2020학년도 3월 고1 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

정 답

1	④	2	③	3	④	4	①	5	⑤
6	①	7	②	8	②	9	④	10	②
11	③	12	⑤	13	③	14	①	15	⑤
16	③	17	④	18	①	19	③	20	②
21	⑤	22	3	23	7	24	12	25	15
26	87	27	14	28	59	29	162	30	23

해 설

1. [출제의도] 유리수의 연산 원리를 이용하여 식의 값을 계산한다.

$-\frac{7}{2}\times(-3)+4\times\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{7\times3}{2}-4\times\frac{5}{2}$

$=\frac{21}{2}-10$

$=\frac{21}{2}-\frac{20}{2}$

$=\frac{1}{2}$

2. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 식의 값을 계산한다.

$(2^4)^3\div2^{10}=2^{12}\div2^{10}$

$=2^{12-10}$

$=2^2=4$

[보충 설명] 지수법칙

① m, n이 자연수일 때 $a^m\times a^n=a^{m+n}$

② m, n이 자연수일 때 $(a^m)^n=a^{mn}$

③ m, n이 자연수, $a\neq0$일 때

$m>n$이면 $a^m\div a^n=a^{m-n}$

$m=n$이면 $a^m\div a^n=1$

$m<n$이면 $a^m\div a^n=\frac{1}{a^{n-m}}$

④ n이 자연수일 때

$(ab)^n=a^nb^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ (단, $b\neq0$)

3. [출제의도] 다항식의 덧셈과 뺄셈을 이용하여 식을 간단히 한다.

$3A-B=3(2a^2+a)-(3a-1)$

$=6a^2+3a-3a+1$

$=6a^2+1$

4. [출제의도] 일차부등식의 자연수인 해의 개수를 구한다.

$5x-7\leq23-x$

$5x+x\leq23+7$

$6x\leq30$

$x\leq5$

이를 만족시키는 자연수는

1, 2, 3, 4, 5

이므로 구하는 개수는 5이다.

5. [출제의도] 부채꼴의 넓이를 이해하여 부채꼴의 반지름의 길이를 구한다.

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하자.

중심각의 크기가 $150°$인 부채꼴의 넓이는

$\pi r^2\times\frac{150}{360}$

주어진 조건에서 부채꼴의 넓이가 15π이므로

$\pi r^2\times\frac{150}{360}=15\pi$

$r^2\times\frac{5}{12}=15$

$r^2=36$

$r>0$이므로 $r=6$

따라서 부채꼴의 반지름의 길이는 6이다.

[보충 설명] 부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 $x°$인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

$l=2\pi r\times\frac{x}{360}$

$S=\pi r^2\times\frac{x}{360}$

$S=\frac{1}{2}rl$

6. [출제의도] 함수의 뜻을 이해하고 함숫값을 구한다.

$f(3)=3$이므로

$f(x)=ax-9$에 $x=3$을 대입하면

$f(3)=3a-9=3$

$3a=12$, $a=4$

따라서 $f(x)=4x-9$

$f(4)=4\times4-9$

$=16-9$

$=7$

7. [출제의도] 이차방정식의 해의 의미를 이해하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.

이차방정식 $2x^2-7x+2a=0$의 한 근이 $x=\frac{1}{2}$이므로

$2x^2-7x+2a=0$에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면

$2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-7\times\frac{1}{2}+2a=0$

$2\times\frac{1}{4}-7\times\frac{1}{2}+2a=0$

$\frac{1}{2}-\frac{7}{2}+2a=0$

$-3+2a=0$

$2a=3$

$a=\frac{3}{2}$

8. [출제의도] 제곱근의 성질을 이용하여 식의 값을 계산한다.

주어진 식에 $x=2-\sqrt{3}$을 대입하면

$x^2-4x=(2-\sqrt{3})^2-4(2-\sqrt{3})$

$=4-4\sqrt{3}+3-8+4\sqrt{3}$

$=-1$

[다른 풀이]

2를 이항하면

$x-2=-\sqrt{3}$

양변을 제곱하면

$(x-2)^2=(-\sqrt{3})^2$

$x^2-4x+4=3$

따라서 $x^2-4x=-1$

[다른 풀이]

$x^2-4x=x(x-4)$

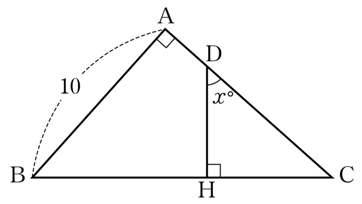
$=(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3}-4)$

$=(2-\sqrt{3})(-2-\sqrt{3})$

$=(-\sqrt{3})^2-2^2$

$=-1$

9. [출제의도] 삼각비와 닮음을 이용하여 선분의 길이를 구한다.



△ABC와 △HDC에서

∠A $=$ ∠DHC $=90°$

∠C는 공통이므로

△ABC와 △HDC는 닮음이다.

따라서

∠B $=$ ∠CDH $=x°$이므로

$\cos B=\cos x°=\frac{2}{3}$

한편 △ABC에서 $\cos B=\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}=\frac{10}{\overline{BC}}$이므로

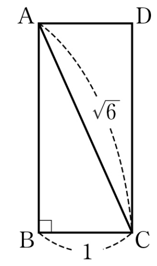
$\frac{10}{\overline{BC}}=\frac{2}{3}$

$2\times\overline{BC}=10\times3$

따라서 $\overline{BC}=15$

10. [출제의도] 피타고라스 정리를 이해하여 주어진 식의 값을 구한다.

조건에서 직사각형 ABCD의 대각선의 길이가 $\sqrt{6}$이므로 이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\sqrt{6}$, $\overline{BC}=1$이므로

피타고라스 정리에 의해

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2-\overline{BC}^2$

$=(\sqrt{6})^2-1^2$

$=6-1$

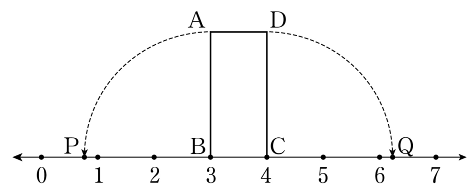
$=5$

따라서

$\overline{AB}=\sqrt{5}$

변 DC의 길이와 변 AB의 길이는 같으므로

$\overline{DC}=\overline{AB}=\sqrt{5}$



$\overline{BP}=\overline{BA}=\sqrt{5}$이므로

$p=3-\sqrt{5}$

$\overline{CQ}=\overline{CD}=\sqrt{5}$이므로

$q=4+\sqrt{5}$

따라서

$q-p=4+\sqrt{5}-(3-\sqrt{5})$

$=4+\sqrt{5}-3+\sqrt{5}$

$=1+2\sqrt{5}$

[다른 풀이]

위의 풀이에서 $\overline{DC}=\overline{AB}=\sqrt{5}$

$q-p$의 값은 선분 PQ의 길이와 같다.

