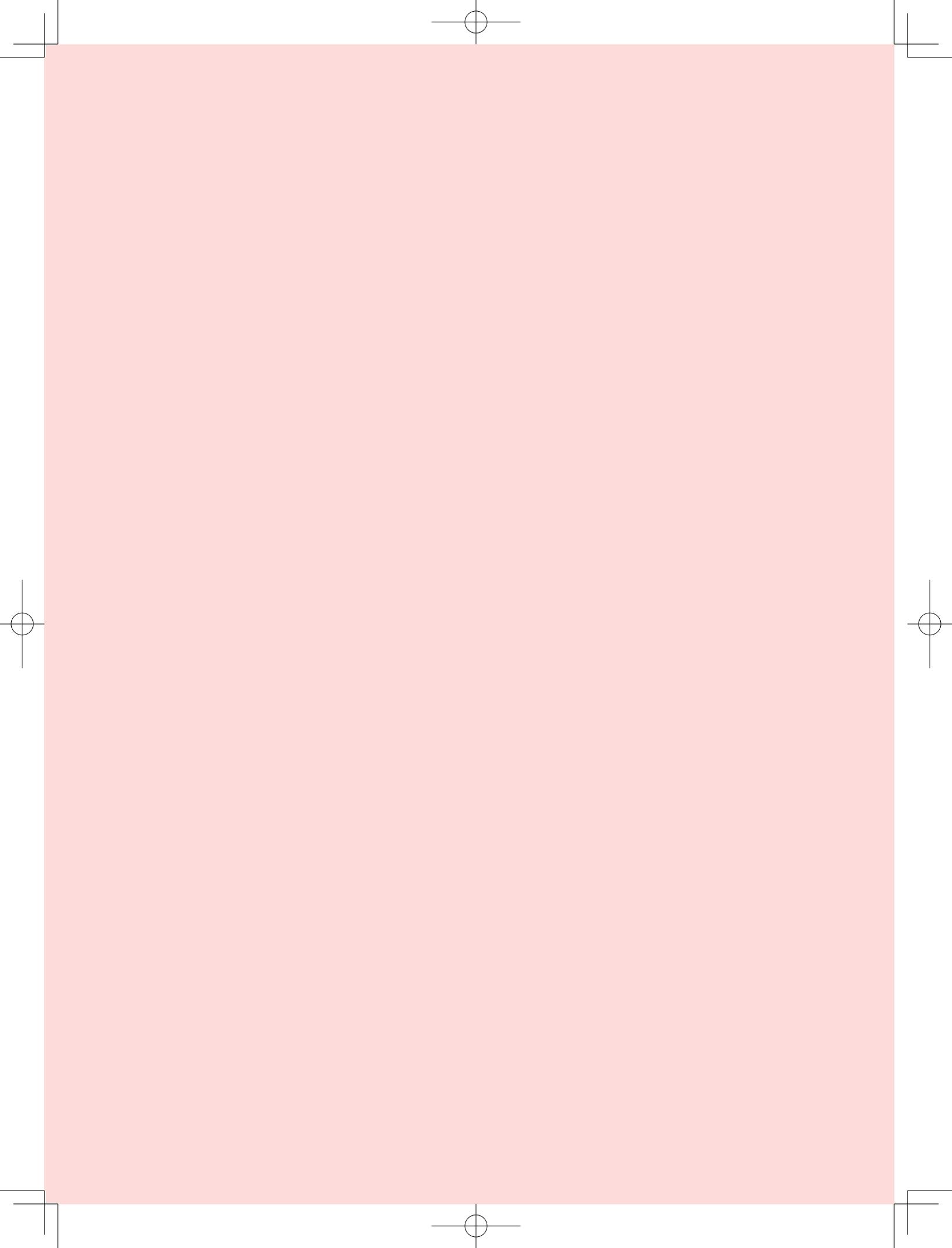


교과서 물려주기 기록표

연도	교과서 사용자				상태
	학년	반	번호	이름	

● 상태 표기 예시 : 매우 좋음, 좋음, 보통, 나쁨



고등학교

심화 수학 Ⅱ

김창일 | 강 철 | 박세원 | 유기종



전라북도교육청



머리말

수학은 고대부터 자연을 탐구하고 법칙을 찾아 인류에 기여해 왔다. 또, 눈에 보이는 현상만을 찾는 것이 아닌 관념적 영역의 확대를 통해 사고의 증진을 가져왔는데, 본 교과와 학습이 우리에게 의미 있게 다가오는 이유이다.

이 교과서로 2015 개정 교육과정에서 제시된 심화 수학Ⅱ의 목표와 내용에 따라 학습하면서, 수학적 개념과 기능이 실생활과 어떤 관계가 있는지 찾을 수 있으며, 다양한 문제를 통해 수학적 사고를 경험하면서 이에 따른 능력과 태도를 함양할 수 있도록 구성하였다.

수학은 학생 여러분의 미래에 요긴하게 사용될 자산이며, 관념적 사고를 통해 스스로 의미를 찾아 볼 수 있는 중요한 과목이다.

밝아 오는 미래에는 수학의 중요성이 (더욱) 강조되는 만큼, 여러분이 이 책으로 더 많은 수학적 능력을 기를 수 있기를 바란다.

