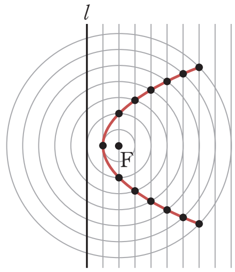
I 이차곡선

1 포물선

01 포물선 11 ~ 15쪽

준비하기 (1) 10 (2) 10

생각 열기 ❶, ❷, ❸

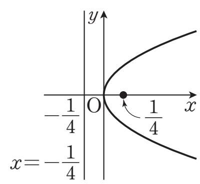


생각톡톡 $(0,\ 0)$, $y=0$

문제 1 (1) $y^2=20x$ (2) $y^2=-12x$

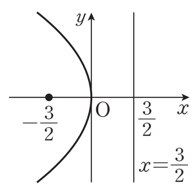
문제 2 (1) 초점의 좌표: $\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$

준선의 방정식: $x=-\frac{1}{4}$



(2) 초점의 좌표: $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$

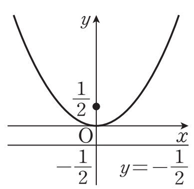
준선의 방정식: $x=\frac{3}{2}$



문제 3 (1) $x^2=4y$ (2) $x^2=-16y$

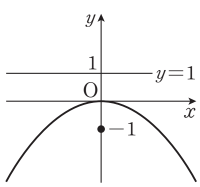
문제 4 (1) 초점의 좌표: $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$

준선의 방정식: $y=-\frac{1}{2}$



(2) 초점의 좌표: $(0,\ -1)$

준선의 방정식: $y=1$

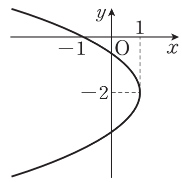


함께하기 ❶ $(y-n)^2=4p(x-m)$

❷

	포물선 C	포물선 C'
꼭짓점의 좌표	$(0,\ 0)$	$(m,\ n)$
초점의 좌표	$(p,\ 0)$	$(p+m,\ n)$
준선의 방정식	$x=-p$	$x=-p+m$

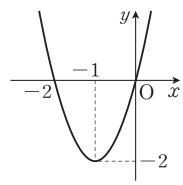
문제 5 (1)



초점의 좌표: $\left(\frac{1}{2},\ -2\right)$

준선의 방정식: $x=\frac{3}{2}$

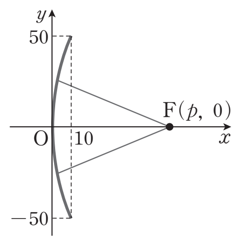
(2)



초점의 좌표: $\left(-1,\ -\frac{15}{8}\right)$

준선의 방정식: $y=-\frac{17}{8}$

생각 넓히기 ❶ 오른쪽 그림과 같이 위성 방송 안테나의 단면을 그 꼭짓점이 좌표평면 위의 원점에 오도록 놓자.



이때 수신기의 위치를 $\mathrm{F}(p,\ 0)$이라 하면 안테나의 단면이 나타내는 포물선의 방정식은

$$y^2=4px$$

로 놓을 수 있다.

포물선이 점 $(10,\ 50)$을 지나므로

$$50^2=4p\times 10,\quad p=\frac{125}{2}$$

따라서 수신기와 포물선의 꼭짓점 사이의 거리는

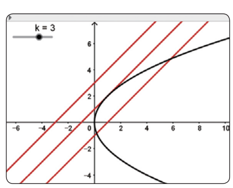
$$\frac{125}{2}\ \mathrm{cm}$$

❷ 예시 손전등의 반사경의 단면은 포물선이고, 그 초점에 전구가 위치해 있다.

02 포물선과 직선 16 ~ 19쪽

준비하기 서로 다른 두 점에서 만난다.

생각 열기



$k<1$이면	2
$k=1$이면	1
$k>1$이면	0

문제 1 (1) 접한다. (2) 만나지 않는다.

함께하기 $2(mn-2p)$, $4(mn-2p)^2$, $\frac{p}{m}$, $\frac{p}{m}$

생각톡톡 포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 0인 직선은 존재하지 않는다.

문제 2 (1) $y=-2x-2$ (2) $y=3x-\frac{2}{3}$

문제 3 (1) $y=-x-2$ (2) $y=-\frac{1}{2}x+1$

문제 4 $y=x-2$, $y=-2x+1$

생각 넓히기 ❶ 포물선 $x^2=4py$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 포물선 C의 방정식은 $y^2=4px$
또, 점 $P(x_1, y_1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 P'의 좌표는 (y_1, x_1)

❷ 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $P'(y_1, x_1)$에서의 접선의 방정식은 $x_1y=2p(x+y_1)$

❸ 직선 $x_1y=2p(x+y_1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $x_1x=2p(y+y_1)$

탐구 & 융합 20쪽

접선 TQ에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{y_1}{2p}$ $(p>0)$

이 직선이 점 $P(x_1, y_1)$을 지나므로 직선의 방정식은

$$y-y_1=-\frac{y_1}{2p}(x-x_1) \quad \cdots\cdots ①$$

$y=0$을 ①에 대입하여 정리하면 $x=x_1+2p$

에서 $S(x_1+2p, 0)$

이때

$$\overline{TF}=|p-(-x_1)|=x_1+p$$
$$\overline{FS}=|x_1+2p-p|=x_1+p$$

따라서 $\overline{TF}=\overline{FS}$

Ⅰ-1 중단원 마무리하기 21~24쪽

01 (1) $y^2=16x$ (2) $x^2=-2y$

02 (1) 초점의 좌표: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, 준선의 방정식: $x=-\frac{3}{2}$
(2) 초점의 좌표: $(-1, -1)$, 준선의 방정식: $y=5$

