $b=-10$

따라서 $a+b=-8$

03 답 1

$f(x)=x^3+x$ 이므로 $f'(x)=3x^2+1$

$g(x)=f^{-1}(x)$ 이므로 $x=y^3+y$

따라서 $\dfrac{dx}{dy}=3y^2+1$ 에서

$g'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{3y^2+1}$

한편, $x^3+x=2$ 에서 $x=1$ 이므로

$g(2)=1$

따라서

$f'(-1)g'(2)=\{3\times(-1)^2+1\}\times\dfrac{1}{3\times1^2+1}=1$

04 답 $\dfrac{1}{2}$

$x=\dfrac{2y}{y^2+1}$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{2(y^2+1)-2y\times2y}{(y^2+1)^2}=\dfrac{2-2y^2}{(y^2+1)^2}$

역함수의 미분법에 의해

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{(y^2+1)^2}{2-2y^2}$

$y=0$을 대입하면

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}$

발전

01 답 ①

$f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{(2x+1)^2}{x^2+1}}$ 에서

$\{f(x)\}^3=\dfrac{(2x+1)^2}{x^2+1}$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$3\{f(x)\}^2f'(x)$

$=\dfrac{2(2x+1)\times2\times(x^2+1)-(2x+1)^2\times2x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{2(2x+1)(2x^2+2)-2(2x+1)(2x^2+x)}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{-2(2x+1)(x-2)}{(x^2+1)^2}$

이때 $f(x)\neq0$, 즉 $x\neq-\dfrac{1}{2}$ 이면

$f'(x)=\dfrac{-2(2x+1)(x-2)}{(x^2+1)^2}\times\dfrac{1}{3\{f(x)\}^2}>0$

에서

$(2x+1)(x-2)<0$, $-\dfrac{1}{2}<x<2$

따라서 $\alpha=-\dfrac{1}{2}$, $\beta=2$이므로

$\alpha\beta=-1$

02 답 ①

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2g(3)-9g(x)}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2g(3)-9g(3)+9g(3)-9g(x)}{x-3}$

$=g(3)\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}-9\lim\limits_{x\to3}\dfrac{g(x)-g(3)}{x-3}$

$=g(3)\lim\limits_{x\to3}(x+3)-9g'(3)$

$=g(3)\times6-9g'(3)$

이때 $g(3)=a$라 하면 $f(a)=3$이므로

$2a^2+4a+3=3$, $2a(a+2)=0$

그런데 $a>-1$에서 $a=0$이므로

$g(3)=0$

또, $f'(x)=4x+4$에서 $f'(0)=4$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3}\frac{x^2g(3)-9g(x)}{x-3}&=6g(3)-9g'(3)\\&=6g(3)-\frac{9}{f'(0)}\\&=6\times0-\frac{9}{4}=-\frac{9}{4}\end{aligned}$$

Ⅱ-2 여러 가지 미분법

05 이계도함수

기본

01 답 (1) $y''=-\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}$ (2) $y''=-\dfrac{1}{x^2}$

(1) $y'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ 이므로

$$y''=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

(2) $y'=\dfrac{1}{x}$ 이므로 $y''=-\dfrac{1}{x^2}$

02 답 (1) $y''=-4\sin 2x$ (2) $y''=9e^{-3x}$

(1) $y'=\cos 2x\times(2x)'=2\cos 2x$ 이므로

$y''=2\times(-\sin 2x)\times(2x)'=-4\sin 2x$

(2) $y'=e^{-3x}\times(-3x)'=-3e^{-3x}$ 이므로

$y''=-3e^{-3x}\times(-3)=9e^{-3x}$

03 답 (1) $y''=e^x(x^3+6x^2+6x)$

(2) $y''=2e^x\cos x$

(3) $y''=e^x\left(\ln x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

(1) $y'=3x^2e^x+x^3e^x=(x^3+3x^2)e^x$

$y''=(3x^2+6x)e^x+(x^3+3x^2)e^x$

$=e^x(x^3+6x^2+6x)$

(2) $y'=(e^x)'\sin x+e^x(\sin x)'$

$=e^x\sin x+e^x\cos x$

$y''=(e^x)'(\sin x+\cos x)+e^x(\sin x+\cos x)'$

$=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)$

$=2e^x\cos x$

(3) $y'=e^x\ln x+e^x\dfrac{1}{x}=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$

$$y''=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)+e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=e^x\left(\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

04 답 (1) $y''=-\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

(2) $y''=12x^2+36x+18$

(3) $y''=\dfrac{2-\ln x}{x(\ln x)^3}$

(1) $y=\ln(x^2+1)$에서 $y'=\dfrac{2x}{x^2+1}$이고, 이를 x에 대하여 미분하면

$$y''=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}=-\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

(2) $y'=2(x^2+3x)(2x+3)$

$y''=2(2x+3)(2x+3)+2(x^2+3x)\times 2$

$=12x^2+36x+18$

(3) $y'=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$

$$y''=\frac{\frac{1}{x}(\ln x)^2-(\ln x-1)\times 2(\ln x)\times\frac{1}{x}}{(\ln x)^4}$$

$$=\frac{2-\ln x}{x(\ln x)^3}$$

표준

01 답 ④

$g(x)=\{\ln(x-2)\}^2$에서

$$g'(x)=2\ln(x-2)\times\frac{1}{x-2}=\frac{2}{x-2}\ln(x-2)$$

$$g''(x)=\frac{-2}{(x-2)^2}\ln(x-2)+\frac{2}{x-2}\times\frac{1}{x-2}$$

$$=\frac{2-2\ln(x-2)}{(x-2)^2}$$

이므로

$$g''(3)=\frac{2-2\times 0}{1}=2$$

2 답 1

매개변수로 나타낸 함수의 미분법을 이용하여 x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dt}=\cos t$ ⋯⋯ ㉠

$\dfrac{dy}{dt}=1+\sin t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1+\sin t}{\cos t} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의해

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{1+\sin t}{\cos t}\right)\frac{1}{\cos t}$$

$$=\frac{\cos t\cos t-(1+\sin t)(-\sin t)}{\cos^2 t}\times\frac{1}{\cos t}$$

$$=\frac{1+\sin t}{\cos^2 t}\times\frac{1}{\cos t}$$

$$=\frac{1+\sin t}{\cos^3 t}$$

따라서 $\frac{1+\sin 0}{\cos^3 0}=1$

03 답 5

$f(x)=x\times e^{ax+b}$에서

$f'(x)=e^{ax+b}+x\times e^{ax+b}\times a=e^{ax+b}(1+ax)$

$f''(x)=e^{ax+b}\times a(1+ax)+e^{ax+b}\times a$

$=ae^{ax+b}(2+ax)$

$f'(0)=e^b=e^2$에서 $b=2$

$f''(0)=2ae^b=6e^2$에서 $a=3$

따라서 $a+b=3+2=5$

04 답 1

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=f''(1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

도함수 $f'(x)$를 구하면

$$f'(x)=\frac{e^{x-1}\times x-e^{x-1}\times1}{x^2}=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^{x-1}$$

이계도함수 $f''(x)$를 구하면

$$f''(x)=\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)e^{x-1}+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)e^{x-1}$$

$$=\frac{x^2-2x+2}{x^3}e^{x-1}$$

이를 ㉠에 적용하면

$$f''(1)=\frac{1-2+2}{1}e^0=1$$

발전

01 답 -2

$f'(x)$

$=e^x\cos2x+e^x(-2\sin2x)=e^x(\cos2x-2\sin2x)$

$f''(x)$

$=e^x(\cos2x-2\sin2x)+e^x(-2\sin2x-4\cos2x)$

$=e^x(-3\cos2x-4\sin2x)$

$f''(x)+af'(x)+5f(x)=0$에 대입하면

$e^x(-3\cos2x-4\sin2x)$

$+ae^x(\cos2x-2\sin2x)+5e^x\cos2x=0$

$e^x\{(a+2)\cos2x-2(a+2)\sin2x\}=0$

$e^x(a+2)(\cos2x-2\sin2x)=0$

$a+2=0$, 즉 $a=-2$

02 답 ②

$y=\ln(1+x)$라 하면

$$y'=\frac{1}{1+x}$$

$$y''=-\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$y'''=\frac{1\cdot2}{(1+x)^3}$$

$$y^{(4)}=-\frac{1\times2\times3}{(1+x)^4}$$

$$\vdots$$

$$y^{(10)}=-\frac{1\times2\times3\times\cdots\times9}{(1+x)^{10}}$$

따라서 $f^{(10)}(0)=-(1\times2\times\cdots\times9)=-9!$

Ⅱ-2 여러 가지 미분법

01 ①	02 ④	03 ③	04 ⑤
05 ②	06 ②	07 ⑤	08 ⑤
09 -7	10 ③	11 ①	12 ⑤
13 ④	14 ③	15 ③	16 2
17 -1	18 ②	19 $\dfrac{y^2+2y+3}{2(y+1)}$	
20 -2	21 ②	22 ④	
23 ③	24 풀이 참조		

01 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}$

$f'(x)=-\dfrac{2}{(x-1)^2}-\dfrac{2}{(x+1)^2}$

$=-2\times\dfrac{2x^2+2}{(x^2-1)^2}$

따라서 $f'(\sqrt{3})=-4$이다.

02 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}-\cdots-\dfrac{1}{x^9}$

$f'(2)=\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}-\cdots-\dfrac{1}{2^9}$

$=\dfrac{\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{255}{256}$

$p=256$, $q=255$이므로

$p+q=256+255=511$

03 그래프에서 $f(c)=b$이고 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g(b)=c$

역함수의 미분법에 의하여

$g'(b)=\dfrac{1}{f'(g(b))}=\dfrac{1}{f'(c)}$

04 $f'(x)=\tan x+x\sec^2 x$이고,

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}-h\right)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)-\left\{f\left(\frac{\pi}{4}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\left\{\dfrac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}+\dfrac{f\left(\frac{\pi}{4}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{-h}\right\}$

$=2f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\pi+2$

05 $f'(x)=\dfrac{\sec^2 x(1+\sec x)-\tan x(\sec x\tan x)}{(1+\sec x)^2}$

$=\dfrac{\sec x(\sec x+\sec^2 x-\tan^2 x)}{(1+\sec x)^2}$

$=\dfrac{\sec x(\sec x+1)}{(1+\sec x)^2}$

$=\dfrac{\sec x}{1+\sec x}$

이므로 $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2}{3}$이다.

06 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{t}}+a$, $\dfrac{dy}{dt}=2at+\dfrac{1}{t^2}$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2at+\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{\sqrt{t}}+a}$

$t=1$을 대입하면

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2a+1}{1+a}=3$이므로

$2a+1=3(a+1)$

따라서 $a=-2$

07 $y'=2xf(x)\{f(x)+xf'(x)\}$이므로

$x=2$에서의 미분계수는

$y'=2\times 2f(2)\{f(2)+2f'(2)\}=28$

08 $f'(3x-2)\times 3=e^{2x+1}\times 2-e^{2x-1}\times 2$

$f'(3x-2)=\dfrac{2}{3}(e^{2x+1}-e^{2x-1})$

이므로

$f'(1)=\dfrac{2}{3}(e^3-e)$

$=\dfrac{2}{3}e(e^2-1)$

09 해결 과정 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{ax+b}{x^2+1}=\lim_{x\to2}(x^2-3x)$$

$$\frac{2a+b}{5}=-2$$

즉, $2a+b=-10$ …… ㉠ ▸ 2점

또, $f'(x)$를 구해 보면 $x<2$일 때,

$$f'(x)=\frac{a(x^2+1)-(ax+b)2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-ax^2-2bx+a}{(x^2+1)^2}$$

$x>2$일 때, $f'(x)=2x-3$이므로

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-ax^2-2bx+a}{(x^2+1)^2} & (x<2)\\ 2x-3 & (x>2)\end{cases}$$

이때 $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to2}\frac{-ax^2-2bx+a}{(x^2+1)^2}=\lim_{x\to2}(2x-3)$$

$$\frac{-3a-4b}{25}=1$$

즉, $-3a-4b=25$ …… ㉡ ▸ 3점

답 구하기 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $b=-4$

따라서 $a+b=-7$ ▸ 1점

10 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{e^{2x}}$에서

$$f'(x)=\frac{2xe^{2x}-(x^2-1)e^{2x}\times2}{e^{4x}}$$

$$=\frac{2x-2x^2+2}{e^{2x}}$$

이므로

$f'(0)-f(0)=2-(-1)=3$

11 $f(2^{2x}-2^x+1)=2^x+2$에서

$f'(2^{2x}-2^x+1)(2^{2x}\times\ln2\times2-2^x\times\ln2)$

$=2^x\times\ln2$

$f'(2^{2x}-2^x+1)=\dfrac{1}{2\times2^x-1}$ …… ㉠

$2^{2x}-2^x+1=1$, $2^{2x}-2^x=0$,

$2^x(2^x-1)=0$, $2^x=1$, 즉 $x=0$

따라서 ㉠에 $x=0$을 대입하면

$f'(1)=\dfrac{1}{2-1}=1$

12 $f(x)=2^x+4^x+8^x$이라 하면 $f(0)=3$ 이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{2^x+4^x+8^x-3}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

한편 $f'(x)=2^x\ln x+4^x\ln x+8^x\ln x$ 이므로

$f'(0)=\ln2+\ln4+\ln8$

$=\ln2+2\ln2+3\ln2$

$=6\ln2$

13 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하므로 연속이다.

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$에서

$a-1=b$, 즉 $a-b=1$ …… ㉠

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0-}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

에서 $-2a+3=1$, 즉 $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=0$

따라서 $a+b=1$

14 $y=f(x)$가 $(1, 2)$를 지나고 $f'(1)=3$이므로

$g'(2)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{3}$

15 $f(x)=\log_3x$ 에서 $f^{-1}(x)=3^x$

$h(x)=(f^{-1}\circ g)(x)$ 라 하면

$h(x)=f^{-1}(g(x))=f^{-1}(\sin x)=3^{\sin x}$

이때 $h(0)=3^{\sin0}=1$ 이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{(f^{-1}\circ g)(x)-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=h'(0)$$

한편, $h'(x)=3^{\sin x}\times\cos x\times\ln3$ 이므로

$h'(0)=3^0\times1\times\ln3=\ln3$

16 해결 과정 $f(x)=\ln(\sin^2x)$에서

$f'(x)=\dfrac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x}=\dfrac{2\cos x}{\sin x}$ ▸ 4점

답 구하기 따라서 $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2$ ▸ 2점

17 해결 과정 $\lim\limits_{x\to-1}(f(x)-2)=0,\ f(-1)=2$

$f(x)=a+b\ln|x|$ 에서 $a=2$ ▸ 2점

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-2}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$$
$$=f'(-1)=3$$

$f(x)=a+b\ln|x|$ 에서 $f'(x)=\dfrac{b}{x}$ ⋯㉠

㉠에 $x=-1$을 대입하면 $b=-3$ ▸ 3점

답 구하기 따라서 $a+b=2-3=-1$ ▸ 1점

18 $$\lim_{x\to0}\ln\left(\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{10x}}{10}\right)^{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\{\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{10x})-\ln10\}$$

여기서

$f(x)=\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{10x})$

이라 하면

$f(0)=\ln10$ 이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\{\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{10x})-\ln10\}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$$

한편,

$$f'(x)=\frac{e+2e^{2x}+3e^{3x}+\cdots+10e^{10x}}{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{10x}}$$

에서

$$f'(0)=\frac{1+2+3+\cdots+10}{1+1+1+\cdots+1}=\frac{55}{10}=\frac{11}{2}$$

19 해결 과정 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{2y+2}{y^2+2y+3}$ ▸ 3점

답 구하기 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{\frac{2y+2}{y^2+2y+3}}$

$=\dfrac{y^2+2y+3}{2(y+1)}$ ▸ 3점

20 해결 과정 $f'(x)=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$ ▸ 2점

$f''(x)=-\sec^2 x$ ▸ 2점

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$ ▸ 2점

답 구하기 따라서

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f'(x)+1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f'(x)-f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$$
$$=f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2$$ ▸ 2점

21 $f'(x)=\dfrac{2x+2}{x^2+2x}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'(n)}{n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{f'(k)}{k+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+2}{k^2+2k}\times\frac{1}{k+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{2}$$

22 $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x+\cos x}$ 에서

$f'(x)$
$$=\frac{-\sin x(\sin x+\cos x)-\cos x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}$$
$$=\frac{-\sin^2 x-\sin x\cos x-\cos^2 x+\sin x\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}$$
$$=\frac{-1}{1+2\sin x\cos x}=-\frac{1}{1+\sin 2x}$$

$-1\le\sin 2x\le1$에서

$0\le1+\sin 2x\le2,\ \dfrac{1}{1+\sin 2x}\ge\dfrac{1}{2}$

$-\dfrac{1}{1+\sin 2x}\le-\dfrac{1}{2}$

따라서 $f'(x)$의 최댓값은 $-\frac{1}{2}$이다.

23 $y=e^x(\sin x+\cos x)$에서

$y'=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)$

$\quad=2e^x\cos x$

$y''=2e^x\cos x-2e^x\sin x$

이므로 이것을 $y''+ay'+by=0$에 대입하면

$2e^x\cos x-2e^x\sin x+2ae^x\cos x+be^x\cos x=0$

$(b-2)e^x\sin x+(2+2a+b)e^x\cos x=0$

이 등식이 x의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$b-2=0,\ \ 2+2a+b=0$

$a=-2, b=2$

따라서 $a+b=0$

24 (1) 해결 과정 $\ln y=\ln\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)(x+2)^3}$

$$=2\ln|x+1|-\ln|x-1|-3\ln|x+2|$$

답 구하기 따라서 $a=2,\ b=-1,\ c=-3$

▸ 4점

(2) 해결 과정 $z=\ln|y|$

$$=2\ln|x+1|-\ln|x-1|-3\ln|x+2|$$

$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x+2},\ \dfrac{dz}{dy}=\dfrac{1}{y}$

$\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{1}{y}\times\dfrac{dy}{dx}$

답 구하기 따라서

$$\frac{dy}{dx}=y\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x+2}\right)$$

$$=\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+2)^3}\times\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x+2}\right)$$

▸ 4점

Ⅱ-3 도함수의 활용

01 접선의 방정식

기본

01 답 (1) $y=-\pi x+\pi^2$ (2) $y=-2x-3$

(3) $y=\frac{1}{2}x+1$

02 답 (1) $y=x+\frac{1}{2}$ (2) $y=x-3$

(3) $y=-x+\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

03 답 (1) $y=\frac{1}{e}x$ (2) $y=\frac{e^2}{4}x$

04 답 $y=-x+1$

$\theta=\frac{\pi}{6}$일 때, 접점의 좌표를 구하면

$x=\cos^2\frac{\pi}{6}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$,

$y=\sin^2\frac{\pi}{6}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$이므로 $\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4}\right)$

한편, $\frac{dy}{dx}$를 구하면

$\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta(-\sin\theta)$,

$\frac{dy}{d\theta}=2\sin\theta\cos\theta$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{-2\sin\theta\cos\theta}=-1$

즉, $\theta=\frac{\pi}{6}$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 -1이므로

$y=-\left(x-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{4}$

따라서 $y=-x+1$

표준

01 답 $\frac{3}{4}$

$f(x)=\ln x$, $g(x)=ax+\frac{b}{x}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g'(x)=a-\frac{b}{x^2}$

두 곡선이 모두 점 $(e^2, 2)$를 지나므로

$f(e^2)=\ln e^2=2$

$g(e^2)=ae^2+\frac{b}{e^2}=2$ …… ㉠

$x=e^2$에서의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(e^2)=g'(e^2)$

$\frac{1}{e^2}=a-\frac{b}{e^4}$, $a=\frac{1}{e^2}+\frac{b}{e^4}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{1}{e^2}+\frac{b}{e^4}\right)e^2+\frac{b}{e^2}=2$

$\frac{2b}{e^2}=1$, 즉 $b=\frac{e^2}{2}$

$b=\frac{e^2}{2}$을 ㉡에 대입하면

$a=\frac{1}{e^2}+\frac{e^2}{2e^4}=\frac{3}{2e^2}$

따라서 $ab=\frac{3}{2e^2}\times\frac{e^2}{2}=\frac{3}{4}$

02 답 $y=x-2$

$x=1$인 점에서의 $g(x)$의 값을 a라 하면

$g(1)=a$이고,

$f(x)=e^{x+1}$의 역함수가 $g(x)$이므로

$f(a)=1$, $e^{a+1}=1$

$e^{a+1}=e^0$, $a+1=0$, $a=-1$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기는

$g'(1)=\frac{1}{f'(-1)}$

이때 $f'(x)=e^{x+1}$ 이므로

$f'(-1)=e^{-1+1}=1$에서

$g'(1)=1$

따라서 기울기가 1이고 점 $(1,\ -1)$을 지나는 접선의 방정식은

$y+1=x-1$

즉, $y=x-2$

03 답 (1) $y=-x+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$ (2) $y=2x-1$

(1) $f(x)=\cos^2 x$로 놓으면

$f'(x)=2\cos x(-\sin x)=-2\sin x\cos x=-\sin 2x$

접점의 좌표를 $(a, \cos^2 a)$라 하면 직선의 기울기는 -1이므로

$f'(a)=-\sin 2a=-1$

이때 $0\le a\le \pi$이므로

$2a=\frac{\pi}{2}$, 즉 $a=\frac{\pi}{4}$

따라서 구하는 접선은 점 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$을 지나고 기울기가 -1인 직선이므로

$y-\frac{1}{2}=-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, 즉 $y=-x+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$

(2) $x+2y+2=0$에서 $y=-\frac{1}{2}x-1$이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 2이다.