$\overline{PQ}=\overline{PB}+\overline{BC}+\overline{CQ}$이므로

각 선분의 길이를 구하면

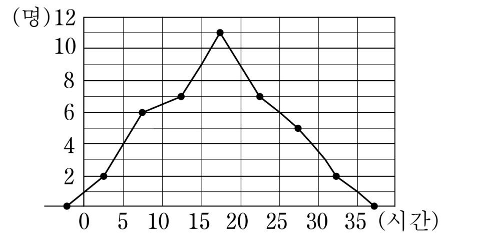
$\overline{PB}=\overline{AB}=\sqrt{5}$

$\overline{BC}=1$

$\overline{CQ}=\overline{CD}=\sqrt{5}$

따라서
$\overline{PQ}=\overline{PB}+\overline{BC}+\overline{CQ}$
$=\sqrt{5}+1+\sqrt{5}$
$=1+2\sqrt{5}$

11. [출제의도] 도수분포다각형을 이해하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.

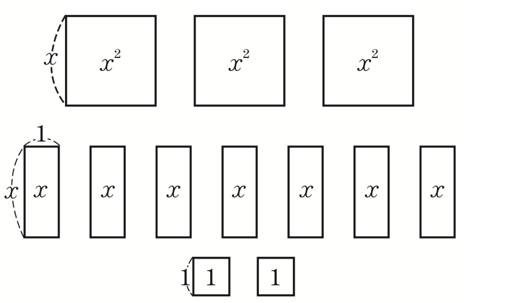


위의 도수분포다각형으로부터 도수분포표를 만들면 다음과 같다.

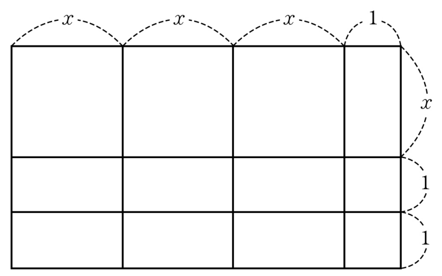
사용 시간	도수(명)
$0^{이상}\sim5^{미만}$	2
$5\sim10$	6
$10\sim15$	7
$15\sim20$	11
$20\sim25$	7
$25\sim30$	5
$30\sim35$	2
합계	40

도수의 총합은
$2+6+7+11+7+5+2=40$ (명)
사용 시간이 10시간 미만인 학생의 수는
$2+6=8$ (명)
학생의 비율은
$\frac{8}{40}\times100=20\,(\%)$
따라서 a의 값은 20이다.

12. [출제의도] 인수분해를 이용하여 직사각형의 둘레의 길이를 구한다.



모든 사각형의 넓이의 합은
$3x^2+7x+2=(3x+1)(x+2)$
이므로 만들어진 직사각형은 두 변의 길이가 각각 $x+2$와 $3x+1$인 직사각형이 된다.
위 도형을 모두 사용하여 직사각형을 만들면 다음과 같다.

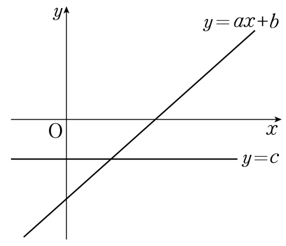


따라서 둘레의 길이는
$2(x+2)+2(3x+1)=8x+6$

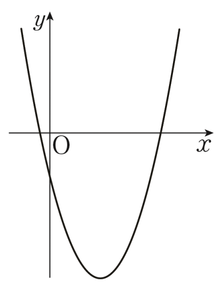
13. [출제의도] 대푯값을 이해하여 자료를 추측하고 주어진 상수의 값을 구한다.

a를 제외한 자료를 작은 값부터 크기 순서대로 나열하면 다음과 같다.
1, 2, 3, 4, 6, 8
최빈값이 존재하기 위해서 a는 1, 2, 3, 4, 6, 8 중에 하나가 되어야 한다. 이때, 중앙값이 될 수 있는 수는 3, 4 중 하나이므로 $a=3$ 또는 $a=4$이다.
$a=3$이면 중앙값이 3이 되는데, 평균이 $\frac{27}{7}(\neq3)$이므로 $a\neq3$이다.
$a=4$이면 중앙값이 4가 되고 평균 역시 4가 되어 모든 조건을 만족한다.
따라서 $a=4$

14. [출제의도] 이차함수의 그래프를 이해하여 조건에 맞는 그래프의 모양을 구한다.

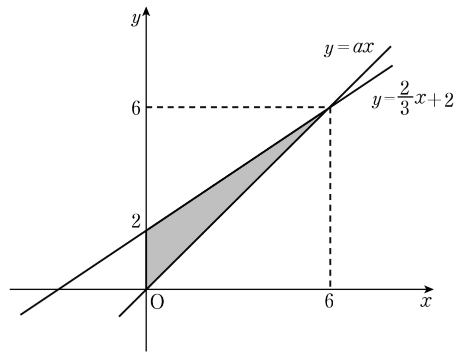


직선 $y=ax+b$에서 기울기는 양수이고 y절편은 음수이므로 $a>0$, $b<0$이다.
직선 $y=c$가 y축과 만나는 점의 y좌표가 음수이므로 $c<0$이다.
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는
$a>0$이므로 아래로 볼록하고, $c<0$이므로 y축과 음의 방향에서 만난다.
$y=ax^2+bx+c$
$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$
축의 방정식은 $x=-\frac{b}{2a}$이고 $a>0$, $b<0$이므로 꼭짓점의 x좌표는 양수이다.
따라서 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프로 알맞은 것은 다음과 같다.



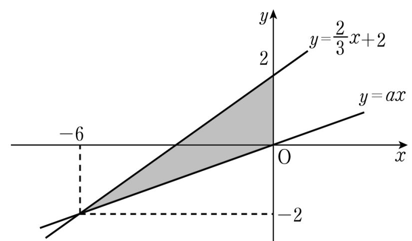
15. [출제의도] 삼각형의 넓이와 일차함수의 그래프의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

(i) $a>\frac{2}{3}$일 때



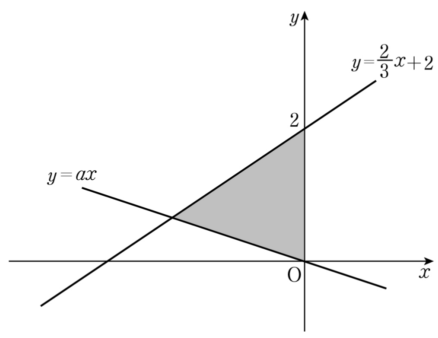
$y=ax$, $y=\frac{2}{3}x+2$가 제1사분면에서 만날 때 두 직선과 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 6이므로 교점의 x좌표는 6이 되어야 한다. 이때, 교점의 y좌표는 6이 된다. 따라서 a의 값은 $a=\frac{6}{6}=1$이다.

(ii) $0<a<\frac{2}{3}$일 때



$y=ax$, $y=\frac{2}{3}x+2$가 제3사분면에서 만날 때 두 직선과 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 6이므로 교점의 x좌표는 -6이 되어야 한다. 이때, 교점의 y좌표는 -2가 된다.
따라서 a의 값은 $a=\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}$이다.

(iii) $a\leq0$일 때



$y=ax$, $y=\frac{2}{3}x+2$와 y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이의 최댓값은 3이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 모든 실수 a의 값의 합은
$1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

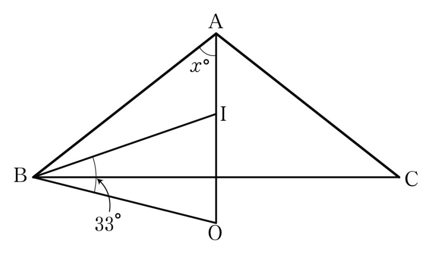
16. [출제의도] 미지수가 2개인 연립일차방정식을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

A가 이긴 횟수를 a, 비긴 횟수를 b라 하면
A가 진 횟수는 $10-a-b$이다.
A가 얻은 점수는
$4\times a+2\times b+1\times(10-a-b)=27$
$3a+b=17$ ······ ㉠
B가 이긴 횟수는 A가 진 횟수와 같으므로
B가 얻은 점수는
$4\times(10-a-b)+2\times b+1\times a=21$
$3a+2b=19$ ······ ㉡
㉠, ㉡에서
$a=5$, $b=2$
따라서 A가 이긴 횟수는 5이다.