03 $k<\frac{1}{8}$이면 2, $k=\frac{1}{8}$이면 1, $k>\frac{1}{8}$이면 0

04 (1) $y=\frac{1}{2}x+2$ (2) $y=-x+3$

05 -8

06 3

07 해결 과정 주어진 포물선의 방정식을 변형하면
$(y-2)^2=8(x+2)$
이 포물선은 포물선 $y^2=8x$를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다. ▶ 40 %
포물선 $y^2=8x$의
초점의 좌표는 $(2, 0)$
준선의 방정식은 $x=-2$ ▶ 20 %
이므로, 구하는 포물선의
초점의 좌표는 $(0, 2)$
준선의 방정식은 $x=-4$ ▶ 30 %
답 구하기 따라서 $a=0$, $b=2$, $c=-4$이므로
$a+b+c=-2$ ▶ 10 %

08 $y=3$

09 8

10 2

11 $y=x+3$

12 $P(a^2, 2a)$라 하면 준선 l의 방정식은 $x=-1$이므로
$H(-1, 2a)$
점 P에서의 접선의 방정식이 $2ay=2(x+a^2)$이므로
$Q(-a^2, 0)$
이때 $F(1, 0)$이므로
$\overline{FQ}=|1-(-a^2)|=a^2+1$
또, 포물선의 정의에 의하여
$\overline{PF}=\overline{PH}=|a^2-(-1)|=a^2+1$
한편, $\overline{HQ}$의 길이는

$$\overline{HQ}=\sqrt{(-a^2+1)^2+(-2a)^2}$$
$$=\sqrt{a^4+2a^2+1}$$
$$=\sqrt{(a^2+1)^2}=a^2+1$$

따라서 $\overline{PF}=\overline{PH}=\overline{FQ}=\overline{HQ}$이므로 □FPHQ는 마름모이다.

13 좌표평면에서 포물선의 꼭짓점 O를 원점으로 하고, 초점 F의 좌표를 $(3, 0)$이라 하자.
포물선의 방정식 $y^2=4px$에서 $p=3$이므로 주어진 포

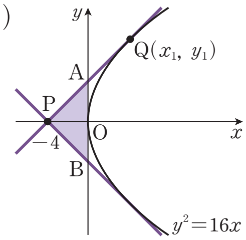
물선의 방정식은 $y^2=12x$이다.
또, 점 A의 y좌표는 8이므로 점 A의 좌표를 $(a,\ 8)$이라 하면

$8^2=12a$에서 $\quad a=\frac{16}{3}$

따라서 반사경의 깊이는 $\quad \overline{\mathrm{OC}}=\frac{16}{3}$ cm

14 해결 과정 접점을 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$이라 하면 접선의 방정식은

$$y_1y=8(x+x_1)$$



이 직선이 점 $(-4,\ 0)$을 지나므로 $0=8(-4+x_1)$에서

$$x_1=4 \qquad \cdots\cdots ①$$

또, 점 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$이 포물선 위의 점이므로

$$y_1{}^2=16x_1 \qquad \cdots\cdots ②$$ ▶ 30 %

①, ②에서 $\begin{cases} x_1=4 \\ y_1=8 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x_1=4 \\ y_1=-8 \end{cases}$ ▶ 30 %

이므로 접선의 방정식은

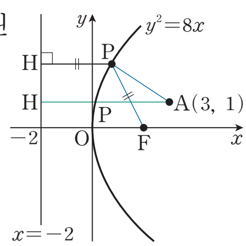
$$y=x+4,\quad y=-x-4$$ ▶ 20 %

답 구하기 두 접선과 y축의 교점을 차례대로 A, B라 하면 $\quad \mathrm{A}(0,\ 4),\quad \mathrm{B}(0,\ -4)$
따라서 구하는 $\triangle\mathrm{PAB}$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times8\times4=16$$ ▶ 20 %

15 점 P에서 준선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$이므로

$$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PH}}$$



세 점 A, P, H가 일직선 위에 있을 때, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PF}}$가 최소이다.
따라서 구하는 최솟값은

$$|3-(-2)|=5$$

16 포물선 $y^2=12x$에 접하고 기울기가 $m\ (m\neq0)$인 직선의 방정식은 $\quad y=mx+\frac{3}{m}$

이 직선이 점 $(a,\ b)$를 지나므로 $\quad b=ma+\frac{3}{m}$

위의 등식의 양변에 m을 곱하여 정리하면

$$am^2-bm+3=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

두 접선이 서로 수직이므로 m에 대한 이차방정식 ①의 두 실근의 곱은 -1이다.

즉, $\frac{3}{a}=-1$에서 $\quad a=-3$

점 $(-3,\ b)$는 직선 $x+y=7$ 위의 점이므로
$-3+b=7$에서 $\quad b=10$
따라서 $\quad a^2+b^2=(-3)^2+10^2=109$

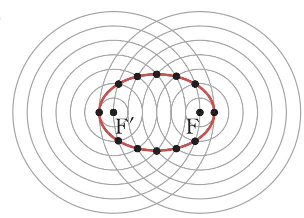
2 타원

01 타원 26~30쪽

준비하기 중심의 좌표: $(-1,\ 2)$, 반지름의 길이: 2

생각 열기 ❶ 8

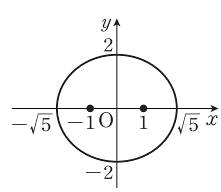
❷, ❸



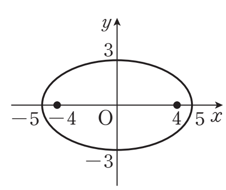
문제 1 (1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ (2) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$