지은이 씀

이 책의 활용법

I 부정적분

- 여러 가지 함수의 부정적분
- 차분적분법
- 부분적분법

1.1 여러 가지 함수의 부정적분

이 단원에서는 $f(x) = x^n$ (n 는 실수)의 부정적분, 삼각함수의 부정적분, 지수함수, 로그함수의 부정적분을 다룬다.

1.2 차분적분법

이 단원에서는 $f(x) = x^n$ (n 는 실수)의 부정적분, 삼각함수의 부정적분, 지수함수, 로그함수의 부정적분을 다룬다.

1.3 부분적분법

이 단원에서는 $f(x) = x^n$ (n 는 실수)의 부정적분, 삼각함수의 부정적분, 지수함수, 로그함수의 부정적분을 다룬다.

1 대단원 도입

대단원과 관련된 수학사 이야기 또는 인류 문명 발전에 영향을 미치는 수학 이야기로, 학습할 단원에 대한 정보를 안내하여 흥미를 느낄 수 있도록 하였습니다.

1 여러 가지 함수의 부정적분

1.1 여러 가지 함수의 부정적분

이 단원에서는 $f(x) = x^n$ (n 는 실수)의 부정적분, 삼각함수의 부정적분, 지수함수, 로그함수의 부정적분을 다룬다.

1.2 차분적분법

이 단원에서는 $f(x) = x^n$ (n 는 실수)의 부정적분, 삼각함수의 부정적분, 지수함수, 로그함수의 부정적분을 다룬다.

1.3 부분적분법

이 단원에서는 $f(x) = x^n$ (n 는 실수)의 부정적분, 삼각함수의 부정적분, 지수함수, 로그함수의 부정적분을 다룬다.

2 중단원 도입

중단원과 관련된 수학적 상황이나 수학사의 읽을거리 또는 선택 과목에서 학습한 내용을 바탕으로 학습에 필요한 배경 지식을 스스로 확인할 수 있도록 하였습니다.

2 함수 $f(x) = x^n$ (n 는 실수)의 부정적분

2.1 여러 가지 함수의 부정적분

이 단원에서는 $f(x) = x^n$ (n 는 실수)의 부정적분, 삼각함수의 부정적분, 지수함수, 로그함수의 부정적분을 다룬다.

2.2 차분적분법

이 단원에서는 $f(x) = x^n$ (n 는 실수)의 부정적분, 삼각함수의 부정적분, 지수함수, 로그함수의 부정적분을 다룬다.

2.3 부분적분법

이 단원에서는 $f(x) = x^n$ (n 는 실수)의 부정적분, 삼각함수의 부정적분, 지수함수, 로그함수의 부정적분을 다룬다.

3 소단원 학습 목표

새로운 학습 내용에 대한 성취 기준을 제시 하였습니다.

4 본문

기본적인 수학의 개념, 원리, 법칙 등을 쉽게 이해하고 기능을 습득할 수 있도록 설명 하였습니다.

5 참고

본문 내용을 보충하거나 참고해야 할 내용을 잘 이해할 수 있도록 설명하였습니다.



차례

I 부정적분

- 12 1. 여러 가지 함수의 부정적분
- 13 1. 부정적분의 뜻
- 15 2. 함수 $f(x) = x^r$ (r 는 실수)의 부정적분
- 19 3. 삼각함수와 지수함수의 부정적분
- 21 중단원 평가

22 2. 치환적분법

- 23 1. 치환적분법의 뜻
- 25 2. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ 꼴의 부정적분
- 27 중단원 평가

28 3. 부분적분법

- 29 1. 부분적분법의 뜻
- 33 중단원 평가
- 34 대단원 평가

II 정적분

38 1. 구분구적법

- 39 1. 구분구적법의 뜻
- 41 2. 정적분의 뜻
- 43 중단원 평가

44 2. 여러 가지 함수의 정적분

- 45 1. 미적분의 기본정리
- 48 2. 정적분의 성질
- 52 3. 정적분의 치환적분법
- 54 4. 정적분의 부분적분법
- 55 5. 정적분과 급수의 합 사이의 관계
- 57 중단원 평가

58 3. 정적분의 활용

- 59 1. 넓이

Ⅲ 이차곡선

- 65 2. 부피
- 70 3. 속도와 거리
- 76 중단원 평가
- 78 대단원 평가

- 82 1. 포물선
- 83 1. 포물선의 정의와 방정식
- 86 2. 포물선의 평행이동
- 87 중단원 평가

- 88 2. 타원
- 89 1. 타원의 정의와 방정식
- 92 2. 타원의 평행이동
- 93 중단원 평가

- 94 3. 쌍곡선
- 95 1. 쌍곡선의 정의와 방정식
- 99 2. 쌍곡선의 평행이동
- 101 중단원 평가

- 102 4. 이차곡선과 직선
- 103 1. 포물선과 직선
- 107 2. 타원과 직선
- 111 3. 쌍곡선과 직선
- 115 중단원 평가
- 116 대단원 평가