[다른 풀이]

가위바위보를 10번 하고 난 결과, A의 점수가 B의 점수보다 6점이 많다. 한 번의 가위바위보에서 이긴 사람과 진 사람의 점수 차이는 3점이므로 A의 이긴 횟수는 B가 이긴 횟수보다 2만큼 많다.
A가 이긴 횟수를 a라 하면 B가 이긴 횟수는 $a-2$이고 비긴 횟수는 $10-(a+a-2)=12-2a$이다.
따라서 가위바위보를 10번 하고 난 결과, A의 점수는 27점이므로
$4\times a+2\times(12-2a)+1\times(a-2)=27$
$a=5$
따라서 A가 이긴 횟수는 5이다.

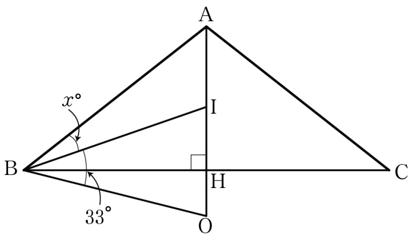
17. [출제의도] 삼각형의 내심과 외심의 성질을 이용하여 각의 크기를 구한다.



$\angle \mathrm{OAB}=x°$라 하자.
외심의 성질에 의해 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$이고
삼각형 OAB는 이등변삼각형이므로 $\angle \mathrm{OBA}=x°$
$\angle \mathrm{OBA}=\angle \mathrm{IBO}+\angle \mathrm{ABI}$
$=33°+\angle \mathrm{ABI}$
$\angle \mathrm{ABI}=x°-33°$
점 I는 삼각형 ABC의 내심이므로
$\angle \mathrm{ABI}=\angle \mathrm{IBC}$, $\angle \mathrm{BAI}=\angle \mathrm{IAC}$
$\angle \mathrm{IBC}=x°-33°$, $\angle \mathrm{IAC}=x°$
따라서
$\angle \mathrm{ABC}=\angle \mathrm{ABI}+\angle \mathrm{IBC}$
$=(x°-33°)+(x°-33°)$
$=2x°-66°$
삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 이등변삼각형이므로
$\angle \mathrm{ABC}=\angle \mathrm{ACB}$
$=2x°-66°$
삼각형 ABC의 내각의 합은 180°이므로
$\angle \mathrm{ABC}+\angle \mathrm{ACB}+\angle \mathrm{BAC}=180°$
$(2x°-66°)+(2x°-66°)+2x°=180°$
$6x°-132°=180°$, $x°=52°$
따라서
$\angle \mathrm{A}=2x°=104°$

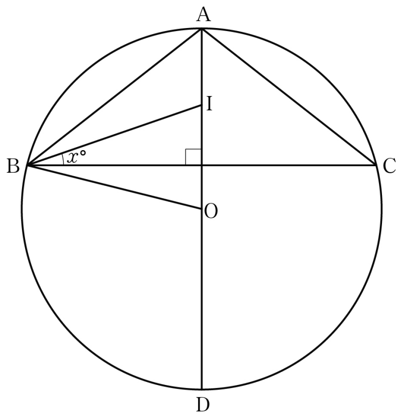
[다른 풀이]

점 I는 삼각형 ABC의 내심이므로 직선 AI는 $\angle \mathrm{BAC}$를 이등분한다.
삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 이등변삼각형이므로 직선 AI는 밑변 $\overline{\mathrm{BC}}$를 수직이등분한다.
삼각형 ABC의 외심 O는 변 BC의 수직이등분선 위에 있으므로 점 O는 직선 AI 위에 있다.



$\angle \mathrm{ABI}=x°$라면
$\angle \mathrm{ABO}=x°+33°$
점 O는 삼각형 ABC의 외심이므로
$\overline{\mathrm{BO}}=\overline{\mathrm{AO}}$
따라서 삼각형 ABO는 이등변삼각형이다.
$\angle \mathrm{BAO}=\angle \mathrm{ABO}$
$=x°+33°$
$\angle \mathrm{BIH}$는 삼각형 ABI의 한 외각이므로
$\angle \mathrm{BIH}=x°+(x°+33°)$
$=2x°+33°$
한편 점 I는 삼각형 ABC의 내심이므로
$\angle \mathrm{IBH}=\angle \mathrm{ABI}=x°$
따라서 직각삼각형 IBH에서
$x°+(2x°+33°)+90°=180°$
$3x°+123°=180°$
$3x°=57°$, $x°=19°$
한편
$\angle \mathrm{BAH}=x°+33°$
$=19°+33°$
$=52°$
이므로
$\angle \mathrm{A}=2\times 52°=104°$

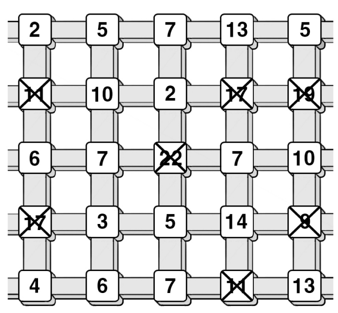
[다른 풀이]



삼각형 ABC의 외접원과 직선 AO의 교점을 D라 하고 $\angle \mathrm{IBC}=x°$라 하면
$\angle \mathrm{OBC}=33°-x°$
점 I가 삼각형 ABC의 내심이므로
$\angle \mathrm{ABC}=2x°$
점 O가 삼각형 ABC의 외심이고 직선 AD는 변 BC의 수직이등분선이므로
$\angle \mathrm{BAD}=90°-2x°$
$\angle \mathrm{BOD}$는 삼각형 ABO의 한 외각이므로
$\angle \mathrm{BOD}=90°-2x°+33°+x°$
$=123°-x°$
$\angle \mathrm{BAD}$는 호 BD에 대한 원주각, $\angle \mathrm{BOD}$는 호 BD에 대한 중심각이므로
$\angle \mathrm{BOD}=2\times\angle \mathrm{BAD}$
따라서
$123°-x°=2\times(90°-2x°)$
$=180°-4x°$
$3x°=57°$, $x°=19°$
따라서
$\angle \mathrm{BAD}=90°-2x°$
$=52°$
이므로 $\angle \mathrm{A}=104°$

18. **[출제의도] 소인수분해를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 수의 합을 추론한다.**

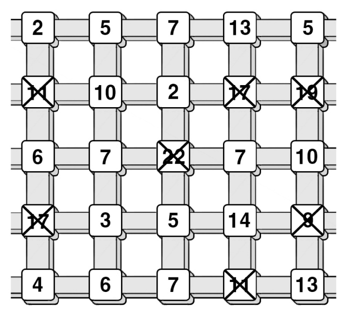
382200을 소인수분해하면
$382200=2^3\times3\times5^2\times7^2\times13$
이므로 2가 3번, 3이 1번, 5가 2번, 7이 2번, 13이 한 번 곱해진다. 따라서 지나갈 수 있는 타일의 최대 개수는 9개이다. 또한 주어진 도로망에서 9, 11, 22, 17, 19가 적힌 타일은 지날 수 없다.
따라서 지날 수 있는 타일은 그림과 같다.