생각톡톡 a

문제 2 (1) 초점의 좌표:
$(1,\ 0),\ (-1,\ 0)$
장축의 길이: $2\sqrt{5}$
단축의 길이: 4



(2) 초점의 좌표:
$(4,\ 0),\ (-4,\ 0)$
장축의 길이: 10
단축의 길이: 6



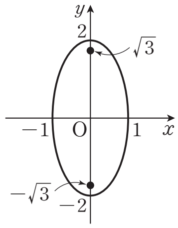
문제 3 (1) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{9}=1$ (2) $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$

문제 4 (1) 초점의 좌표:

$(0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})$

장축의 길이: 4

단축의 길이: 2

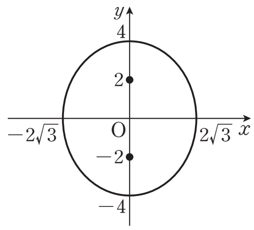


(2) 초점의 좌표:

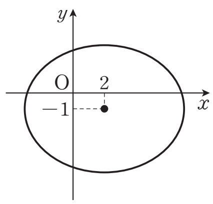
$(0, 2), (0, -2)$

장축의 길이: 8

단축의 길이: $4\sqrt{3}$



문제 5 (1)

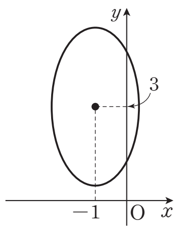


중심의 좌표: $(2, -1)$

초점의 좌표:

$(5, -1), (-1, -1)$

(2)



중심의 좌표: $(-1, 3)$

초점의 좌표:

$(-1, 5), (-1, 1)$

생각 넓히기 ❶ 장축의 길이는 $35.1+0.6=35.7(\mathrm{AU})$

❷ 중심에서 초점(태양)까지의 거리는

$$\frac{35.7}{2}-0.6=17.25(\mathrm{AU})$$

따라서 단축의 길이는

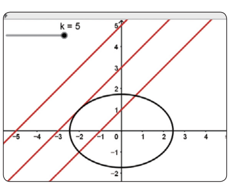
$$2\sqrt{17.85^2-17.25^2}=9.178\cdots$$

이므로 약 9.18 AU이다.

02 타원과 직선 31~35쪽

준비하기 서로 다른 두 점에서 만난다.

생각 열기



$-3<k<3$이면 2

$k=-3$ 또는 $k=3$이면 1

$k<-3$ 또는 $k>3$이면 0

문제 1 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다. (2) 접한다.

문제 2 (1) $m<-1$ 또는 $m>1$ (2) $m=-1$ 또는 $m=1$

(3) $-1<m<1$

함께하기 $2a^2mn$, $(2a^2mn)^2$, $\sqrt{a^2m^2+b^2}$, $\sqrt{a^2m^2+b^2}$

문제 3 (1) $y=x\pm5$ (2) $y=-2x\pm6$

문제 4 (1) $y=-\sqrt{2}x+5$ (2) $y=\frac{2}{3}x+4$

생각톡톡 2개

문제 5 $y=-3$, $2x+y=5$

생각 넓히기 ❶ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선

의 방정식은 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$

이 식에 $y=0$을 대입하면 $x=\frac{a^2}{x_1}$

즉, 점 Q의 x좌표는 $\frac{a^2}{x_1}$

❷ $\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{a^2}{|x_1|}$, $\overline{\mathrm{OH}}=|x_1|$이므로

$$\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{OQ}}=|x_1|\times\frac{a^2}{|x_1|}=a^2$$

따라서 $\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{OQ}}$의 값은 a^2으로 항상 일정하다.

❸ $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$에 $x=a$를 대입하면

$$y=\frac{(a-x_1)b^2}{ay_1}, \text{ 즉 } \mathrm{C}\left(a, \frac{(a-x_1)b^2}{ay_1}\right)$$

또, $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$에 $x=-a$를 대입하면

$$y=\frac{(a+x_1)b^2}{ay_1}, \text{ 즉 } \mathrm{D}\left(-a, \frac{(a+x_1)b^2}{ay_1}\right)$$

이때 $\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BD}}$를 구하면

$$\left|\frac{(a-x_1)b^2}{ay_1}\right|\times\left|\frac{(a+x_1)b^2}{ay_1}\right|=\left|\frac{(a^2-{x_1}^2)b^4}{a^2{y_1}^2}\right| \quad \cdots\cdots ①$$

$\frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2}=1$에서 $\frac{{y_1}^2}{b^2}=1-\frac{{x_1}^2}{a^2}=\frac{a^2-{x_1}^2}{a^2}$

이므로 $\frac{a^2-{x_1}^2}{a^2{y_1}^2}=\frac{1}{b^2}$

①에서 $\left|\frac{(a^2-{x_1}^2)b^4}{a^2{y_1}^2}\right|=\frac{1}{b^2}\times b^4=b^2$

따라서 $\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BD}}$의 값은 b^2으로 항상 일정하다.

공학적 도구 36쪽

점 D가 타원 위를 움직일 때, 반직선 DA와 대칭인 반직선은 항상 점 B를 지난다.