차례

IV 공간도형과 공간좌표

V 확률

120 1. 공간도형

121 1. 직선과 평면의 위치 관계

135 2. 삼수선의 정리

142 3. 정사영

150 중단원 평가

152 2. 공간좌표

153 1. 공간에서 점의 좌표

157 2. 두 점 사이의 거리

163 3. 선분의 내분점과 외분점

168 4. 구의 방정식

174 중단원 평가

176 대단원 평가

182 1. 순열과 조합

183 1. 순열

192 2. 조합

195 3. 집합의 분할

201 4. 자연수의 분할

206 5. 이항정리

210 중단원 평가

212 2. 확률의 뜻과 성질

213 1. 시행과 사건의 뜻

215 2. 수학적 확률과 통계적 확률

218 3. 확률의 기본 성질

219 4. 확률의 덧셈정리

221 중단원 평가

VI 통계

222 3. 조건부확률

- 223 1. 조건부확률의 뜻
- 225 2. 확률의 곱셈정리
- 228 3. 사건의 독립과 종속
- 231 4. 독립시행의 확률
- 233 중단원 평가
- 234 대단원 평가

238 1. 확률분포

- 239 1. 확률변수와 확률분포
- 241 2. 이산확률변수와 확률질량함수
- 244 3. 이산확률변수의 기댓값(평균), 분산, 표준편차
- 249 4. 이항분포
- 253 5. 큰수의 법칙
- 255 6. 연속확률변수와 확률밀도함수
- 258 7. 정규분포
- 263 8. 이항분포와 정규분포의 관계
- 265 중단원 평가

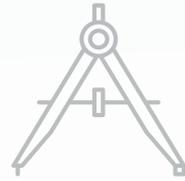
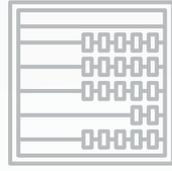
267 2. 통계적 추정

- 268 1. 모집단과 표본
- 270 2. 모평균과 표본평균
- 273 3. 모평균의 추정
- 276 4. 모비율과 표본비율
- 278 5. 모비율의 구간추정
- 280 6. 가설검정
- 288 중단원 평가
- 290 대단원 평가