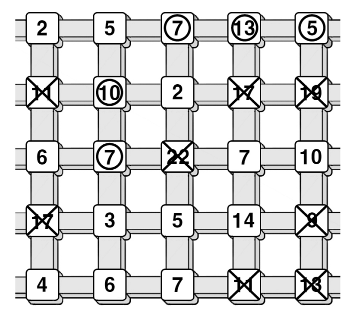
382200에서 소인수 3과 13은 한 번씩만 곱해지므로 3의 배수인 3 또는 6이 적힌 타일 중 하나를 한 번, 13이 적힌 타일을 한 번 지나야 한다.
따라서 지날 수 있는 경로는 다음과 같다.
(i) 처음에 2가 적힌 타일을 지나는 경우
반드시 3이 적힌 타일을 거쳐서 13이 적힌 타일을 지나야 한다.
이 경우 9개 이하의 타일을 지나는 경로는 없으므로 조건을 만족하는 경로는 없다.
(ii) 처음에 6이 적힌 타일을 지나는 경우
두 번째로 지나는 타일에 적힌 수는 7이고 3과 6이 적힌 타일은 동시에 지날 수 없으므로 세 번째로 지나는 타일은 10이다.
$6\to7\to10\to7\to\cdots$로 이동하는 경우 B 지점으로 이동하는 모든 경로는 7을 추가로 한 번 이상 지나게 되므로 7이 세 번 이상 곱해져서 조건을 만족하는 경로는 없다.
$6\to7\to10\to5\to\cdots$로 이동하는 경우 B 지점으로 이동하는 모든 경로는 5를 추가로 한 번 이상 지나게 되므로 5가 세 번 이상 곱해져서 조건을 만족하는 경로는 없다.
$6\to7\to10\to2$로 이동하는 경우 계속하여
$6\to7\to10\to2\to7\to13\to5$로 이동해야 한다. 이때 지나간 타일에 적힌 모든 수의 곱은 다음과 같다.
$6\times7\times10\times2\times7\times13\times5=2^3\times3\times5^2\times7^2\times13$
이 곱은 문제의 조건을 만족시킨다.
따라서 지나간 타일에 적힌 모든 수의 합은 다음과 같다.
$6+7+10+2+7+13+5=50$
(iii) 처음에 4가 적힌 타일을 지나는 경우
3 또는 6이 적힌 타일 중 하나를 한 번, 13이 적힌 타일을 한 번 지나는 경로는 존재하지 않으므로 주어진 조건을 만족하는 경로는 없다.
(i), (ii), (iii)에서 구하는 합은 50이다.

[다른 풀이]

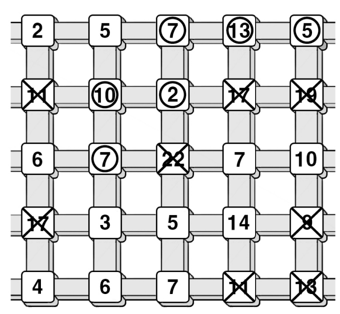
382200을 소인수분해하면
$382200=2^3\times3\times5^2\times7^2\times13$
이므로 2가 3번, 3이 1번, 5가 2번, 7이 2번, 13이 1번 곱해진다. 또한 주어진 도로망에서 9, 11, 22, 17, 19가 적힌 타일은 지날 수 없다. 따라서 지날 수 있는 타일은 다음 그림과 같다.



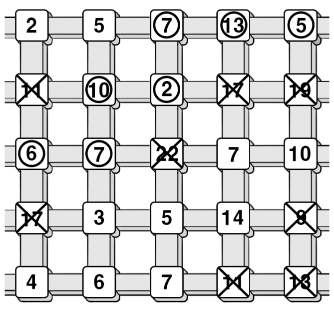
B에서부터 지나온 자리를 거꾸로 찾아오면 맨 아래줄의 13은 지날 수 없으므로 맨 윗줄의 13을 지나야 한다. 따라서 경로의 마지막은 $7\to13\to5$이다. 이후 6 또는 3을 지나야 하므로 세 번째 줄의 7을 지나야 하고, 7을 지나기 위해서는 그 위의 10도 지나야 한다.



이미 5와 10을 지났으므로 5는 더 이상 지날 수 없다. 따라서 두 번째 줄의 2를 지나야 한다.



거쳐야 할 타일의 남은 수의 곱은 6뿐이므로 가능한 경로는 6을 지나는 경우뿐이다.
따라서 아래 그림과 같이 동그라미가 그려진 수를 따라가야 한다.



따라서 지나간 타일에 적힌 모든 수의 합은 다음과 같다.

$6+7+10+2+7+13+5=50$

19. [출제의도] 무리수의 값을 추측하여 조건에 맞는 값의 범위를 구한다.

$\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{8}<\sqrt{9}$ 이므로

$2<\sqrt{7}<2\sqrt{2}<3$

$a+2<a+\sqrt{7}<a+2\sqrt{2}<a+3$

조건 (가)에서 $a>0$이므로 $a+2>2$

$a<1$이므로 $a+3<4$

따라서

$2<a+\sqrt{7}<a+2\sqrt{2}<4$

조건 (나)에서

$a+\sqrt{7}$과 $a+2\sqrt{2}$ 사이에 한 개의 정수가 있으려면 그 정수는 3이어야 한다.

즉 $a+\sqrt{7}<3<a+2\sqrt{2}$

$a+\sqrt{7}<3$에서

$a<3-\sqrt{7}$ …… ㉠

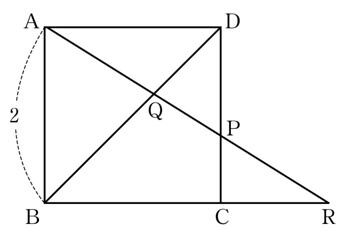
$a+2\sqrt{2}>3$에서

$a>3-2\sqrt{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 a의 값의 범위는

$3-2\sqrt{2}<a<3-\sqrt{7}$

20. [출제의도] 도형의 닮음과 이차방정식을 이용하여 선분의 길이를 구하는 과정을 추론한다.



$\overline{CR}=x$라 하자.