I-2 중단원 마무리하기 37~40쪽

01 (1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$ (2) $\frac{x^2}{21}+\frac{y^2}{25}=1$

02 (1) 초점의 좌표: $(3, 0)$, $(-3, 0)$
장축의 길이: 8, 단축의 길이: $2\sqrt{7}$
(2) 초점의 좌표: $(3, 2)$, $(3, -6)$
장축의 길이: 10, 단축의 길이: 6

03 $-2<k<2$이면 2
$k=-2$ 또는 $k=2$이면 1
$k<-2$ 또는 $k>2$이면 0

04 (1) $y=-2x\pm10$ (2) $y=x-4$

05 $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$ **06** $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{36}=1$

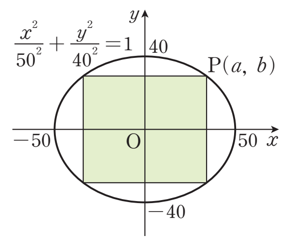
07 18 **08** ㄱ, ㄷ

09 해결 과정 $y=x+n$을 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$에 대입하여 정리하면 $9x^2+10nx+5n^2-20=0$
주어진 타원이 직선과 만나지 않으려면 이 이차방정식의 판별식 D_1이 $D_1<0$이어야 하므로
$$D_1=(10n)^2-4\times9\times(5n^2-20)$$
$$=-80n^2+720<0$$
따라서 $n<-3$ 또는 $n>3$ ...... ① ▶ 40 %
$y=3x+n$을 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$에 대입하여 정리하면
$$49x^2+30nx+5n^2-20=0$$
주어진 타원이 직선과 서로 다른 두 점에서 만나려면 이 이차방정식의 판별식 D_2가 $D_2>0$이어야 하므로
$$D_2=(30n)^2-4\times49\times(5n^2-20)$$
$$=-80n^2+3920>0$$
따라서 $-7<n<7$ ...... ② ▶ 40 %
답 구하기 ①, ②에서
$$-7<n<-3 \text{ 또는 } 3<n<7$$
즉, 구하는 정수 n은 -6, -5, -4, 4, 5, 6의 6개이다. ▶ 20 %

10 4 **11** 6

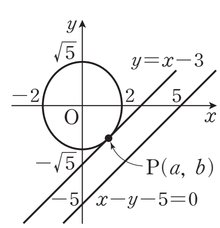
12 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 점 P에서의 접선 l의 방정식은 $\frac{ax}{9}+\frac{by}{4}=1$
$y=0$이면 $x=\frac{9}{a}$에서 $\mathrm{Q}\left(\frac{9}{a}, 0\right)$
접선 l의 기울기는 $-\frac{4a}{9b}$이므로 점 P를 지나고 접선 l에 수직인 직선의 방정식은 $y-b=\frac{9b}{4a}(x-a)$
$y=0$이면 $x=\frac{5}{9}a$에서 $\mathrm{R}\left(\frac{5}{9}a, 0\right)$
따라서 $\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{OR}}=\frac{9}{a}\times\frac{5}{9}a=5$
즉, $\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{OR}}$의 값은 점 P의 위치에 관계없이 5로 항상 일정하다.

13 $2a=100$에서 $a=50$
$2b=80$에서 $b=40$
따라서 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{50^2}+\frac{y^2}{40^2}=1$
오른쪽 그림과 같이 이 타원에 내접하는 직사각형의 한 꼭짓점을 $\mathrm{P}(a, b)\ (a>0, b>0)$라 하면



$$\frac{a^2}{50^2}+\frac{b^2}{40^2}=1 \quad \cdots\cdots ①$$
이때 직사각형의 넓이는 $4ab$
①에서 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$$1=\frac{a^2}{50^2}+\frac{b^2}{40^2}\ge2\sqrt{\frac{a^2}{50^2}\times\frac{b^2}{40^2}}=\frac{ab}{1000}$$
$\left(\text{단, 등호는 } \frac{b}{a}=\frac{4}{5}\text{일 때 성립한다.}\right)$
이므로 $ab\le1000$
따라서 $4ab\le4000$이므로 구하는 최대 넓이는
$4000\ \mathrm{m}^2$

14 문제 이해 타원 위의 점 P와 직선 $x-y-5=0$ 사이의 거리가 최소가 되려면 점 P는 기울기가 1인 접선의 접점이어야 한다. ▶ 20 %
해결 과정 타원
$$5x^2+4y^2=20$$
즉, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$에 접하는 기울기가 1인 직선의 방정식은



$$y=x\pm\sqrt{4\times1^2+5}$$
에서 $y=x\pm3$ ▶ 30 %

이때 점 P는 접선 $y=x-3$의 접점이다.

$y=x-3$을 $5x^2+4y^2=20$에 대입하여 정리하면

$$9x^2-24x+16=0$$

$$(3x-4)^2=0,\quad x=\frac{4}{3}$$ ▶ 30 %

답 구하기 점 P의 좌표는 $\left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right)$이므로

$$a=\frac{4}{3},\ b=-\frac{5}{3}$$

따라서 구하는 값은

$$9(a^2+b^2)=9\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{5}{3}\right)^2\right\}=41$$ ▶ 20 %

15 타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9}=1$에 접하는 기울기가 m인 직선의 방정식은 $\quad y=mx\pm\sqrt{3m^2+9}$

이 직선이 점 $\mathrm{P}(2, a)$를 지나므로

$$a=2m\pm\sqrt{3m^2+9}$$

에서 $\quad a-2m=\pm\sqrt{3m^2+9}$

위의 등식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$m^2-4am+a^2-9=0 \quad \cdots\cdots ①$$

두 접선이 서로 수직이므로 m에 대한 이차방정식 ①의 두 실근의 곱은 -1이다.