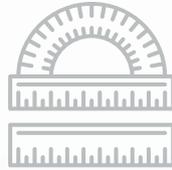
292 부록 : 정답 및 해설

I

부정적분

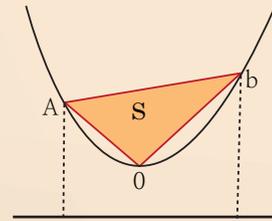


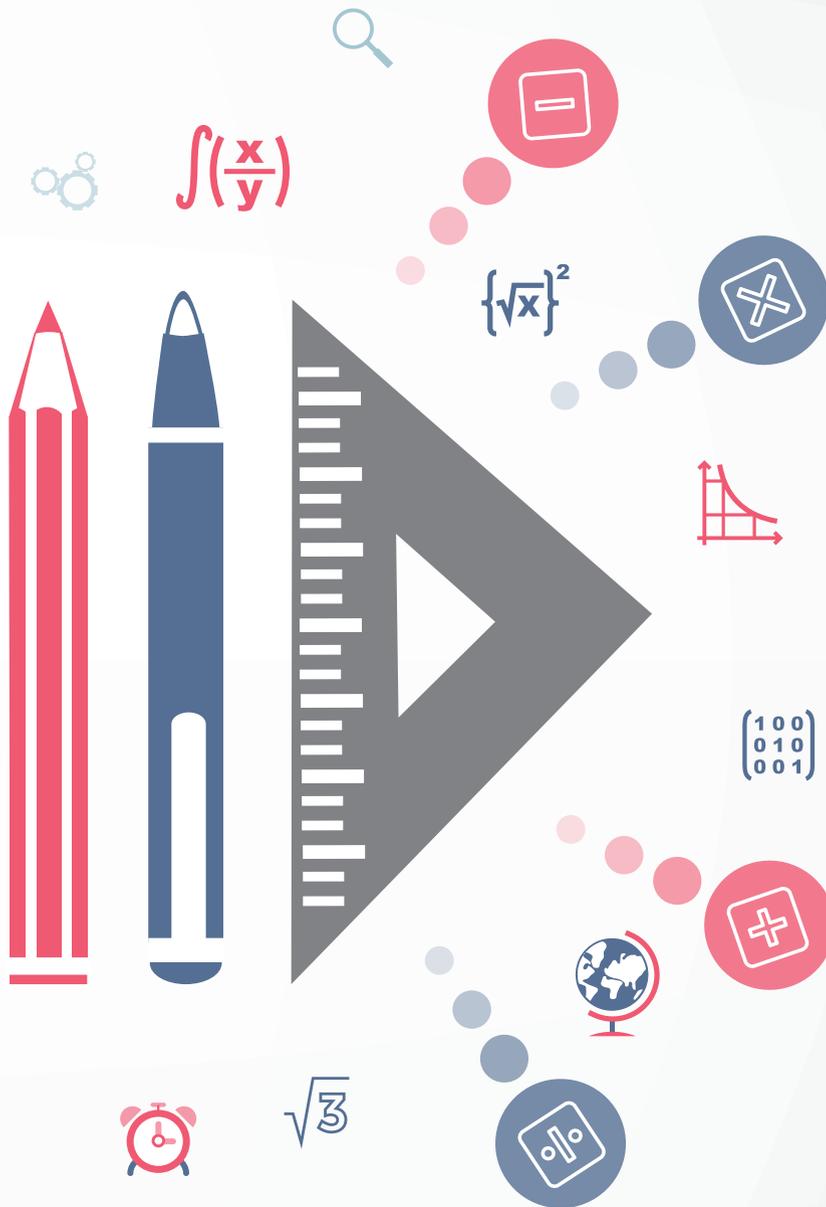
- 1 여러 가지 함수의 부정적분
- 2 치환적분법
- 3 부분적분법



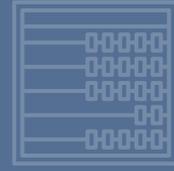
단원 열기

적분법은 아르키메데스(Archimedes: (B.C.287?~B.C.212)에 의해 최초로 언급되었다. 특히, 아르키메데스는 '실진법(method of exhaustion)'이라고 알려진 방법을 이용하여, 오른쪽 그림과 같이 포물선 위의 점 O 에 대하여 삼각형 AOB 의 넓이가 최대가 될 때 그 값을 S 라 하면, 포물선과 선분 AB 로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{4}{3}S$ 임을 귀류법으로 증명하였다.





1



여러 가지 함수의 부정적분

01 부정적분의 뜻

02 함수 $f(x) = x^r$ (r 는 실수)의 부정적분

03 삼각함수와 지수함수의 부정적분



>> 생각 열기

다항식의 전개와 인수분해는 서로 역연산인 관계가 있듯이 미분에 대해서도 역연산을 생각할 수 있다. 다음 물음에 답하라.

1. 다음 함수를 미분하라.

(1) $y = x^3$

(2) $y = x^3 + 1$

(3) $y = x^3 + 2$

2. 실수 C 에 대하여 함수 $y = x^3 + C$ 를 미분하라.

3. 미분하여 $y = 3x^2$ 가 되는 함수는 무엇인가?



01

부정적분의 뜻

학습 목표

- 부정적분의 뜻을 안다.

도함수가 $3x^2$ 인 함수는

$$x^3, x^3 + 1, x^3 + 2, \dots$$

등과 같이 여러 가지가 있다.

이와 같이 함수 $F(x)$ 의 도함수가 $f(x)$, 즉

$$F'(x) = f(x)$$

일 때, $F(x)$ 를 $f(x)$ 의 **부정적분** 또는 **원시함수**라고 한다.

예를 들면, $x^3, x^3 + 1, x^3 + 2, \dots$ 등은 모두 $3x^2$ 의 부정적분으로 이들은 상수항만 다르다.

함수 $f(x)$ 의 부정적분 중 하나를 알 때, $f(x)$ 의 모든 부정적분을 찾아보자.

함수 $f(x)$ 의 부정적분 중 하나를 $F(x)$ 라 하자. 임의의 상수 C 에 대하여

$$\begin{aligned} \{F(x) + C\}' &= F'(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

이므로 $F(x) + C$ 도 $f(x)$ 의 부정적분이다. 역으로, $G(x)$ 를 $f(x)$ 의 임의의 부정적분이라 하면

$$F'(x) = f(x), G'(x) = f(x)$$

이므로

$$\begin{aligned} \{G(x) - F(x)\}' &= G'(x) - F'(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

도함수가 0인 함수의 부정적분은 상수함수이므로, 이 상수함수를 C 라 하면

$$G(x) - F(x) = C$$

이므로

$$G(x) = F(x) + C$$

이다. 따라서 함수 $f(x)$ 의 부정적분 중의 하나를 $F(x)$ 라 하면, $f(x)$ 의 임의의 부정적분은 다음과 같은 꼴이 된다.

$$F(x) + C (C \text{는 상수})$$

이것을 기호로

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

와 같이 나타내고, $\int f(x)dx$ 를 $f(x)$ 의 **부정적분**이라 한다.

이때, 함수 $f(x)$ 를 피적분함수, C 를 **적분상수**라 한다. 또한 함수 $f(x)$ 의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$ 를 **적분한다**고 하며, 그 계산 방법을 **적분법**이라고 한다.

참고

• 기호 \int 은 '인티그럴'(integral)로 읽는데, sum(합하다)의 첫 글자 S에서 유래하였다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

부정적분

함수 $f(x)$ 의 부정적분 중 하나가 $F(x)$ 일 때,

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ (단, } C \text{는 적분상수)}$$

예제 1 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int 4x^3 dx$

(2) $\int dx$

풀이

(1) $(x^4)' = 4x^3$ 이므로, $\int 4x^3 dx = x^4 + C$.

(2) $x' = 1$ 이므로, $\int 1dx = x + C$.

답 (1) $x^4 + C$ (2) $x + C$

참고

• $\int 1dx$ 는 간단히 $\int dx$ 로 나타낸다.

문제 1 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int x^2 dx$

(2) $\int e^x dx$

02

함수 $f(x) = x^r$ (r 는 실수)의 부정적분

학습 목표

- 함수 $y = x^r$ (r 는 실수)의 부정적분을 구할 수 있다.
- 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 구할 수 있다.

적분은 미분의 역과정이므로 부정적분에 대한 공식은 미분법으로부터 얻을 수 있다.

함수 $f(x) = x^r$ (r 는 실수)의 부정적분을 구하여 보자.

임의의 실수 r 에 대하여,

$$\left(\frac{1}{r+1}x^{r+1}\right)' = x^r (r \neq -1),$$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

이므로, 다음이 성립한다.