두 직선 AD, BR가 평행하므로

$\angle QAD=\angle QRB$

두 삼각형 QDA, QBR에서

$\angle AQD=\angle RQB$이므로

$\triangle QDA$와 $\triangle QBR$는 닮음이다. (AA 닮음)

따라서 $\overline{AD}:\overline{RB}=\overline{AQ}:\overline{RQ}$

$\boxed{2}:x+2=\overline{AQ}:\overline{RQ}$ …… ㉠

두 직선 AD, BR가 평행하므로

$\angle PAD=\angle PRC$

두 삼각형 PCR, PDA에서

$\angle APD=\angle RPC$ 이므로

$\triangle PCR$와 $\triangle PDA$도 닮음이다. (AA 닮음)

따라서 $\overline{RC}:\overline{AD}=\overline{RP}:\overline{AP}$

$x:2=\overline{RP}:\overline{AP}$ …… ㉡

$\overline{AQ}=\overline{RP}$ 이므로

$\overline{AP}=\overline{AQ}+\overline{QP}$

$=\overline{RP}+\overline{QP}$

$=\overline{RQ}$

따라서

$x:2=\overline{RP}:\overline{AP}=\overline{AQ}:\overline{RQ}$

㉠, ㉡에서

$x:2=2:(x+2)$

$x(x+2)=4$

$x^2+2x-4=0$

$x=-1\pm\sqrt{5}$ 에서 $x>0$이므로

$x=\boxed{-1+\sqrt{5}}$

$\triangle PCR$와 $\triangle PDA$에서

$\overline{CP}:\overline{CR}=\overline{DP}:\overline{DA}$

$\overline{CP}:(-1+\sqrt{5})=(2-\overline{CP}):2$

$(-1+\sqrt{5})\times(2-\overline{CP})=2\times\overline{CP}$

$-2+2\sqrt{5}-(-1+\sqrt{5})\times\overline{CP}=2\times\overline{CP}$

$-2+2\sqrt{5}=(1+\sqrt{5})\times\overline{CP}$

따라서

$\overline{CP}=\dfrac{-2+2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$

$=\dfrac{(-2+2\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}$

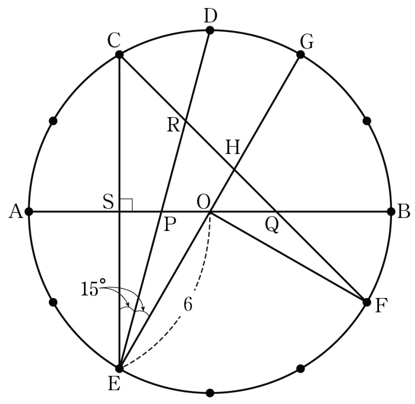
$=\dfrac{-12+4\sqrt{5}}{-4}$

$=\boxed{3-\sqrt{5}}$

그러므로 $a=2$, $b=-1+\sqrt{5}$, $c=3-\sqrt{5}$ 이므로

$a+b+c=4$

21. [출제의도] 원의 성질을 이용하여 <보기>의 참, 거짓을 추론하여 판별한다.



ㄱ. 그림과 같이 원의 중심을 O라 하면 부채꼴 OEF의 중심각의 크기는

$\angle EOF=360°\times\dfrac{3}{12}=90°$

한 호에 대한 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\dfrac{1}{2}$ 배이므로

$\angle ECF=\dfrac{1}{2}\times\angle EOF$

$=\dfrac{1}{2}\times 90°=45°$ (참)

ㄴ. $\angle AOE=60°$이므로

두 직선 CE와 AB의 교점을 S라 하면

$\overline{ES}=6\times\sin 60°$

$=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=3\sqrt{3}$

$\overline{CE}=2\times\overline{ES}$

$=6\sqrt{3}$ (참)

ㄷ. 직선 EO가 원과 만나는 점을 G라 하면

$\angle CED$, $\angle DEG$는 각각 호 CD, 호 DG의 원주각이므로

$\angle CED=\angle DEG=15°$

삼각형 OES에서 각의 이등분선의 성질에 의하여

$\overline{OP}:\overline{PS}=\overline{OE}:\overline{ES}$

$\overline{OE}=6$, $\overline{ES}=3\sqrt{3}$ 이므로

$\overline{OP}:\overline{PS}=2:\sqrt{3}$

$\overline{PS}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{OP}$

$\overline{OS}=6\times\cos 60°$

$=6\times\dfrac{1}{2}$

$=3$

$\overline{OP}+\overline{PS}=\overline{OS}=3$ 이므로

$\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\overline{OP}=\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)\times\overline{OP}=3$

$\overline{OP}=3\times\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}=12-6\sqrt{3}$

ㄱ에서 $\angle ECF=45°$

$\overline{SQ}=\overline{SC}=3\sqrt{3}$

$\overline{QO}=\overline{QS}-\overline{OS}=3\sqrt{3}-3$

따라서

$\overline{PQ}=\overline{OP}+\overline{QO}$

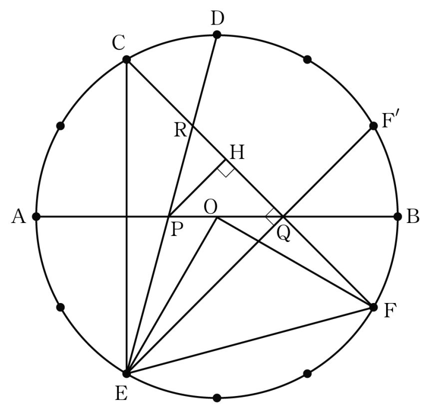
$=(12-6\sqrt{3})+(3\sqrt{3}-3)$

$=9-3\sqrt{3}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

ㄷ. $\overline{DE}$, $\overline{CF}$의 교점을 R라 하고, $\widehat{BF}=\widehat{BF'}$이 되도록 점 F′을 잡는다. 그러면 $\overline{EF'}$과 $\overline{AB}$의 교점은 점 Q이다.



$\angle REF=60°$, $\angle RFE=60°$ 이므로 $\triangle REF$는 정삼각형이 되어 $\angle ERQ=60°$ 이다.

$\angle DEF'=30°$ 이므로 $\angle RQE=90°$ 이다.

따라서 $\overline{QR}=\overline{QF}$

원의 중심을 O라 하면 $\triangle OEF$는 $\overline{OE}=\overline{OF}=6$인 직각이등변삼각형이므로 $\overline{EF}=6\sqrt{2}$ 이다. $\triangle REF$가 정삼각형이므로 $\overline{QR}=\dfrac{1}{2}\times\overline{RF}=3\sqrt{2}$ 이다.

$\angle CQA=\angle EQA$ 이므로

$\angle RQP=45°$ 이고 $\angle PRQ=60°$

점 P에서 $\overline{QR}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{PQ}=x$라 하면

$\overline{QH}=\overline{PQ}\times\cos 45°=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$

$\overline{PH}=\overline{PQ}\times\sin 45°=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$

$\overline{PH}=\overline{RH}\times\tan 60°=\sqrt{3}\times\overline{RH}$ 이므로

$\overline{RH}=\dfrac{x}{\sqrt{6}}$ 이다.

$\overline{QH}+\overline{RH}=\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{x}{\sqrt{6}}=3\sqrt{2}$ 이므로

이 식의 양변에 $\sqrt{6}$ 을 곱하여 정리하면

$(\sqrt{3}+1)x=6\sqrt{3}$

$x=\dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

$=\dfrac{6\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$=\dfrac{6\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2}$

$=3\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$

$=9-3\sqrt{3}$

22. [출제의도] 삼각비의 값을 계산한다.

$6\times\sin 30°=6\times\dfrac{1}{2}=3$

23. [출제의도] 이차함수의 최댓값과 최솟값을 이해하여 주어진 값을 구한다.

이차함수 $y=x^2+2x+3+4k$에서 식을 변형하면

$y=x^2+2x+3+4k$

$= (x^2+2x+1)-1+3+4k$

$= (x+1)^2-1+3+4k$

$= (x+1)^2+2+4k$

따라서 이차함수 $y=x^2+2x+3+4k$의 최솟값은

$x=-1$일 때 $2+4k$이다.