$f(x)=x\ln x+x$로 놓으면 $f'(x)=\ln x+2$

접점의 좌표를 $(t, t\ln t+t)$라 하면 접선의 기울기는 2이므로

$f'(t)=\ln t+2=2$

$\ln t=0$, 즉 $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(1,1)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-1=2(x-1)$, 즉 $y=2x-1$

04 답 (1) $a<0$ 또는 $a>4$ (2) $a=1$

(1) 곡선 $y=(x+a)e^{-x}$ 위의 접점의 좌표를 $(t, (t+a)e^{-t})$이라 하면

$y'=e^{-x}+(x+a)(-e^{-x})$

$=-(x+a-1)e^{-x}$

이므로 접선의 방정식은

$y-(t+a)e^{-t}=-(t+a-1)e^{-t}(x-t)$

이 직선이 원점을 지나므로 $x=y=0$을 대입하면

$0-(t+a)e^{-t}=-(t+a-1)e^{-t}(0-t)$

즉, $(t+a)e^{-t}=-t(t+a-1)e^{-t}$

이때 $e^{-t}>0$이므로 이 등식의 양변을 e^{-t}으로 나누면

$t+a=-t(t+a-1)$

즉, $t^2+at+a=0$

판별식 $D>0$이므로

$D=a^2-4\times1\times a>0$

$a(a-4)=0$

따라서 $a<0$ 또는 $a>4$

(2) 곡선 $y=(x-1)e^x$ 위의 접점의 좌표를 $(t, (t-1)e^t)$이라 하면

$y'=e^x+(x-1)e^x=xe^x$이고

접선의 방정식이 $y-(t-1)e^t=te^t(x-t)$이고 $(a, 0)$을 지나므로

$-(t-1)e^t=te^t(a-t)$

이때 $e^t>0$이므로 이 등식의 양변을 e^t으로 나누면

$-t+1=t(a-t)$

즉, $t^2-(a+1)t+1=0$

판별식 $D=0$이어야 하므로

$D=(a+1)^2-4=0$

그런데 $a>0$이므로 $a=1$

발전

01 답 3

$\triangle ABP$에서 $\overline{AB}$를 밑변으로 생각하면 밑변의 길이는 일정하므로 높이가 최소일 때 넓이가 최소가 된다.

즉, 점 P에서의 접선이 직선 AB에 평행할 때 넓이는 최소이다.

$f(x)=\ln x$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{x}$

점 P의 좌표를 $P(t, \ln t)$라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 1이어야 하므로

$f'(t)=\frac{1}{t}=1$, 즉 $t=1$

이때 $P(1, 0)$이므로 $\triangle ABP$의 넓이의 최솟값은

$\frac{1}{2}\times3\times2=3$

02 답 $y=-4x+3$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-3}{x}=-1$에서 $x\to0$일 때, 극한값이 존재하고

(분모)$\to 0$ 이므로 (분자)$\to 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 0}\{f(x)-3\}=0$ 에서 $\lim_{x \to 0}f(x)=3$

함수 $f(x)$가 미분가능한 함수이므로 $f(x)$는 연속함수이다.

즉, $f(0)=\lim_{x \to 0}f(x)=3$

$$f'(0)=\lim_{x \to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x \to 0}\frac{f(x)-3}{x}=-1$$

$F(x)=e^{-x}f(x)$로 놓으면

$F(0)=e^{0}f(0)=1\times 3=3$

$F'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)$

이므로 $x=0$인 점에서의 접선의 기울기는

$$\begin{aligned} F'(0) &= -e^{0}\times f(0)+e^{0}\times f'(0) \\ &= -1\times 3+1\times(-1)=-4 \end{aligned}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은 점 $(0, 3)$을 지나고 기울기가 -4이므로

$y-3=-4(x-0)$, 즉 $y=-4x+3$

Ⅱ-3 도함수의 활용

02 함수의 그래프

기본

01 답 (1) $(0, 2)$ (2) $(1, 3)$ (3) (e, e^2)

02 답 (1) 극솟값: $-\dfrac{1}{e}$

(2) 극댓값: $\dfrac{1}{e}$

(3) 극댓값: 1

(4) 극댓값: $\dfrac{7}{6}\pi+\sqrt{3}$,

극솟값: $\dfrac{11}{6}\pi-\sqrt{3}$

03 답 (1) 최댓값: $\dfrac{1}{e}$

(2) 최댓값: e, 최솟값: 0

(3) 최댓값: $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, 최솟값: 0

04 답 ③

① $f(-x)=e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}=f(x)$
따라서 y축에 대하여 대칭이다.

②, ③ $f'(x)=-2xe^{-x^2}=0$ 에서 $x=0$
따라서 $x<0$ 에서 $f'(x)>0$, $x>0$ 에서 $f'(x)<0$ 이므로 $x=0$ 에서 극댓값은 $f(0)=1$ 이다. 그러나 극솟값은 존재하지 않는다.

④ $f''(x)=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}$

$$=4e^{-x^2}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

이므로 $f''(x)=0$에서

$x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 변곡점은 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$,

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ 의 2 개다.

⑤ $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x^2}=0$ 이므로 x축은 점근선이다.

표준

01 답 (1) $a\geq 2$ (2) $a\geq 1$

(1) $f(x)=a\ln x+x^2-4x$ $(x>0)$에서

$f'(x)=\dfrac{a}{x}+2x-4$

이때 $x>0$에서 $f(x)$가 증가함수이려면 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로

$\dfrac{a}{x}+2x\geq 4$ ⋯⋯ ㉠

$x>0$이므로 산술・기하평균의 관계에 의하여

$\dfrac{a}{x}+2x\geq 2\sqrt{\dfrac{a}{x}\times 2x}=2\sqrt{2a}$

㉠에서 $2\sqrt{2a}\geq 4$이므로 $a\geq 2$

(2) $f(x)=ax-\sin x$의 도함수를 구하면
$f'(x)=a-\cos x$
이때 $f'(x)\geq 0$이려면
$a-\cos x\geq 0$, 즉 $a\geq\cos x$
따라서 $-1\leq\cos x\leq 1$이므로 모든 x에 대하여 성립하려면 $a\geq 1$

02 답 $1+\sqrt{3}$

함수 $f(x)$가 극값을 가질 때, $f'(x)=0$이므로
$f'(x)=a\cos x-b\sin x+1$에서

$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=a\times\dfrac{1}{2}-b\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1=0$,

$a-\sqrt{3}b=-2$ ⋯⋯ ㉠

$f'(\pi)=a(-1)-b\times 0+1=0$, $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=\sqrt{3}$이므로

$g(x)=x+\sqrt{3}-\ln x$, $g'(x)=1-\dfrac{1}{x}$

$g'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $g(x)$의 증감을 조사하면 다음과 같다.

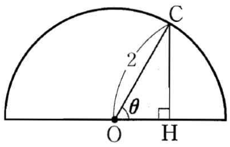
x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘	극소	↗

따라서 $x=1$일 때, $g(x)$는 극솟이며
극솟값 $g(1)=1+\sqrt{3}$을 갖는다.

03 답 (1) $-2\leq k\leq 2$
(2) $a<-1$ 또는 $a>1$

04 답 $3\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{OH}}=2\cos\theta$, $\overline{\mathrm{CH}}=2\sin\theta$
이므로



(사다리꼴의 넓이)

$=(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{CD}})\times\overline{\mathrm{CH}}\times\frac{1}{2}$

$=(4+4\cos\theta)\times2\sin\theta\times\frac{1}{2}$

$=4(1+\cos\theta)\sin\theta$

$y=4(1+\cos\theta)\sin\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$에서

$y'=4(-\sin\theta)\sin\theta+4(1+\cos\theta)\cos\theta$

$\quad=4(-\sin^2\theta+\cos\theta+\cos^2\theta)$

$\quad=4(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)$

$\quad=4(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)$

$y'=0$에서 $\cos\theta=-1$ 또는 $\cos\theta=\frac{1}{2}$

그런데 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{3}$

y의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	

따라서 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 최댓값은 $3\sqrt{3}$

그러므로 사다리꼴의 넓이의 최댓값은 $3\sqrt{3}$

발전

01 답 ①

함수 $f_n(x)$가 극값을 가지려면 $f'_n(x)=0$ 이어야 하므로

$$f'_n(x)=\frac{(n+1)x^{n-1}-\ln x\times n(n+1)\times x^{n-1}}{\{(n+1)x^n\}^2}\text{ 에서}$$

$(n+1)x^{n-1}(1-n\ln x)=0$

$\ln x=\frac{1}{n}$, 즉 $x=e^{\frac{1}{n}}$

$x=e^{\frac{1}{n}}$ 의 좌우에서 $f'_n(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $f_n(x)$ 는 $x=e^{\frac{1}{n}}$ 에서 극값을 갖는다.

따라서 $a_n=e^{\frac{1}{n}}$ 이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\{f_1(a_1)+f_2(a_2)+\cdots+f_n(a_n)\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f_1(a_k)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\ln\left(e^{\frac{1}{k}}\right)}{(k+1)e}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{e}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{e}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{e}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{e}$

02 답 ③

곡선 $y=\ln x$ 위의 점 P의 좌표를 $P(t,\ \ln t)$ 라 하면 $t>0$ 이고, $y'=\frac{1}{x}$ 이므로 점 P 에서의 접선의 방정식은 $y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$

점 Q 는 점 P 에서의 접선과 $x=-1$ 의 교점이므로

$y-\ln t=\frac{1}{t}(-1-t)$, $y=-\frac{1}{t}-1+\ln t$

따라서 점 Q 의 좌표는 $Q\left(-1,\ -\frac{1}{t}-1+\ln t\right)$

점 R 는 점 P 에서 $x=-1$ 에 내린 수선의 발이므로 점 R 의 좌표는 $R(-1,\ \ln t)$

즉, $\overline{PR}=t-(-1)=t+1$

$\overline{RQ}=\ln t-\left(-\frac{1}{t}-1+\ln t\right)=\frac{1}{t}+1$

따라서 ($\triangle PRQ$ 의 넓이)$=\frac{1}{2}\overline{PR}\times\overline{RQ}$

$=\frac{1}{2}(t+1)\left(\frac{1}{t}+1\right)=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}+2\right)$

이때 $t>0$ 이므로 $t+\frac{1}{t}\geq 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=2$

그러므로 $\triangle PRQ$ 의 넓이의 최솟값은 2 이다.

Ⅱ-3 도함수의 활용

03 방정식과 부등식에의 활용

기본

01 답 ②

02 답 20

03 답 $0 \le a < 1$

방정식 $\sin x = ax$ 가 서로 다른 세 실근을 가지려면 방정식 $\sin x = ax$ 에서 $f(x) = \sin x$, $g(x) = ax$ 로 놓으면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = g(x)$ 의 교점이 3 개이어야 한다.

$f(x) = \sin x$ 에서 $f'(x) = \cos x$

$-\pi \le x \le \pi$ 이므로 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

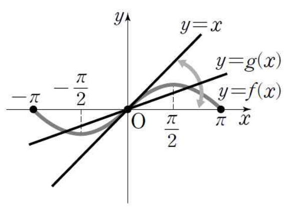
$x = -\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x = \dfrac{\pi}{2}$

$-\pi \le x \le \pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0	↘	-1 극소	↗	1 극대	↘	0

$f(0) = 0$ 이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 원점을 지난다.

이를 이용하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 그린 후, 교점이 3 개가 되도록 그 위에 직선 $y = ax$ 를 그으면 오른쪽 그림과 같다.



이때 원점에서의 함수 $y = \sin x$ 의 접선의 기울기는

$f'(0) = \cos 0 = 1$

따라서 방정식 $\sin x = ax$ 가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 상수 a 의 값의 범위는

$0 \le a < 1$

04 답 풀이 참조

$f(x) = 2e^x - 2 - 2x$ 라 하면

$f'(x) = 2e^x - 2$

또한, $x > 0$ 이면 $2e^x > 2$ 이므로 $f'(x) > 0$

따라서 $x > 0$ 이면 $f(x)$ 는 증가하고 $f(0) = 0$ 이므로 $f(x) > 0$ 에서

$2e^x > 2 + 2x$

표준

01 답 ④

$x > 0$ 이므로

$\ln x + \dfrac{a}{x^2} \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \ln x + a \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \ln x \ge -a$

$f(x) = x^2 \ln x$ 라고 하면

$f'(x) = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1)$

이때 $f'(x) = 0$ 에서 $x = e^{-\frac{1}{2}}$

그러므로 $f(x)$는 $x = e^{-\frac{1}{2}}$ 에서 극소이면서 최솟값을 갖는다.

$f(e^{-\frac{1}{2}}) = (e^{-\frac{1}{2}})^2 \ln e^{-\frac{1}{2}}$

$= e^{-1} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$= -\dfrac{1}{2e}$

$-a \le -\dfrac{1}{2e}$ 이므로 $a \ge \dfrac{1}{2e}$

따라서 실수 a의 최솟값은 $\dfrac{1}{2e}$이다.

02 답 (1) $k < e$ (2) $k < \dfrac{1}{e}$

(1) 직선 $y = kx$가 $y = e^x$과 접하는 경우

$y = e^x$에서 $y' = e^x$이므로 $y = e^x$ 위의 점 $(t,\ e^t)$에서의 접선의 방정식은

$y - e^t = e^t(x - t)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-e^t = e^t \times (-t)$

따라서 $t = 1$이므로 $k < e$

(2) 직선 $y = kx$가 $y = \ln x$와 접하는 경우

$y = \ln x$에서 $y' = \dfrac{1}{x}$이므로 $y = \ln x$ 위의 점 $(s,\ \ln s)$에서의 접선의 방정식은

$y - \ln s = \dfrac{1}{s}(x - s)$ 이 직선이 원점을 지나므로

$-\ln s = \frac{1}{s}\times(-s)$

따라서 $s=e$이므로 $k<\frac{1}{e}$

03 답 ①

방정식 $\sqrt{1+x^2}=a(1+x)$ 에서 $x\geq 0$ 이므로

$\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x}=a$ …… ㉠

라 하고 $g(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}$, $h(x)=a$ 라 하면

$$g'(x)=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\times(x+1)-\sqrt{1+x^2}}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}(x+1)^2}$$

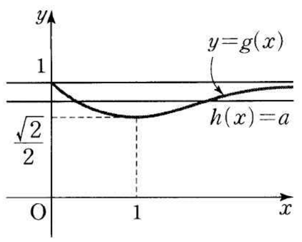
따라서 $x=1$ 에서 극소이므로 극솟값은

$g(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

또한 $g(0)=1$ 이고

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{1+\frac{1}{x}}=1$$

이므로 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서 ㉠이 실근을 가져야 할 조건은

$\frac{\sqrt{2}}{2}\leq a\leq 1$

이므로 실수 a 의 최댓값과 최솟값의 곱은

$1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

04 답 $k\geq -1$

$f(x)=e^x-\frac{x^2}{2}-x+k$로 놓으면

$f'(x)=e^x-x-1$, $f''(x)=e^x-1$

$x>0$ 일 때, $f''(x)>0$이므로 $x>0$ 에서 $f'(x)$는 증가한다.

또, $f'(0)=0$이므로 $x>0$에서 $f'(x)>0$

따라서 $f(x)$는 $x>0$에서 증가한다.

또, $f(0)=1+k$ 이므로

$1+k\geq 0$, 즉 $k\geq -1$

발전

01 답 ④

$h(x)=f(x)-g(x)=e^{2x}-(1-2x+2x^2)$

이라고 하면

$h'(x)=2e^{2x}+2-4x$

$h''(x)=4e^{2x}-4=4(e^{2x}-1)$

$h''(x)=0$에서 $x=0$이고 $h''(x)$의 부호에 따른 $h'(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$h''(x)$	$-$	0	$+$
$h'(x)$	↘	4(극소)	↗

이 표에서 $h'(x)$는 $x=0$에서 극솟값이면서 최솟값인 $h'(0)=4$를 가지므로 $h'(x)>0$이다.

즉, $h(x)$는 증가함수이다. 따라서

(ⅰ) $x=0$일 때, $h(0)=0$이므로 $f(x)=g(x)$

(ⅱ) $x>0$일 때, $h(0)>0$이므로 $f(x)>g(x)$

(ⅲ) $x<0$일 때, $h(0)<0$이므로 $f(x)<g(x)$

02 답 ⑤

$a^x=x^a$의 양변에 자연로그를 취하면

$x\ln a=a\ln x$, 즉 $\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln a}{a}$

주어진 방정식의 실근의 개수는 곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$와 직선 $y=\frac{\ln a}{a}$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$라고 하면 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $1-\ln x=0$, 즉 $x=e$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

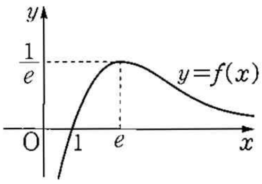
x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

또, $\lim_{x\to+0} f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$이므로

$y=f(x)$의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $0<a\le 1$일 때,

$\frac{\ln a}{a}\le 0$이므로 곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$와 직선

$y=\frac{\ln a}{a}$는 한 점에서 만난다.

ㄴ. $1<a<e$일 때, $0<\frac{\ln a}{a}<\frac{1}{e}$이므로 곡선

$y=\frac{\ln x}{x}$와 직선 $y=\frac{\ln a}{a}$는 서로 다른

두 점에서 만난다.

ㄷ. $a>e$일 때, $0<\frac{\ln a}{a}<\frac{1}{e}$이므로 곡선

$y=\frac{\ln x}{x}$와 직선 $y=\frac{\ln a}{a}$는 서로 다른

두 점에서 만난다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

Ⅱ-3 도함수의 활용

04 속도와 가속도

기본

01 답 ①

시각 t 에서의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$ 라 하면

$$v(t)=x'=\frac{\pi}{3}cos\frac{\pi}{6}t$$

$$a(t)=v'(t)=-\frac{\pi^2}{18}\sin\frac{\pi}{6}t$$

따라서 $t=3$ 일 때의 속도와 가속도는

$$v(3)=\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{2}=0$$

$$a(3)=-\frac{\pi^2}{18}\sin\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi^2}{18}$$

02 답 $0<t<5$

시각 t 에서의 점 P, Q의 속도는 각각 $2t-5$, $4t-15$이므로

$2t-5>4t-15$, $-2t>-10$, $t<5$

그런데 $t>0$이므로 $0<t<5$

03 답 속도 : $(2(1-\cos t),\ 2\sin t)$,
가속도 : $(2\sin t,\ 2\cos t)$

동점 P의 좌표 $(x,\ y)$가 시각 t의 함수 $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$이므로

$$\frac{dx}{dt}=2(1-\cos t),\quad \frac{dy}{dt}=2\sin t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2\sin t,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=2\cos t$$

따라서 t시간 후의 점 P의 속도와 가속도는 각각

(속도)$=(2(1-\cos t),\ 2\sin t)$

(가속도)$=(2\sin t,\ 2\cos t)$

04 답 $\frac{1}{4}$

시각 t 에서의 점 P의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라고 하면

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{t^2+16}$$

$$a(t)=\frac{d}{dt}v(t)=\frac{2(t^2+16)-2t\cdot 2t}{(t^2+16)^2}$$

$$=-\frac{2(t^2-16)}{(t^2+16)^2}$$

따라서 $a(t)=0$ 에서 $t>0$이므로 $t=4$이고, 이 시각에서 점 P의 속도는

$$v(4)=\frac{2\times 4}{4^2+16}=\frac{1}{4}$$

표준

01 답 $-1,\ 0$

$\sin t=\cos 2t-1$ 에서

$\cos 2t-\sin t-1=0$

$(1-\sin^2 t)-\sin t-1=0$

$2\sin^2 t+\sin t=0$

$\sin t(2\sin t+1)=0$

$\sin t=0$ 또는 $\sin t=-\frac{1}{2}$

따라서 출발 후 원점 이외에 처음으로 만날 때는 $t=\pi$ 일 때이고 두 점 P, Q의 속도는 각각

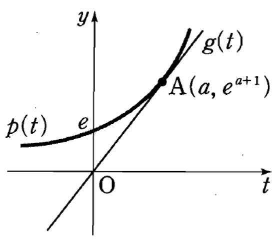
$(\sin t)'=\cos t$

$(\cos 2t-1)'=-2\sin 2t$

이므로 $t=\pi$ 일 때의 두 점 P, Q의 속도는 각각

$\cos\pi=-1$, $-2\sin 2\pi=0$

02 답 $k\geq e^2$



점 P의 속도는

$f'(t)=e^{t+1}$

점 Q의 속도는

$g'(t)=kt$

$e^{t+1}=kt$ 인 t가 존재해야 하므로

$f'(t)=e^{t+1}=p(t)$,

$g'(t)=q(t)=kt$

라 하면 $t>0$에서 두 곡선이 만날 조건을 구하면 된다. 두 곡선의 접점의 좌표를 $A(a,\ e^{a+1})$이라 하면 접선의 방정식은

$y=e^{a+1}(x-a)+e^{a+1}$

점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=-e^{a+1}\cdot a+e^{a+1}$에서 $a=1$

따라서 접선의 방정식은 $y=e^2x$이므로

$k \geq e^2$

03 답 $\frac{3}{4}\pi$

동점 P의 좌표 $(x,\ y)$가 시간 t의 함수

$x=e^t\cos t,\quad y=e^t\sin t$이므로

각각 t에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dt}=e^t(-\sin t+\cos t)$,

$\frac{dy}{dt}=e^t(\sin t+\cos t)$

이고, $t=\frac{\pi}{2}$일 때, 속도 $(v_x,\ v_y)=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$는

$\frac{dx}{dt}=-e^{\frac{\pi}{2}},\quad \frac{dy}{dt}=e^{\frac{\pi}{2}}$

따라서 $\tan\theta=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-1$이므로

$\theta=\frac{3}{4}\pi$

04 답 $\frac{\pi^2}{3}$

점 P의 처음 위치는 $\left(3\cos\frac{\pi}{2},\ 3\sin\frac{\pi}{2}\right)$이고 매초 $\frac{\pi}{3}$만큼 각의 크기로 회전하므로 t초 후의 점 P의 위치 $(x,\ y)$는

$x=3\cos\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{2}\right)=-3\sin\frac{\pi}{3}t$,

$y=3\sin\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{2}\right)=3\cos\frac{\pi}{3}t$이므로

$\frac{dx}{dt}=-\pi\cos\frac{\pi}{3}t,\quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\pi^2}{3}\sin\frac{\pi}{3}t$

$\frac{dy}{dt}=-\pi\sin\frac{\pi}{3}t,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{\pi^2}{3}\cos\frac{\pi}{3}t$

따라서 $t=15$일 때의 점 P의 가속도의 크기는

$$\sqrt{\left(\frac{\pi^2}{3}\sin 5\pi\right)^2+\left(-\frac{\pi^2}{3}\cos 5\pi\right)^2}=\sqrt{\frac{\pi^4}{3^2}}=\frac{\pi^2}{3}$$

발전

01 답 ③

$x=t-\sin t,\ y=1-\cos t$ 에서

$\frac{dx}{dt}=1-\cos t,\quad \frac{dy}{dt}=\sin t$ 이므로

시각 t 에서의 속력 v 는

$$\begin{aligned} v&=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\\ &=\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\\ &=\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\\ &=\sqrt{2-2\cos t}\end{aligned}$$

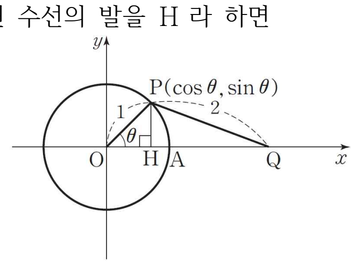
$-1\leq\cos t\leq 1$ 이므로 속력 v 의 최댓값은 $\cos t=-1$ 일 때이다.

