www.ebsi.co.kr

수능특강 수학영역 **수학Ⅱ**

정답과 풀이

www.ebsi.co.kr

한눈에 보는 정답

01 함수의 극한

유제
본문 5~11쪽

1 ④ 2 ③ 3 ③ 4 ① 5 ④
6 ② 7 ④ 8 ③

Level 1 기초 연습
본문 12~13쪽

1 ② 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ③
6 ⑤ 7 ④ 8 ⑤

Level 2 기본 연습
본문 14~15쪽

1 ③ 2 ① 3 ③ 4 13 5 ③
6 ① 7 ②

Level 3 실력 완성
본문 16쪽

1 216 2 ⑤ 3 ④

02 함수의 연속

유제
본문 19~23쪽

1 ④ 2 ② 3 ④ 4 ② 5 ④

Level 1 기초 연습
본문 24~25쪽

1 ① 2 ④ 3 ② 4 ③ 5 15
6 ③ 7 5 8 ③

Level 2 기본 연습
본문 26~27쪽

1 ④ 2 20 3 ⑤ 4 ② 5 7
6 61 7 ②

Level 3 실력 완성
본문 28쪽

1 ⑤ 2 9 3 12

03 미분계수와 도함수

유제
본문 31~37쪽

1 4 2 ③ 3 ① 4 28 5 ④
6 ②

Level 1 기초 연습
본문 38~39쪽

1 ⑤ 2 ⑤ 3 ② 4 ④ 5 17
6 ④ 7 ③ 8 ①

Level 2 기본 연습
본문 40~41쪽

1 ② 2 ② 3 ⑤ 4 ③ 5 ④
6 ③ 7 ① 8 3

Level 3 실력 완성
본문 42쪽

1 4 2 ① 3 22

04 도함수의 활용 (1)

유제
본문 45~51쪽

1 ⑤ 2 ⑤ 3 14 4 21 5 ⑤
6 12 7 ②

Level 1 기초 연습
본문 52~53쪽

1 ① 2 ④ 3 ④ 4 ① 5 ②
6 2 7 ② 8 ①

Level 2 기본 연습 본문 54~55쪽

1 ① 2 ⑤ 3 ① 4 24 5 ⑤
6 ③ 7 ③ 8 ④

Level 3 실력 완성 본문 56~57쪽

1 ② 2 ⑤ 3 ④ 4 11 5 ⑤

05 도함수의 활용 (2)

유제 본문 61~65쪽

1 ① 2 ⑤ 3 ② 4 ④ 5 ③
6 ①

Level 1 기초 연습 본문 66~67쪽

1 ③ 2 ⑤ 3 ④ 4 ② 5 18
6 ② 7 ⑤ 8 ④

Level 2 기본 연습 본문 68~69쪽

1 ④ 2 ① 3 ③ 4 ② 5 31
6 ⑤ 7 ④ 8 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 70쪽