최솟값이 30이므로

$2+4k=30$

$4k=28$

따라서 구하는 값은

$k=7$

24. [출제의도] 함수의 그래프의 성질과 선분의 길이를 이용하여 주어진 값을 구한다.

점 B는 함수 $y=-\frac{a}{x}$의 그래프 위의 점이므로 점 B의 x좌표와 y좌표는 방정식 $y=-\frac{a}{x}$를 만족시킨다.

조건에서 점 $\mathrm{A}(3,4)$를 지나고 y축에 평행한 직선이 함수 $y=-\frac{a}{x}$의 그래프와 만나는 점이 B이므로 점 B의 x좌표는 3이다.

$x=3$을 $y=-\frac{a}{x}$에 대입하면

점 B의 y좌표는 $y=-\frac{a}{3}$

따라서 선분 AB의 길이는

$4-\left(-\frac{a}{3}\right)=4+\frac{a}{3}$

조건에서 $\overline{\mathrm{AB}}=8$이므로

$4+\frac{a}{3}=8,\ \frac{a}{3}=4$

따라서 구하는 값은 $a=12$

25. [출제의도] 주어진 상황을 이해하고 이에 맞는 경우의 수를 구한다.

문화 체험의 날 오전에 가능한 체험은 미술관 관람, 고궁 관람, 야구 경기 관람, 박물관 견학의 4가지이다.

한편 오후에 가능한 체험은 전통 시장 방문, 뮤지컬 관람, 축구 경기 관람, 박물관 견학의 4가지이다.

오전과 오후에 각각 한 가지씩 선택하여 서로 다른 2가지를 체험하는 방법의 수는

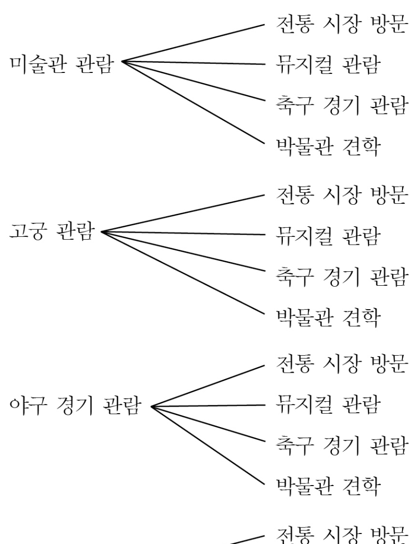
$4\times4=16$

그런데 오전과 오후에 모두 박물관 견학을 선택하는 경우는 제외하여야 하므로 구하는 방법의 수는

$16-1=15$

[다른 풀이]

그림을 이용하여 체험을 하는 방법의 수를 구하면 다음과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는 15이다.

26. [출제의도] 확률의 성질을 이용하여 주어진 사건의 확률을 구한다.

A가 이기는 경우는 다음의 두 가지 경우이다.

(ⅰ) A와 B가 동시에 자신의 주머니에서 흰 공 한 개를 꺼내는 경우

A가 자신의 주머니에서 흰 공 한 개를 꺼낼 확률은 $\frac{9}{10}$이고, B가 자신의 주머니에서 흰 공 한 개를 꺼낼 확률은 $\frac{4}{5}$이다.

따라서 A와 B가 동시에 자신의 주머니에서 흰 공 한 개를 꺼낼 확률은

$\frac{9}{10}\times\frac{4}{5}=\frac{18}{25}$

(ⅱ) A와 B가 동시에 자신의 주머니에서 검은 공 한 개를 꺼내는 경우

A가 자신의 주머니에서 검은 공 한 개를 꺼낼 확률은 $\frac{1}{10}$이고, B가 자신의 주머니에서 검은 공 한 개를 꺼낼 확률은 $\frac{1}{5}$이다.

따라서 A와 B가 동시에 자신의 주머니에서 검은 공 한 개를 꺼낼 확률은

$\frac{1}{10}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{50}$

(ⅰ)의 경우와 (ⅱ)의 경우는 동시에 일어나지 않으므로 구하는 확률은

$\frac{18}{25}+\frac{1}{50}=\frac{37}{50}$

따라서

$p=50,\ q=37$이므로 $p+q=87$

27. [출제의도] 제곱근의 성질을 이용하여 직육면체의 부피가 자연수가 되는 실수의 값을 구한다.

세 모서리의 길이가 1, a, $\sqrt{2}$인 직육면체의 부피는

$1\times a\times\sqrt{2}=a\sqrt{2}$

주어진 조건에서 직육면체의 부피가 자연수가 되어야 하므로

$a\sqrt{2}=n$ (단, n은 자연수)

이라 놓을 수 있다.

$a=\frac{n}{\sqrt{2}}=\frac{n\sqrt{2}}{2}$

주어진 조건에서 a는 10 이하의 실수가 되어야 하므로

$\frac{n\sqrt{2}}{2}\le10$

$n\sqrt{2}\le20$

$n\le\frac{20}{\sqrt{2}}$

이때 $\frac{20}{\sqrt{2}}=\frac{20\sqrt{2}}{2}=10\sqrt{2}$이므로

$n\le10\sqrt{2}$

위 부등식을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하여 보자.

$(10\sqrt{2})^2=200$이고

$14^2=196,\ 15^2=225$

이므로

$14<10\sqrt{2}<15$

가 성립함을 알 수 있다.

따라서 $n\le10\sqrt{2}$를 만족시키는 자연수 n은 1부터 14까지이므로 구하는 실수 a의 개수는 14이다.

28. [출제의도] 연립일차부등식을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

상자의 개수를 x라 하자.

주어진 조건에서 한 상자에 초콜릿을 10개씩 담으면 초콜릿이 42개 남게 되므로 초콜릿의 개수는

$10x+42$이다.

또, 주어진 조건에서 한 상자에 초콜릿을 13개씩 담으면 빈 상자가 3개 남고, 한 상자는 13개가 되지 않으므로 $x-4$개의 상자에는 초콜릿이 13개씩 담겨 있고 아직 상자에 들어가지 않은 초콜릿이 남아 있다.

따라서 다음과 같은 부등식이 성립한다.

$13(x-4)<10x+42$

위 부등식을 풀면

$13x-52<10x+42$

$13x-10x<42+52$

$3x<94$

$x<\frac{94}{3}$ …… ㉠

또, 주어진 조건에서 $x-3$개의 상자에 초콜릿을 13개씩 담으면 한 개의 상자는 13개가 되지 않으므로 다음과 같은 부등식이 성립한다.

$10x+42<13(x-3)$

$10x+42<13x-39$

$13x-10x>42+39$

$3x>81$

$x>\frac{81}{3}$

$x>27$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

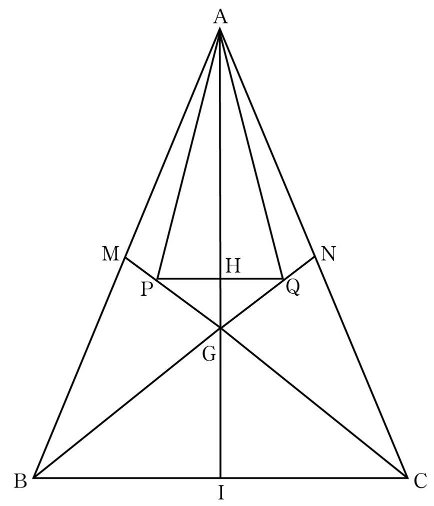
$27<x<\frac{94}{3}$

이때 $31<\frac{94}{3}<32$이다.

