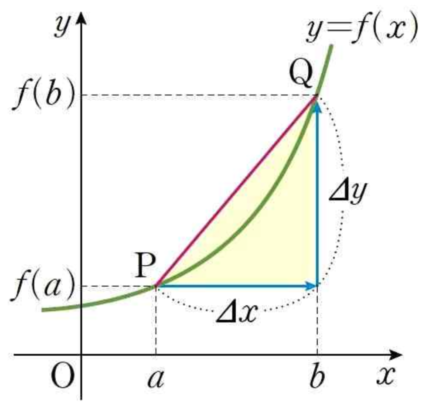
Ⅱ_1. 미분계수와 도함수

[12수학Ⅱ02-01] 미분계수의 뜻을 알고,
그 값을 구할 수 있다.
[12수학Ⅱ02-02] 미분계수의 기하적 의미를 이해한다.
[12수학Ⅱ02-03] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.
[12수학Ⅱ02-04] 함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다.
[12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.

1 평균변화율 ❶



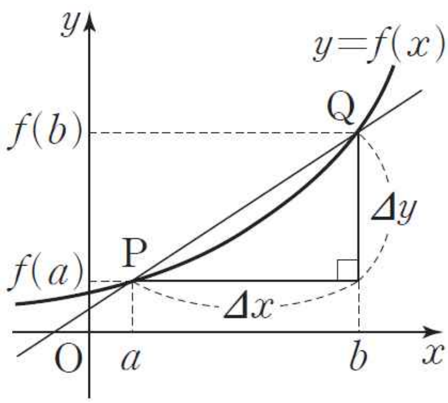
(1) 평균변화율 : 함수 $y=f(x)$에서
x의 값이 a에서 b까지 변할 때,
y의 값은 $f(a)$에서 $f(b)$까지 변한다.
x의 값의 변화량 $b-a$를 'x의 증분',
y의 값의 변화량 $f(b)-f(a)$를 'y의 증분'이라 하고,
기호로 각각 Δx, Δy와 같이 나타낸다.
또 x의 증분 Δx에 대한 y의 증분 Δy의 비율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{b-a}$$

를 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 '평균변화율'이라고 한다.

[1] 평균변화율 ❷

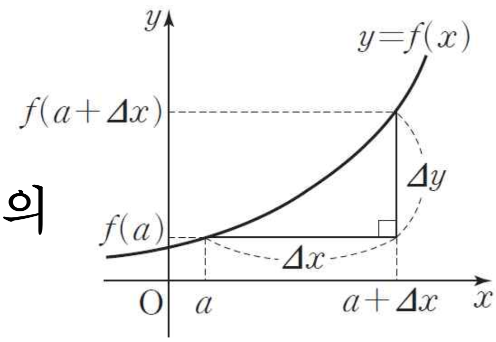
(2) 평균변화율의 기하적 의미



함수 $y=f(x)$에서
x의 값이 a에서 b까지 변할 때의
평균변화율은 곡선 $y=f(x)$ 위의
두 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$, $\mathrm{Q}(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

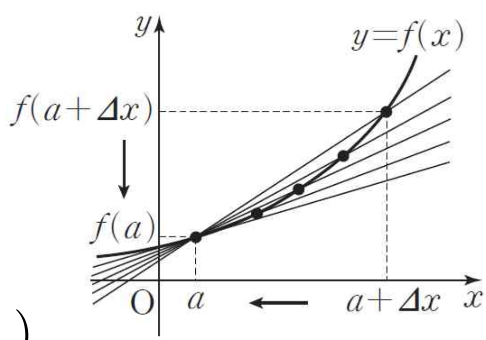
[2] 미분계수 ❶

(1) 미분계수 : 함수 $y=f(x)$에서



x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의
함수 $y=f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$



이다. 이때 $\Delta x \to 0$일 때의
평균변화율의 극한값

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하면 이 극한값을 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의
'순간변화율' 또는 '미분계수'라 하고, 이것을 기호로 $f'(a)$와

[2] 미분계수 ❷

같이 나타낸다. 즉,

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

☑ 위의 식에서 $\Delta x = h$, $a + h = x$라 하면

$\Delta x \to 0$일 때 $h \to 0$, $x \to a$이므로

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(2) 미분계수의 기하적 의미

함수 $y = f(x)$의 $x = a$에서의 미분계수 $f'(a)$는

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 기울기와

같다.