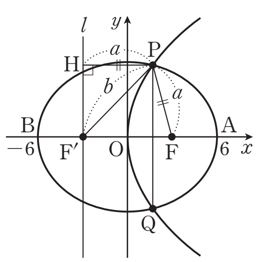
즉, $a^2-9=-1$에서 $\quad a^2=8$

따라서 $\quad a=\pm2\sqrt{2}$

16 $\overline{\mathrm{PF}}=a$, $\overline{\mathrm{PF'}}=b$라 하면 타원의 정의에 의하여

$$a+b=12 \quad \cdots\cdots ①$$

한편, 포물선의 준선 l은 점 F′을 지나고 x축에 수직인 직선이고, 점 P에서 l에 내린 수선의 발을 H라 하면, 포물선의 정의에 의하여



$$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PF}}=a$$

이때 직각삼각형 PHF′에서

$$\overline{\mathrm{HF'}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{6}$$

$\overline{\mathrm{PH}}^2+\overline{\mathrm{HF'}}^2=\overline{\mathrm{PF'}}^2$에서 $\quad a^2+(2\sqrt{6})^2=b^2$

즉, $\quad a^2+24=b^2 \quad \cdots\cdots ②$

①에서 $b=12-a$를 ②에 대입하면

$$a^2+24=(12-a)^2,\quad 24a=120$$

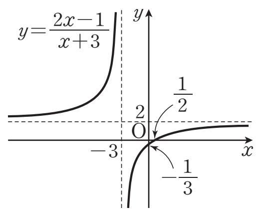
이므로 $\quad a=5,\ b=7$

따라서 $\quad \overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}=5\times7=35$

3 쌍곡선

01 쌍곡선 42~47쪽

준비하기

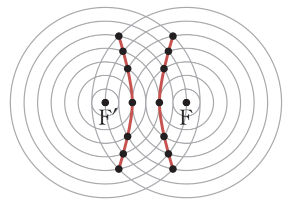


점근선: $x=-3$

$y=2$

생각 열기 ❶ 2

❷, ❸



문제 1 (1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$ (2) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$

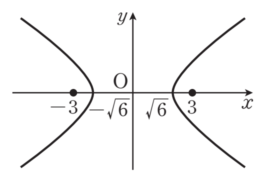
문제 2 (1) 초점의 좌표:

$(3, 0)$, $(-3, 0)$

꼭짓점의 좌표:

$(\sqrt{6}, 0)$, $(-\sqrt{6}, 0)$

주축의 길이: $2\sqrt{6}$



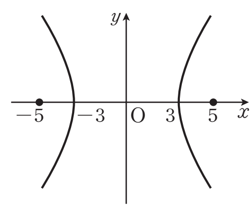
(2) 초점의 좌표:

$(5, 0)$, $(-5, 0)$

꼭짓점의 좌표:

$(3, 0)$, $(-3, 0)$

주축의 길이: 6



문제 3 (1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$ (2) $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{25}=-1$

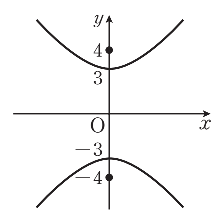
문제 4 (1) 초점의 좌표:

$(0, 4)$, $(0, -4)$

꼭짓점의 좌표:

$(0, 3)$, $(0, -3)$

주축의 길이: 6



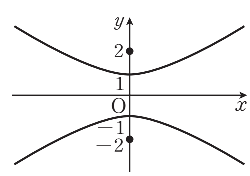
(2) 초점의 좌표:

$(0, 2)$, $(0, -2)$

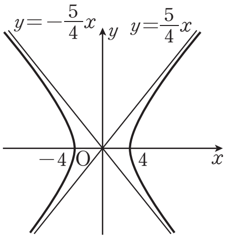
꼭짓점의 좌표:

$(0, 1)$, $(0, -1)$

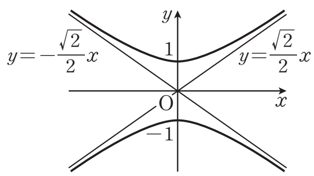
주축의 길이: 2



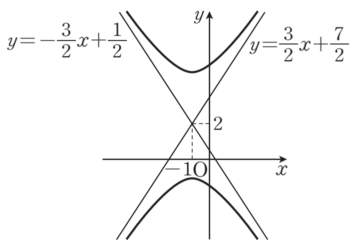
문제 5 (1) 점근선의 방정식: $y=\pm\frac{5}{4}x$



(2) 점근선의 방정식: $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$



문제 6 (1)

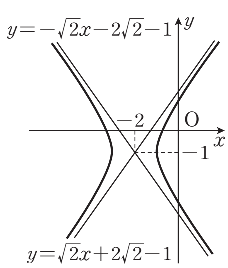


초점의 좌표: $(-1,\ 2+\sqrt{13}),\ (-1,\ 2-\sqrt{13})$

점근선의 방정식: $y=\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$

$y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$

(2)



초점의 좌표: $(\sqrt{3}-2,\ -1),\ (-\sqrt{3}-2,\ -1)$

점근선의 방정식: $y=\sqrt{2}x+2\sqrt{2}-1$

$y=-\sqrt{2}x-2\sqrt{2}-1$

생각 넓히기 ❶ 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식은

$$y=\frac{b}{a}x,\quad y=-\frac{b}{a}x$$

즉, $bx-ay=0,\ bx+ay=0$이다.

점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$과 직선 $bx-ay=0$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{AP}}=\frac{|bx_1-ay_1|}{\sqrt{b^2+(-a)^2}}=\frac{|bx_1-ay_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

또, 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$과 직선 $bx+ay=0$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{AQ}}=\frac{|bx_1+ay_1|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{|bx_1+ay_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

❷ $\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{AQ}}=\frac{|b^2x_1{}^2-a^2y_1{}^2|}{a^2+b^2}$ ...... ①

이때 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$은 쌍곡선 위의 점이므로

$\frac{x_1{}^2}{a^2}-\frac{y_1{}^2}{b^2}=1$, 즉 $b^2x_1{}^2-a^2y_1{}^2=a^2b^2$

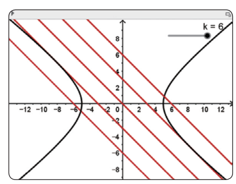
①에서 $\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{AQ}}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{AQ}}$의 값은 $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$으로 항상 일정하다.

02 쌍곡선과 직선 48~52쪽

준비하기 접한다.