따라서 점 P의 속력의 최댓값은

$\sqrt{2-(-2)}=2$

02 답 ①

$\angle\mathrm{AOP}=\theta$ 라 하면 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ 이고 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면



$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OQ}}&=\overline{\mathrm{OH}}+\overline{\mathrm{HQ}}=\overline{\mathrm{OH}}+\sqrt{\overline{\mathrm{PQ}}^2-\overline{\mathrm{PH}}^2}\\ &=\cos\theta+\sqrt{4-\sin^2\theta}\end{aligned}$$

따라서 $\mathrm{Q}\left(\cos\theta+\sqrt{4-\sin^2\theta},\ 0\right)$ 이고,

$\frac{d\theta}{dt}=2$ 이므로 $f(\theta)=\cos\theta+\sqrt{4-\sin^2\theta}$ 라 하면

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(\theta)&=-\sin\theta\times\frac{d\theta}{dt}+\frac{-2\sin\theta\cos\theta}{2\sqrt{4-\sin^2\theta}}\times\frac{d\theta}{dt}\\ &=-2\sin\theta+\frac{-2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{4-\sin^2\theta}}\end{aligned}$$

따라서 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\theta=\frac{1}{2}$ 일 때

점 Q 의 속력 v 는

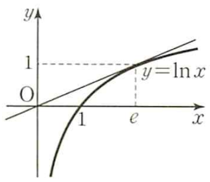
$$v=-2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{-2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2}}{\sqrt{4-\frac{3}{4}}}=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{39}}{13}$$

Ⅱ-3 도함수의 활용

01 ①	02 ③	03 ③	04 ①	05 ⑤
06 ①	07 ⑤	08 ①	09 $\sqrt{2}$	10 ④
11 ⑤	12 ①	13 ①	14 ⑤	15 ③
16 ①	17 $0<k<\frac{1}{2e}$	18 ⑤	19 -6	
20 $1-\frac{2}{\pi}$	21 $\frac{\pi}{2}$	22 ③	23 8	

01 $f(x)=\ln x$라고 하면

$f'(x)=\frac{1}{x}$



점 $(e,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(e)=\frac{1}{e}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{e}(x-e)$, 즉 $y=\frac{1}{e}x$ 이므로

$ea+b=1$

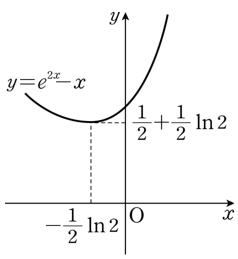
02 $f(x)=e^{2x}-x$로 놓으면 $f'(x)=2e^{2x}-1$

$f'(x)=0$에서

$2e^{2x}-1=0,\ e^{2x}=\frac{1}{2}$

$2x=\ln\frac{1}{2},\ x=-\frac{1}{2}\ln 2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.



x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}\ln 2$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{2}\ln 2$에서 극소이며 최소이므로 최솟값

$f\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)=e^{2\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)}-\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$

따라서 $a-b=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$

03 $f(x)=2x+2\sin x$라고 하면

$f'(x)=2+2\cos x$

접선의 기울기가 $\tan\frac{\pi}{4}=1$이므로 접점의 좌표를 $(a,\ 2a+2\sin a)$라 하면

$f'(a)=2+2\cos a=1$, 즉 $\cos a=-\frac{1}{2}$

이때 $0<a<\pi$이므로 $a=\frac{2}{3}\pi$

따라서 접점의 좌표가 $\left(\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}\right)$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-\left(\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}\right)=1\times\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)$

$y=x+\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$

04 $f(x)=xe^x$이라고 하면

$f'(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x)$ …… ㉠

접점의 좌표를 $(a,\ ae^a)$이라 하면, 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=e^a(1+a)$이므로

접선의 방정식은

$y-ae^a=e^a(1+a)(x-a)$

이 접선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$-ae^a=e^a(1+a)(1-a)$

$e^a(a^2-a-1)=0$

$e^a\neq 0$이므로 $a^2-a-1=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$

또, 두 접선의 기울기는

$e^\alpha(1+\alpha),\ e^\beta(1+\beta)$이므로

두 기울기의 곱은

$e^\alpha(1+\alpha)e^\beta(1+\beta)$

$=e^{\alpha+\beta}(1+\alpha+\beta+\alpha\beta)$

$=e(1+1-1)=e$

05 $f'(x)=2xe^x+x^2e^x=(2x+x^2)e^x$ 이므로

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

$f''(x)=(2+2x)e^x+(2x+x^2)e^x$

$=(2+4x+x^2)e^x$

이므로

$f''(-2)=-\dfrac{2}{e^2}<0$, $f''(0)=2>0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$ 에서 극댓값

$f(-2)=\dfrac{4}{e^2}$ 를 가진다.

06 $f(x)=x^4-2x^2-2x+1$ 로 놓으면

$f'(x)=4x^3-4x-2$

$f''(x)=12x^2-4$

$f''(x)=0$ 에서 $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$x<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 $f''(x)>0$,

$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 $f''(x)<0$ 이고,

$x>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 $f''(x)>0$ 이므로 $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

또는 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가

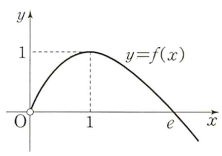
바뀐다.

따라서 변곡점의 x 좌표는

$x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{3}=0$

07 $f'(x)=-\ln x$, $f''(x)=-\dfrac{1}{x}$



$f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 이고, $x>0$ 에서 $f''(x)<0$ 이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$ 에서 극댓값 $f(1)=1$ 을 갖고,

$x>0$ 에서 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다.

또한, 변곡점을 갖지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

08 $f(x)=ax+\ln(x^2+4)$ 에서

$f'(x)=a+\dfrac{2x}{x^2+4}$

$=\dfrac{ax^2+2x+4a}{x^2+4}$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가함수이므로 $f'(x)\geq 0$

이때 $x^2+4>0$ 이므로 $ax^2+2x+4a\geq 0$

이어야 한다.

(ⅰ) $a>0$

(ⅱ) 방정식 $ax^2+2x+4a=0$ 의 판별식

D라 하면 $\dfrac{D}{4}=1-4a^2\leq 0$ 에서

$(2a-1)(2a+1)\geq 0$

$a\leq -\dfrac{1}{2}$ 또는 $a\geq \dfrac{1}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a\geq \dfrac{1}{2}$ 이므로 정수 a의 최솟값은 1이다.

09 해결 과정 $f(x)=k-\cos x$, $g(x)=\sin x$ 에서

$f'(x)=\sin x$, $g'(x)=\cos x$ ▸ 2점

두 곡선의 접점의 x 좌표를 a라 하면

$f(a)=g(a)$ 에서 $k-\cos a=\sin a$ …… ㉠

$f'(a)=g'(a)$ 에서 $\sin a=\cos a$ …… ㉡

$0\leq x\leq \dfrac{\pi}{2}$ 이므로 ㉡에서 $a=\dfrac{\pi}{4}$ ▸ 3점

답 구하기 $a=\dfrac{\pi}{4}$ 을 ㉠에 대입하면

$k=\sqrt{2}$ ▸ 1점

10 접점에서의 θ 값은

$x=\theta-\sin\theta=\dfrac{\pi}{2}-1$

$y=1+\cos\theta=1$ 이므로 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

또한 $\dfrac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta}=-\sin\theta$ 이므로

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

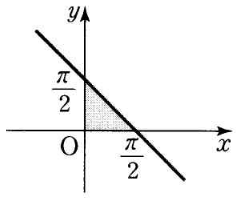
$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}}=-1$$

이므로 구하고자 하는 접선의 방정식은

$y-1=-\left(x-\dfrac{\pi}{2}+1\right)$

$y=-x+\dfrac{\pi}{2}$



따라서 구하는 도형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2}\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi^2}{8}$

11 $f'(x)=4x^3+6ax^2-6ax$

$f''(x)=12x^2+12ax-6a=6(2x^2+2ax-a)$

이때 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 아래로 볼록하므로

$f''(x)=6(2x^2+2ax-a)\geq 0$

즉, $2x^2+2ax-a\geq 0$이므로 방정식

$2x^2+2ax-a=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2+2a\leq 0,\ a(a+2)\leq 0$

따라서 $-2\leq a\leq 0$

12 $f(x)=x^2(1-\ln x)$에서

$f'(x)=2x(1-\ln x)+x^2\times\left(-\dfrac{1}{x}\right)$

$\quad=-2x\ln x+x$

$f''(x)=(-2)\times\ln x-2x\times\dfrac{1}{x}+1$

$\quad=-2\ln x-1$

로그의 진수 조건에 의하여 $x>0$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=\sqrt{e}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{e}}{e}$	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$		↗	$\dfrac{3}{2e}$ (변곡점)	↗	$\dfrac{e}{2}$ (극대)	↘

따라서 함수 $f(x)$가 증가하고 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록한 구간은 $\left(\dfrac{\sqrt{e}}{e},\ \sqrt{e}\right)$이다.

따라서 b의 최댓값은 $\sqrt{e}$ 이다.

13 방정식 $2\cos x-a\cos 2x=\dfrac{3}{2}$에서

$f(x)=2\cos x-a\cos 2x$라 하면

$f(-x)=f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

$f'(x)=-2\sin x+2a\sin 2x$

$\quad=-2\sin x+4a\sin x\cos x$

$\quad=2\sin x(2a\cos x-1)$

$0\leq x\leq \pi$일 때,

$f'(x)=0$에서

$\sin x=0$ 또는 $\cos x=\dfrac{1}{2a}$

$\sin x=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\pi$

$\cos x=\dfrac{1}{2a}$에서 $x=t$라 하면

$f(t)=2\cos t-a\cos 2t$

$\quad=2\cos t-a(2\cos^2 t-1)$

$\quad=2\times\dfrac{1}{2a}-a\left(2\times\dfrac{1}{4a^2}-1\right)$

$\quad=\dfrac{1}{2a}+a$

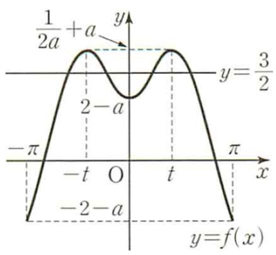
이때 $0\leq x\leq \pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	t	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$2-a$	↗	$\dfrac{1}{2a}+a$	↘	$-2-a$

따라서 함수

$f(x)=2\cos x-a\cos 2x\ (-\pi\leq x\leq \pi)$의

그래프를 그리면 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{3}{2}$이 서로 다른 세 점에서 만나기 위해서는 $2-a=\dfrac{3}{2}$, 즉 $a=\dfrac{1}{2}$이어야 한다.

14 $f(x)=e^x+\sin x+a$로 놓으면

$f'(x)=e^x+\cos x$

모든 양수 x에 대하여

$e^x>1$, $-1\le\cos x\le 1$이므로 $f'(x)>0$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0,\ \infty)$에서

증가하므로 모든 양수 x에 대하여

$f(x)\ge 0$이려면 $f(0)\ge 0$이어야 한다.

즉, $f(0)=1+0+a=1+a\ge 0$에서 $a\ge -1$

따라서 실수 a의 최솟값은 -1이다.

15 $$f'(x)=\frac{\sin x\times x^2-(1-\cos x)\times 2x}{x^4}$$

$$=\frac{\boxed{x\sin x+2\cos x-2}}{x^3}$$

이때 $g(x)=\boxed{x\sin x+2\cos x-2}$라 하면

$g'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin x=\boxed{x\cos x-\sin x}$

$g''(x)=\cos x+x(-\sin x)-\cos x=\boxed{-x\sin x}$

이고 $0<x<\pi$에서 $g''(x)\boxed{<}0$, $g'(0)=0$이므로 $g'(x)\boxed{<}0$

또한, $g(0)=0$이므로 $g(x)\boxed{<}0$

그러므로 $f'(x)\boxed{<}0$

따라서 $f(x)$는 $0<x<\pi$에서 $\boxed{\text{감소}}$한다.

16 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 시각 t에서의 위치가

$x=2t^2-1$, $y=t^3+2t$이므로 시각 t에서의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=(4t,\ 3t^2+2)$, $a=(4,\ 6t)$

따라서 $t=2$에서의 가속도는 $a=(4,\ 12)$이므로

$t=2$에서의 가속도의 크기는

$\sqrt{4^2+12^2}=4\sqrt{10}$

17 해결 과정 $\dfrac{\ln x}{x}=kx$에서 $\ln x=kx^2$

$f(x)=\ln x$, $g(x)=kx^2$이라고 하면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g'(x)=2kx$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 접할 때, 접점의 x좌표를 α라고 하면

$\ln\alpha=k\alpha^2$ …… ㉠

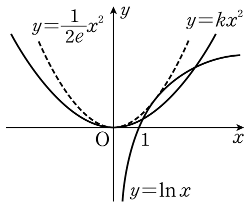
$\dfrac{1}{\alpha}=2k\alpha$ …… ㉡

㉡에서 $k=\dfrac{1}{2\alpha^2}$이고, ㉠에 대입하면

$\ln\alpha=\dfrac{1}{2}$이므로

$\alpha=e^{\frac{1}{2}}$, $k=\dfrac{1}{2e}$ ▸ 4점

답 구하기 따라서 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=\ln x$, $y=kx^2$이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 실수 k의 값의 범위는



$0<k<\dfrac{1}{2e}$ ▸ 2점

18 $f(x)=x^2e^{-x}-1$에서

$f'(x)=(2x-x^2)e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$f''(x)=(2-2x)e^{-x}+(2x-x^2)\cdot(-e^{-x})$

$=(x^2-4x+2)e^{-x}$

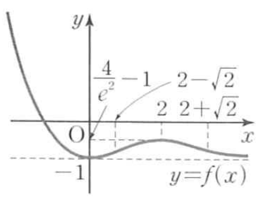
이므로 $f''(x)=0$에서 $x=2\pm\sqrt{2}$

x	…	0	…	$2-\sqrt{2}$	…	2	…	$2+\sqrt{2}$	…
$f'(x)$	−	0	+	+	+	0	−	−	−
$f''(x)$	+	+	+	0	−	−	−	0	+
$f(x)$	↘	-1 (극소)	↗	$\frac{6-4\sqrt{2}}{e^{2-\sqrt{2}}}-1$ (변곡점)	↗	$\frac{4}{e^2}-1$ (극대)	↘	$\frac{6+4\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}-1$ (변곡점)	↘

이때 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=-1$

이므로 직선 $y=-1$이 점근선이 된다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



ㄱ. $f(x) \geq -1$ (참)

ㄴ. $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(x)-0}{x-0}$ 이므로 $\dfrac{f(x)}{x}$ 는 두 점 $(0,\ 0)$ 과 $(x,\ f(x))$ 를 지나는 직선의 기울기이다.

따라서 $x_1 < x_2 < 0$ 일 때,

$x_2 f(x_1) < x_1 f(x_2)$ 는 $\dfrac{f(x_1)}{x_1} < \dfrac{f(x_2)}{x_2}$

(참)

ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값을 가지므로 충분히 작은 양수 h 에 대하여

$f(2-h) < f(2)$ 이고, $f(2+h) < f(2)$ (참)

ㄹ. $f''(x)=0$ 에서 $x = 2 \pm \sqrt{2}$, $\alpha + \beta = 4$

(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

19 문제 이해 조건 (가)에서 $f(1-x) = f(1+x)$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이다.

y 축에 대칭이고 최고차항의 계수가 1 인 사차함수는 $y = x^4 + ax^2 + b$ (a, b 는 상수)라 할 수 있으므로 $f(x) = (x-1)^4 + a(x-1)^2 + b$ (a, b 는 상수)로 놓을 수 있다. ▸ 2점

해결 과정

$f'(x) = 4(x-1)^3 + 2a(x-1)$ …… ㉠

$f''(x) = 12(x-1)^2 + 2a$ …… ㉡

또, 조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 3 이고, 함수 $f(x)$ 의 그래프가 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이다.

즉, $f(1) = 0+0+b = 3$, $b=3$

조건 (다)에서 점 $(2,\ f(2))$ 는 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이므로 ㉡에서

$f''(2) = 12 + 2a = 0$, $a = -6$ ▸ 2점

$a=-6$ 을 ㉠에 대입하면

$f'(x) = 4(x-1)^3 - 12(x-1)$

$\quad = 4(x-1)(x^2-2x-2)$

$f'(x) = 0$ 에서

$x=1$ 또는 $x = 1-\sqrt{3}$ 또는 $x = 1+\sqrt{3}$

답 구하기 따라서 함수 $f(x)$ 의 극솟값은

$f(1-\sqrt{3})$

$= f(1+\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^4 - 6 \times (\sqrt{3})^2 + 3$

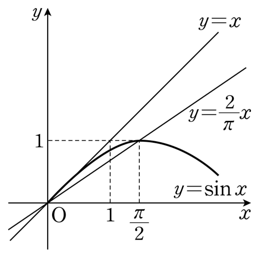
$= -6$ ▸ 2점

20 해결 과정 $y = \sin x$ 에서 $y' = \cos x$ 이므로 함수 $y = \sin x$ 의 그래프 위의 $x=0$ 인 점에서의 접선의 방정식은

$y - \sin 0 = \cos 0 (x-0)$, 즉 $y = x$

또한 원점과 점 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 1\right)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$y - 0 = \dfrac{1-0}{\dfrac{\pi}{2}-0}(x-0)$, 즉 $y = \dfrac{2}{\pi}x$ ▸ 3점



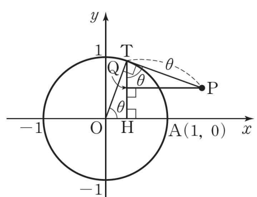
$0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ 에서 부등식 $ax \leq \sin x \leq bx$ 가 성립하기 위해서는

$a \leq \dfrac{2}{\pi}$, $b \geq 1$ ▸ 3점

답 구하기 따라서 $b-a$ 의 최솟값은 $1 - \dfrac{2}{\pi}$ 이다.

▸ 2점

21 문제 이해



$\angle \mathrm{AOT} = \theta$ 라 하면 $\overset{\frown}{\mathrm{AT}} = \overline{\mathrm{TP}} = \theta$ 이므로 점 $\mathrm{T}(\cos\theta,\ \sin\theta)$

이고 점 P 의 x 좌표는

$x = \overline{\mathrm{OH}} + \overline{\mathrm{PQ}} = \cos\theta + \theta\sin\theta$

점 P 의 y 좌표는

$y = \overline{\mathrm{TH}} - \overline{\mathrm{TQ}} = \sin\theta - \theta\cos\theta$

해결 과정

$P(x,\ y)=P(\cos\theta+\theta\sin\theta,\ \sin\theta-\theta\cos\theta)$

▸ 2점

$\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta+\sin\theta+\theta\cos\theta=\theta\cos\theta$

$\dfrac{dy}{d\theta}=\cos\theta-\cos\theta+\theta\sin\theta=\theta\sin\theta$

점 T가 점 $(0,\ 1)$을 지나는 순간 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$이다.

$\dfrac{d\theta}{dt}=1$이므로 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$일 때

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dx}{d\theta}\times\dfrac{d\theta}{dt}=0,\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{d\theta}\times\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{\pi}{2}$

▸ 4점

답 구하기 따라서 점 T가 점 $(0,\ 1)$을 지나는 순간 점 P의 속도의 크기는

$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\dfrac{\pi}{2}$ ▸ 2점

22 제1사분면에서 직사각형과 곡선 $y=\dfrac{3}{x^2+4}$이 만나는 점의 좌표를 $\left(t,\ \dfrac{3}{t^2+4}\right)$으로 놓으면 직사각형의 넓이 $f(t)$는

$f(t)=2t\times\dfrac{3}{t^2+4}=\dfrac{6t}{t^2+4}\quad(t>0)$

$f'(t)=\dfrac{6(t^2+4)-6t\times2t}{(t^2+4)^2}=\dfrac{-6(t+2)(t-2)}{(t^2+4)^2}$

$f'(t)=0$에서 $t=-2$ 또는 $t=2$

$t>0$에서 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$		+	0	−
$f(t)$		↗	극대	↘

함수 $f(t)$는 $t=2$에서 극대면서 최대이다.
따라서 직사각형의 넓이의 최댓값은

$f(2)=\dfrac{12}{4+4}=\dfrac{3}{2}$

23 해결 과정 점 P의 x 좌표를 $t(-2<t<2)$라 하면 $\overline{PH}=t+4$, $\overline{QH}=\sqrt{4-t^2}$이므로

$\overline{PH}+\overline{QH}=t+4+\sqrt{4-t^2}$ ▸ 3점

이때 $f(t)=t+4+\sqrt{4-t^2}\ (-2<t<2)$으로 놓으면

$f'(t)=1+\dfrac{-2t}{2\sqrt{4-t^2}}=\dfrac{\sqrt{4-t^2}-t}{\sqrt{4-t^2}}$

$f'(t)=0$ 에서 $\sqrt{4-t^2}-t=0$

$\sqrt{4-t^2}=t \quad \cdots\cdots㉠$

$4-t^2=t^2,\ t^2=2$

그런데 $t=-\sqrt{2}$ 는 ㉠의 무연근이므로

$t=\sqrt{2}$

$f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	(-2)	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	(2)
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗	극대	↘	

▸ 3점

답 구하기 따라서 함수 $f(t)$ 는 $t=\sqrt{2}$ 일 때 극대이면서 최대이므로 최댓값

$f(\sqrt{2})=\sqrt{2}+4+\sqrt{2}=4+2\sqrt{2}$ 를 가진다.