1 ③ 2 32 3 ④

06 부정적분과 정적분

유제 본문 73~79쪽

1 ④ 2 ② 3 ① 4 84 5 ③
6 ④ 7 48 8 ⑤

Level 1 기초 연습 본문 80~81쪽

1 ② 2 ① 3 ① 4 ③ 5 ⑤
6 ④ 7 ④ 8 ④ 9 ② 10 ①

Level 2 기본 연습 본문 82~83쪽

1 ② 2 ⑤ 3 ① 4 ③ 5 ④
6 11 7 ② 8 ①

Level 3 실력 완성 본문 84~85쪽

1 ② 2 ⑤ 3 ③ 4 6 5 ④

07 정적분의 활용

유제 본문 89~95쪽

1 ⑤ 2 ② 3 54 4 ① 5 ⑤
6 ④ 7 ③ 8 8

Level 1 기초 연습 본문 96~97쪽

1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4 ① 5 ②
6 ① 7 ② 8 6

Level 2 기본 연습 본문 98~99쪽

1 ④ 2 151 3 ② 4 ⑤ 5 ③
6 ① 7 4 8 64

Level 3 실력 완성 본문 100~101쪽

1 ② 2 ③ 3 ⑤ 4 48 5 ①

01 함수의 극한

유제 본문 5~11쪽

1 ④	2 ③	3 ③	4 ①	5 ④
6 ②	7 ④	8 ③		

1 $\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a-}(ax+2)=a^2+2$

$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}(2x+1)=2a+1$

$\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하려면

$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)$이어야 하므로

$a^2+2=2a+1$, $a^2-2a+1=0$, $(a-1)^2=0$

$a=1$이고 $f(x)=\begin{cases}x+2 & (x<1)\\ 2x+1 & (x\ge 1)\end{cases}$이므로

$\lim_{x\to 1-}f(x)=3$, $\lim_{x\to 1+}f(x)=3$

따라서 $b=\lim_{x\to 1}f(x)=3$이므로 $a+b=1+3=4$

답 ④

2 $\lim_{x\to -1+}f(x+1)$에서

$x+1=s$로 놓으면 $x\to -1+$일 때 $s\to 0+$이므로

$\lim_{x\to -1+}f(x+1)=\lim_{s\to 0+}f(s)=2$

$\lim_{x\to 1+}f(-x)$에서

$-x=t$로 놓으면 $x\to 1+$일 때 $t\to -1-$이므로

$\lim_{x\to 1+}f(-x)=\lim_{t\to -1-}f(t)=1$

따라서 $\lim_{x\to -1+}f(x+1)+\lim_{x\to 1+}f(-x)=2+1=3$

답 ③

3
$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{(x^2-1)f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{(x+1)(x-1)f(x)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{x}{x+1}\times\frac{1}{(x-1)f(x)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}\times\frac{1}{\lim_{x\to 1}(x-1)f(x)}$$
$$=\frac{1}{1+1}\times\frac{1}{\frac{1}{3}}$$
$$=\frac{3}{2}$$

답 ③

4
$$\lim_{x\to 1}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to 1}\frac{\{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)\}}{f(x)+g(x)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2}{f(x)+g(x)}$$
$$=\frac{\lim_{x\to 1}[\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2]}{\lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\}}$$
$$=\frac{\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}[\{f(x)+g(x)\}+\{f(x)-g(x)\}]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\}+\lim_{x\to 1}\{f(x)-g(x)\}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(2+\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{6}$$

$$\lim_{x\to 1}g(x)=\lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)-f(x)\}$$
$$=\lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\}-\lim_{x\to 1}f(x)$$
$$=2-\frac{7}{6}=\frac{5}{6}$$

따라서

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{2x-g(x)}=\frac{\lim_{x\to 1}f(x)}{2\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}g(x)}=\frac{\frac{7}{6}}{2\times 1-\frac{5}{6}}=1$$

답 ①

5
$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+2)(x^2-2x-3)}{x^2+x}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+2)(x+1)(x-3)}{x(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+2)(x-3)}{x}$$
$$=\frac{1\times(-4)}{-1}$$
$$=4$$

답 ④

6
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+4x}-x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{4x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{1}+1}{4}=\frac{1}{2}$$

답 ②

7 $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}=\frac{1}{6}$ ...... ㉠

㉠에서 $x\to1$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0$

$b=-(a+1)$ ...... ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax-(a+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+a+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+a+1}$$
$$=\frac{1}{a+2}=\frac{1}{6}$$

따라서 $a+2=6$에서 $a=4$이고 ㉡에서

$b=-(4+1)=-5$이므로

$a-b=4-(-5)=9$

답 ④

8 조건 (가) $|f(x)-x^2|\le2$에서

$-2\le f(x)-x^2\le2$

$x^2-2\le f(x)\le x^2+2$

0이 아닌 모든 실수 x에 대하여 $x^2>0$이므로

$1-\frac{2}{x^2}\le\frac{f(x)}{x^2}\le1+\frac{2}{x^2}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)=1$, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)=1$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1$

따라서 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

조건 (나) $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{4x^2+4x-3}=\frac{1}{8}$ ...... ㉠

㉠에서 $x\to\frac{1}{2}$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=0$이므로 $f(x)$는 $x-\frac{1}{2}$을 인수로 갖는다.