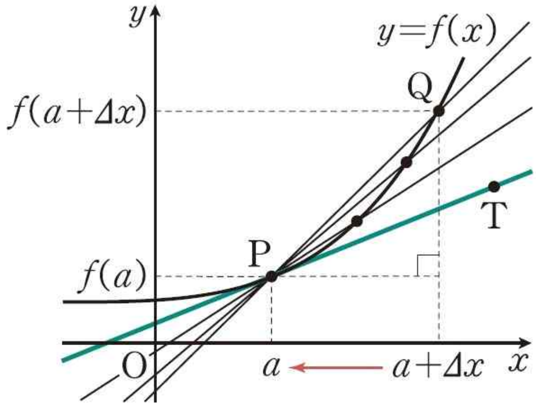
[2] 미분계수 ❸

[예] 함수 $f(x) = x^2 + 2x$에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점

$(1, 3)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x+3)(x-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x+3) = 4$$



③ 미분가능과 연속 ❶

(1) 미분가능 : 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수

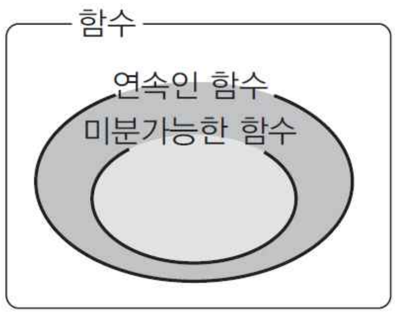
$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

가 존재하면 함수 $f(x)$는 '$x=a$에서 미분가능하다'고 한다.

(2) 미분가능한 함수 : 함수 $f(x)$가 어떤 열린구간에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 '그 구간에서 미분가능하다'고 한다. 또한 함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 '미분가능한 함수'라고 한다.

(3) 미분가능과 연속 : 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

③ 미분가능과 연속 ❷



☑ $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다.

$\not\Longleftrightarrow$ $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

위의 명제의 대우는 참이다. 즉,

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

한편, 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이라고 해서 항상 $x=a$에서 미분가능한 것은 아니다.

✡ 미분가능과 연속성 ❶

함수 $y=f(x)$에 대하여

(1) $x=a$에서 미분가능

$\Leftrightarrow$ ① $x=a$에서 연속

$\Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

② $x=a$에서 미분계수가 존재

$\Leftrightarrow$ (좌미분계수) = (우미분계수)

$$\Leftrightarrow f'(a)=\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

✡ 미분가능과 연속성 ❷

함수 $y=f(x)$에 대하여

(2) "$x=a$에서 미분가능"의 의미

$\Leftrightarrow$ $x=a$에서 접선을 그을 수 있다.

$\Leftrightarrow$ $x=a$의 근방에서 곡선이 꺾이는 부분 없이 부드럽게(smooth) 이어져 있다.