즉, $a=4+2\sqrt{2}$ 이므로

$(a-4)^2=(2\sqrt{2})^2=8$ ▸ 2점

Ⅱ 미분법

01 ②	**02** e^2	**03** ②	**04** ③	**05** ③
06 ④	**07** ⑤	**08** ③	**09** 2	**10** ⑤
11 ④	**12** ③	**13** ②	**14** ④	**15** ①
16 ③	**17** ③	**18** ⑤	**19** ①	**20** -4
21 $-e$	**22** $\frac{2}{e}$	**23** $k \le 1$		
24 $\frac{3}{2\sqrt{e}}$		**25** $\frac{5}{3}$ m/초		

01 $\lim_{x\to\infty}\{\log_2 x - \log_2(2+x)\}$

$$= \lim_{x\to\infty}\log_2\frac{x}{x+2}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\log_2\left(\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\right)$$

$$= \log_2 1 = 0$$

02 $\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to 0}\left\{(1+4x)^{\frac{1}{4x}}\right\}^2 = e^2$

03 $2x-\frac{\pi}{2}=t$ 로 놓으면

$x\to\frac{\pi}{4}$ 일 때, $t\to 0$ 이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\tan 2x = \lim_{t\to 0} t\tan\left(\frac{\pi}{2}+t\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} t\left(-\frac{1}{\tan t}\right)$$

$$= -\lim_{t\to 0}\frac{t}{\tan t} = -1$$

04 $x=t-\frac{1}{t}$ 에서 $\frac{dx}{dt}=1+\frac{1}{t^2}=\frac{t^2+1}{t^2}$

$y=t+\frac{1}{t}$ 에서 $\frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{t^2}=\frac{t^2-1}{t^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{t^2-1}{t^2}}{\frac{t^2+1}{t^2}}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$$

따라서 $t=2$ 일 때, $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{5}$

05 $f(x)=e^x\sin\pi x$에서

$f'(x)=e^x\sin\pi x+\pi e^x\cos\pi x$

따라서 $f'(0)=e^0\sin 0+\pi e^0\cos 0=\pi$

06 $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\times\frac{\sin^2 x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=1$$

07 $y=x^{\cos x}$ 의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln y=\ln x^{\cos x}=\cos x\ln x$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}=-\sin x\ln x+\frac{1}{x}\cos x$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left(-\sin x\ln x+\frac{1}{x}\cos x\right)$$

$$=x^{\cos x}\left(-\sin x\ln x+\frac{1}{x}\cos x\right)$$

따라서

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^0\left(-1\times\ln\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\times 0\right)$$

$$=-\ln\frac{\pi}{2}=\ln\frac{2}{\pi}$$

08 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}}{n}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{x}$$

에서 $f(x)=\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx})$

으로 놓으면

$f(0)=\ln(1+1+1+\cdots+1)=\ln n$ 이므로

(주어진 식)$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

또, $f'(x)=\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+\neq^{nx}}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}$ 이므로

(주어진 식)$=f'(0)=\frac{1+2+3+\cdots+n}{1+1+1+\cdots+1}$

$$=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}=\frac{n+1}{2}=10$$

따라서 $n=19$

09 $(\cos^2 x - \sin^2 x) f(x) = 2\sin x \cos x$ 에서

$$f(x) = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \tan 2x$$

$$f'(x) = 2\sec^2 2x = \frac{2}{\cos^2 2x}$$

따라서 $f'(0) = 2$

10 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1} = 3$에서

$f(x)$가 연속함수이고 $x\to1$일 때,

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to1}\{f(x)-2\} = f(1)-2 = 0$

즉, $f(1) = 2$

이때 주어진 식은

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 3$$

한편, $g'(x) = 2^{f(x)} \times \ln 2 \times f'(x)$이므로

$$g'(1) = 2^{f(1)} \times \ln 2 \times f'(1) = 2^2 \times 3 \times \ln 2 = 12\ln 2$$

11 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1)$

한편, $y = 2^{\sin x}$에서 x, y를 바꾸면

$x = 2^{\sin y}$ ……㉠

이때 $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

$= \frac{1}{2^{\sin y} \times \ln 2 \times (\sin y)'}$

$= \frac{1}{2^{\sin y} \times \ln 2 \times \cos y}$ ……㉡

한편, $x = 1$을 ㉠에 대입하면

$1 = 2^{\sin y}$, $\sin y = 0$

그런데 $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$이므로 $y = 0$

따라서 ㉡에서

$$f'(1) = \frac{1}{2^{\sin 0} \times \ln 2 \times \cos 0} = \frac{1}{\ln 2}$$

12 $\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x-1}$

$= \lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1} \times \lim_{x\to1}(x^2+x+1)$

$= 3f'(1)$

한편, $f(x)$는 점 $(x,\ e^x\ln x)$에서의 접선의 기울기이므로

$f(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x \ln x)$

$= e^x \ln x + e^x \times \frac{1}{x}$이므로

$$f'(x) = e^x \ln x + e^x \times \frac{1}{x} + \frac{e^x \times x - e^x}{x^2}$$

따라서 $f'(1) = e$이므로 $3f'(1) = 3e$

13 두 점 $(0,\ 2)$, $(3,\ 1)$을 지나는 직선과 직선 $y = 2x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha = \frac{1-2}{3-0} = -\frac{1}{3}$, $\tan\beta = 2$이므로

$$\tan\theta = |\tan(\alpha-\beta)| = \left|\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right| = \left|\frac{-\frac{1}{3}-2}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 2}\right| = 7$$

따라서

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\theta + \tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{7+1}{1-7\times1} = -\frac{4}{3}$$

14 두 점 사이의 거리를 구하면

$\sqrt{(\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2} = \sqrt{3}$

양변을 제곱하면

$\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta + \cos^2\alpha$
$\qquad - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta = 3$

$2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 3$

$\cos(\alpha-\beta) = -\frac{1}{2}$

그런데 $0 < \alpha - \beta < \pi$이므로 $\alpha - \beta = \frac{2}{3}\pi$

15 $f'(x)=e^x$ 이므로 점 $(\ln 2,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(\ln 2)=e^{\ln 2}=2$

따라서 접선의 방정식은

$y-2=2(x-\ln 2),\ y=2x-2\ln 2+2$ …… ㉠

또한 $g'(x)=\dfrac{1}{x}$ 이므로

$\dfrac{1}{x}=2$, 즉 $x=\dfrac{1}{2}$

따라서 곡선 $g(x)=\ln x+a$ 위의 점 $\left(\dfrac{1}{2},\ \ln\dfrac{1}{2}+a\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$y-\left(\ln\dfrac{1}{2}+a\right)=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right),\ y=2x-1+\ln\dfrac{1}{2}+a$ …… ㉡

㉠, ㉡이 서로 일치하므로

$-2\ln 2+2=-1+\ln\dfrac{1}{2}+a$ 에서

$a=3-\ln 2$

16 $y=x^2+\ln x$ 에서

$y'=2x+\dfrac{1}{x},\ y''=2-\dfrac{1}{x^2}$

$y''=0$ 에서 $2-\dfrac{1}{x^2}=0,\ x^2=\dfrac{1}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 변곡점의 x 좌표는 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 변곡점에서 접선을 그을 때, 이 접선의 기울기는

$$2\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}+\sqrt{2}$$
$$=2\sqrt{2}$$

17 $f(x)=(1+\sin x)\cos x$ 에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=\cos x\cos x+(1+\sin x)(-\sin x)\\&=-2\sin^2 x-\sin x+1\\&=-(2\sin x-1)(\sin x+1)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $\sin x=\dfrac{1}{2},\ \sin x=-1$ 이므로

$x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}\pi$	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗		↗	

ㄱ. 구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$에서 $f(x)$는 증가한다. (참)

ㄴ. 구간 $\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi\right)$에서 $f(x)$는 감소하고

구간 $\left(\dfrac{5}{6}\pi,\ \pi\right)$에서 $f(x)$는 증가한다.

(거짓)

ㄷ. 구간 $(\pi,\ 2\pi)$ 에서 $f(x)$ 증가한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

18 $y=\ln(x+1)$ 에서 $y'=\dfrac{1}{x+1}$ 이므로

점 $\mathrm{P}(1,\ \ln 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$y-\ln 2=\dfrac{1}{2}(x-1),\ y=\dfrac{1}{2}x+\ln 2-\dfrac{1}{2}$ …… ㉠

또한, ㉠에 수직인 직선의 기울기는 -2 이므로 직선 l_2 의 방정식은

$y-\ln 2=-2(x-1),\ \ y=-2x+\ln 2+2$ …… ㉡

따라서 $\mathrm{Q}\left(0,\ \ln 2-\dfrac{1}{2}\right)$, $\mathrm{R}(0,\ \ln 2+2)$ 이므로

삼각형 PQR 의 넓이 S 는

$$S=\frac{1}{2}\times 1\times\left\{(\ln 2+2)-\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{5}{4}$$

19 $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$ 에서

$$f'(x)=\frac{2xe^x-x^2e^x}{e^{2x}}=\frac{x(2-x)}{e^x}$$

$$\begin{aligned}f''(x)&=\frac{(2-2x)e^x-(2x-x^2)e^x}{e^{2x}}\\&=\frac{x^2-4x+2}{e^x}\end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$f''(x)=0$ 에서 $x=2\pm\sqrt{2}$

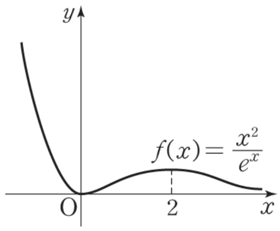
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$2+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	변곡점	↗	극대	↘	변곡점	↘

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{(-t)^2}{e^{-t}}=\lim\limits_{t\to\infty}t^2e^t=\infty$

함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



ㄱ. $x=0$에서 극솟값 $f(0)=0$을 갖는다. (참)

ㄴ. $x=2$에서 극대값 $f(2)=\dfrac{4}{e^2}$를 갖는다.

(거짓)

ㄷ. $x=2\pm\sqrt{2}$에서 변곡점을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

20 문제 이해 $x\to0$ 일 때, 0 이 아닌 극한값이 존재하고 (분자) $\to 0$ 이므로

(분모) $\to 0$ 이다. ▸ 2점

해결 과정 $\lim\limits_{x\to0}(4+a\cos x)=4+a=0$ 에서

$a=-4$ 이므로 ▸ 2점

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin 2x}{4+a\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin 2x}{4-4\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\times 2\sin x\cos x}{4(1-\cos x)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\times 2\sin x\cos x(1+\cos x)}{4(1-\cos^2 x)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x\cos x(1+\cos x)}{2\sin^2 x}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}\times\lim\limits_{x\to0}\cos x(1+\cos x)$

$=\dfrac{1}{2}\times1\times2=1=b$ ▸ 3점

답 구하기 따라서 $ab=(-4)\times1=-4$ ▸ 1점

21 해결 과정 $f(x)=x\ln x-2x$ 에서

$f'(x)=1\times\ln x+x\times\dfrac{1}{x}-2=\ln x-1$

$f'(x)=0$ 에서 $x=e$ ▸ 3점

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$	e^2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	↘	$-e$	↗	0

답 구하기 따라서 최댓값 $M=0$, 최솟값 $m=-e$ 이므로

$M+m=-e$ ▸ 3점

22 해결 과정 $f(x)=e^{-x}$ 에서 $f'(x)=-e^{-x}$

점 $\mathrm{P}(t,\ e^{-t})$ 에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-e^{-t}$

접선의 방정식은 $y-e^{-t}=-e^{-t}(x-t)$

즉, $y=-e^{-t}x+e^{-t}(t+1)$

따라서 x 절편은 $x=t+1$,

y 절편은 $y=(t+1)e^{-t}$이다. ▸ 2점

점 $\mathrm{A}(t+1,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ (t+1)e^{-t})$이므로

삼각형 OAB의 넓이 $S(t)$는

$S(t)=\dfrac{1}{2}(t+1)(t+1)e^{-t}$

$=\dfrac{1}{2}(t+1)^2e^{-t}$ ▸ 2점

$S'(t)=\dfrac{1}{2}\times2(t+1)e^{-t}+\dfrac{1}{2}(t+1)^2(-e^{-t})$

$=-\dfrac{1}{2}(t+1)(t-1)e^{-t}$

$S'(t)=0$ 에서 $t>0$이므로 $t=1$

함수 $S(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		↗	$\dfrac{2}{e}$	↘

▸ 2점

답 구하기 따라서 $S(t)$ 의 최댓값은 $\dfrac{2}{e}$ 이다.

▸ 2점

23 문제 이해

$h(x)=f(x)-g(x)=\cos x-\left(k-\dfrac{1}{2}x^2\right)$

으로 놓으면

$h'(x) = -\sin x + x, h''(x) = -\cos x + 1$

$x > 0$에서 $h''(x) \geq 0$이므로 $h'(x)$는

증가함수이다. ▸ 3점

해결 과정 $x > 0$에서 $h'(x) > h'(0) = 0$, 즉

$h(x)$도 증가함수이므로

$h(x) > h(0) = 1 - k$ ▸ 3점

답 구하기 따라서 $h(x) > 0$이 항상 성립하려면

$1 - k \geq 0$이어야 하므로

$k \leq 1$ ▸ 2점

24 문제 이해 두 함수가 오직 한 점에서 만나려면 함수 $f(x) = e^{2x}$의 그래프와 직선

$g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{e}}x + k$가 접해야 한다. ▸ 1점

해결 과정 $f'(x) = 2e^{2x} = \dfrac{2}{\sqrt{e}}$에서

$2x = \ln\dfrac{1}{\sqrt{e}} = -\dfrac{1}{2}$이므로 $x = -\dfrac{1}{4}$ ▸ 2점

접점이 $\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$이므로 접선의 방정식은

$y = \dfrac{2}{\sqrt{e}}\left(x + \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{e}} = \dfrac{2}{\sqrt{e}}x + \dfrac{3}{2\sqrt{e}}$

▸ 2점

답 구하기 따라서 $k = \dfrac{3}{2\sqrt{e}}$ ▸ 1점

25 해결 과정 배에서 독크까지의 거리를 x, 밧줄의 길이를 y라 하면

$y^2 = x^2 + 4^2$ ▸ 2점

양변을 t에 대하여 미분하면

$2y\dfrac{dy}{dt} = 2x\dfrac{dx}{dt}$ …… ㉠

$\dfrac{dy}{dt} = 1, y = 5, x = 3$ 이므로 ㉠에서

$2 \times 5 \times 1 = 2 \times 3\dfrac{dx}{dt}$ ▸ 2점

답 구하기 따라서 $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{5}{3}$ (m/초) ▸ 2점

Ⅲ-1 여러 가지 적분법

01 여러 가지 함수의 적분

기본

01 답 (1) $-\dfrac{1}{2x^2}+C$ (2) $\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$

(3) $\dfrac{2^x}{\ln 2}-\dfrac{1}{3}x^3+C$ (4) $\dfrac{3^x}{\ln 3}+x+C$

02 답 (1) $x+\sin x+C$

(2) $-\cot x-\csc x+C$

(3) $2\ln|x|-3x+2\sqrt{x^3}+C$

(4) $4x+\ln|x|-\dfrac{1}{x}+C$

03 답 (1) $\dfrac{4}{3}(\sqrt{2}-1)$ (2) $\dfrac{2}{\ln 2}-\ln 2$

(3) $e-1-\dfrac{1}{2}\ln 2$

04 답 (1) $\dfrac{\pi}{2}+1$ (2) $\dfrac{\pi}{2}+1$ (3) 1

표준

01 답 ④

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$이므로

$f'(x)=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)^2=x+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}$에서

$f(x)=\displaystyle\int\left(x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)dx=\frac{1}{2}x^2+2\ln x-\frac{1}{2x^2}+C$

$f(1)=\dfrac{1}{2}+0-\dfrac{1}{2}+C=-\dfrac{3}{4}$에서 $C=-\dfrac{3}{4}$

즉, $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2\ln x-\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{3}{4}$

따라서

$f(\sqrt{2})=\dfrac{1}{2}\times2+2\ln\sqrt{2}-\dfrac{1}{2\times2}-\dfrac{3}{4}$

$=1+\ln2-\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}=\ln2$

02 답 ①

등식 $\displaystyle\int xf(x)dx=x^2\sin x+C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)=2x\sin x+x^2\cos x$

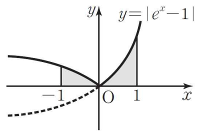
즉, $f(x)=2\sin x+x\cos x\,(x\neq0)$

따라서 $f(\pi)=0-\pi=-\pi$

03 답 (1) $\dfrac{1}{e}+e-2$ (2) 2

(1) $e^x-1=0$에서

$x=0$이므로



$|e^x-1|=\begin{cases} e^x-1 & (x\geq0)\\ -e^x+1 & (x\leq0)\end{cases}$

따라서 $\displaystyle\int_{-1}^{1}|e^x-1|\,dx$

$=\displaystyle\int_{-1}^{0}(-e^x+1)dx+\int_{0}^{1}(e^x-1)dx$

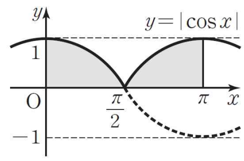
$=\Big[-e^x+x\Big]_{-1}^{0}+\Big[e^x-x\Big]_{0}^{1}$

$=\left(-1+\dfrac{1}{e}+1\right)+(e-1-1)=\dfrac{1}{e}+e-2$

(2) $\cos x=0$에서

$0\leq x\leq\pi$일 때,

$x=\dfrac{\pi}{2}$이므로



$|\cos x|=\begin{cases} \cos x & \left(0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}\right)\\ -\cos x & \left(\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\pi\right)\end{cases}$

따라서 $\displaystyle\int_{0}^{\pi}|\cos x|\,dx$

$=\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx$

$=\Big[\sin x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$=1+1=2$

04 답 (1) $\dfrac{4}{3}$ (2) 15

(1) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2+3x+2}dx$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx$$

$$= \Big[\ln|x+1| - \ln|x+2|\Big]_0^1$$

$$= (\ln 2 - \ln 3) - (-\ln 2)$$

$$= 2\ln 2 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}$$

따라서 $\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2} dx = \ln a$ 에서 $a = \frac{4}{3}$

(2) $\int_0^1 (2^x - 1)(4^x + 2^x + 1) dx$

$$= \int_0^1 (8^x - 1) dx = \left[\frac{8^x}{\ln 8} - x\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{8}{\ln 8} - 1\right) - \frac{1}{\ln 8} = \frac{7}{\ln 8} - 1$$

$\int_0^1 (2^x - 1)(4^x + 2x + 1) dx = \frac{b}{\ln a} - 1$ 에서

$a = 8,\ b = 7$ 이므로

$a + b = 15$

발전

01 답 ①

$f(xy) = f(x) + f(y)$에서 $y = 1$을 대입하면

$f(x) = f(x) + f(1)$이므로 $f(1) = \boxed{0}$이다.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f\left(x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x) + f\left(1+\frac{h}{x}\right) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x}\times x} \quad (f(1) = 0)$$

$$= \boxed{\frac{f'(1)}{x}}$$

그런데 $f'(1) = 2$이므로 $f'(x) = \frac{2}{x}$

즉, $f(x) = \int \frac{2}{x} dx = 2\ln|x| + C$

$f(1) = \boxed{0}$이므로 $C = 0$

따라서 $f(x) = 2\ln|x| = \boxed{2\ln x}\ (x > 0)$

02 답 ①

(i) $x \geq 0$일 때 $f'(x) = 1 + \sin x$이므로

$f(x) = \int (1 + \sin x) dx = x - \cos x + C_1$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$이므로

$\frac{\pi}{2} + C_1 = 0$, 즉 $C_1 = -\frac{\pi}{2}$

따라서 $f(x) = x - \cos x - \frac{\pi}{2}$

(ii) $x < 0$일 때 $f'(x) = \cos x$이므로

$f(x) = \int \cos x\, dx = \sin x + C_2$

한편 $x = 0$에서 미분가능하면 $x = 0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to +0}\left(x - \cos x - \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to -0}(\sin x + C_2)$에서

$-1 - \frac{\pi}{2} = C_2$

즉, $f(x) = \sin x - 1 - \frac{\pi}{2}$ …… ㉠

㉠에서 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2 - \frac{\pi}{2}$이므로

$a = -2,\ b = -\frac{1}{2}$

따라서 $ab = (-2)\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

Ⅲ-1 여러 가지 적분법

02 치환적분법

기본

01 답 (1) $\frac{1}{8}(x^2-1)^4+C$

(2) $-\frac{1}{3}(16-x^2)\sqrt{16-x^2}+C$

(3) $\frac{1}{3}(\ln x)^3+C$

(4) $\frac{1}{2}e^{x^2+1}+C$

02 답 (1) $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

(2) $\frac{1}{2}\ln|1+2\sin x|+C$

(3) $\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)+C$

(4) $\theta+C$

(3) $x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$dx=\cos\theta\, d\theta$

따라서

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1-x^2}\,dx&=\int\sqrt{1-\sin^2\theta}\times\cos\theta\, d\theta\\&=\int\sqrt{\cos^2\theta}\times\cos\theta\, d\theta\\&=\int\cos^2\theta\, d\theta\\&=\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\\&=\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)+C\end{aligned}$$

(4) $x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$dx=\sec^2\theta\, d\theta$

따라서

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{1+x^2}dx&=\int\frac{1}{1+\tan^2\theta}\times\sec^2\theta\, d\theta\\&=\int\frac{1}{\sec^2\theta}\times\sec^2\theta\, d\theta\\&=\int 1 d\theta=\theta+C\end{aligned}$$

03 답 (1) $\frac{1}{2}\ln 2$ (2) $\frac{98}{3}$ (3) $\frac{1}{2}(e^4-1)$

(1) $x^2+1=y$로 놓으면 $2x\,dx=dy$

즉, $dx=\frac{1}{2x}dy$

$x=0$일 때 $y=1$, $x=1$일 때 $y=2$

따라서 $\int_0^1\frac{x}{x^2+1}\,dx$

$$\begin{aligned}&=\int_1^2\frac{1}{y}\times\frac{1}{2}\,dy\\&=\frac{1}{2}\left[\ln|y|\right]_1^2=\frac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

(2) $x^2+9=y$로 놓으면 $2x\,dx=dy$

즉, $dx=\frac{1}{2x}dy$

$x=0$일 때 $y=9$, $x=4$일 때 $y=25$

따라서

$$\begin{aligned}\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx&=\int_9^{25}\sqrt{y}\times\frac{1}{2}dy\\&=\frac{1}{2}\int_9^{25}y^{\frac{1}{2}}dy\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_9^{25}\\&=\frac{1}{3}\left(25^{\frac{3}{2}}-9^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{98}{3}\end{aligned}$$

(3) $x^2=y$로 놓으면 $2x\,dx=dy$

즉, $dx=\frac{1}{2x}dy$

$x=0$일 때 $y=0$, $x=2$일 때 $y=4$

따라서

$$\begin{aligned}\int_0^2 xe^{x^2}\,dx&=\int_0^4 e^y\times\frac{1}{2}\,dy\\&=\frac{1}{2}\int_0^4 e^y\,dy\\&=\frac{1}{2}\left[e^y\right]_0^4\\&=\frac{1}{2}(e^4-1)\end{aligned}$$