따라서 $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+a)$ (a는 상수)라 하면 ㉠에서

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+a)}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{x+a}{4\left(x+\frac{3}{2}\right)}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}+a}{8}=\frac{1}{8}$$

따라서 $\frac{1}{2}+a=1$에서 $a=\frac{1}{2}$이고

$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$이므로

$f(1)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$

답 ③

Level 1 기초 연습 본문 12~13쪽

1 ②	2 ②	3 ③	4 ④	5 ③
6 ⑤	7 ④	8 ⑤		

1 $\lim_{x\to1-}2f(x)-\lim_{x\to1+}f(x)$

$=\lim_{x\to1-}2ax-\lim_{x\to1+}(-x+a)$

$=2a-(-1+a)$

$=a+1$

이므로

$a+1=3$에서 $a=2$

답 ②

2 (ⅰ) $a=-3$, $a=3$일 때,

$\lim_{x\to a-}f(x)=0$, $\lim_{x\to a+}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to a-}f(x)\times\lim_{x\to a+}f(x)=0$

(ⅱ) $a=-2$, $a=-1$일 때,

$\lim_{x\to a-}f(x)<0$, $\lim_{x\to a+}f(x)<0$이므로

$\lim_{x\to a-}f(x)\times\lim_{x\to a+}f(x)>0$

(ⅲ) $a=0$일 때,

$\lim_{x\to a-}f(x)<0$, $\lim_{x\to a+}f(x)>0$이므로

$\lim_{x\to a-}f(x)\times\lim_{x\to a+}f(x)<0$

(ⅳ) $a=1$, $a=2$일 때,

$\lim_{x\to a-}f(x)>0$, $\lim_{x\to a+}f(x)>0$이므로

$\lim_{x\to a-}f(x)\times\lim_{x\to a+}f(x)>0$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 $-4<a<4$일 때, $\lim_{x\to a-}f(x)\times\lim_{x\to a+}f(x)\le0$을 만족시키는 모든 정수 a의 값은 -3, 0, 3이고 그 개수는 3이다.

답 ②

3 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x+2)(x-2)}$

$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{1}{x+2}\times\frac{f(x)}{x-2}\right\}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}\times\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}$

$=\frac{1}{4}\times 3$

$=\frac{3}{4}$

답 ③

4 $\lim_{x\to 1}\frac{2}{x-1}\left(\frac{1}{x}-1\right)=\lim_{x\to 1}\frac{2}{x-1}\left(-\frac{x-1}{x}\right)$

$=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{2}{x}\right)$

$=-2$

답 ④

5 $\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x^2-(a+3)x+3a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)(x-3)}$

$=\lim_{x\to a}\frac{x+a}{x-3}$

$=\frac{2a}{a-3}$

이므로

$\frac{2a}{a-3}=-2$에서 $2a=-2a+6$

따라서 $4a=6$이므로 $a=\frac{3}{2}$

답 ③

6 $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+a}-3}{x-2}=b$ …… ㉠

㉠에서 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to 2}(\sqrt{2x+a}-3)=\sqrt{4+a}-3=0$

$\sqrt{4+a}=3$에서 $4+a=9$, $a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면

$b=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{2}{\sqrt{2x+5}+3}$

$=\frac{2}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{3}$

따라서 $ab=5\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

답 ⑤

7 $\lim_{x\to 2}\frac{xf(x)-4}{x-2}=4$에서

$x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to 2}\{xf(x)-4\}=2f(2)-4=0$, $f(2)=2$