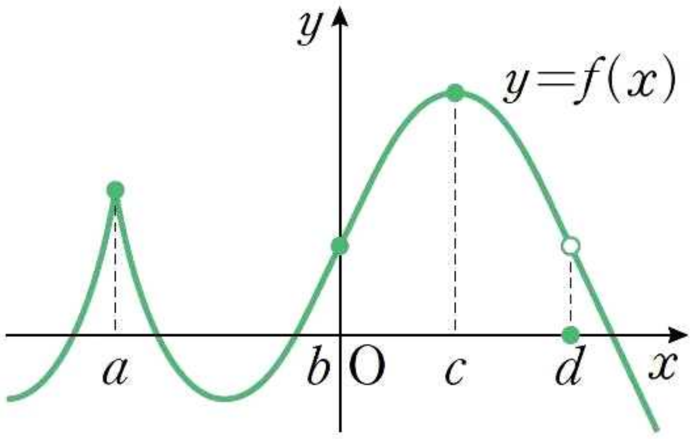
$\Leftrightarrow$ 그래프를 확대하였을 때, 그 점 근방의 곡선이 하나의 직선으로 보인다.

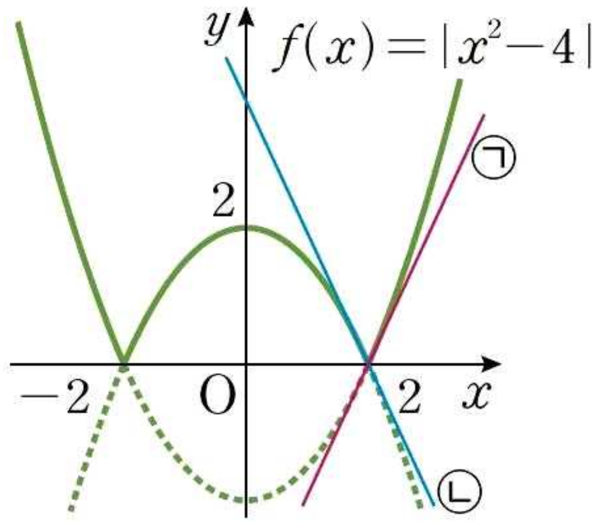
$\Leftrightarrow$ $f'(a)$가 존재

$\Leftrightarrow$ $x=a$에서 접선의 기울기가 존재

☑ 꺽인점, 뾰족점(첨점), 뺑뚫린 점이 되어서는 안 된다.

✡ 미분가능과 연속성 ❸





예 미분 불가능한 점 : a, d　예 미분 불가능한 점 : $x = \pm 2$

☑ 함수 $f(x)$가 $x = a$에서 미분가능하면

$x = a$에서의 미분계수 $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

가 존재하므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \to a}\{f(x) - f(a)\} = \lim_{x \to a}\left\{\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a)\right\}$$

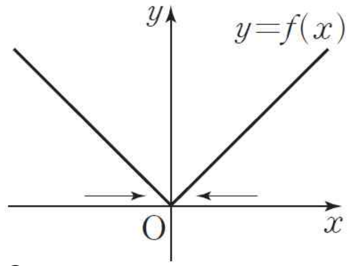
$$= \lim_{x \to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times \lim_{x \to a}(x - a) = f'(a) \times 0 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a}[\{f(x) - f(a)\} + f(a)]$$

$$= \lim_{x \to a}\{f(x) - f(a)\} + f(a) = 0 + f(a) = f(a)$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x = a$에서 연속이다.

예 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서



연속이지만 미분가능하지 않음을 보이자.

① $x=0$에서의 연속성

$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}|x|=\lim_{x\to0-}(-x)=0$$

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}|x|=\lim_{x\to0-}x=0,\ f(0)=0$$

에서 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로

함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 연속이다.

② $x=0$에서의 미분가능성

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{|x|-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to0-}\frac{-x}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{|x|-0}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=1$$

이므로 $\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$이다.

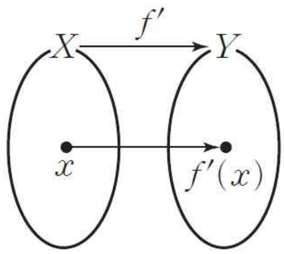
따라서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$의 값이 존재하지 않으므로

함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

①, ②에서 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 연속이지만

미분가능하지 않다.