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C \quad (r \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad (\text{단, } C \text{는 상수})$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

x^r (r 는 실수)의 부정적분

$$\int x^r dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C \quad (r \neq -1),$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수})$$

예제 1 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int x^2 dx$

(2) $\int \sqrt{x} dx$

풀이

(1) $\int x^2 dx = \frac{1}{2+1}x^{2+1} + C = \frac{1}{3}x^3 + C$

(2) $\int \sqrt{x} dx = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}x^{1+\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

답 (1) $\frac{1}{3}x^3 + C$ (2) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

문제 1 다음 부정적분을 구하라.

$$(1) \int x^3 dx$$

$$(2) \int \frac{1}{x^4} dx$$

연속인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여

$$\int f(x)dx = F(x) + C_1,$$

$$\int g(x)dx = G(x) + C_2$$

라 하자.

먼저, 상수 k 에 대하여 함수의 실수배의 미분법에 의하여

$$\{kF(x)\}' = kf(x) (k \text{는 상수}),$$

즉,

$$\int kf(x)dx = kF(x) + C$$

이다. 또한,

$$k \int f(x)dx = kF(x) + kC_1$$

이므로, 적분상수 $C = kC_1$ 라 하면

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

이다. 한편, 함수의 덧셈에 대한 미분법에 의하여

$$[F(x) + G(x)]' = f(x) + g(x)$$

이므로

$$\int [f(x) + g(x)]dx = F(x) + G(x) + C$$

이다. 또한,

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + C_1 + C_2$$

이므로, 적분상수 $C = C_1 + C_2$ 라 하면

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

같은 방법으로 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수의 실수배, 합, 차의 부정적분

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx \text{ (단, } k \text{는 상수)}$$

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

예제 2 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int (x + 1)(x^2 + \sqrt{x})dx$ (2) $\int \frac{x^3 - 2x + 1}{\sqrt[3]{x}}dx$

풀이

$$\begin{aligned} (1) \int (x + 1)(x^2 + \sqrt{x})dx &= \int (x^3 + x^2 + x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}})dx \\ &= \int x^3 dx + \int x^2 dx + \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int \frac{x^3 - 2x + 1}{\sqrt[3]{x}}dx &= \int x^{3-\frac{1}{3}}dx + \int (-2)x^{1-\frac{1}{3}}dx + \int x^{-\frac{1}{3}}dx \\ &= \int x^{\frac{8}{3}}dx - 2 \int x^{\frac{2}{3}}dx + \int x^{-\frac{1}{3}}dx \\ &= \frac{3}{11}x^{\frac{11}{3}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C \end{aligned}$$

답 (1) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$
 (2) $\frac{3}{11}x^{\frac{11}{3}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$

문제 2 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} + 3\right)dx$ (2) $\int 3\sqrt[3]{x}(x - 4)dx$

예제 3 다음 조건을 만족하는 함수 $f(x)$ 를 구하라.

$$f'(x) = 6x^2 - 2x + 1, f(0) = 3$$

풀이 부정적분의 정의에 의하여 $f(x)$ 는 $f'(x)$ 의 부정적분이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)dx \\ &= \int (6x^2 - 2x + 1)dx \\ &= 2x^3 - x^2 + x + C \end{aligned}$$

이고, $f(0) = 3$ 이므로 $f(0) = C = 3$ 이다. 따라서

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 3$$

이다.

답 $f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 3$

문제 3 다음 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 를 구하라.

$$f'(x) = 8x^3 - 6x^2 + 2x, \quad f(1) = 3$$

예제 4 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기가 $3x^2 - 4x$ 이고, 이 곡선이 점 $(1, 3)$ 을 지날 때, 곡선의 방정식 $y = f(x)$ 를 구하라.

풀이 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(x)$ 이므로

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

이다.

따라서

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int (3x^2 - 4x)dx = x^3 - 2x^2 + C$$

한편, 곡선 $y = f(x)$ 가 점 $(1, 3)$ 을 지나므로

$$f(1) = 1 - 2 + C = 3$$

에서 $C = 4$ 이다. 따라서 구하는 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4.$$

답 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$

문제 4 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 (x, y) 에서의 접선의 기울기가 $12x^3 - 2$ 이고, 이 곡선이 점 $(-1, 4)$ 를 지날 때, 곡선의 방정식 $y = f(x)$ 를 구하라.

03

삼각함수와 지수함수의 부정적분

학습 목표

- 삼각함수와 지수함수의 부정적분을 구할 수 있다.

삼각함수의 미분법으로부터 삼각함수의 부정적분을 구할 수 있다.

삼각함수의 미분법에서

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

이므로, 삼각함수의 부정적분은 다음과 같다.

삼각함수의 부정적분

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

예제 1 다음 부정적분을 구하라.

$$(1) \int \sec x (\tan x + \cos^2 x) dx$$

$$(2) \int \sin^2 \frac{x}{2} dx$$

풀이

$$(1) \int \sec x (\tan x + \cos^2 x) dx = \int \sec x \tan x dx + \int \cos x dx \\ = \sec x + \sin x + C$$

$$(2) \int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos x) dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x + C$$

답 (1) $\sec x + \sin x + C$ (2) $\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x + C$

참고

• $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$ 에서
 $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ 이고, $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ 이다.