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(2)=4+2a+b=2$

$b=-2(a+1)$ …… ㉠

$xf(x)-4=x(x^2+ax+b)-4$

$=x^3+ax^2+bx-4$

$=x^3+ax^2-2(a+1)x-4$

$=(x-2)\{x^2+(a+2)x+2\}$

이므로

$\lim_{x\to 2}\frac{xf(x)-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\{x^2+(a+2)x+2\}}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\{x^2+(a+2)x+2\}$

$=4+(a+2)\times 2+2$

$=2a+10$

$2a+10=4$에서 $a=-3$이고 ㉠에서 $b=4$

따라서 $f(x)=x^2-3x+4$이므로 $f(3)=9-9+4=4$

답 ④

8 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-1}=1$을 만족시키는 다항함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=2$ …… ㉠

㉠에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이므로 $f(1)=0$

따라서 이차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고, $f(x)$가 $x-1$을 인수로 가지므로

$f(x)=(x-1)(x+a)$ (a는 상수)

로 놓을 수 있다.

㉠에서

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+a)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x+a}{x+1}$

$=\frac{1+a}{2}$

이므로 $\frac{1+a}{2}=2$에서 $a=3$

따라서 $f(x)=(x-1)(x+3)$이므로

$f(3)=2\times6=12$

답 ⑤

Level 2 기본 연습 본문 14~15쪽

1 ③	2 ①	3 ③	4 13	5 ③
6 ①	7 ②			

1 (ⅰ) $a=-2$일 때,

$\lim_{x\to-2}f(x)=f(-2)\neq0$이므로

$\lim_{x\to-2}\frac{x}{f(x)}=-\frac{2}{f(-2)}$

따라서 $\lim_{x\to a}\frac{x}{f(x)}$의 값이 존재한다.

(ⅱ) $a=-1$일 때,

$\lim_{x\to-1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to-1+}f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to-1-}\frac{x}{f(x)}=\frac{-1}{1}=-1$

$\lim_{x\to-1+}\frac{x}{f(x)}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$

따라서 $\lim_{x\to-1-}\frac{x}{f(x)}\neq\lim_{x\to-1+}\frac{x}{f(x)}$이므로

$\lim_{x\to-1}\frac{x}{f(x)}$의 값이 존재하지 않는다.

(ⅲ) $a=0$일 때,

$\lim_{x\to0-}f(x)=2$, $\lim_{x\to0+}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to0-}\frac{x}{f(x)}=\frac{0}{2}=0$

$\lim_{x\to0+}\frac{x}{f(x)}=\frac{0}{1}=0$

따라서 $\lim_{x\to0-}\frac{x}{f(x)}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{f(x)}$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{x}{f(x)}$의 값이 존재한다.

(ⅳ) $a=1$일 때,

$\lim_{x\to1}x=1$, $\lim_{x\to1}f(x)=0$

따라서 $\lim_{x\to1}\frac{x}{f(x)}$의 값이 존재하지 않는다.

(ⅴ) $a=2$일 때,

$\lim_{x\to2}f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to2}\frac{x}{f(x)}=\frac{2}{1}=2$

따라서 $\lim_{x\to2}\frac{x}{f(x)}$의 값이 존재한다.

(ⅰ)~(ⅴ)에서 $-3<a<3$일 때 $\lim_{x\to a}\frac{x}{f(x)}$의 값이 존재하도록 하는 정수 a의 값은 -2, 0, 2이고, 그 개수는 3이다.

답 ③

2 $f(x)=ax+b$ (a, b는 상수이고, $a\neq0$)이라 하자.