04 답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{5}{4}$ (3) $\ln 2$

(1) $\ln x = t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$

또한, $x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

(2) $\sin x = y$로 놓으면 $\cos x\,dx = dy$

즉, $dx = \dfrac{1}{\cos x}dy$

$x=0$일 때 $y=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $y=1$

따라서

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^3 x)\cos x dx = \int_0^1 (1+y^3)\,dy$$
$$= \left[y+\frac{1}{4}y^4\right]_0^1 = \frac{5}{4}$$

(3) $\cos x = y$로 놓으면 $-\sin x\,dx = dy$

즉, $dx = -\dfrac{1}{\sin x}dy$

$x=0$일 때 $y=1$, $x=\dfrac{\pi}{3}$일 때 $y=\dfrac{1}{2}$

따라서

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x}dx$$
$$= \int_1^{\frac{1}{2}}\frac{1}{y}\times(-1)\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{y}\,dy$$
$$= \Big[\ln|y|\Big]_{\frac{1}{2}}^1 = \ln 2$$

표준

01 답 (1) $-\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C$

(2) $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C$

(1) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos x}{1-\sin^2 x}$

이므로

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$$

$\sin x = t$로 놓으면 $\cos x dx = dt$이므로

$$\int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$$
$$= \int \frac{1}{1-t^2}dt = -\int \frac{1}{(t-1)(t+1)}dt$$
$$= -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$= -\frac{1}{2}(\ln|t-1|-\ln|t+1|)+C$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C$$

(2) $\csc x = \dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{\sin^2 x} = \dfrac{\sin x}{1-\cos^2 x}$ 이므로

$$\int \csc x\,dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx$$

$\cos x = t$로 놓으면 $-\sin x dx = dt$이므로

$$\int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx$$
$$= \int \frac{1}{1-t^2}\times(-1)\,dt$$
$$= \int \frac{1}{(t-1)(t+1)}dt$$
$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$= \frac{1}{2}(\ln|t-1|-\ln|t+1|)+C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C$$

02 답 ③

$f(x) = \displaystyle\int f'(x)dx = \int \frac{1}{x\ln x}dx$에서

$\ln x = t$라 하면 $\dfrac{1}{x}dx = dt$이므로

$$f(x) = \int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t|+C$$
$$= \ln|\ln x|+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(e,\ 1)$을 지나므로

$1 = \ln|\ln e|+C$, 즉 $C=1$

즉, $f(x) = \ln|\ln x|+1$이므로

$f(e^e) = \ln|\ln e^e|+1 = \ln e+1 = 2$

03 답 ①

$3-x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$

$x=-1$일 때, $t=4$, $x=2$일 때, $t=1$이므로

$$\int_{-1}^{2}\frac{x-1}{\sqrt{3-x}}dx$$
$$=\int_{4}^{1}\frac{(3-t)-1}{\sqrt{t}}(-dt)=\int_{1}^{4}\frac{2-t}{\sqrt{t}}dt$$
$$=\int_{1}^{4}(2t^{-\frac{1}{2}}-t^{\frac{1}{2}})dt=\left[4\sqrt{t}-\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_{1}^{4}$$
$$=\left(8-\frac{16}{3}\right)-\left(4-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}$$

04 답 ②

$x=\sqrt{2}\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta}=\sqrt{2}\cos\theta$

$x=1$일 때, $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$에서 $\theta=\frac{\pi}{4}$

$x=\sqrt{2}$일 때, $\sin\theta=1$에서 $\theta=\frac{\pi}{2}$

따라서 $\int_{1}^{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2-2\sin^2\theta}}\times\sqrt{2}\cos\theta d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}\cos\theta}\times\sqrt{2}\cos\theta d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}1d\theta=\left[\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

발전

01 답 e^{3x-3}

$\frac{f'(x)}{f(x)}=3$이므로 $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int 3dx=3x+C_1$

이때 $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C_2$이므로

$\ln|f(x)|=3x+C$

이때 $f(x)>0$이므로 $\ln f(x)=3x+C$

또한 $f(1)=1$이므로 $\ln f(1)=3+C=0$

즉, $C=-3$

따라서 $\ln f(x)=3x-3$이므로

$f(x)=e^{3x-3}$

02 답 -1

(ⅰ) $x>0$일 때

$\cos^3x=\cos^2x\cos x=(1-\sin^2x)\cos x$이므로

$\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$

따라서

$$\int\cos^3xdx=\int(1-\sin^2x)\cos xdx$$
$$=\int(1-t^2)\cos x\times\frac{1}{\cos x}dt$$
$$=\int(1-t^2)dt=t-\frac{1}{3}t^3+C_1$$
$$=-\frac{1}{3}\sin^3x+\sin x+C_1$$

(ⅱ) $x<0$일 때

$$\int -k\sin xdx=k\cos x+C_2$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}\sin^3x+\sin x+C_1 & (x>0)\\ k\cos x+C_2 & (x<0)\end{cases}$$

한편 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$이므로 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{3}+1+C_1=1$

즉, $C_1=\frac{1}{3}$

또한 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{3}$이므로 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=C_2=\frac{4}{3}$

즉, $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}\sin^3x+\sin x+\frac{1}{3} & (x>0)\\ k\cos x+\frac{4}{3} & (x<0)\end{cases}$

따라서 $f(x)$가 연속함수가 되기 위해서는

$x=0$에서 연속이어야 하므로

$f(0)=\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to-0}f(x)$, $\frac{1}{3}=k+\frac{4}{3}$

즉, $k=-1$

Ⅲ-1 여러 가지 적분법

03 부분적분법

기본

01 답 (1) $x\ln x - x + C$

(2) $xe^{x} - e^{x} + C$

(3) $x\sin x + \cos x + C$

02 답 (1) $\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C$

(2) $x^2\sin x + 2x\cos x - \sin x + C$

03 답 (1) $2-e$

(2) $2e^2 - e$

(3) $\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1$

04 답 (1) $\frac{3}{4}$ (2) $\pi^2 - 4$ (3) 1

표준

01 답 ②

$$\int x^3 f(x)dx = \int x^2 \times x f(x)dx$$
$$= x^2 g(x) - \int 2x g(x)dx$$
$$= x^2 g(x) - 2h(x) + C$$

02 답 $\frac{2}{\pi}+1$

$1-x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -1$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^1 f(1-x)dx = \int_1^0 f(t)(-dt)$$
$$= \int_0^1 f(t)dt$$
$$= \int_0^1 (te^t + \sin\pi t)dt$$
$$= \int_0^1 te^t dt + \int_0^1 \sin\pi t dt$$
$$= [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt + \left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_0^1$$
$$= e - [e^t]_0^1 + \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\right)$$
$$= e - (e-1) + \frac{2}{\pi}$$
$$= \frac{2}{\pi} + 1$$

03 답 ②

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ 이므로

$$f(x) = \int \frac{\ln x}{x^2}dx$$
$$= -\frac{1}{x}\ln x - \int\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}dx$$
$$= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

$f(e) = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + C = 0$ 이므로 $C = \frac{2}{e}$

즉, $f(x) = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + \frac{2}{e}$

한편, $f'(1) = 0$ 이고 $x=1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값을 갖는다.

따라서 $f(x)$ 의 극솟값은

$$f(1) = \frac{2}{e} - 1$$

04 답 -1

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = k$ (k는 상수)라 하면 …… ㉠

$f(x) = x\cos x + k$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\cos x + k)dx$$
$$= \left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx + \left[kx\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{\pi}{2} + \left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}k$$
$$= \frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\pi}{2}k$$

즉, $k=\frac{\pi}{2}-1+\frac{\pi}{2}k$에서

$\left(1-\frac{\pi}{2}\right)k=\frac{\pi}{2}-1$, 즉 $k=-1$

이것을 ㉡에 대입하면

$f(x)=x\cos x-1$

따라서 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$

발전

01 답 ⑤

$F(x)=xf(x)+x^2\cos x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)+xf'(x)+2x\cos x-x^2\sin x$

한편 $F'(x)=f(x)$이므로

$f(x)=f(x)+xf'(x)+2x\cos x-x^2\sin x$

$xf'(x)=x^2\sin x-2x\cos x$

$f'(x)=x\sin x-2\cos x\,(x>0)$

따라서

$$\begin{aligned}f(x)&=\int(x\sin x-2\cos x)dx\\&=\int x\sin x\,dx-2\int\cos x\,dx\\&=\int x\sin x\,dx-2\sin x+C_1 \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

한편 $\int x\sin x dx$에서 $u'=\sin x$, $v=x$라 하면

$u=-\cos x$, $v'=1$이므로

$$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx&=-x\cos x+\int\cos x\,dx\\&=-x\cos x+\sin x+C_2 \quad \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=-x\cos x-\sin x+C \quad \cdots\cdots ㉢$

또, $F(x)=xf(x)+x^2\cos x$에서 $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$에서

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cos\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)+0=0$

즉, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

㉢에 $x=\frac{\pi}{2}$를 대입하면

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}+C$

이때 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이므로

$0=-1+C$, 즉 $C=1$

따라서 $f(x)=-x\cos x-\sin x+1$이므로

$f(\pi)=\pi+1$

02 답 ①

$u=e^x$, $v'=\sin x$로 놓으면

$u'=e^x$, $v=-\cos x$이므로

$$\begin{aligned}\int e^x\sin x\,dx&=e^x\times(-\cos x)-\int e^x\times(-\cos x)dx\\&=-e^x\cos x+\int e^x\cos x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

$\int e^x\cos x\,dx$에서 $f=e^x$, $g'=\cos x$로 놓으면

$f'=e^x$, $g=\sin x$이므로

$\int e^x\cos x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx$

따라서 ㉠에서

$\int e^x\sin x\,dx=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx$

$2\int e^x\sin x\,dx=e^x(\sin x-\cos x)+C_1$

즉, $\int e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

Ⅲ-1 여러 가지 미분법

01 $\frac{29}{6}$ 02 $\frac{1}{3}$ 03 $5\ln 3$
04 $-\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}e^2+e-1$ 05 ③ 06 ②
07 ④ 08 ④ 09 $\frac{e-3}{2}$ 10 0
11 ③ 12 ⑤ 13 ③ 14 ④ 15 2
16 $\frac{3}{2}e^4$
17 $f(x)=2e^{2x}+e^x-3$ 18 ②
19 $\frac{3\sqrt{2}}{4}-1$ 20 $F(x)=\tan x+\sec x$
21 12 22 ① 23 ③ 24 $f(x)=e\ln x$

01 $f(x)=\int\left(x+\frac{1}{x}\right)^2dx$

$=\int\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{1}{x}+C$

따라서 $f(2)-f(1)$

$=\left(\frac{8}{3}+4-\frac{1}{2}+C\right)-\left(\frac{1}{3}+2-1+C\right)=\frac{29}{6}$

02 $2x-1=t$ 로 놓으면 $2=\frac{dt}{dx}$ 이므로

$f(x)=\int(2x-1)^5dx=\int t^5\times\frac{1}{2}dt$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}t^6+C$

$=\frac{1}{12}(2x-1)^6+C$

$f(0)=\frac{1}{3}$ 에서

$\frac{1}{12}+C=\frac{1}{3}$, 즉 $C=\frac{1}{4}$

이므로 $f(x)=\frac{1}{12}(2x-1)^6+\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 나머지 정리에 의하여

$f(1)=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$

03 $\frac{4x}{(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}$ 라 하면

$\frac{4x}{(x+1)(x-3)}=\frac{(A+B)x-3A+B}{(x+1)(x-3)}$

즉, $A+B=4$, $-3A+B=0$이므로

$A=1$, $B=3$

따라서

$f(x)=\int\frac{4x}{(x+1)(x-3)}dx$

$=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x-3}\right)dx$

$=\ln|x+1|+3\ln|x-3|+C$

이때 $f(0)=7\ln 3$ 이므로

$\ln 1+3\ln 3+C=7\ln 3$, 즉 $C=4\ln 3$

따라서 $f(x)=3\ln|x-3|+\ln|x+1|+4\ln 3$ 이므로

$f(2)=3\ln 1+\ln 3+4\ln 3=5\ln 3$

04 $\int_1^2\frac{1}{e^x-1}dx+\int_2^1\frac{e^{3x}}{e^x-1}dx$

$=\int_1^2\frac{1}{e^x-1}dx-\int_1^2\frac{e^{3x}}{e^x-1}dx$

$=\int_1^2\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{e^{3x}}{e^x-1}\right)dx$

$=\int_1^2\frac{1-e^{3x}}{e^x-1}dx$

$=\int_1^2\frac{-(e^x-1)(e^{2x}+e^x+1)}{e^x-1}dx$

$=-\int_1^2(e^{2x}+e^x+1)dx$

$=-\left[\frac{1}{2}e^{2x}+e^x+x\right]_1^2$

$=-\left(\frac{1}{2}e^4+e^2+2\right)+\left(\frac{1}{2}e^2+e+1\right)$

$=-\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}e^2+e-1$

05 $\int f(x)dx=(x^2+x)e^x$ 의 양변을 미분하면

$f(x)=(2x+1)e^x+(x^2+x)e^x$

따라서 $f(1)=3\times e+2\times e=5e$

06 $x\ge 0$일 때, $|f(x)|=f(x)=e^x-1$,

$x<0$일 때, $|f(x)|=-f(x)=-(e^x-1)$이므로

$$\int_{-1}^{1}|f(x)|dx$$

$$=\int_{0}^{1}(e^x-1)dx-\int_{-1}^{0}(e^x-1)dx$$

$$=\left[e^x-x\right]_0^1-\left[e^x-x\right]_{-1}^0$$

$$=(e-1-1)-(1-e^{-1}-1)$$

$$=e+e^{-1}-2=\frac{e^2-2e+1}{e}=\frac{(e-1)^2}{e}$$

07 $f'(x)=2e^{2x}+e^{-x}$

$f(x)=\int(2e^{2x}+e^{-x})dx=e^{2x}-e^{-x}+C$

$f(0)=e^0-e^0+C=0$ 이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=e^{2x}-e^{-x}$ 이므로

$$f(\ln 2)=e^{2\ln 2}-e^{-\ln 2}$$

$$=e^{\ln 4}-e^{\ln\frac{1}{2}}$$

$$=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

08 $\frac{f'(x)}{f(x)}=2$에서 $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int 2\,dx$ ……㉠

이때 $f(x)=t$로 치환하고 t에 대하여 미분하면

$f'(x)\frac{dx}{dt}=1$ 이므로

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+C'=\ln f(x)+C'$$

㉠에 의하여 $\ln f(x)=2x+C$이고 $f(0)=1$이므로 $\ln f(0)=0$, $C=0$

따라서 $\ln f(x)=2x$에서 $f(x)=e^{2x}$ 이므로

$f(1)=e^2$

09 해결 과정 (ⅰ) $x\ge 0$일 때, $f'(x)=xe^{x^2}$이므로

$$f(x)=\int xe^{x^2}dx$$

$x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$ 이므로

$$f(x)=\int xe^{x^2}dx=\int e^t\times\frac{1}{2}dt$$

$$=\frac{1}{2}e^t+C_1=\frac{1}{2}e^{x^2}+C_1$$ ▸ 2점

(ⅱ) $x<0$일 때, $f'(x)=3\sin^2x\cos x$ 이므로

$$f(x)=\int 3\sin^2x\cos x dx$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$ 이므로

$$f(x)=\int 3\sin^2x\cos xdx$$

$$=\int 3t^2dt=t^3+C_2=\sin^3x+C_2$$

▸ 2점

$f(-\pi)=-1$ 이므로 $C_2=-1$

또 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\frac{1}{2}+C_1=-1$, 즉 $C_1=-\frac{3}{2}$

답 구하기 따라서 $x\ge 0$일 때 $f(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}-\frac{3}{2}$ 이므로

$f(1)=\frac{e-3}{2}$ ▸ 2점

10 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2x}{\sin x+\cos x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^2x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2x}{\sin x+\cos x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2x-\cos^2x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=\left[-\cos x-\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-1-(-1)=0$$

11 $F(x)=xf(x)+x\cos x-\sin x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+\cos x-x\sin x-\cos x$ 이므로

$f'(x)=\sin x\ (x\ne 0)$

$f(x)=\int\sin xdx=-\cos x+C$

미분가능하면 연속이므로

$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=-\cos 0+C=-1+C=1$

에서 $C=2$

따라서 모든 실수 x에 대하여

$f(x)=-\cos x+2$이므로

$f(\pi)=-\cos\pi+2=1+2=3$

12 $f(x)=\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$

$=\int \frac{1}{\cos^2 x}dx+\int \frac{\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$

$=\int \sec^2 x\,dx+\int \cos x\,dx$

$=\tan x+\sin x+C$

$f(0)=C=0$

따라서 $f(x)=\tan x+\sin x$이므로

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}$

$=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

13 $\int_{-1}^{1}|2x|e^{2x}dx$

$=\int_{-1}^{0}(-2xe^{2x})dx+\int_{0}^{1}2xe^{2x}dx$

$=\int_{0}^{1}2xe^{2x}dx-\int_{-1}^{0}2xe^{2x}dx$ ……㉠

$f'(x)=e^{2x}$, $g(x)=2x$로 놓으면

$f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$, $g'(x)=2$이므로

$\int_{0}^{1}2xe^{2x}dx$

$=\left[xe^{2x}\right]_0^1-\int_0^1 e^{2x}dx$

$=(e^2-0)-\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$

$=e^2-\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}$

$\int_{-1}^{0}2xe^{2x}dx$

$=\left[xe^{2x}\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}e^{2x}dx$

$=(0+e^{-2})-\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-1}^{0}$

$=e^{-2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2}\right)$

$=\frac{3}{2}e^{-2}-\frac{1}{2}$

따라서 ㉠에서

$\int_{-1}^{1}|2x|e^{2x}dx$

$=\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{3}{2}e^{-2}-\frac{1}{2}\right)$

$=1+\frac{1}{2}e^2-\frac{3}{2}e^{-2}$

$=\frac{1}{2}(2+e^2-3e^{-2})$

14 $y=e^x+1$에서 $e^x=y-1$

즉, $x=\ln|y-1|$

이때 $y=e^x+1>1$이므로 $y-1>0$

따라서 역함수를 구하면 $y=g(x)=\ln(x-1)$

$\int_0^1 f(x)dx+\int_2^{e+1}g(t)dt$

$=\int_0^1(e^x+1)dx+\int_2^{e+1}\ln(t-1)dt$

$=\int_0^1(e^x+1)dx+\int_2^{e+1}\ln(x-1)dx$

$\int_0^1(e^x+1)dx=\left[e^x+x\right]_0^1=(e+1)-1=e$

$\int_2^{e+1}\ln(x-1)dx$에서

$u'=1$, $v=\ln(x-1)$로 놓으면

$u=x$, $v'=\frac{1}{x-1}$이므로

$\int_2^{e+1}\ln(x-1)dx$

$=\left[x\ln(x-1)\right]_2^{e+1}-\int_2^{e+1}\frac{x}{x-1}dx$

$=(e+1)-\int_2^{e+1}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx$

$=e+1-\left[x+\ln(x-1)\right]_2^{e+1}$

$=e+1-(e+1+1-2)=1$

따라서 $\int_0^1 f(x)dx+\int_2^{e+1}g(t)dt$

$$= \int_0^1 (e^x+1)dx + \int_2^{e+1} \ln(x-1)dx$$
$$= e+1$$

15 $\dfrac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=e^x$ 에서

$$f(x)+g(x)=\int e^x dx$$
$$= e^x + C_1$$

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=e^{-x}$ 에서

$$f(x)-g(x)=\int e^{-x}dx$$
$$=-e^{-x}+C_2$$

이때 $f(0)=0$, $g(0)=1$ 이므로

$f(0)+g(0)=e^0+C_1=1$

$f(0)-g(0)=-e^0+C_2=-1$

즉, $C_1=0$, $C_2=0$

$f(x)+g(x)=e^x$, $f(x)-g(x)=-e^{-x}$ 이므로

이 두 식을 연립하여 풀면

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ g(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$f(\ln 2)=\frac{1}{2}(e^{\ln 2}-e^{-\ln 2})$$
$$=\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

$$g(\ln 2)=\frac{1}{2}(e^{\ln 2}+e^{-\ln 2})$$
$$=\frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$$

따라서 $f(\ln 2)+g(\ln 2)=2$

16 $f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,dx=\int x^3e^{x^2}dx$

이때 $x^2=t$ 로 놓으면 $2x=\dfrac{dt}{dx}$ 이므로

$$f(x)=\int x^3e^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int te^t\,dt$$

$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int te^t\,dt$에서

$u(t)=t$, $v'(t)=e^t$ 으로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=e^t$

따라서

$$f(x)=\frac{1}{2}\int te^t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\left(te^t-\int e^t\,dt\right)$$
$$=\frac{1}{2}te^t-\frac{1}{2}e^t+C$$
$$=\frac{1}{2}e^t(t-1)+C$$

이때 $t=x^2$ 이므로

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1)+C$$

$f'(x)=x^3e^{x^2}$에서 $f'(0)=0$ 이고

$x<0$ 일 때 $f'(x)<0$,

$x>0$ 일 때 $f'(x)>0$ 이므로

함수 $f(x)$는 $x=0$ 에서 극솟값이면서

최솟값을 가지고 $f(0)=-\dfrac{1}{2}$ 에서

$$f(0)=\frac{1}{2}\times1\times(-1)+C=-\frac{1}{2}$$

즉, $C=0$

이므로 $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1)$

함수 $f(x)$는 y축에 대하여 대칭이므로 $x=2$ 에서 최댓값을 가진다.