4 도함수(derivative function) ❶



(1) 도함수 : 함수 $y=f(x)$가 정의역에 속하는 모든 x에서 미분가능할 때, 정의역의 각 원소 x에 미분계수 $f'(x)$를 대응시키는 새로운 함수

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

를 함수 $y=f(x)$이 '도함수'라 하고, 이것을 기호로

$$f'(x),\ y',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x)$$

와 같이 나타낸다. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구하는 것을 '함수 $f(x)$를 x에 대하여 미분한다'고 하고, 그 계산법을 '미분법'이라고 한다.

4 도함수(derivative function) ❷

☑ ① $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{h \to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

② 위의 식에서 $x+\Delta x=t$라 하면

$\Delta x \to 0$일 때 $t \to x$이므로

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{t \to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

$\boxed{4}$ 도함수(derivative function) ❸

(2) 도함수와 미분계수

함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 도함수의 정의에 의하여

$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$이다.

따라서 함수 $f(x)$에 대하여 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 도함수 $f'(x)$에 $x=a$를 대입하여 얻은 값이다.

$\boxed{4}$ 도함수(derivative function) ❹

$\boxed{\text{예}}$ 함수 $f(x)=x^2$의 도함수는

$$f'(x)=\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$=\lim_{h \to 0} \frac{2hx+h^2}{h}=\lim_{h \to 0}(2x+h)=2x$$

이때 함수 $f(x)$의 $x=3$에서의 미분계수는

$$f'(3)=2\times 3=6$$

이고, 함수 $f(x)$의 $x=-1$에서의 미분계수는

$$f'(-1)=2\times(-1)=-2$$

이다.

5 함수 $y=x^n$ (n은 자연수)와 상수함수의 도함수

(1) $y=x^n$ ($n\geq 2$인 자연수)이면 $y'=nx^{n-1}$

(2) $y=x$이면 $y'=1$

(3) $y=c$ (c는 상수)이면 $y'=0$

$$(x^{n})'=nx^{n-1}$$

☑ 함수 $y=x^n$ ($n\geq 2$인 자연수)에서 $f(x)=x^n$이라 하면

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)-x\}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}\}$$

$$=\underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}+x^{n-1}}_{n\text{개}}=nx^{n-1}$$

6 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,

(1) $y=cf(x)$ (c는 상수)이면 $y'=cf'(x)$

(2) $y=f(x)+g(x)$이면 $y'=f'(x)+g'(x)$

(3) $y=f(x)-g(x)$이면 $y'=f'(x)-g'(x)$

(4) $y=f(x)g(x)$이면 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

☑ (2) $y'=\lim_{h\to 0}\dfrac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}-\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

(4) $$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} \right.$$

$$\left. + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \right\}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \times \lim_{h \to 0} g(x+h)$$

$$+ f(x) \times \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

예 ① $\left(x^2 - 3x + 4\right)' = \left(x^2\right)' - 3(x)' + (4)' = 2x - 3$

② $\left\{\left(x^2 + 2\right)(3x - 1)\right\}'$

$$= \left(x^2 + 2\right)'(3x-1) + \left(x^2 + 2\right)(3x - 1)'$$

$$= 2x(3x - 1) + \left(x^2 + 2\right) \times 3 = 9x^2 - 2x + 6$$

☑ 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 미분가능할 때,

$y = f(x)g(x)h(x)$이면

$$y' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

✡ 미분법 공식

(1) $y = \{f(x)\}^n \quad \Rightarrow \quad y' = n\{f(x)\}^{n-1} \times \underbrace{f'(x)}_{\text{속미분}}$

$$\because \ \frac{dy}{dx} = \frac{df^n}{df} \times \frac{df}{dx}$$

(2) $y = f\{g(x)\} \quad \Rightarrow \quad y' = f'\{g(x)\} \times \underbrace{g'(x)}_{\text{속미분}}$

$$\because \ \frac{dy}{dx} = \frac{df(g)}{dg} \times \frac{dg}{dx}$$