$\lim_{x\to1}f(x)=2$에서

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(ax+b)=a+b$

$a+b=2$ …… ㉠

$\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)\}^2-4}{\sqrt{f(-x)}-2}=k$에서

$x\to1$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{\sqrt{f(-x)}-2\}=\sqrt{f(-1)}-2=0$

$f(-1)=4$

$f(-1)=-a+b=4$일 때

$a-b=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=-1$, $b=3$이므로 $f(x)=-x+3$

$k=\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)\}^2-4}{\sqrt{f(-x)}-2}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(-x+3)^2-4}{\sqrt{x+3}-2}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x^2-6x+5}{\sqrt{x+3}-2}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-5)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-5)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x-5)(\sqrt{x+3}+2)$

$=-4\times(\sqrt{4}+2)$

$=-16$

답 ①

3 (ⅰ) 함수 $f(x)$가 삼차 이상인 다항함수일 때,

$f(x)\{f(x)-x^2\}$은 6차 이상인 다항함수이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\{f(x)-x^2\}}{2x^2}$의 값은 존재하지 않는다.

(ii) 함수 $f(x)$가 이차함수일 때,

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\{f(x)-x^2\}}{2x^2}$의 값이 존재하려면 $f(x)-x^2$은 상수이어야 한다.

$f(x)-x^2=a$ (a는 상수)

로 놓으면 $f(x)=x^2+a$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\{f(x)-x^2\}}{2x^2}&=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+a)\{(x^2+a)-x^2\}}{2x^2}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{a(x^2+a)}{2x^2}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{a\left(1+\frac{a}{x^2}\right)}{2}\\&=\frac{a}{2}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{2}=3$에서 $a=6$이므로 $f(x)=x^2+6$

(iii) 함수 $f(x)$가 일차함수일 때,

$f(x)\{f(x)-x^2\}$은 삼차함수이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\{f(x)-x^2\}}{2x^2}$의 값은 존재하지 않는다.

(i)~(iii)에서

$f(x)=x^2+6$

이므로 $f(1)=1+6=7$

답 ③

참고

함수 $f(x)$가 상수함수일 때,

$f(x)=b$ (b는 상수)

로 놓으면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\{f(x)-x^2\}}{2x^2}&=\lim_{x\to\infty}\frac{b(b-x^2)}{2x^2}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{b\left(\frac{b}{x^2}-1\right)}{2}\\&=-\frac{b}{2}\end{aligned}$$

따라서 $-\frac{b}{2}=3$에서 $b=-6$이므로 $f(x)=-6$

4 조건 (가)에서 부등식의 각 변을 양수 x^2으로 나누면

$$2-\frac{3}{x}\le\frac{f(x)-x^3}{x^2}\le2+\frac{3}{x^2}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{3}{x}\right)=2$, $\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x^2}\right)=2$이므로 극한값의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=2$$

따라서 함수 $f(x)-x^3$은 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

$f(x)-x^3=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)

로 놓으면

$f(x)=x^3+2x^2+ax+b$

조건 (나)에서 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=5$ …… ㉠

㉠에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=f(1)-2=0$

따라서 $f(1)=2$에서

$f(1)=1+2+a+b=2$

$b=-(a+1)$ …… ㉡

㉠에서

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{x^3+2x^2+ax-(a+3)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+3x+a+3)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}(x^2+3x+a+3)\\&=a+7\end{aligned}$$

이므로

$a+7=5$에서 $a=-2$이고 ㉡에서 $b=1$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-2x+1$이고,

$f(2)=8+8-4+1=13$

답 13

5 $f(x)=2x^3-x^2g(x)-2x$에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2-g(1)-2$

$f(1)+g(1)=0$

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)+g(x)}=-\frac{1}{2}$ …… ㉠

㉠에서 $x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to1}g(x)=g(1)=0$

따라서 $g(x)=a(x-1)$ (a는 0이 아닌 상수)로 놓을 수 있고,

$$\begin{aligned}f(x)+g(x)&=2x^3-x^2g(x)-2x+g(x)\\&=2x(x^2-1)-(x^2-1)g(x)\\&=(x-1)(x+1)\{2x-g(x)\}\\&=(x-1)(x+1)\{(2-a)x+a\}\end{aligned}$$