따라서 구하는 함수 $f(x)$의 최댓값은

$$f(2)=\frac{1}{2}\times e^4\times 3=\frac{3}{2}e^4$$

17 문제 이해 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f'(x)dx=f'(x)=ae^{2x}+e^x$

해결 과정 $f(x)=\displaystyle\int(ae^{2x}+e^x)dx$

$$=\frac{a}{2}e^{2x}+e^x+C$$

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=5$에서 $x\to0$일 때,

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

따라서

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{a}{2}e^{2x}+e^x+C\right)$$
$$=\frac{a}{2}+1+C=0\text{에서}$$

$C=-\dfrac{a}{2}-1$ ▸ 2점

$$f(x)=\frac{a}{2}e^{2x}+e^{x}-\frac{a}{2}-1$$

$$=\frac{a}{2}(e^{2x}-1)+(e^{x}-1)$$

$$=(e^{x}-1)\left\{\frac{a}{2}(e^{x}+1)+1\right\}$$

이때 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x}-1)\left\{\frac{a}{2}(e^{x}+1)+1\right\}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}\lim_{x\to 0}\left\{\frac{a}{2}(e^{x}+1)+1\right\}$$

$$=(a+1)\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}$$

$$=(a+1)\times 1=5$$

즉, $a=4$, $C=-3$ ▸ 3점

답 구하기 따라서

$$f(x)=(e^{x}-1)(2e^{x}+3)=2e^{2x}+e^{x}-3$$

▸ 1점

18 $\int_{1}^{3}f(t)dt=a$로 놓으면

$$f(x)=e^{x}\ln x+\frac{e^{x}}{x}+a$$

$$a=\int_{1}^{3}f(t)dt$$

$$=\int_{1}^{3}f(x)\,dx=\int_{1}^{3}\left(e^{x}\ln x+\frac{e^{x}}{x}+a\right)dx$$

$$=\int_{1}^{3}e^{x}\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)dx+\int_{1}^{3}a\,dx$$

$$=\int_{1}^{3}e^{x}\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)dx+2a$$

즉, $a=-\int_{1}^{3}e^{x}\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)dx$ …… ㉠

이때

$$\int_{1}^{3}e^{x}\ln x\,dx=\left[e^{x}\ln x\right]_{1}^{3}-\int_{1}^{3}e^{x}\times\frac{1}{x}dx$$

$$=e^{3}\ln 3-\int_{1}^{3}e^{x}\times\frac{1}{x}dx$$

이므로

$$\int_{1}^{3}e^{x}\ln x\,dx+\int_{1}^{3}e^{x}\times\frac{1}{x}dx=e^{3}\ln 3 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에 ㉡을 대입하면 $a=-e^{3}\ln 3$이므로

$$f(x)=e^{x}\ln x+\frac{e^{x}}{x}-e^{3}\ln 3$$

따라서 $f(3)=e^{3}\ln 3+\frac{e^{3}}{3}-e^{3}\ln 3=\frac{e^{3}}{3}$

19 **해결 과정** $f(x)=\int_{0}^{x}(\sqrt{2}\sin t-1)\cos t\,dt$의 적분 구간에 변수 x가 있으므로 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(\sqrt{2}\sin x-1)\cos x$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 또는 $\cos x=0$

즉, $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}\left(0\le x\le\frac{2}{3}\pi\right)$

$0\le x\le\frac{2}{3}\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극대이므로 극댓값 M은

$$M=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{2}\sin t-1)\cos t\,dt$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{2}\sin t\cos t-\cos t)dt$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t-\cos t\right)dt$$

$$=\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}\cos 2t-\sin t\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-1\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$ ▸ 3점

또 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 극소이므로 극솟값 m은

$$m=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{2}\sin t-1)\cos t\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{2}\sin t\cos t - \cos t)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2t - \cos t\right)dt$$

$$= \left[-\frac{\sqrt{2}}{4}\cos 2t - \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$ ▸ 2점

답 구하기 따라서

$$M - m = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4} - 1$$

▸ 1점

20 문제 이해 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서

$-1 < \sin x < 1$ 이므로 ▸ 1점

해결 과정 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin^{n-1} x$

$$= \frac{1}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$$

$$= \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} = \sec^2 x + \sec x \tan x$$ ▸ 3점

이때 함수 $f(x)$ 의 부정적분을 구하면

$$F(x) = \int f(x)dx$$

$$= \int (\sec^2 x + \sec x \tan x)dx$$

$$= \tan x + \sec x + C$$

$F(0) = 1$ 이므로 $C = 0$ ▸ 3점

답 구하기 따라서 $F(x) = \tan x + \sec x$ ▸ 1점

21 해결 과정 $f(x) + f(-x) = 0$ 에서

$f(-x) = -f(x)$ 이므로 $f(x)$ 는 원점에 대하여 대칭이다. ▸ 2점

답 구하기 따라서 $\int_{-a}^{a} f'(x)(2 - \sin x)dx$

$$= \int_{-a}^{a} 2f'(x)dx - \int_{-a}^{a} f'(x)\sin x dx$$

$$= 4\int_0^a f'(x)dx + 0$$

$$= 4\Big[f(x)\Big]_0^a = 4\{f(a) - f(0)\}$$

$= 4 \times 3 = 12$ ▸ 4점

22 $xf'(x) = 2\ln x$ 에서 $f'(x) = \frac{2\ln x}{x}$ 이므로

$$f(x) = \int \frac{2\ln x}{x}dx$$

이때 $\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 이므로

$$\int \frac{2\ln x}{x}dx = \int 2t\,dt = t^2 + C = (\ln x)^2 + C$$

즉, $f(x) = (\ln x)^2 + C$

$f(1) = -2$ 에서 $C = -2$ 이므로

$f(x) = (\ln x)^2 - 2$

방정식 $f(x) = \ln x$ 에서

$(\ln x)^2 - 2 = \ln x$, $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$

$(\ln x + 1)(\ln x - 2) = 0$

$\ln x = -1$ 또는 $\ln x = 2$

즉, $x = e^{-1}$ 또는 $x = e^2$

따라서 주어진 방정식을 만족시키는 모든 x 의 값의 곱은 $e^{-1} \times e^2 = e$

23 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}(\sin x + \cos x)dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x\,dx$ 에서

$f(x) = \cos x$, $g'(x) = e^{-x}$ 으로 놓으면

$f'(x) = -\sin x$, $g(x) = -e^{-x}$

따라서 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x\,dx$

$$= \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin x\,dx$$

$$= 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin x\,dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}(\sin x + \cos x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin x\,dx + 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin x\,dx$$

$= 1$

24 문제 이해 함수 $f(x)$가 $f(xy)=f(x)+f(y)$를 만족시키므로 $x=y=1$을 대입하면

해결 과정 $f(1\times 1)=f(1)+f(1)$

이므로 $f(1)=0$ ▸ 2점

또한

$$f(x+h)=f\left(x\times\left(1+\frac{h}{x}\right)\right)$$
$$=f(x)+f\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

가 성립하므로

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)+f\left(1+\frac{h}{x}\right)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f\left(1+\frac{h}{x}-f(1)\right)}{\frac{h}{x}}\times\frac{1}{x}\right\}$$
$$=f'(1)\times\frac{1}{x}=\frac{e}{x}(f'(1)=e)$$ ▸ 4점

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=e\int\frac{1}{x}\,dx$$
$$=e\ln x+C\ (x>0)$$

이때 $f(1)=0$이므로 $C=0$

답 구하기 따라서 $f(x)=e\ln x$ ▸ 2점

Ⅲ-2 정적분의 활용

01 정적분과 급수의 합 사이의 관계

기본

01 답 (1) $\dfrac{1}{24}$ (2) $\dfrac{1}{6}$

(1) 밑변의 길이가 $\dfrac{1}{2n}$이고 높이가 $f\left(\dfrac{k}{2n}\right)$인 직사각형의 넓이가 S_k이므로

$$\lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n} S_k = \lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{2n}\right)^2 \times \frac{1}{2n}$$

이때 위의 식에서 $x=\dfrac{k}{2n}$라 하면 $dx=\dfrac{1}{2n}$이고 정적분의 아래끝은 $\displaystyle\lim_{n \to \infty}\frac{1}{2n}=0$, 정적분의 위끝은 $\displaystyle\lim_{n \to \infty}\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$이므로

$$\lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{2n}\right)^2 \times \frac{1}{2n} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{24}$$

(2) 밑변의 길이가 $\dfrac{1}{2n}$이고 높이가 $f\left(\dfrac{2k}{2n}\right)$인 직사각형의 넓이가 S_{2k}이므로

$$\lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n} S_{2k} = \lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} f\left(\frac{2k}{2n}\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \times \frac{1}{2n}$$

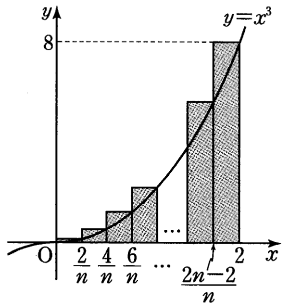
$$= \frac{1}{2}\lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n}$$

이때 위의 식에서 $x=\dfrac{k}{n}$라 하면 $dx=\dfrac{1}{n}$이고 정적분의 아래끝은 $\displaystyle\lim_{n \to \infty}\frac{1}{n}=0$, 정적분의 위끝은 $\displaystyle\lim_{n \to \infty}\frac{n}{n}=1$이므로

$$\frac{1}{2}\lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

02 답 ④



오른쪽 그림과 같이 구간 $[0,\ 2]$를 n 등분하여 직사각형들을 만들고 그 넓이의 합을 S_n이라 하자.

이때 각 소구간의 오른쪽 끝 점의 x좌표는 차례로

$$\frac{2}{n},\ \frac{4}{n},\ \frac{6}{n},\ \cdots,\ \frac{2n-2}{n},\ \frac{2n}{n}$$

이고, 이에 대응하는 y의 값은 차례로

$$\left(\frac{2}{n}\right)^3,\ \left(\frac{4}{n}\right)^3,\ \left(\frac{6}{n}\right)^3,\ \cdots,\ \left(\frac{2n-2}{n}\right)^3,\ \left(\frac{2n}{n}\right)^3$$

이다. 따라서

$$S_n = \frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^3 + \frac{2}{n}\left(\frac{4}{n}\right)^3 + \frac{2}{n}\left(\frac{6}{n}\right)^3 + \cdots + \frac{2}{n}\left(\frac{2n-2}{n}\right)^3 + \frac{2}{n}\left(\frac{2n}{n}\right)^3$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^3$$

따라서 도형의 넓이를 나타내는 식은

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k}{n}\right)^3 \times \frac{2}{n}$$

03 답 (1) $\dfrac{65}{4}$ (2) e^2-1 (3) -2 (4) 25

(1) (주어진 식)

$$= \lim_{n \to \infty}\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2n+k)^2}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2}$$

$$= \lim_{n \to \infty}\frac{\displaystyle\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(2n+k)^2}{\displaystyle\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2} = \frac{\displaystyle\lim_{n \to \infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{k}{n}\right)^2}{\displaystyle\lim_{n \to \infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{\displaystyle\int_2^3 x^2 dx}{\displaystyle\int_0^1 x^2 dx} = \frac{\left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^3}{\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1} = 19$$

(2) (주어진 식)$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[n]{e^{2k}}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2k}{n}}$

$= \int_0^2 e^x dx$

$= \Big[e^x\Big]_0^2 = e^2-1$

(3) (주어진 식)$= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\cos\frac{k\pi}{n}$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\pi}{n}\times\cos\frac{k\pi}{n}\times\frac{\pi}{n}$

$= \int_0^{\pi}x\cos x dx$

$= \Big[x\times\sin x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x dx$

$= -\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -2$

(4) (주어진 식)$= 100\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$= 100\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$= 100\int_0^1 x\ln(1+x)dx$ …… ㉠

$\int_0^1 x\ln(1+x)dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\times\frac{1}{1+x}dx$

$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$

$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1)\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

따라서

$\lim_{n\to\infty}\frac{100}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = 100\times\frac{1}{4} = 25$

04 답 (1) $\frac{1}{2}\int_1^3 x^3 dx$　(2) $6\int_0^1 x\sin 5x\, dx$

(3) $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$　(4) $\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$

(1) 주어진 식에서 $x=1+\frac{2k}{n}$라 하면

$dx=\frac{2}{n}$이고

정적분의 아래끝은 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2\times1}{n}\right)=1$,

위끝은 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n}{n}\right)=3$이므로

(주어진 식)$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\times\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3$

$= \frac{1}{2}\int_1^3 x^3 dx$

(2) (주어진 식)

$= 3\times2\times\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\sin\frac{5k}{n}\right)\times\frac{1}{n}$

$= 6\int_0^1 x\sin 5x\, dx$

(3) (주어진 식)

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\times\frac{1}{n} = \int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$

(4) (주어진 식)$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{k}{n^2}}{\frac{n^2+k^2}{n^2}}$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\times\frac{1}{n}$

$= \int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$

표준

01 답 ③

$f(x)=e^x$으로 놓으면 $f(x)$는 구간 $[1, 4]$에서 연속이므로 정적분의 정의에 의하여

$\Delta x=\frac{3}{n}$, $x_k=1+k\Delta x=1+\frac{3k}{n}$

따라서 $\int_1^4 e^x dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{x_k}\Delta x$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{1+\frac{3k}{n}}\times\frac{3}{n}$

즉, $a=3$

02 답 1

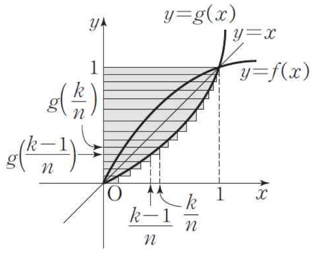
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\times e^{\frac{k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\times e^{\frac{k}{n}}$$
$$=\int_0^1 xe^x\,dx$$

$u'=e^x$, $v=x$라 하면 $u=e^x$, $v'=1$이므로

$$\int_0^1 xe^x\,dx=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx$$
$$=e-\left[e^x\right]_0^1=e-(e-1)=1$$

03 답 ③

$g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로 $y=x$에 대하여 대칭이다. 이때 $\left\{g\left(\frac{x}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$는 오른쪽 그림에서 하나의 직사각형을 나타내는



것이므로 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$는 어두운 부분의 넓이를 나타낸다.

따라서 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\,dx$$

04 답 ⑤

$$(3n+2)^3+(3n+4)^3+(3n+6)^3+\cdots+(3n+2n)^3$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(3n+2k)^3$$

이므로

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(3n+2k)^3\frac{1}{n^4}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(3n+2k)^3}{n^3}\times\frac{1}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{2k}{n}\right)^3\frac{1}{n}$$
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{2k}{n}\right)^3\times\frac{2}{n}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\int_3^5 x^3\,dx$$

②는 ③을 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

④는 ③을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

발전

01 답 ③

(가) $\int_1^n \frac{1}{x}dx=\left[\ln|x|\right]_1^n=\ln n$

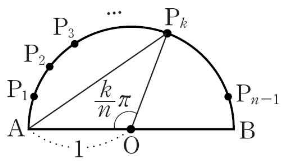
(나) 모든 직사각형의 넓이가 실제 넓이보다 더 크므로 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}>\ln n$

(다) $\ln n\to\infty$이므로 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\to\infty$

따라서 (가): $\ln x$, (나): $>$, (다): ∞

02 답 $\frac{4}{\pi}$

오른쪽 그림에서 $\angle \mathrm{AOP_k}=\frac{k}{n}\pi$이므로 코사인법칙에 의해



$$\overline{\mathrm{AP}_k}=\sqrt{1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos\frac{k}{n}\pi}$$
$$=\sqrt{2-2\cos\frac{k}{n}\pi}=\sqrt{4\sin^2\frac{k}{2n}\pi}$$
$$=2\sin\frac{k}{2n}\pi$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{\mathrm{AP}_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{k}{2n}\pi$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\sin\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{k}{n}\right)\times\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1 2\sin\frac{\pi}{2}x\,dx$$
$$=\left[-2\times\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^1$$
$$=0-\left(-\frac{4}{\pi}\right)=\frac{4}{\pi}$$

Ⅲ-2 정적분의 활용

02 넓이

기본

01 답 (1) 1 (2) $\frac{1}{e}+e-2$ (3) 4

02 답 (1) $\frac{5}{2}\pi-1$ (2) $2e-2$

(3) $\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$

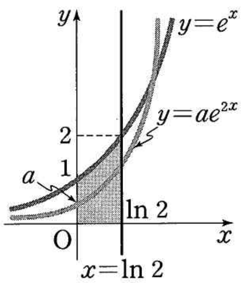
03 답 (1) $2\ln 2-\frac{5}{4}$ (2) $e-\frac{5}{2}$ (3) $2\sqrt{2}$

04 답 (1) 27 (2) $\frac{1}{2}e-1$ (3) $\frac{1}{2}e-1$

표준

01 답 $\frac{1}{3}$

$0 \le x \le \ln 2$ 에서 곡선 $y=e^x$ 과 두 직선 $x=0,\ x=\ln 2$ 및 x 축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림과 같다.



이때 구간 $[0, \ln 2]$ 에서 $e^x > 0$ 이므로 곡선 $y=e^x$ 과 두 직선 $x=0,\ x=\ln 2$ 및 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1=\int_0^{\ln 2} e^x\,dx=\left[e^x\right]_0^{\ln 2}=2-1=1$$

또, 구간 $[0, \ln 2]$ 에서 $ae^{2x}>0$ 이므로 곡선 $y=ae^{2x}$ 과 두 직선 $x=0,\ x=\ln 2$ 및 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_2=\int_0^{\ln 2} ae^{2x}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}ae^{2x}\right]_0^{\ln 2}=2a-\frac{1}{2}a=\frac{3}{2}a$$

주어진 조건에서 $S_1=2S_2$ 이므로

$1=2\times\frac{3}{2}a$, 즉 $a=\frac{1}{3}$

02 답 ⑤

$f(x)=0$이 되는 점을 구하면 $2\ln x-1=0$에서

$x=\sqrt{e}$

$\frac{1}{e}<x<\sqrt{e}$ 에서 $f(x)<0$이고 $\sqrt{e}<x<e$에서 $f(x)>0$이므로

구하는 넓이 S는

$$S=-\int_{\frac{1}{e}}^{\sqrt{e}}\frac{2\ln x-1}{x}dx+\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{2\ln x-1}{x}dx$$

$\ln x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$, 즉 $\frac{dx}{dt}=x$이므로

$$S=-\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(2t-1)dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2t-1)dt$$

$$=-\left[t^2-t\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}+\left[t^2-t\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=-\left\{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)-(1+1)\right\}+\left\{(1-1)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{5}{2}$$

03 답 ⑤

$$\alpha=\int_0^p f(x)dx,\ \beta=-\int_p^{2p^2}f(x)dx$$

이때 $\int_0^p xf(2x^2)dx$ 에서 $2x^2=t$ 로 놓으면

$4xdx=dt$ 이고, $x=0$ 일 때 $t=0$, $x=p$ 일 때, $t=2p^2$ 이다.

따라서

$$\int_0^p xf(2x^2)dx=\int_0^{2p^2}f(t)\times\frac{1}{4}dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2p^2}f(t)dt$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\int_0^p f(t)dt+\int_p^{2p^2}f(t)dt\right\}$$

$$=\frac{1}{4}(\alpha-\beta)$$

04 답 ③

곡선과 직선의 교점은

$\dfrac{2x}{x^2+1}=x$ 에서 $x^3-x=0$

$x(x-1)(x+1)=0$

즉, $x=-1,\ 0,\ 1$

곡선과 직선은 원점에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이 S는

$$S=2\int_0^1\left(\frac{2x}{x^2+1}-x\right)dx$$

$$=2\left(\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx-\int_0^1 xdx\right)$$

$$=2\left\{\int_0^1\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx-\int_0^1 xdx\right\}$$

$$=2\left\{\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\right\}$$

$$=2\ln 2-1$$

발전

01 답 ④

두 도형 A, B 의 넓이를 각각 S_A, S_B라 하면

$$S_A=k-\int_0^k e^{-x}dx,\quad S_B=\int_k^2 e^{-x}dx$$

$S_A=S_B$ 에서

$$k-\int_0^k e^{-x}dx=\int_k^2 e^{-x}dx$$

$$k=\int_0^k e^{-x}dx+\int_k^2 e^{-x}dx$$

$$=\int_0^2 e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^2$$

$$=-e^{-2}+1=\frac{e^2-1}{e^2}$$

02 답 40

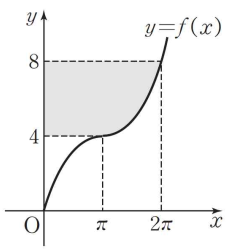
$f'(x)=\cos x+\dfrac{4}{\pi}>0$

이므로 $f(x)$는

증가함수이고,

$f(\pi)=4,\ f(2\pi)=8$

이므로



$$\int_4^8 g(x)dx$$

$$=(2\pi\times 8-\pi\times 4)-\int_\pi^{2\pi}f(x)dx$$

$$=12\pi-\int_\pi^{2\pi}\left(\sin x+\frac{4}{\pi}x\right)dx$$

$$=12\pi-\left[-\cos x+\frac{2}{\pi}x^2\right]_\pi^{2\pi}$$

$$=12\pi-(-1+8\pi)+(1+2\pi)$$

$$=2+6\pi$$

따라서 $m^2+n^2=4+36=40$

Ⅲ-2 정적분의 활용

03 부피

기본

01 답 $4\sqrt{6}$

$$\int_0^6 S(x)dx = \int_0^6 \sqrt{6-x}\,dx$$
$$= \left[-\frac{2}{3}(6-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^6$$
$$= 0+\frac{2}{3}\times 6\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$$

02 답 $\frac{1}{2}(e^8+31)\,\mathrm{cm}^3$

물의 깊이가 $x\,\mathrm{cm}$ 인 수면의 넓이 $S(x)$는

$S(x)= e^{2x}+x+2\,(\mathrm{cm}^2)$

물의 깊이가 $4\,\mathrm{cm}$ 일 때, 물의 부피를 V라 하면

$$V= \int_0^4 S(x)dx= \int_0^4 (e^{2x}+x+2)dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^4$$
$$= \left(\frac{1}{2}e^8+8+8\right)-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e^8+31)\,(\mathrm{cm}^3)$$

03 답 ①

[그림 1]과 같이 밑면의 지름 $\overline{\mathrm{AB}}$에 수직이고 원의 중심에서 x만큼 떨어져 있는 현을 $\overline{\mathrm{PQ}}$라 할 때,

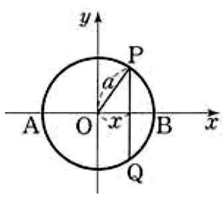
$\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{a^2-x^2}$, $\overline{\mathrm{RH}}= \sqrt{a^2-x^2}\tan 45^\circ = \sqrt{a^2-x^2}$

$\overline{\mathrm{RQ}}= \sqrt{(a^2-x^2)^2+(a^2-x^2)^2}= \sqrt{2(a^2-x^2)^2}$

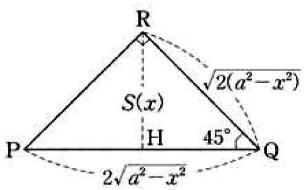
단면은 [그림 2]와 같은 직각이등변삼각형이므로

단면의 넓이는

$$S(x) = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{2(a^2-x^2)}\right\}^2 = a^2-x^2$$



[그림 1]



[그림 2]

따라서

$$V=2\int_0^a S(x)\,dx = 2\int_0^a (a^2-x^2)\,dx = \frac{4}{3}a^3$$

04 답 ②

$$V= \int_0^\pi S(x)\,dx = \int_0^\pi \sin^2 x\,dx$$
$$= \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

표준

01 답 ②

입체의 부피가 최대이려면 $1-x^2 \geq 0$에서

$-1 \leq x \leq 1$

따라서 구하는 부피의 최댓값은

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

이때 $x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$dx=\cos\theta\,d\theta$

또 $x=0$이면 $\theta=0$, $x=1$이면 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$$2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)d\theta$$
$$= \left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

02 답 ②

$\sin x = \cos x \ (0<x<2\pi)$에서

$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$

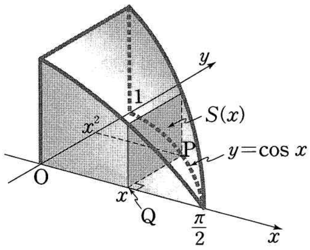
즉, $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{5}{4}\pi$

단면의 넓이 $S(t)=(\sin t-\cos t)^2=1-\sin 2t$이므로 구하는 부피 V는

$$V=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(1-\sin 2t)dt=\left[t+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}=\pi$$

03 답 $\frac{\pi}{4}$

점 P가 곡선 $y=\cos x$ 위를 움직일 때, 정사각형 PQRS에 의하여 생기는 입체는 다음 그림과 같다.