문제 1 다음 부정적분을 구하라.

$$(1) \int (\sin x - \sec^2 x) dx \qquad (2) \int \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} dx$$

지수함수의 미분법으로부터 지수함수의 부정적분을 구할 수 있다.

지수함수의 미분법에서

$$(e^x)' = e^x$$

이고

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (\text{단, } a \neq 1, a > 0)$$

이므로, 지수함수의 부정적분은 다음과 같다.

지수함수의 부정적분

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (\text{단, } a > 0, a \neq 1)$$

예제 2 다음 부정적분을 구하라.

$$(1) \int e^{x-1} dx \qquad (2) \int 3^{x-1} dx$$

풀이

$$\begin{aligned} (1) \int e^{x-1} dx &= \frac{1}{e} \int e^x dx \\ &= \frac{1}{e} e^x + C = e^{x-1} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int 3^{x-1} dx &= \frac{1}{3} \int 3^x dx \\ &= \frac{1}{3} \frac{3^x}{\ln 3} + C = \frac{3^{x-1}}{\ln 3} + C \end{aligned}$$

답 (1) $e^{x-1} + C$ (2) $\frac{3^{x-1}}{\ln 3} + C$

문제 2 다음 부정적분을 구하라.

$$(1) \int e^{x+1} dx \qquad (2) \int 5^{x-2} dx$$



중단원 평가

1 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

(2) $\int \csc x (\sin x + \cot x) dx$

2 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int 2^{2x} dx$

(2) $\int \frac{e^{2x} - 4}{e^x - 2} dx$

3 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 (x, y) 에서의 접선의 기울기가 $e^x - 4x$ 이고, x 좌표가 0인 $y = f(x)$ 위의 점에서 접선의 방정식은 $y = x + 2$ 이다. 이때, $f(2)$ 의 값을 구하라.

4 $\int \sin 3x \cos 4x dx$ 를 구하라.

5 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int x^3 dx$

(2) $\int x\sqrt{x} dx$

6 모든 실수 x 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 3^x + \sin x$ 를 만족시키는 함수 $f(x)$ 를 구하라.

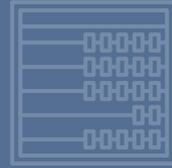
7 함수 $f(x)$ 가 $f'(x) = \frac{xe^x + 2}{x}$, $f(1) = e$ 를 만족시킬 때, $f(x)$ 를 구하라.

2

치환적분법

01 치환적분법의 뜻

02 $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ 꼴의 부정적분



>> 생각 열기

다음 물음에 답하라.

1. 두 함수 $\frac{1}{3}(3t+1)^3$ 와 $\frac{1}{3}x^3$ 을 각각 t 와 x 에 대하여 미분하라.
2. $f(x) = x^2$, $x = g(t) = 2t + 1$ 일 때, $\int f(g(t))g'(t)dt$ 를 구하라.
3. 미분하여 $y = 3x^2$ 가 되는 함수는 무엇인가?



01

치환적분법의 뜻

학습 목표

- 치환적분법의 뜻을 이해한다.
- 치환적분법을 활용하여 여러 가지 부정적분을 구할 수 있다.

함수의 부정적분을 구할 때, $\int \frac{2}{2x+1} dx$ 와 같이 계산이 어렵거나 $\int (2x-1)^{100} dx$ 와 같이 $(2x-1)^{100}$ 을 전개하여 적분하려면 복잡하고 많은 시간이 필요한 경우가 있다.

이때, 피적분함수의 일부 또는 전체를 새로운 변수로 바꾸면 주어진 부정적분을 간단히 할 수 있다.

예를 들면,

$$\int 2(2x-1)^{100} dx = \int (2x-1)^{100} (2x-1)' dx$$

이고,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{1}{101} (2x-1)^{101} &= \frac{1}{101} \cdot 101(2x-1)^{100} (2x-1)' \\ &= 2(2x-1)^{100} \end{aligned}$$

따라서,

$$\int 2(2x-1)^{100} dx = \frac{1}{101} (2x-1)^{101} + C$$

일반적으로

$$\int f(g(x))g'(x) dx$$

꼴로 나타낼 수 있는 적분을 구하는 방법을 알아보자.

함수 $f(x)$ 의 부정적분을 $F(x)$, 즉, $F'(x) = f(x)$ 라 하자.

미분가능한 함수 $g(x)$ 에 대하여 $t = g(x)$ 로 놓으면 $F(t) = F(g(x))$ 가 된다.

합성함수 미분법을 사용하여 $F(g(x))$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{dF(g(x))}{dx} &= F'(g(x))g'(x) \\ &= f(g(x))g'(x) \end{aligned}$$

이므로, $t = g(x)$ 라 하면

$$\int F'(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C = \int F'(t) dt$$

즉,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt.$$

이다.

이와 같이 함수 등을 다른 변수로 바꾸어 적분하는 방법을 **치환적분법**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

치환적분법

연속인 함수 f 와 미분가능한 함수 g 에 대하여, $t = g(x)$ 로 놓으면

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$$

예제 1 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int x\sqrt{x^2+1}dx$

(2) $\int \sin 3xdx$

풀이

(1) $t = x^2 + 1$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 2x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2+1}dx &= \int \frac{1}{2}\sqrt{t} dt = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C\end{aligned}$$

(2) $t = 3x$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 3$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \sin 3xdx &= \frac{1}{3}\int \sin t dt \\ &= -\frac{1}{3}\cos t + C \\ &= -\frac{1}{3}\cos 3x + C\end{aligned}$$

답 (1) $\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + C$ (2) $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$

문제 1 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int (2x-3)^5 dx$

(2) $\int x \cos x^2 dx$

02

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ 꼴의 부정적분

학습 목표

- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ 꼴의 부정적분을 구할 수 있다.