따라서

$M=31,\ m=28$이므로 $M+m=59$

29. [출제의도] 삼각형의 무게중심과 닮음을 이용하여 주어진 삼각형의 넓이를 구한다.



선분 AB의 중점을 M이라 하면 무게중심의 성질에 의해 네 점 C, G, P, M은 한 직선 위에 있다.

마찬가지로 선분 AC의 중점을 N이라 하면 무게중심의 성질에 의해 네 점 B, G, Q, N도 한 직선 위에 있다.

두 점 M, N은 각각 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점이므로

$\overline{\mathrm{BC}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{MN}}$이다.

삼각형 MGN에서

$\overline{\mathrm{GP}}:\overline{\mathrm{PM}}=\overline{\mathrm{GQ}}:\overline{\mathrm{QN}}$

이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{MN}}$이고 $\overline{\mathrm{PQ}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{BC}}$이다.

그러므로 두 삼각형 GQP, GBC는 닮음이다.

이제 닮음비를 구해 보자.

점 P가 삼각형 ABG의 무게중심이므로

$\overline{\mathrm{GP}}:\overline{\mathrm{PM}}=2:1$

$\overline{\mathrm{PM}}=k$라 하면 $\overline{\mathrm{GP}}=2k$, $\overline{\mathrm{GM}}=3k$

점 G가 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overline{\mathrm{CG}}:\overline{\mathrm{GM}}=2:1$, $\overline{\mathrm{GM}}=3k$에서 $\overline{\mathrm{CG}}=6k$

따라서

$\overline{\mathrm{CG}}:\overline{\mathrm{GP}}=6k:2k=3:1$

이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{3}\times\overline{\mathrm{BC}}$

선분 PQ의 중점을 H라 하고 선분 BC의 중점을 I라 하면 $\overline{\mathrm{GI}}=\frac{1}{3}\times\overline{\mathrm{AI}}$

두 삼각형 GQP, GBC는 닮음이므로

$\overline{GH}=\frac{1}{3}\times\overline{GI}$ 에서 $\overline{GH}=\frac{1}{9}\times\overline{AI}$ 이므로

$\overline{HI}=\overline{HG}+\overline{GI}$

$=\frac{1}{9}\times\overline{AI}+\frac{1}{3}\times\overline{AI}$

$=\frac{4}{9}\times\overline{AI}$

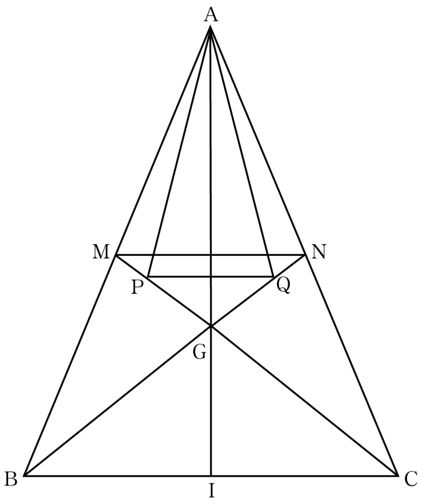
따라서 $\overline{AH}=\frac{5}{9}\times\overline{AI}$

즉, 삼각형 APQ는 삼각형 ABC에 비해 밑변은 $\frac{1}{3}$ 배, 높이는 $\frac{5}{9}$ 배이므로 넓이는 $\frac{5}{27}$ 배이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 APQ의 넓이의 $\frac{27}{5}$ 배이므로 구하는 넓이는

$30\times\frac{27}{5}=162$

[다른 풀이]



변 AB의 중점을 M이라 하면

점 P, G는 중선 CM 위의 점이고

$\overline{CG}:\overline{GM}=2:1$, $\overline{GP}:\overline{PM}=2:1$ 이다.

따라서 $\overline{CG}:\overline{GP}:\overline{PM}=6:2:1$

마찬가지로 변 AC의 중점을 N이라 하면

$\overline{BG}:\overline{GQ}:\overline{QN}=6:2:1$

$\triangle GQP$의 넓이를 a라 하자.

$\triangle GQP$와 $\triangle GNM$은 닮음이고 닮음비가 $2:3$이므로

$\triangle GNM=\left(\frac{3}{2}\right)^2 a=\frac{9}{4}a$

$\triangle GNM$과 $\triangle GBC$는 닮음이고 닮음비가 $1:2$이므로

$\triangle GBC=2^2\times\frac{9}{4}a=9a$

$\triangle MBC$에서 $\overline{CG}:\overline{GM}=2:1$ 이므로

$\triangle BGM=\frac{1}{2}\times\triangle GBC=\frac{9}{2}a$, $\triangle AMG=\frac{9}{2}a$

$\triangle AMG$에서 $\overline{GP}:\overline{PM}=2:1$ 이므로

$\triangle APG=\frac{2}{3}\times\triangle AMG=3a$

$\square APGQ=\triangle APG+\triangle AGQ$

$=6a$

$\triangle APQ=\square APGQ-\triangle GQP$

$=6a-a$

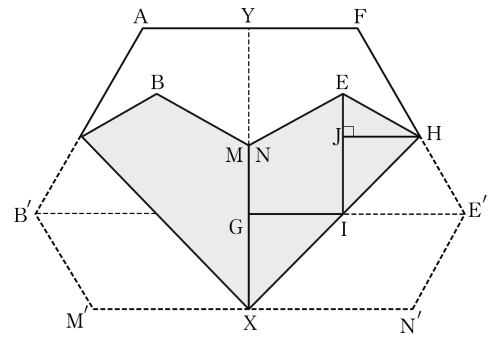
$=5a$

$=30$

따라서 $a=6$이므로

$\triangle ABC=3\times\triangle GBC=27a=162$

30. [출제의도] 도형의 성질과 삼각비를 이용하여 실생활 문제를 해결한다.



그림에서 $\overline{B'E'}$과 $\overline{XH}$가 만나는 점을 I라 하면

$\overline{NX}\,/\!/\,\overline{EI}$ 이므로 사각형 NXIE는 사다리꼴이다.

$\overline{B'E'}\,/\!/\,\overline{M'N'}$ 이므로

$\angle GXI=\angle GIX=45°$

$\triangle GXI$는 $\overline{GX}=\overline{GI}$인 이등변삼각형이다.

$2\overline{GX}=\overline{GY}$, $\overline{GY}=2\sqrt{3}$ 이므로

$\overline{GX}=\overline{GI}=\sqrt{3}$

$\overline{IE}=\overline{IE'}=\overline{GE'}-\overline{GI}=4-\sqrt{3}$

$\overline{M'N'}=\frac{1}{2}\times\left(\overline{B'E'}+\overline{AF}\right)$ 이므로

$\overline{M'N'}=6$ 이다.

$\overline{NX}=\overline{N'X}=\frac{1}{2}\overline{M'N'}=3$ 이므로

사다리꼴 NXIE의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\{3+(4-\sqrt{3})\}\times\sqrt{3}=\frac{-3+7\sqrt{3}}{2}$ …… ㉠

$\angle EIE'=90°$ 이므로 $\angle EIH=45°$ 이다.