생각 열기



$k<-3$ 또는 $k>3$이면	2
$k=-3$ 또는 $k=3$이면	1
$-3<k<3$이면	0

문제 1 (1) 만나지 않는다. (2) 접한다.

함께하기 $2a^2mn,\ (2a^2mn)^2,\ \sqrt{a^2m^2-b^2},\ \sqrt{a^2m^2-b^2}$

문제 2 (1) $y=-2x\pm\sqrt{7}$ (2) $y=3x\pm5$

문제 3 (1) $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$ (2) $y=-2x+1$

문제 4 $x-\sqrt{3}y=1,\quad x+\sqrt{3}y=1$

생각 넓히기 ❶ 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 쌍곡선 C의 방정식은 $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$

또, 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 P'의 좌표는 $(y_1,\ x_1)$

❷ 쌍곡선 $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}'(y_1,\ x_1)$에서의 접선의 방정식은 $\frac{y_1x}{b^2}-\frac{x_1y}{a^2}=1$

❸ 접선 $\frac{y_1x}{b^2}-\frac{x_1y}{a^2}=1$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$\frac{y_1y}{b^2}-\frac{x_1x}{a^2}=1,\ 즉\ \frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=-1$$

03 이차곡선 53 ~ 54쪽

준비하기 (1) 원 (2) 포물선 (3) 타원 (4) 쌍곡선

생각 열기 ① 원 ② 타원 ③ 포물선 ④ 쌍곡선

문제 1 (1) 원 (2) 포물선 (3) 타원 (4) 쌍곡선

문제 2 (1) 1 (2) 0

공학적 도구 $k<0$이면 쌍곡선

$k=0$이면 포물선

$0<k<1$이면 타원

$k=1$이면 원

$k>1$이면 타원

탐구 & 융합 55쪽

(1) $y^2=4x$의 양변을 x에 대하여 미분하면,

$2y\dfrac{dy}{dx}=4$에서 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{y}$ (단, $y\neq0$)

점 $(9, 6)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-6=\dfrac{1}{3}(x-9)$, 즉 $y=\dfrac{1}{3}x+3$

(2) $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면,

$\dfrac{2}{5}x-\dfrac{y}{2}\dfrac{dy}{dx}=0$에서 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4x}{5y}$ (단, $y\neq0$)

접점을 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 1이므로,

$\dfrac{4x_1}{5y_1}=1$에서 $4x_1=5y_1$ …… ①

또, 점 P가 쌍곡선 위의 점이므로

$\dfrac{x_1^2}{5}-\dfrac{y_1^2}{4}=1$ …… ②

①과 ②에서 $\begin{cases}x_1=5\\y_1=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x_1=-5\\y_1=-4\end{cases}$

점 $(5, 4)$를 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y-4=x-5$, 즉 $y=x-1$

또, 점 $(-5, -4)$를 지나고 기울기 1인 직선의 방정식은 $y+4=x+5$, 즉 $y=x+1$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=x+1$, $y=x-1$

Ⅰ-3 중단원 마무리하기 56~59쪽

01 (1) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ (2) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=-1$

02 (1) 초점의 좌표: $(2\sqrt{5}, 0)$, $(-2\sqrt{5}, 0)$

꼭짓점의 좌표: $(4, 0)$, $(-4, 0)$

주축의 길이: 8

(2) 초점의 좌표: $(-2, 8)$, $(-2, -6)$

꼭짓점의 좌표: $(-2, 4)$, $(-2, -2)$

주축의 길이: 6

03 (1) $y=\pm\dfrac{2}{3}x$ (2) $y=\pm3x$

04 $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$ 이면 0

$k=-\sqrt{2}$ 또는 $k=\sqrt{2}$ 이면 1

$k<-\sqrt{2}$ 또는 $k>\sqrt{2}$ 이면 2

05 (1) $y=-2x\pm4$ (2) $y=-x+2$

06 $x^2-\dfrac{y^2}{4}=-1$

07 41

08 $8\sqrt{2}$

09 $a<-4$

10 ㄱ, ㄴ

11 해결 과정 $4x^2-y^2=12$, 즉 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{12}=1$의 제1사분면 위의 점에서 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=mx-\sqrt{3m^2-12}$ ($m<-2$ 또는 $m>2$) ▶ 30 %

이 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면

$\mathrm{A}\left(\dfrac{\sqrt{3m^2-12}}{m}, 0\right)$

$\mathrm{B}(0, -\sqrt{3m^2-12})$ ▶ 20 %

답 구하기 삼각형 OAB의 넓이가 $\dfrac{9}{2}$이므로

$\dfrac{9}{2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3m^2-12}}{m}\times\sqrt{3m^2-12}$ ▶ 20 %

이 식을 정리하면

$m^2-3m-4=0$, $(m+1)(m-4)=0$

따라서 $m=-1$ 또는 $m=4$

그런데 $m<-2$ 또는 $m>2$이므로 $m=4$ ▶ 30 %

12 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

13 배의 위치를 $P(x, y)$라 하면 $|\overline{PA}-\overline{PB}|=60$이므로 점 P가 그리는 도형은 쌍곡선이다.
이때 두 점 $A(-50, 0)$, $B(50, 0)$은 쌍곡선의 두 초점이다.
$2a=60$에서 $\quad a=30$
$c=50$에서 $\quad b^2=c^2-a^2=50^2-30^2=40^2$
즉, 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{30^2}-\frac{y^2}{40^2}=1$$