이므로 ㉠에서

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)+g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)}{(x-1)(x+1)\{(2-a)x+a\}}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{a}{(x+1)\{(2-a)x+a\}}$$
$$=\frac{a}{4}$$

따라서 $\frac{a}{4}=-\frac{1}{2}$에서 $a=-2$이고, $g(x)=-2(x-1)$이므로

$g(-3)=-2\times(-4)=8$

답 ③

6 다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $R(x)$이므로

$R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$$f(x)=(x-2)^2Q(x)+R(x)$$
$$=(x-2)^2Q(x)+ax+b$$

이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)+2x^2}{f(x)-R(x)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)^2Q(x)+2x^2+ax+b}{(x-2)^2Q(x)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)^2Q(x)+2(x-2)^2+(a+8)x+(b-8)}{(x-2)^2Q(x)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)^2\{Q(x)+2\}+(a+8)x+(b-8)}{(x-2)^2Q(x)}$$

이때 $\lim_{x\to2}\frac{(x-2)^2\{Q(x)+2\}+(a+8)x+(b-8)}{(x-2)^2Q(x)}$의 값이 k가 되려면 분자가 $(x-2)^2$을 인수로 가져야 한다.

즉, 분자가 $(x-2)^2$으로 나누어떨어져야 하므로 $a=-8$, $b=8$이어야 한다.

따라서 $R(x)=-8x+8$이고

$Q(2)=R(2)=-16+8=-8$이므로

$$k=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)^2\{Q(x)+2\}}{(x-2)^2Q(x)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{Q(x)+2}{Q(x)}$$
$$=\frac{Q(2)+2}{Q(2)}$$
$$=\frac{-8+2}{-8}=\frac{3}{4}$$

답 ①

다른 풀이

다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $R(x)$이므로

$R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$$f(x)=(x-2)^2Q(x)+R(x)$$
$$=(x-2)^2Q(x)+ax+b$$

이므로

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)+2x^2}{f(x)-R(x)}=k$에서

$x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to2}\{f(x)+2x^2\}=f(2)+8=0$에서 $f(2)=-8$

따라서 $f(2)=R(2)=2a+b=-8$이므로 $b=-2(a+4)$

$$f(x)+2x^2=(x-2)^2Q(x)+2x^2+ax-2(a+4)$$
$$=(x-2)^2Q(x)+(x-2)(2x+a+4)$$
$$=(x-2)\{(x-2)Q(x)+2x+a+4\}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)+2x^2}{f(x)-R(x)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)\{(x-2)Q(x)+2x+a+4\}}{(x-2)^2Q(x)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)Q(x)+2x+a+4}{(x-2)Q(x)}$$

$x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to2}\{(x-2)Q(x)+2x+a+4\}=a+8=0$

따라서 $a=-8$이고 $b=8$이므로 $R(x)=-8x+8$이고

$Q(2)=R(2)=-16+8=-8$

$$k=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)Q(x)+2x-4}{(x-2)Q(x)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)\{Q(x)+2\}}{(x-2)Q(x)}=\lim_{x\to2}\frac{Q(x)+2}{Q(x)}$$
$$=\frac{Q(2)+2}{Q(2)}=\frac{-8+2}{-8}=\frac{3}{4}$$

7 곡선 $y=x^2+1$과 직선 $y=x+t\left(t>\frac{3}{4}\right)$이 만나는 두 점 A, B의 x좌표는 이차방정식

$x^2+1=x+t$, $x^2-x+(1-t)=0$

의 해와 같다.