점 H에서 $\overline{EI}$에 내린 수선의 발을 J라 하면

$\angle HE'I=\angle HEJ=60°$

$\overline{HJ}=h$라 하면

$\overline{EJ}=\frac{h}{\tan 60°}$, $\overline{JI}=\frac{h}{\tan 45°}$

$\overline{EI}=\overline{EJ}+\overline{JI}=4-\sqrt{3}$ 이므로

$h\times\left(\frac{1}{\tan 60°}+\frac{1}{\tan 45°}\right)=4-\sqrt{3}$

$h=\frac{15-7\sqrt{3}}{2}$

삼각형 EIH의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(4-\sqrt{3})\times\left(\frac{15-7\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{81-43\sqrt{3}}{4}$ …… ㉡

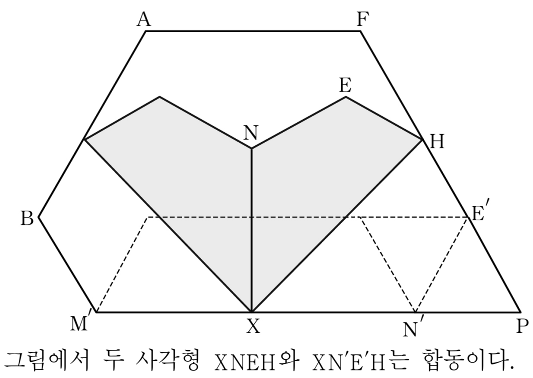
㉠, ㉡에서 구하는 넓이는

$2\times\left\{\left(\frac{-3+7\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{81-43\sqrt{3}}{4}\right)\right\}=\frac{75}{2}-\frac{29}{2}\sqrt{3}$

$a=\frac{75}{2}$, $b=-\frac{29}{2}$ 이므로

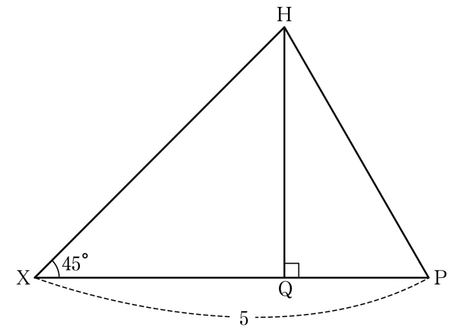
$a+b=\frac{75}{2}+\left(-\frac{29}{2}\right)=23$

[다른 풀이]



그림에서 두 사각형 XNEH와 XN′E′H는 합동이다.

$\overline{FE'}$의 연장선과 $\overline{M'N'}$의 연장선이 만나는 점을 P라 하면 삼각형 E′N′P는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이고 그 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$ 이다.



점 H에서 $\overline{XP}$에 내린 수선의 발을 Q라 하고 $\overline{QP}=x$라 하자.

직각삼각형 HQP에서

$\angle HPQ=60°$ 이므로 $\overline{HQ}=\sqrt{3}x$

직각삼각형 HXQ에서 $\angle HXQ=45°$ 이므로

$\overline{XQ}=\overline{HQ}=\sqrt{3}x$

$\overline{XP}=\overline{XQ}+\overline{QP}=x+\sqrt{3}x=5$ 이므로

$x=\frac{5}{\sqrt{3}+1}=\frac{5(\sqrt{3}-1)}{2}$

삼각형 HXP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{XP}\times\overline{HQ}=\frac{1}{2}\times5\times\sqrt{3}x$

$=\frac{5\sqrt{3}}{2}x$

$=\frac{5\sqrt{3}}{2}\times\frac{5(\sqrt{3}-1)}{2}$

$=\frac{75-25\sqrt{3}}{4}$

사각형 XN′E′H의 넓이는 삼각형 HXP의 넓이에서 삼각형 E′N′P의 넓이를 뺀 것과 같으므로

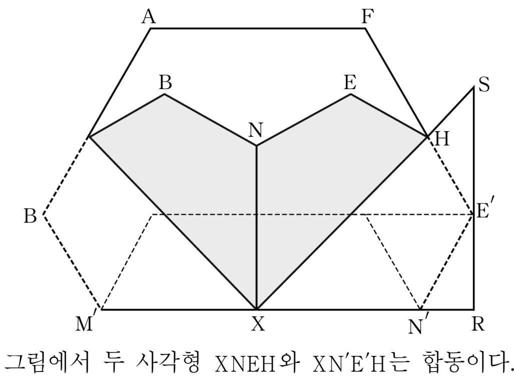
$\frac{75-25\sqrt{3}}{4}-\sqrt{3}=\frac{75-29\sqrt{3}}{4}$

그러므로 구하는 도형의 넓이는

$2\times\frac{75-29\sqrt{3}}{4}=\frac{75}{2}-\frac{29}{2}\sqrt{3}$

따라서 $a=\frac{75}{2}$, $b=-\frac{29}{2}$ 이므로 $a+b=23$

[다른 풀이]



그림에서 두 사각형 XNEH와 XN′E′H는 합동이다.

점 E′을 지나고 직선 XN에 평행한 직선이 $\overline{XN'}$의 연장선과 만나는 점을 R, $\overline{XH}$의 연장선과 만나는 점을 S라 하자.

직각삼각형 XRS에서 $\angle SXR=45°$, $\overline{XR}=4$ 이므로

삼각형 XRS의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times4=8$

직각삼각형 N′RE′에서

$\overline{N'R}=\overline{XR}-\overline{XN'}=4-3=1$, $\overline{RE'}=\sqrt{3}$ 이므로

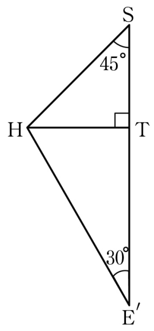
삼각형 N′RE′의 넓이는

$\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

삼각형 HE′S에서 $\angle HSE'=45°$, $\angle HE'S=30°$이므로

$\angle SHE'=105°$ 이다.

삼각형 HE′S를 그리면 다음과 같다.



점 H에서 변 SE′에 내린 수선의 발을 T라 하고 $\overline{ST}=x$라 하자.

직각삼각형 SHT에서 $\angle HST=45°$이므로

$\overline{HT}=x$

직각삼각형 HE′T에서 $\angle HE'T=30°$이므로

$\overline{E'T}=\sqrt{3}x$

한편 $\overline{SE'}=\overline{SR}-\overline{RE'}=4-\sqrt{3}$ 이고

$\overline{SE'}=\overline{ST}+\overline{TE'}=x+\sqrt{3}x$ 이므로

$x+\sqrt{3}x=4-\sqrt{3}$

$x=\frac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\frac{5\sqrt{3}-7}{2}$

삼각형 HE′S의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{SE'}\times\overline{HT}=\frac{1}{2}\times(4-\sqrt{3})\times\frac{5\sqrt{3}-7}{2}$$
$$=\frac{27\sqrt{3}-43}{4}$$

사각형 XN′E′H의 넓이는 삼각형 XRS의 넓이에서 두 삼각형 N′RE′과 HE′S의 넓이를 뺀 것과 같다.

XN′E′H의 넓이는

$$8-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{27\sqrt{3}-43}{4}\right)=\frac{75-29\sqrt{3}}{4}$$

그러므로 구하는 도형의 넓이는

$$2\times\frac{75-29\sqrt{3}}{4}=\frac{75}{2}-\frac{29}{2}\sqrt{3}$$

따라서 $a=\frac{75}{2}$, $b=-\frac{29}{2}$ 이므로 $a+b=23$