위의 등식의 좌변에 $y=80$을 대입하면

$$\frac{x^2}{30^2}-\frac{80^2}{40^2}=1, \quad x^2=5\times30^2$$

이므로 $\quad x=\pm30\sqrt{5}$
따라서 제1사분면에 있는 배의 위치는 $\quad (30\sqrt{5}, 80)$

14 두 직선 $y=2x$와 $y=-2x+4$의 교점의 좌표는 $(1, 2)$이므로 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{(x-1)^2}{a^2}-\frac{(y-2)^2}{b^2}=1\,(a>0, b>0)$$

로 놓으면 $\frac{b}{a}=2$에서 $\quad b=2a$
쌍곡선이 점 $(3, 0)$을 지나므로

$$\frac{(3-1)^2}{a^2}-\frac{(0-2)^2}{(2a)^2}=1$$

$$\frac{4}{a^2}-\frac{1}{a^2}=1, \quad a^2=3$$

또, $b=2a$에서 $b^2=12$이므로 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x-1)^2}{3}-\frac{(y-2)^2}{12}=1$$

그런데 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{12}=1$의 두 초점의 좌표는 $(\sqrt{15}, 0)$, $(-\sqrt{15}, 0)$이므로 두 초점 사이의 거리는 $2\sqrt{15}$이고, 평행이동하여도 두 초점 사이의 거리는 변하지 않는다.
따라서 구하는 쌍곡선의 두 초점 사이의 거리는
$\quad 2\sqrt{15}$

15 $3x^2-4y^2=12$, 즉 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ 위의 점 $(4, 3)$에서의 접선 l의 방정식은

$$\frac{4x}{4}-\frac{3y}{3}=1, \text{ 즉 } x-y-1=0$$

또, $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$에서 $c=\sqrt{4+3}=\sqrt{7}$이므로 두 초점 F, F′의 좌표는 각각 $\quad (\sqrt{7}, 0)$, $(-\sqrt{7}, 0)$
두 초점 F, F′에서 직선 $x-y-1=0$에 이르는 거리를 각각 d_1, d_2라 하면

$$d_1=\frac{|\sqrt{7}-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{2}}$$

$$d_2=\frac{|-\sqrt{7}-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{2}}$$

따라서 구하는 값은 $\quad d_1d_2=\frac{\sqrt{7}^2-1^2}{\sqrt{2}^2}=\frac{6}{2}=3$

16 해결 과정 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$로 놓으면 $c=3$이므로 $a^2+b^2=c^2$에서

$a^2+b^2=9 \quad \cdots\cdots$ ① ▶ 20 %

점 $P(4, p)$에서의 접선의 방정식은 $\quad \frac{4x}{a^2}-\frac{py}{b^2}=1$
위의 등식의 좌변에 $y=0$을 대입하면

$x=\frac{a^2}{4}$, 즉 $Q\left(\frac{a^2}{4}, 0\right)$ ▶ 30 %

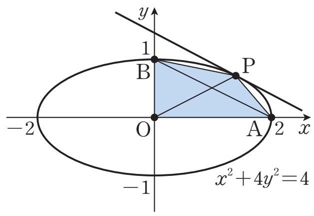
그런데 점 Q는 길이가 6인 선분 F′F를 2 : 1로 내분하므로 점 Q의 x좌표는 1이다.
$\frac{a^2}{4}=1$에서 $\quad a^2=4$
$a^2=4$를 ①에 대입하면 $b^2=5$이므로 쌍곡선의 방정식은 $\quad \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ ▶ 30 %

답 구하기 점 $P(4, p)$는 이 쌍곡선 위의 점이므로
$\frac{4^2}{4}-\frac{p^2}{5}=1$에서 $\quad \frac{p^2}{5}=3$
따라서 $\quad p^2=15$ ▶ 20 %

I 대단원 **평가하기** 60~63쪽

01 ④	**02** 8	**03** 18
04 20	**05** $\sqrt{17}$	**06** 3
07 ③	**08** -48	**09** $2\sqrt{3}$
10 7	**11** 10	

12 △OAB의 넓이는 일정하므로 △ABP의 넓이가 최대일 때, □OAPB의 넓이가 최대가 된다.



△ABP의 넓이가 최대인 경우는 높이가 최대일 때이므로 점 P는 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 접선의 접점이다.

타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$에 접하고 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2}x\pm\sqrt{4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1}$$

에서 $y=-\frac{1}{2}x\pm\sqrt{2}$

$y=-\frac{1}{2}x+\sqrt{2}$를 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$에 대입하여 정리하면

$$x^2-2\sqrt{2}x+2=0,\quad (x-\sqrt{2})^2=0$$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$이므로 □OAPB의 넓이의 최댓값은

$$\triangle OAP+\triangle OBP=\frac{1}{2}\times2\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{2}$$

13 ④

14 점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{x_1x}{9}+\frac{y_1y}{16}=1$이므로 $A\left(\frac{9}{x_1}, 0\right)$, $B\left(0, \frac{16}{y_1}\right)$

△OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{9}{x_1}\times\frac{16}{y_1}=\frac{72}{x_1y_1}$

그런데 점 P는 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점이므로

$$\frac{{x_1}^2}{9}+\frac{{y_1}^2}{16}=1$$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$1=\frac{{x_1}^2}{9}+\frac{{y_1}^2}{16}\ge2\sqrt{\frac{{x_1}^2}{9}\times\frac{{y_1}^2}{16}}=\frac{x_1y_1}{6}$$

이므로 $x_1y_1\le6$

$\left(\text{단, 등호는 }\frac{x_1}{3}=\frac{y_1}{4}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $\triangle OAB=\frac{72}{x_1y_1}\ge\frac{72}{6}=12$

즉, △OAB의 넓이의 최솟값은 12이다.