이때 점 P의 좌표를 P$(x,\ \cos x)$라 하면 점 Q의 좌표는 Q$(x,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\cos x$

선분 PQ를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\cos^2 x$

따라서 구하는 부피 V는

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}S(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

04 답 ③

좌표평면을 접어 두 반평면이 서로 수직이 되도록 하였을 때, 삼각형 PQR는 직각삼각형이 된다.

P$(x,\ 0,\ 0)$일 때 삼각형 PQR의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\times\left|-\frac{1}{2}x\right|\times\sin x=\frac{1}{4}x\sin x$$

따라서 구하는 부피 V는

$$V=\int_0^{\pi}\frac{1}{4}x\sin x\,dx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}x\sin x\,dx$$

$$=\frac{1}{4}[-x\cos x]_0^{\pi}+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos x\,dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}[\sin x]_0^{\pi}=\frac{\pi}{4}$$

발전

01 답 ②

점 P의 x좌표가 $t\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$일 때

$\overline{\mathrm{PR}}=2\sqrt{2}\sin t$이고 점 H를 접점이라 하면

$\overline{\mathrm{QH}}=\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{2}\sin t$

$x=t$일 때 도형 S의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\times(2\sin t)^2-\frac{\pi}{4}\times(\sqrt{2}\sin t)^2$$

$$=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sin^2 t$$

따라서 구하는 부피 V는

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}S(t)\,dt=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\left[t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{8}$$

02 답 $4(e-2)$

$1\le x\le e$인 임의의 x에 대하여 정사각형의 한 변의 길이가 $2\ln x$이므로 단면의 넓이 $S(x)$는

$S(x)=(2\ln x)^2=4(\ln x)^2$

따라서 구하는 부피 V는

$$V=\int_1^e S(x)dx=4\int_1^e(\ln x)^2dx$$

$$=4\left([x(\ln x)^2]_1^e-2\int_1^e\ln x\,dx\right)$$

$$=4e-8\int_1^e\ln x\,dx$$

$$=4e-8[x\ln x-x]_1^e=4(e-2)$$

Ⅲ-2 정적분의 활용

04 속도와 거리

기본

01 답 (1) -1 (2) 3 (3) 4

(1) (위치의 변화량)

$$=\int_0^{\frac{3}{2}\pi} v(t)dt=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\cos t\,dt=\Big[\sin t\Big]_0^{\frac{3}{2}\pi}=-1$$

(2) (움직인 거리) $=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}|v(t)|dt=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}|\cos t|dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}(-\cos t)dt$$

$$=\Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\sin t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}=3$$

(3) (위치) = (출발점의 위치)+(위치의 변화량)

$=5+(-1)=4$

02 답 28m

열차가 브레이크를 건 후부터의 속도는 $v(t)=30-3\sqrt{t+81}$ (m/초)이고, 이 열차가 정지할 때의 속도 $v(t)=0$이므로 열차가 정지할 때까지 걸린 시간 t를 구하면

$30-3\sqrt{t+81}=0$, $\sqrt{t+81}=10$

$t+81=100$, 즉 $t=19$

이때 열차의 속도는 30m/초이므로 열차가 멈출 때까지 열차의 속도$v(t)$는 양수이다.

즉, $v(t)=30-3\sqrt{t+81}\geq 0$ $(0\leq t\leq 19)$

따라서 브레이크를 걸고 19초 후에 열차가 정지하므로 정지할 때까지 실제로 움직인 거리는

$$\int_0^{19}|v(t)|dt=\int_0^{19}(30-3\sqrt{t+81})dt$$

$$=\left[30t-2(t+81)\sqrt{t+81}\right]_0^{19}$$

$$=(570-2000)-(-1458)=28(\text{m})$$

03 답 (1) 4 (2) $\ln 3-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{4}$

(1) $x=\theta-\sin\theta$, $y=1-\cos\theta$를 θ에 대하여 미분하면 $\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$

따라서 구하는 곡선의 길이 l은

$$l=\int_0^{\pi}\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{2(1-\cos\theta)}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}2\sin\frac{\theta}{2}d\theta\left(0\leq\theta\leq\pi\rightarrow\sin\frac{\theta}{2}\geq 0\right)$$

$$=\left[-4\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=4$$

(2) $y=\ln(1-x^2)$을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{1-x^2}=\frac{2x}{x^2-1}$$

따라서 구하는 곡선의 길이 l은

$$l=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{4x^2}{x^4-2x^2+1}}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{x^4-2x^2+1}}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{(x^2-1)^2}}\,dx$$

$$=-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)dx$$

$\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{(x-1)(x+1)}$를 부분분수로 변형하면

$$=-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=-\left[x+\ln|x-1|-\ln|x+1|\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=-\left(\frac{1}{2}+\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}\right)=\ln 3-\frac{1}{2}$$

(3) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

따라서 구하는 곡선의 길이 l은

$$l=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}\,dx$$
$$=\int_0^{\ln 2}\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}>0\right)$$
$$=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^{\ln 2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

04 답 ①

$x=t+1,\ y=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ 에서

$\dfrac{dx}{dt}=1,\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$

따라서 $t=0$ 에서 $t=1$ 까지 점 P 가 움직인 거리는

$$\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^1\sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{2t}-2+e^{-2t})}\,dt$$
$$=\int_0^1\sqrt{\frac{1}{4}(e^{2t}+2+e^{-2t})}\,dt$$
$$=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^1\frac{e^t+e^{-t}}{2}dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[e^t-e^{-t}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}\{(e-e^{-1})-(1-1)\}$$
$$=\frac{1}{2}(e-e^{-1})$$

표준

01 답 $\dfrac{1}{2}\ln 3$

$y=\ln(\sin x)$에서 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

$$l=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx$$

$\cos x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$-\sin x=\dfrac{dt}{dx}$, 즉 $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{\sin x}$

따라서 구하는 곡선의 길이 l은

$$l=\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{\sin x}{1-t^2}\times\left(-\frac{1}{\sin x}\right)dt$$
$$=-\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{1}{1-t^2}dt$$
$$=-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{t^2-1}dt$$
$$=-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(t-1)(t+1)}dt$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=-\frac{1}{2}\Big[\ln|x-1|-\ln|t+1|\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=-\frac{1}{2}\left\{\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{2}\right)-0\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\ln 3$$

02 답 2초 후

(i) 두 점이 만날 때는 두 점의 위치가 같을 때 x초 후의 두 점 P, Q의 위치를 각각 x_{P}, x_{Q}라고 하면

$$x_{\mathrm{P}}=\int_0^x\sin\pi t\,dt=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_0^x$$
$$=-\frac{1}{\pi}(\cos\pi x-1)$$
$$x_{\mathrm{Q}}=\int_0^x 2\sin\pi t\,dt=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\pi t\right]_0^x$$
$$=-\frac{2}{\pi}(\cos\pi x-1)$$

(ii) 두 점이 만날 때는 두 점의 위치가 같을 때

$x_P = x_Q$에서 $\cos \pi x = 1$

$x > 0$이므로 $\pi x = 2\pi, 4\pi, \cdots$

즉, $x = 2, 4, \cdots$

따라서 2초 후 처음으로 다시 만난다.

03 답 ④

$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{\ln x}{4}$ 에서 $\frac{dy}{dx}=x-\frac{1}{4x}$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\int_1^e \sqrt{1+\left(x-\frac{1}{4x}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^e \sqrt{1+\left(x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^2}\right)}\,dx$$
$$=\int_1^e \sqrt{x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^2}}\,dx$$
$$=\int_1^e \sqrt{\left(x+\frac{1}{4x}\right)^2}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\ln x\right]_1^e$$
$$=\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}+0\right)$$
$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}$$

04 답 ③

$x=2\cos^3 t,\ y=2\sin^3 t$에서

$\frac{dx}{dt}=6\cos^2 t(-\sin t)=-6\cos^2 t\sin t,\ \frac{dy}{dt}=6\sin^2 t\cos t$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-6\cos^2 t\sin t)^2+(6\sin^2 t\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} |6\sin t\cos t|\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin 2t\,dt$$
$$=\left[-\frac{3}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=3$$

발전

01 답 ⑤

원점으로부터 서로 반대 방향에 있으면 두 위치의 곱이 음수이다.

(t초 후 점 P의 위치) $=\int_0^t f(t)\,dt$

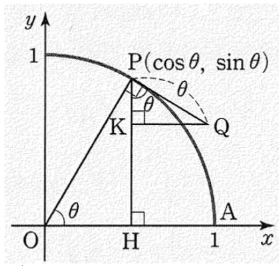
(t초 후 점 Q의 위치) $=\int_0^t g(t)\,dt$

따라서 원점으로부터 서로 반대 방향에 있을 때는

$$\int_0^t f(t)\,dt\times\int_0^t g(t)\,dt<0$$

02 답 $2\pi^2$

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 점 Q에서 $\overline{PH}$에 내린 수선의 발을 K라 하면



P$(\cos\theta, \sin\theta)$일 때

$\angle QPH=\theta$이고 점 Q(x, y)의 좌표는

$x=\overline{OH}+\overline{KQ}=\cos\theta+\theta\sin\theta$

$y=\overline{PH}-\overline{PK}=\sin\theta-\theta\cos\theta$

$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta+\sin\theta+\theta\cos\theta=\theta\cos\theta$

$\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta-\cos\theta+\theta\sin\theta=\theta\sin\theta$

따라서 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{(\theta\cos\theta)^2+(\theta\sin\theta)^2}\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\theta\,d\theta=\left[\frac{1}{2}\theta^2\right]_0^{2\pi}=2\pi^2$$

Ⅲ-2 정적분의 활용

01 $\dfrac{A}{h^2}$, $\dfrac{A}{h^2}x^2$, $\dfrac{1}{3}Ah$ **02** ③ **03** ⑤
04 $a=2$ **05** ③ **06** ② **07** $e+1$
08 ② **09** $e^{\sqrt{2}}$ **10** ③ **11** ①
12 ② **13** 2 **14** ② **15** ④
16 ④ **17** $\dfrac{128}{3}$ **18** ③ **19** 1
20 8 **21** 0 **22** 2 **23** ⑤
24 $\dfrac{4}{3}$

02 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(1+\frac{3}{n}\right)^3+\left(1+\frac{6}{n}\right)^3+\cdots+\left(1+\frac{3n}{n}\right)^3\right\}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^3\times\frac{1}{n}$

$\displaystyle=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^3\times\frac{3}{n}$

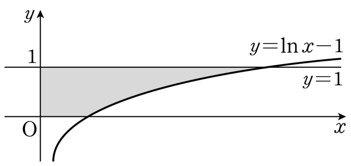
$\displaystyle=\frac{1}{3}\int_1^4 x^3\,dx$

따라서 $\displaystyle\frac{1}{3}\int_1^4 x^3\,dx=\frac{255}{12}=\frac{85}{4}$ 에서

$a=85,\ b=4$

이므로 $a+b=89$

03



곡선 $y=\ln x-1$ 과 x 축, y 축 및 직선 $y=1$ 로 둘러싸인 도형은 위의 그림과 같고 $x=e^{y+1}$ 이므로 구하는 도형의 넓이 S 는

$\displaystyle S=\int_0^1 x\,dy$

$\displaystyle=\int_0^1 e^{y+1}\,dy$

$\displaystyle=\Big[e^{y+1}\Big]_0^1$

$=e^2-e$

04 $f(x)=e^x$ 으로 놓으면 $f(x)$ 는 구간 $[1,\ 3]$ 에서 연속이므로 정적분의 정의에 의하여

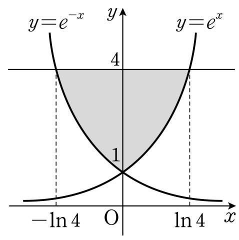
$\displaystyle\Delta x=\frac{2}{n},\ x_k=1+k\Delta x=1+\frac{2k}{n}$

따라서 $\displaystyle\int_1^3 e^x dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{x_k}\times\Delta x$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{1+\frac{2k}{n}}\times\frac{2}{n}$

즉, $a=2$

05 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{-x}$ 과 직선 $y=4$ 로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이 S 는



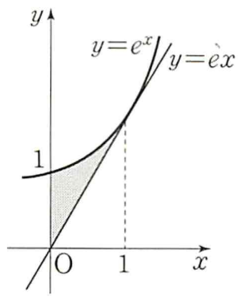
$\displaystyle S=2\int_0^{\ln 4}(4-e^x)\,dx$

$\displaystyle=2\Big[4x-e^x\Big]_0^{\ln 4}$

$=2\{(4\ln 4-4)-(0-1)\}$

$=8\ln 4-6=16\ln 2-6$

06 접점의 좌표를 $(a,\ e^a)$ 이라 하면 $y'=e^x$ 이므로 접선의 방정식은



$y-e^a=e^a(x-a)$

접선이 원점을 지나므로

$0-e^a=e^a(0-a)$

에서 $a=1$

그러므로 접선의 방정식은 $y=ex$

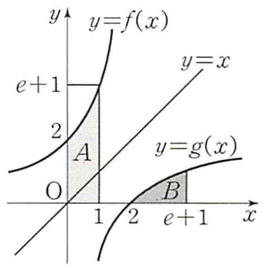
따라서 구하는 넓이 S 는

$\displaystyle S=\int_0^1(e^x-ex)\,dx$

$\displaystyle=\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1$

$\displaystyle=\left(e-\frac{e}{2}\right)-1=\frac{e}{2}-1$

07 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $\int_0^1 f(x)\,dx$, $\int_2^{e+1} g(t)\,dt$의 값은 각각 그림에서 어두운 부분 A, B의 넓이를 뜻하고, 두 부분의 넓이의 합은 네 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(1,\ e+1)$, $(0,\ e+1)$을 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이와 같으므로

$$\int_0^1 f(x)\,dx+\int_2^{e+1} g(t)\,dt$$
$$=1\times(e+1)$$
$$=e+1$$

08 $y=xe^{x^2}$에서 $x<0$일 때 $xe^{x^2}<0$이고,
$x\geq 0$일 때 $xe^{x^2}\geq 0$이므로
구하는 두 부분의 넓이의 합을 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{1}\left|xe^{x^2}\right|dx=-\int_{-1}^{0}xe^{x^2}dx+\int_0^1 xe^{x^2}dx$$

이때 곡선 $y=xe^{x^2}$은 원점에 대하여 대칭이므로

$$S=2\int_0^1 xe^{x^2}dx$$

$x^2=t$로 놓으면 $2x\dfrac{dx}{dt}=1$이고
$x=0$일 때 $t=0$,
$x=1$일 때 $t=1$이므로

$$S=\int_0^1 e^t\,dt=\Big[e^t\Big]_0^1=e-1$$

09 문제 이해 A, B부분의 넓이를 각각 S_A, S_B라 하면 $S_A=\int_1^k \dfrac{\ln x}{x}dx$, $S_B=\int_k^{e^2}\dfrac{\ln x}{x}dx$

▸ 1점

해결 과정 $\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$
$x=1$일 때 $t=0$,
$x=k$일 때 $t=\ln k$,
$x=e^2$일 때 $t=2$ ▸ 1점

따라서 $S_A=\int_1^k \dfrac{\ln x}{x}dx=\int_0^{\ln k} t\,dt$

$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\ln k}=\frac{1}{2}(\ln k)^2$$

$$S_B=\int_k^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx=\int_{\ln k}^{2} t\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{\ln k}^{2}=2-\frac{1}{2}(\ln k)^2$$ ▸ 2점

두 부분 A, B의 넓이가 같으므로
$S_A=S_B$에서

$$\frac{1}{2}(\ln k)^2=2-\frac{1}{2}(\ln k)^2,\ (\ln k)^2=2$$

답 구하기 이때 $1<k<e^2$, 즉 $0<\ln k<2$이므로
$\ln k=\sqrt{2}$
즉, $k=e^{\sqrt{2}}$ ▸ 2점

10 $f(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$, 곡선의 길이를 l이라 하면
$f'(x)=x^{\frac{1}{2}}$이므로

$$l=\int_0^3\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$
$$=\int_0^3\sqrt{1+\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^3\sqrt{1+x}\,dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$$
$$=\frac{2}{3}(8-1)=\frac{14}{3}$$

11 $\cos x=\sqrt{3}\sin x$에서 $\tan x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
즉, $x=\dfrac{\pi}{6}\ \left(0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$
따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos x-\sqrt{3}\sin x)dx$$
$$=\Big[\sin x+\sqrt{3}\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$$

12 $v(t)=t-3\sqrt{t}+2=(\sqrt{t}-1)(\sqrt{t}-2)$
이때 $v(t)=0$에서 $t=1$ 또는 $t=4$이다.
또한 $0<t<1$일 때 $v(t)>0$, $1<t<4$일 때 $v(t)<0$, $t>4$일 때 $v(t)>0$이다.
그러므로 점 P가 원점을 출발한 후 두 번째로 방향을 바꿀 때는 $t=4$이다.
따라서 점 P가 원점을 출발한 후 시각 $t=4$까지 움직인 거리를 S라 하면

$$S=\int_0^4 |v(t)|dt$$
$$=\int_0^1 (t-3\sqrt{t}+2)dt-\int_1^4 (t-3\sqrt{t}+2)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2-2t^{\frac{3}{2}}+2t\right]_0^1-\left[\frac{1}{2}t^2-2t^{\frac{3}{2}}+2t\right]_1^4$$
$$=\left(\frac{1}{2}-0\right)-\left(0-\frac{1}{2}\right)=1$$

13 길이가 x일 때 수면은 반지름의 길이가 $\sqrt{x\cos x}$인 원이므로 수면의 넓이 $S(x)$는
$S(x)=\pi(\sqrt{x\cos x})^2=\pi x\cos x$
따라서 구하는 부피 V는

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\pi x\cos x\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\cos x\,dx$$
$$=\pi\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi^2-\pi\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi^2-\pi\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi^2+\frac{\sqrt{2}-2}{2}\pi$$

$a=\frac{\sqrt{2}}{8}$, $b=\frac{\sqrt{2}-2}{2}$
따라서 $8a-2b=2$

14 $f(t)=\sqrt{3}\sin 2t+\cos 2t$에서 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라고 하면

$$v(t)=f'(t)=2\sqrt{3}\cos 2t-2\sin 2t$$
$$=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)$$
$$=4\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos 2t-\sin\frac{\pi}{6}\sin 2t\right)$$
$$=4\cos\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$$

따라서 $\cos\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)=0$일 때 속도는 0이고
처음으로 속도가 0이 되는 시각은
$2t+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$, $2t=\frac{\pi}{3}$, $t=\frac{\pi}{6}$

15 곡선의 길이를 l이라 하면

$$l=\int_0^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_0^2\sqrt{\left(2t^{\frac{1}{2}}\right)^2+(t-1)^2}\,dt$$
$$=\int_0^2\sqrt{4t+(t-1)^2}\,dt$$
$$=\int_0^2\sqrt{(t+1)^2}\,dt$$
$$=\int_0^2(t+1)dt\quad(t+1>0)$$
$$=\left[\frac{t^2}{2}+t\right]_0^2=4-0=4$$

16 점 P의 시각 t에서의 위치를 $x(t)$라 하면

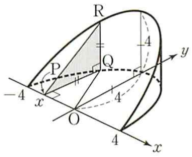
$$x(t)=\int_0^t(\sin 2s-\sin s)ds$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2s+\cos s\right]_0^t$$
$$=-\frac{1}{2}\cos 2t+\cos t-\frac{1}{2}$$
$$=-\cos^2 t+\cos t$$
$$=-\left(\cos t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

$0\le t\le 2\pi$에서 $-1\le\cos t\le 1$이므로
$|x(t)|$는 $\cos t=-1$, 즉 $t=\pi$일 때 최대이다.
따라서 점 P가 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있는 것은 출발한 지 π초 후이다.
즉, $k=\pi$

17 문제 이해 컵의 밑면의 중심을 원점, 밑면의 지름을 x축, y축으로 잡으면 남아 있는 물의 모양은 그

림과 같다.

이때 x축 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)$ $(-4 \le x \le 4)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면을 $\triangle\mathrm{PQR}$라 하자. ▸ 2점



해결 과정 $\triangle\mathrm{OPQ}$에서 $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{16-x^2}$ 이므로

$\overline{\mathrm{QR}} = \overline{\mathrm{PQ}}\tan 45^\circ = \overline{\mathrm{PQ}}$

$S(x) = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}} \times \overline{\mathrm{QR}} = \frac{1}{2}(16-x^2)$ ▸ 2점

답 구하기 따라서 남아 있는 물의 부피 V는

$$V = \int_{-4}^{4} \frac{1}{2}(16-x^2)\,dx = \int_0^4 (16-x^2)\,dx$$

$$= \left[16x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^4 = \frac{128}{3}$$ ▸ 2점

18 점 P가 매초 1라디안의 속력으로 움직이므로 점 P가 점 A(1, 0)을 출발한지 t초 후에 $\angle\mathrm{POA} = t$, $\overset{\frown}{\mathrm{AP}} = t$이다.