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ 꼴의 부정적분을 알아보자.

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ 에서 $t = f(x)$ 로 치환하면 $\frac{dt}{dx} = f'(x)$ 이므로

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ 의 부정적분

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

예제 1 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int \frac{e^x}{e^x + 3} dx$

(2) $\int \frac{x^2}{x^3 + 4} dx$

풀이

(1) $(e^x + 3)' = e^x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{e^x + 3} dx &= \int \frac{(e^x + 3)'}{e^x + 3} dx \\ &= \ln|e^x + 3| + C \end{aligned}$$

(2) $(x^3 + 4)' = 3x^2$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^3 + 4} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{(x^3 + 4)'}{x^3 + 4} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln|x^3 + 4| + C \end{aligned}$$

답 (1) $\ln(e^x + 3) + C$ (2) $\frac{1}{3} \ln|x^3 + 4| + C$

문제 1 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int \frac{x}{x^2 + 3} dx$

(2) $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

(3) $\int \cot x dx$

(4) $\int \frac{2^x}{2^x + 1} dx$

예제 2 다음 조건을 만족시키는 연속함수 $f(x)$ 를 구하라.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sin x, f(0) = 1$$

풀이 $\frac{f'(x)}{f(x)} = \sin x$ 의 양변을 적분하면

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \sin x dx$$

에서

$$\ln|f(x)| = -\cos x + C$$

이다. 따라서 $|f(x)| = e^{-\cos x + C}$ 이다.

한편, $f(x)$ 는 연속함수이므로 $f(x) = e^{-\cos x + C}$

또는, $f(x) = -e^{-\cos x + C}$ 이다.

또한, $f(0) = 1$ 이므로 $f(x) = e^{-\cos x + C}$ 이고, $C = 1$ 이다.

그러므로 $f(x) = e^{1 - \cos x}$ 이다.

답 $f(x) = e^{1 - \cos x}$

문제 2 부정적분 $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}} dx$ 을 구하라.



MEMO



중단원 평가

- 1 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int \sin^6 x \cos^3 x dx$

(2) $\int \sin^3 x \sec^2 x dx$

- 2 $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$ 를 구하라.

- 3 $\int \sqrt{4-x^2} dx$ 를 구하라.

- 4 $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2+4}} dx$ 를 구하여라.

- 5 $\int \frac{x^2+2x-2}{x^3-4x} dx$ 를 구하여라.

- 6 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족한다고 하자.

$$f(x) + g(x) = e^x, f'(x) - g'(x) = e^{-x}, f(0) = 0$$

$f(x)$, $g(x)$ 를 각각 구하라.

- 7 구간 $(0, e^{\frac{\pi}{2}}]$ 에서 함수 $f(x)$ 를 다음과 같이 정의하자.

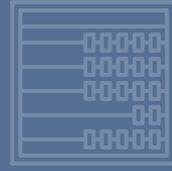
$$f(x) = \int \frac{1}{x} \sin(\ln x) dx (x < e^{\frac{\pi}{2}}), f(e^{\frac{\pi}{2}}) = 0$$

방정식 $f(x) = 0$ 의 모든 해의 합을 구하라.

3

부분적분법

01 부분적분법의 뜻



>> 생각 열기

함수 $f(x) = x \ln x$ 에 대하여 다음 물음에 답하라.

1. $f(x)$ 를 미분하라.
2. 1의 결과를 이용하여 $\int \ln x dx$ 를 구하라.



01

부분적분법의 뜻

학습 목표

- 부분적분법의 뜻을 이해한다.
- 부분적분법을 활용하여 여러 가지 부정적분을 구할 수 있다.

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

이므로 이 식의 양변을 적분하면

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx.$$

즉,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

이와 같이 적분하는 방법을 **부분적분법**이라 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

부분적분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 미분가능할 때,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

예제 1 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int x \sin x dx$

(2) $\int x \ln x dx$

풀이

(1) $f(x) = x$, $g'(x) = \sin x$ 로 놓으면 $f'(x) = 1$,

$$g(x) = -\cos x \text{ 이므로}$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

(2) $f(x) = \ln x$, $g'(x) = x$ 로 놓으면 $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ 이므로

$$\int x \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

답 (1) $-x \cos x + \sin x + C$ (2) $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

문제 1 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int x^2 \cos x dx$

(2) $\int x^2 e^x dx$

예제 2 부정적분 $\int e^x \sin x dx$ 를 구하라.

풀이 $f(x) = e^x$, $g'(x) = \sin x$ 로 놓으면

$f'(x) = e^x$, $g(x) = -\cos x$ 이므로

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

같은 방법으로

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x dx &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \\ &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

답 $\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$

문제 2 부정적분 $\int e^x \cos x dx$ 을 구하라.

예제 3 $\int \tan^{-1} x dx$ 를 구하라.