15 ②

16 6

17 10

18 2

19 60

20 $y=3x+k$를 $4x^2-y^2=4$에 대입하여 정리하면

$$5x^2+6kx+k^2+4=0$$

주어진 쌍곡선이 직선과 만나지 않으려면 이 이차방정식의 판별식 D가 $D<0$이어야 하므로

$$D=36k^2-20(k^2+4)=16k^2-80$$
$$=16(k+\sqrt{5})(k-\sqrt{5})<0$$

따라서 $-\sqrt{5}<k<\sqrt{5}$

즉, 구하는 정수 k는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

21 $2\sqrt{10}$

22 해결 과정 포물선 $y^2=18x$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은 $y_1y=9(x+x_1)$

이 접선이 점 $A(-2, 0)$을 지나므로

$$0=9(-2+x_1),\quad x_1=2$$

또, 점 (x_1, y_1)은 포물선 위의 점이므로 ${y_1}^2=18x_1$

이때 $x_1=2$이므로 ${y_1}^2=36$, $y_1=\pm6$

따라서 포물선과 접선이 만나는 두 점 B, C의 좌표를 각각 $(2, 6)$, $(2, -6)$으로 놓을 수 있다. ▶ 40 %

$y^2=18x=4\times\frac{9}{2}\times x$에서 포물선의 초점 D의 좌표는

$\left(\frac{9}{2}, 0\right)$ ▶ 20 %

이므로 △ADB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{13}{2}\times6=\frac{39}{2}$ ▶ 30 %

답 구하기 △ADB와 △ADC의 넓이가 같으므로 □ACDB의 넓이는

$\triangle ADB+\triangle ADC=2\times\frac{39}{2}=39$ ▶ 10 %

23 해결 과정 타원 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$의 두 꼭짓점 $(-1, 0)$과 $(0, 2)$를 지나는 직선의 방정식은 $y=2x+2$

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하는 기울기가 2인 직선의 방정식은 $y=2x\pm\sqrt{4a^2+b^2}$이므로 $\sqrt{4a^2+b^2}=2$에서

$4a^2+b^2=4$ ...... ① ▶ 50 %

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점의 좌표가 $(0, a)$와 $(0, -a)$이므로 $b^2-a^2=a^2$에서

$b^2=2a^2$ ...... ② ▶ 20 %

답 구하기 ①과 ②에서 $a^2=\frac{2}{3}$, $b^2=\frac{4}{3}$

따라서 $a^2+b^2=2$ ▶ 30 %

24 (1) 쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'}-\overline{PF}=\overline{QF'}-\overline{QF}$

즉, $\overline{PF'}+\overline{QF}=\overline{QF'}+\overline{PF}$ ...... ① ▶ 20 %

$\triangle APF'$에서 $\overline{AP}+\overline{PF'}\ge\overline{AF'}$

즉, $\overline{AP}+\overline{PF'}\ge\overline{AQ}+\overline{QF'}$

위의 식의 양변에 $\overline{PF}$를 더하면

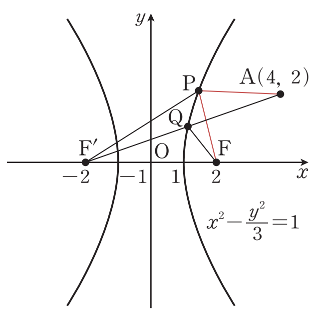
$\overline{AP}+\overline{PF'}+\overline{PF}\ge\overline{AQ}+\overline{QF'}+\overline{PF}$

①에서 $\overline{QF'}+\overline{PF}=\overline{PF'}+\overline{QF}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PF'}+\overline{PF}\ge\overline{AQ}+\overline{PF'}+\overline{QF}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PF}\ge\overline{AQ}+\overline{QF}$

$\overline{AP}+\overline{PF}$가 최소가 되는 점 P의 위치는 점 Q이다.



▶ 40 %

(2) $A(4, 2)$이고, $F'(-2, 0)$이므로

$\overline{AF'}=\sqrt{(-2-4)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{10}$

즉, $\overline{AQ}+\overline{QF'}=2\sqrt{10}$ ...... ②

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{QF'}-\overline{QF}=2$ ...... ③ ▶ 30 %

②−③을 하면 $\overline{AQ}+\overline{QF}=2\sqrt{10}-2$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PF}$의 최솟값은 $2\sqrt{10}-2$ ▶ 10 %

II 평면벡터

1 벡터의 연산

01 벡터 69~71쪽

준비하기 (1) 선분 BC (2) 선분 DC

생각 열기 ❶ 길이, 넓이 ❷ 힘, 속도

문제 1 (1) $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DE}$ (2) $\sqrt{3}$

생각 열기 ❶ $\overrightarrow{CD}$ ❷ $\overrightarrow{EF}$

문제 2 (1) $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{FE}$ (2) $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{ED}$

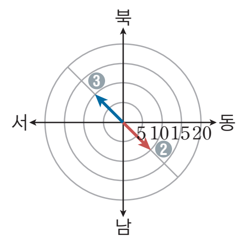
문제 3 (1) $\vec{a}$ (2) $\vec{b}$ (3) $-\vec{b}$ (4) $-\vec{a}$

생각 넓히기 ❶ 초속 15 m의 남서풍

❷ 그림 참조

❸ 그림 참조

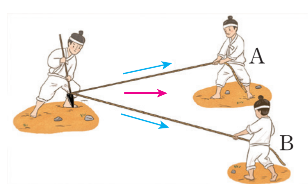
초속 10 m의 남동풍



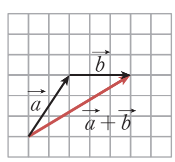
02 벡터의 덧셈과 뺄셈 72~76쪽

준비하기 $\overrightarrow{FO}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{ED}$

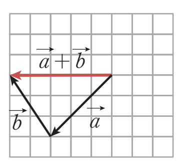
생각 열기



문제 1 (1)



(2)



(3)