따라서 $\mathrm{P}(\cos t,\ \sin t)$이므로

$\mathrm{Q}\left(\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}t,\ \sin t + \frac{1}{2}t\right)$

$x = \cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}t$, $y = \sin t + \frac{1}{2}t$라 하면

구하는 거리는

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{\left(-\sin t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\cos t + \frac{1}{2}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{\sin^2 t - \sqrt{3}\sin t + \frac{3}{4} + \cos^2 t + \cos t + \frac{1}{4}}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{2 - \sqrt{3}\sin t + \cos t}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{2\left\{1 + \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)\right\}}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{4\cos^2 \frac{1}{2}\left(t + \frac{\pi}{3}\right)}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} 2\cos\frac{1}{2}\left(t + \frac{\pi}{3}\right)dt$$

$$= \left[4\sin\frac{1}{2}\left(t + \frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{2}{3}\pi} = 4 - 2 = 2$$

19 해결 과정

$$S_n(x) = \frac{x^{\frac{1}{n}} + 2x^{\frac{2}{n}} + 3x^{\frac{3}{n}} + \cdots + nx^{\frac{n}{n}}}{n^2}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} x^{\frac{k}{n}}$$ ▸ 2점

답 구하기

$$\lim_{n\to\infty} S_n(e) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} e^{\frac{k}{n}}$$

$$= \int_0^1 xe^x\,dx$$

$$= \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$$

$$= e - \left[e^x\right]_0^1$$

$$= e - (e-1) = 1$$ ▸ 4점

20 해결 과정 정사각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x) = (2\sqrt{\sin x})^2 = 4\sin x$ ▸ 3점

답 구하기 따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V = \int_0^{\pi} S(x)\,dx = \int_0^{\pi} 4\sin x\,dx$$ ▸ 3점

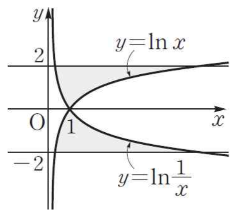
$$= 4\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = 4 \times 2 = 8$$ ▸ 2점

21 문제 이해 $y = \ln x$에서

$x = e^y$

$y = \ln\frac{1}{x}$에서

$x = e^{-y}$ ▸ 1점



해결 과정 따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^{0} (e^{-y} - e^y)\,dy + \int_0^2 (e^y - e^{-y})\,dy$$

$$= 2\int_0^2 (e^y - e^{-y})\,dy = 2\left[e^y + e^{-y}\right]_0^2$$

$$= 2\left(e^2 + \frac{1}{e^2} - 2\right)$$ ▸ 3점

답 구하기 $a = 2$, $b = 2$, $c = -4$이므로

$a + b + c = 0$이다. ▸ 2점

22 $S_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin x\right|dx$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|dx$

이때 $y=|\sin x|$는 주기가 π인 주기함수이므로 임의의 자연수 n에 대하여

$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx$

$=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=2$

$S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|dx$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\times 2=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

따라서 구하는 급수의 합은

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

23 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 두 곡선의 교점의 x좌표를 α라고 하면 $\cos\alpha=k\sin\alpha$에서 $\tan\alpha=\frac{1}{k}$을 만족한다. 곡선 $y=\cos x$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

이때 곡선 $y=k\sin x$가 S를 이등분하면

$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}=\int_0^{\alpha}(\cos x-k\sin x)dx$

$=\left[\sin x+k\cos x\right]_0^{\alpha}=\sin\alpha+k\cos\alpha-k$

$=\sin\alpha+k^2\sin\alpha-k$

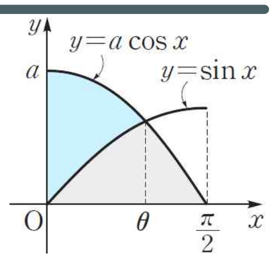
$\sin\alpha=\frac{1+2k}{2(1+k^2)},\ \cos\alpha=\frac{(1+2k)k}{2(1+k^2)}$

$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{(1+2k)^2(1+k^2)}{4(1+k^2)^2}$

$4(1+k^2)=(1+2k)^2$

즉, $k=\frac{3}{4}$

24 문제 이해 두 곡선 $y=a\cos x$, $y=\sin x$의 교점의 x좌표를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면



해결 과정 $a\cos\theta=\sin\theta$에서

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=a$, 즉 $\tan\theta=a$ ▸ 2점

이므로

$\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ …… ㉠

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 곡선 $y=a\cos x$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos x\,dx=a\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=a$ ▸ 2점

$0\le x\le\theta$에서 두 곡선 $y=a\cos x$, $y=\sin x$와 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2이라 하면

$S_2=\int_0^{\theta}(a\cos x-\sin x)dx$

$=\left[a\sin x+\cos x\right]_0^{\theta}$

$=a\sin\theta+\cos\theta-1$ ▸ 2점

이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로

$a\sin\theta+\cos\theta-1=\frac{a}{2}$

위의 식에 ㉠을 대입하면

답 구하기 $\frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}-1=\frac{a}{2}$

$\frac{1+a^2}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{a}{2}+1$

$\sqrt{1+a^2}=\frac{a}{2}+1$

$1+a^2=\frac{a^2}{4}+a+1$

$3a^2-4a=0$

$a(3a-4)=0$

그런데 $a>0$이므로 $a=\frac{4}{3}$ ▸ 2점

Ⅲ 적분법

01 $\frac{10}{\ln 4}+2$ **02** $-2\sqrt{3}$
03 $\frac{2^x}{\ln 2}+\sin x+C$ **04** $\pi-1$ **05** 3
06 ② **07** 18 **08** $-2\sqrt{3}$ **09** ④
10 ④ **11** ⑤ **12** ⑤ **13** ③
14 $\frac{1}{2}\left(e^4+\frac{1}{e^4}\right)+\frac{1}{8}$ **15** ③
16 $\frac{e^2}{2}-e+\frac{1}{e}-\frac{1}{2e^2}$ **17** ① **18** 2
19 ④ **20** $\frac{20}{\pi}$ **21** $\frac{1}{5}e^{2x}(\sin x+2\cos x)+C$
22 $\frac{\pi}{2}-4$ **23** $\frac{1}{2}$ **24** 62 **25** $3\sqrt{2}$

01 $f'(x)=\frac{8^x-1}{2^x-1}$

$=\frac{(2^x-1)(2^{2x}+2^x+1)}{2^x-1}$

$=4^x+2^x+1$

이므로

$f(x)=\int(4^x+2^x+1)dx$

$=\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{2^x}{\ln 2}+x+C$

이때

$f(0)=\frac{1}{\ln 4}+\frac{1}{\ln 2}+C=0$ 에서

$C=-\frac{3}{\ln 4}$ 이므로

$f(x)=\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{2^x}{\ln 2}+x-\frac{3}{\ln 4}$

따라서 $\lim_{h\to 0}\frac{F(1+2h)-F(1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+2h)-F(1)}{2h}\times 2$

$=2F'(1)=2f(1)=\frac{10}{\ln 4}+2$

02 $\sqrt{x+1}=t$ 로 놓으면

$x-1=t^2-2$ 이고,

$\frac{dx}{dt}=2t$ 이므로 $dx=2tdt$

$f(x)=\int\frac{x-1}{\sqrt{x+1}}dx$

$=\int(t^2-2)\times\frac{1}{t}\times 2tdt$

$=2\int(t^2-2)dt$

$=\frac{2}{3}t^3-4t+C$

$=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-4\sqrt{x+1}+C$

이때 $f'(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$ 이므로

$f'(x)=0$ 에서 $x=1$

즉, $f(x)$는 $x=1$ 에서 극솟값 $-\frac{8}{3}\sqrt{2}$ 를 가지므로

$f(1)=\frac{4}{3}\sqrt{2}-4\sqrt{2}+C$

$=-\frac{8}{3}\sqrt{2}+C=-\frac{8}{3}\sqrt{2}$

즉, $C=0$

따라서

$f(x)=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-4\sqrt{x+1}$

이므로

$f(2)=2\sqrt{3}-4\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$

03 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$ 이므로

$f'(x)=2^x+\cos x$

따라서 $f(x)=\int(2^x+\cos x)dx$

$=\frac{2^x}{\ln 2}+\sin x+C$

04 $f(x)=\int_0^x t\cos t\,dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면 $f'(x)=x\cos x$

$f'(x)=0$ 에서 $x\cos x=0$

$x=\frac{\pi}{2}\ (0<x<\pi)$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 극댓값 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

갖는다. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt$에서

$u(t)=t$, $v'(t)=\cos t$로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=\sin t$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\Big[t\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt$$

$$=\frac{\pi}{2}-\Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

즉, $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{\pi}{2}-1$

따라서 $\alpha+\beta=\pi-1$

05 $$\int_0^e f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^e f(x)\,dx$$

$$=\int_0^1(\cos\pi x+2)\,dx+\int_1^e\frac{1}{x}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi x+2x\right]_0^1+\Big[\ln|x|\Big]_1^e$$

$$=2+1=3$$

06 $f(a)=\int_1^a\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$에서

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$

$x=1$일 때 $t=0$, $x=a$일 때 $t=\ln a$이므로

$$f(a)=\int_0^{\ln a}\sqrt{t}\,dt=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\ln a}$$

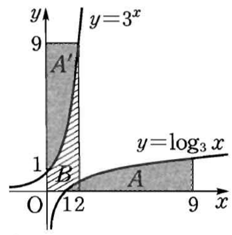
$$=\frac{2}{3}(\ln a)^{\frac{3}{2}}$$

따라서 $f(a^4)=\frac{2}{3}(\ln a)^{\frac{3}{2}}$

$$=4^{\frac{3}{2}}\times\frac{2}{3}\times(\ln a)^{\frac{3}{2}}$$

$$=8f(a)$$

07 두 함수 $y=\log_3 x$와 $y=3^x$은 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 따라서 오른쪽 그림에서 $A=A'$이므로



$A+B=A'+B=2\times9=18$

08 $$\int_0^x(x-t)f(t)dt=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$$

이므로

$$g(x)=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt \quad\cdots\cdots\text{㉠}$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)$$

$$=\int_0^x f(t)dt \quad\cdots\cdots\text{㉡}$$

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g''(x)=f(x)$

이때 $g(x)=\sin^2 x$이므로

$g'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$

$g''(x)=2\cos 2x$

즉, $f(x)=2\cos 2x$이므로

$f'(x)=-4\sin 2x$

따라서 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3}$

09 $$f(x)=\int(1+\tan x)\cos x\,dx$$

$$=\int\left(1+\frac{\sin x}{\cos x}\right)\cos x\,dx$$

$$=\int(\cos x+\sin x)dx$$

$$=\sin x-\cos x+C$$

$f(0)=0-1+C=2$에서 $C=3$이므로

$f(x)=\sin x-\cos x+3$

즉, $f(\pi)=0-(-1)+3=4$

10 $f'(x)=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^2dx$$
$$=\int\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-2x-\frac{1}{x}+C$$

$f(1)=\frac{1}{3}-2-1+C=-\frac{11}{6}$에서

$C=\frac{5}{6}$

즉, $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x-\frac{1}{x}+\frac{5}{6}$이므로

$f(2)=\frac{1}{3}\times 2^3-2\times 2-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}=-1$

따라서 곡선 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x-\frac{1}{x}+\frac{5}{6}$ 위의 점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 방정식은

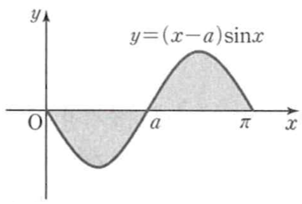
$y+1=f'(2)(x-2)$에서

$y+1=\frac{9}{4}(x-2)$, 즉 $y=\frac{9}{4}x-\frac{11}{2}$

그러므로 $m=\frac{9}{4}$, $n=-\frac{11}{2}$이므로

$m+n=\frac{9}{4}+\left(-\frac{11}{2}\right)=-\frac{13}{4}$

11 다음 그림과 같이 곡선 $y=(x-a)\sin x\ (0\le x\le \pi)$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로



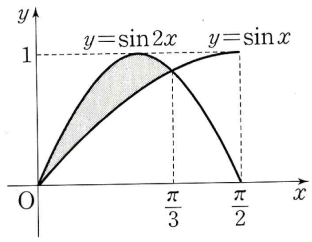
$$\int_0^{\pi}(x-a)\sin x\,dx$$
$$=\Big[-(x-a)\cos x\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx$$
$$=\pi-a-a+\Big[\sin x\Big]_0^{\pi}$$
$$=\pi-2a=0$$

즉, $a=\frac{\pi}{2}$

12 $y^3+1=2y+1$, $y(y^2-2)=0$에서 $y=0$ 또는 $y=\sqrt{2}$ 또는 $y=-\sqrt{2}$

$$S=\int_{-\sqrt{2}}^{0}\{(y^3+1)-(2y+1)\}dy+\int_0^{\sqrt{2}}\{-(y^3+1)+(2y+1)\}dy$$
$$=\left[\frac{1}{4}y^4-y^2\right]_{-\sqrt{2}}^{0}+\left[-\frac{1}{4}y^4+y^2\right]_0^{\sqrt{2}}=2$$

13



두 함수 $y=\sin x$, $y=\sin 2x$의 그래프의 교점의 x좌표는

$\sin x=\sin 2x$에서 $\sin x=2\sin x\cos x$

$\sin x(2\cos x-1)=0$

$\sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

즉, $x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$

따라서 구하는 부분의 넓이 S는

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{4}$$

14 구간 $[-2,\ 0]$에서 $e^{-2x}\ge e^{2x}$이고, 구간 $[0,\ \ln 2]$에서 $e^{-2x}\le e^{2x}$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-2}^{0}(e^{-2x}-e^{2x})dx+\int_0^{\ln 2}(e^{2x}-e^{-2x})dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}-\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\ln 2}$$
$$=-1-\left(-\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}e^{-4}\right)+\left(2+\frac{1}{8}-1\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(e^4+\frac{1}{e^4}\right)+\frac{1}{8}$$

15 $0 \le x \le 3$에서 단면의 넓이 $S(x)$는

$$S(x)=\frac{\pi}{2}(3-x)^2$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_{-3}^{3} S(x)dx$$
$$=2\int_{0}^{3} S(x)dx$$
$$=2\int_{0}^{3}\frac{\pi}{2}(3-x)^2\,dx$$
$$=\pi\left[-\frac{(3-x)^3}{3}\right]_0^3=9\pi$$

16 두 곡선의 교점의 x좌표는

$e^{2x}=e^{x+1}+e^x-e$,

$(e^x)^2-(e+1)e^x+e=(e^x-1)(e^x-e)=0$

에서 $x=0$ 또는 $x=1$

이때 구간 $[-1,\ 0]$에서

$e^{2x}\ge e^{x+1}+e^x-e$이고, 구간 $[0,\ 1]$에서

$e^{2x}\le e^{x+1}+e^x-e$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{0}\{e^{2x}-(e^{x+1}+e^x-e)\}dx$$
$$+\int_{0}^{1}\{-e^{2x}+(e^{x+1}+e^x-e)\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}-e^{x+1}-e^x+ex\right]_{-1}^{0}$$
$$+\left[-\frac{1}{2}e^{2x}+e^{x+1}+e^x-ex\right]_0^1$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2}+e^{-1}\right)+\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}-e\right)$$
$$=\frac{e^2}{2}-e+\frac{1}{e}-\frac{1}{2e^2}$$

17 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x}{1-x^2}$이므로 닫힌구간 $\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]$에서

곡선의 길이를 l이라고 할 때,

$$l=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(-\frac{2x}{1-x^2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-1+\frac{2}{1-x^2}\right)dx$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-1+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx$$
$$=\Big[-x-\ln(1-x)+\ln(1+x)\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=-\frac{1}{2}+\ln 3$$

18 높이가 a일 때 입체도형의 부피는

$$\int_0^a x\ln(x^2+1)dx$$

이때 $x^2+1=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2x$

또한 $x=0$일 때 $t=1$, $x=a$일 때 $t=a^2+1$

이므로

$$\int_0^a x\ln(x^2+1)dx$$
$$=\int_1^{a^2+1}\frac{1}{2}\ln t\,dt=\frac{1}{2}[t\ln t-t]_1^{a^2+1}$$
$$=\frac{a^2+1}{2}\ln(a^2+1)-\frac{a^2}{2}$$

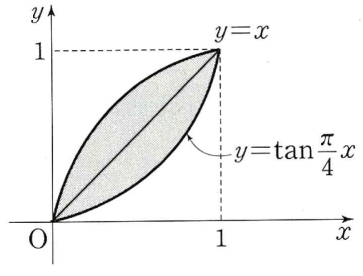
따라서 $\dfrac{a^2+1}{2}\ln(a^2+1)-\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{5}{2}\ln 5-2$

이고, a는 유리수이므로

$a^2=4$

그런데 $a>0$이므로 $a=2$

19 함수 $y=\tan\dfrac{\pi}{4}x$의 그래프와 이 함수의 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



따라서 구하는 부분의 넓이를 S라 하면

$$S=2\int_0^1\left(x-\tan\frac{\pi}{4}x\right)dx$$
$$=2\int_0^1 x\,dx-2\int_0^1\tan\frac{\pi}{4}x\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1-2\int_0^1\frac{\sin\frac{\pi}{4}x}{\cos\frac{\pi}{4}x}dx$$
$$=1-2\left[-\frac{4}{\pi}\ln\cos\frac{\pi}{4}x\right]_0^1$$
$$=1-2\left(-\frac{4}{\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=1-\frac{4}{\pi}\ln 2$$

20 문제 이해 $\angle AOQ_k=\dfrac{k\pi}{n}$ 이므로

$\overline{P_kQ_k}=10\sin\dfrac{k\pi}{n}$ ▸ 2점

해결 과정

$$\frac{S_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}10\sin\frac{k\pi}{n}=10\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\times\frac{1}{n}$$
▸ 2점

답 구하기 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=10\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\times\frac{1}{n}$$
$$=10\int_0^1\sin\pi x\,dx=10\left[-\frac{\cos\pi x}{\pi}\right]_0^1$$
$$=10\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\right)=\frac{20}{\pi}$$ ▸ 4점

21 문제 이해 $f(x)=e^{2x}$, $g'(x)=\cos x$ 로 놓으면

해결 과정 $f'(x)=2e^{2x}$, $g(x)=\sin x$

$$\int e^{2x}\cos x\,dx$$
$$=e^{2x}\sin x-2\int e^{2x}\sin x\,dx\cdots\cdots ㉠$$ ▸ 2점

한편, $\displaystyle\int e^{2x}\sin x\,dx$에서

$u(x)=e^{2x}$, $v'(x)=\sin x$ 로 놓으면

$u'(x)=2e^{2x}$, $v(x)=-\cos x$

$$\int e^{2x}\sin x\,dx$$
$$=e^{2x}\times(-\cos x)-\int 2e^{2x}(-\cos x)\,dx$$
$$=-e^{2x}\cos x+2\int e^{2x}\cos x\,dx\cdots\cdots ㉡$$ ▸ 2점

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int e^{2x}\cos x\,dx$$
$$=e^{2x}\sin x+2e^{2x}\cos x-4\int e^{2x}\cos x\,dx$$
$$5\int e^{2x}\cos x\,dx=e^{2x}(\sin x+2\cos x)$$

답 구하기 따라서

$$\int e^{2x}\cos x\,dx=\frac{1}{5}e^{2x}(\sin x+2\cos x)+C$$
▸ 2점

22 문제 이해 $x=4\sin\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

해결 과정 $\dfrac{dx}{d\theta}=4\cos\theta$

또한 $x=0$일 때 $\theta=0$, $x=4$일 때

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 ▸ 2점

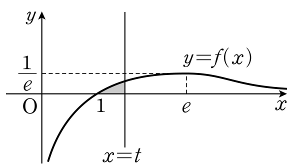
답 구하기 $\displaystyle\int_0^4\frac{1-x}{\sqrt{16-x^2}}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-4\sin\theta}{\sqrt{16-16\sin^2\theta}}\times4\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-4\sin\theta)4\cos\theta}{4\cos\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-4\sin\theta)\,d\theta$$
$$=\left[\theta+4\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-4$$ ▸ 4점

23 문제 이해 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$에서 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=e$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



해결 과정 구하는 도형의 넓이 $S(t)$는

$$S(t)=\int_1^t\frac{\ln x}{x}dx$$ ▸ 2점

$\ln x = u$ 로 놓으면 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{x}$ 이고,

$x=1$ 일 때 $u=0$, $x=t$ 일 때 $u=\ln t$ 이므로

$$S(t)=\int_0^{\ln t} u\,du=\left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^{\ln t}=\frac{(\ln t)^2}{2}$$ ▸ 2점

$$\lim_{t\to1+}\frac{s(t)}{(t-1)^2}$$

$$=\lim_{t\to1+}\frac{(\ln t)^2}{2(t-1)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to1+}\left(\frac{\ln t-\ln 1}{t-1}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to1+}\frac{\ln t-\ln 1}{t-1}\right)^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

▸ 2점

답 구하기 이때 $g(t)=\ln t$ 라 하면 $g'(t)=\dfrac{1}{t}$ 이므로

㉠에서

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to1+}\frac{\ln t-\ln 1}{t-1}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\{g'(1)\}^2=\frac{1}{2}\times1^2=\frac{1}{2}$$ ▸ 2점

24 문제 이해 $x^2-2x+3=t$ 로 놓으면

해결 과정 $2x-2=\dfrac{dt}{dx}$ 이므로

$$f(x)=\ln 4\int(x-1)2^{x^2-2x+3}dx$$

$$=\ln 2\int(2x-2)2^{x^2-2x+3}dx$$

$$=\ln 2\int 2^t dt$$

$$=\ln 2\times\frac{2^t}{\ln 2}+C$$

$$=2^t+C$$

$$=2^{x^2-2x+3}+C$$

$$=2^{(x-1)^2+2}+C$$ ▸ 4점

이때 $0\le x\le 3$ 에서 함수 $f(x)$ 는

$x=1$ 일 때 최솟값 2를 가지므로

$f(1)=2^2+C=2$, 즉 $C=-2$ ▸ 2점

답 구하기 따라서 $f(x)=2^{(x-1)^2+2}-2$ 이므로

$f(x)$ 의 최댓값은

$f(3)=2^6-2=62$ ▸ 2점

25 해결 과정

$$\frac{dx}{dt}=e^t(\cos t-\sin t),\quad \frac{dy}{dt}=e^t(\sin t+\cos t)$$

▸ 2점

답 구하기 따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{\ln 4}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\ln 4}e^t\sqrt{(\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2}\,dt$$

▸ 2점

$$=\int_0^{\ln 4}\sqrt{2}\,e^t dt=\left[\sqrt{2}\,e^t\right]_0^{\ln 4}=3\sqrt{2}$$

▸ 2점