풀이 $f(x) = \tan^{-1} x$, $g'(x) = 1$ 로 놓으면

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, g(x) = x \text{이므로}$$

$$\int \tan^{-1} x dx = x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

답 $x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$

문제 3 $\int \sin^{-1} x dx$ 를 구하라.

$x^n \ln x$ 꼴 함수의 부정적분

$x^n \ln x$ 꼴 함수의 부정적분을 구하여 보자.

(i) $n = -1$ 인 경우

$t = \ln x$ 라 하면, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int x^{-1} \ln x dx &= \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C \\ &= \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C. \end{aligned}$$

(ii) $n \neq -1$ 인 정수일 때

$f(x) = \ln x$, $g'(x) = x^n$ 이라 놓으면,

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

이므로

$$\begin{aligned} \int x^n \ln x dx &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \int \frac{1}{n+1} x^n dx \\ &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + C \end{aligned}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

$x^n \ln x$ 의 부정적분(n 은 정수)

① $\int x^{-1} \ln x dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$

② n 이 -1 이 아닌 정수일 때

$$\int x^n \ln x dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + C$$

예제 4 $\int \ln x dx$ 를 구하라.

풀이 $n = 0$ 이므로

$$\int \ln x dx = \frac{1}{0+1} x^{0+1} \ln x - \frac{1}{(1+0)^2} x^{0+1} + C = x \ln x - x + C$$

답 $x \ln x - x + C$

문제 4 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int x^2 \ln x dx$

(2) $\int (\ln x)^2 dx$

$\sin^n x$ 과 $\cos^n x$ 의 부정적분

삼각함수의 거듭제곱인 $\sin^n x$ (n 은 2 이상의 자연수)의 부정적분을 구하여 보자.

부분적분법을 이용하기 위하여 $f(x) = \sin^{n-1} x$, $g'(x) = \sin x$ 이라 놓으면,

$$f'(x) = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x, \quad g(x) = -\cos x$$

이므로, 부분적분법에 의하여

$$\int \sin^n x dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx$$

따라서 $\int \sin^n x dx$ 에 대하여 정리하면 다음과 같다.

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

특히, n 이 양의 정수일 때 이 공식을 반복하여 적용하면 거듭제곱의 차수를 줄일 수 있으므로 주어진 삼각함수의 거듭제곱의 부정적분을 구할 수 있다.

같은 방법으로 $\cos^n x$ 의 부정적분도 구할 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$\int \sin^n x dx$ 과 $\int \cos^n x dx$ 의 부정적분 (n 은 2 이상의 자연수)

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

예제 5 2 이상의 자연수 n 에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이라.

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

풀이 $f(x) = \cos^{n-1} x$, $g'(x) = \cos x$ 이라 놓으면,

$f'(x) = -(n-1)\cos^{n-2} x \sin x$, $g(x) = \sin x$ 이므로

$$\int \cos^n x dx = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin^2 x dx$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) dx$$

$$= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x dx - (n-1) \int \cos^n x dx$$

따라서 주어진 등식이 성립한다.

문제 5 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int \sin^3 x dx$

(2) $\int \cos^4 x dx$



대단원 평가

1 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$

(2) $\int \sin^3 x \cos^5 x dx$

2 $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ 를 구하라.

3 $\int \tan^4 x \sec^4 x dx$ 를 구하라.

4 $\int \tan x \sec^5 x dx$ 를 구하라.

5 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int \sin x \cos 3x dx$

(2) $\int \cos 2x \cos 6x dx$

6 $\int \sqrt{1-4x^2} dx$ 를 구하라.

7 $\int \frac{1}{(x+1)^2 \sqrt{x^2+2x+2}} dx$ 를 구하라.

8 $\int \frac{1}{x^4-1} dx$ 를 구하라.

- 9 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(x)$ 의 값을 구하라.

$$f'(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}, f(0) = 2 - \ln 3$$

- 10 $(0, 2)$ 를 지나는 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 (x, y) 에서의 접선의 기울기가 $3x^2 - 4x - 6$ 일 때, $f(1)$ 의 값을 구하라.

- 11 연속함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(x)$ 를 구하라.

$$\int f(x)dx = xf(x) - x^2e^{2x} + C, f(0) = \frac{5}{2}$$

- 12 다음 부정적분을 구하라.

(1) $\int \ln(x^2 - x)dx$

(2) $\int e^x \sin^2 \frac{x}{2} dx$

(3) $\int \sec^3 x dx$

(4) $\int \frac{2x + 7}{\sqrt{x^2 + 6x - 7}} dx$

(5) $\int \frac{2x - 1}{x^2 - 2x - 3} dx$

(6) $\int 4 \sin 2x \cos 2x \cos 4x dx$

- 13 미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = f(x)g(x) + f(x)g'(x), f(x) > 0, \text{ 모든 실수 } x \text{에 대하여 } g(x) \neq 0$$

$f(0) = 1$ 일 때, $f(x)$ 를 구하라.

- 14 공기 중 소리의 전파 속도는 기온의 영향을 받는다. 소리의 전파 속도를 $v(m/s)$, 기온을 $t(^{\circ}C)$ 라 하면 $\frac{dv}{dt} = \frac{3}{5}$ 이다. 기온이 $0^{\circ}C$ 일 때 소리의 전파 속도는 $331m/s$ 이다. 기온이 $20^{\circ}C$ 일 때, 소리의 전파 속도를 구하라.