이차방정식의 근의 공식에 의하여

$x=\frac{1-\sqrt{4t-3}}{2}$ 또는 $x=\frac{1+\sqrt{4t-3}}{2}$

이므로 $\alpha=\frac{1-\sqrt{4t-3}}{2}$, $\beta=\frac{1+\sqrt{4t-3}}{2}$으로 놓으면

A$(\alpha, \alpha+t)$, B$(\beta, \beta+t)$, P$(\alpha, 0)$, Q$(0, \beta+t)$

삼각형 APB의 넓이 $S(t)$는

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}}\times(\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{BQ}})$$
$$=\frac{1}{2}\times(\alpha+t)\times(-\alpha+\beta)$$
$$=\frac{1}{2}(\alpha+t)(\beta-\alpha)$$

삼각형 ABQ의 넓이 $T(t)$는

$$T(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BQ}}\times(\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{AP}})$$
$$=\frac{1}{2}\times\beta\times\{(\beta+t)-(\alpha+t)\}$$
$$=\frac{1}{2}\beta(\beta-\alpha)$$

따라서

$$\lim_{t\to\frac{3}{4}+}\frac{T(t)}{S(t)}=\lim_{t\to\frac{3}{4}+}\frac{\frac{1}{2}\beta(\beta-\alpha)}{\frac{1}{2}(\alpha+t)(\beta-\alpha)}$$
$$=\lim_{t\to\frac{3}{4}+}\frac{\beta}{\alpha+t}$$
$$=\lim_{t\to\frac{3}{4}+}\frac{\frac{1+\sqrt{4t-3}}{2}}{\frac{1-\sqrt{4t-3}}{2}+t}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}$$
$$=\frac{2}{5}$$

답 ②

Level 3 실력 완성

본문 16쪽

1 216 **2** ⑤ **3** ④

1 (i) $0\in(A-B)$에서 $0\in A$이고 $0\notin B$이다.

$0\notin B$에서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2(x-1)^4}$의 값이 존재하므로

$f(x)$는 x^q (q는 2 이상의 자연수)를 인수로 갖는다.

$0\in A$에서 $\lim_{x\to0}\frac{x^3(x-1)}{f(x)}$의 값이 존재하므로

$f(x)$는 x^2 또는 x^3을 인수로 갖는다.

(ii) $1\in(B-A)$에서 $1\in B$이고 $1\notin A$이다.

$1\notin A$에서 $\lim_{x\to1}\frac{x^3(x-1)}{f(x)}$의 값이 존재하지 않으므로

$f(x)$는 $(x-1)^s$ (s는 2 이상의 자연수)를 인수로 갖는다.

$1\in B$에서 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2(x-1)^4}$의 값이 존재하지 않으므로

$f(x)$는 $(x-1)^2$ 또는 $(x-1)^3$을 인수로 갖는다.

이때 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 오차함수이므로

(i), (ii)에 의하여

$f(x)=x^2(x-1)^2(x-k)$ $(k\neq0,\ k\neq1)$

또는 $f(x)=x^3(x-1)^2$

또는 $f(x)=x^2(x-1)^3$

이때 $f(x)=x^3(x-1)^2$이면 $\lim_{x\to3}f(x)=108$,

$f(x)=x^2(x-1)^3$이면 $\lim_{x\to3}f(x)=72$

이므로 $\lim_{x\to3}f(x)=18$을 만족시키지 않는다.

따라서 $f(x)=x^2(x-1)^2(x-k)$ $(k\neq0,\ k\neq1)$이고,

$\lim_{x\to3}f(x)=36(3-k)=18$에서 $k=\frac{5}{2}$

따라서 $f(x)=x^2(x-1)^2\left(x-\frac{5}{2}\right)$이므로

$f(4)=16\times9\times\frac{3}{2}=216$

답 216

2 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식이 $y=g(x)$이므로 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=f(x-2)$ …… ㉠

가 성립한다.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)g(x)}=-\frac{1}{2}$에서

$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$

또 ㉠에 $x=3$을 대입하면

$g(3)=f(1)=0$

이므로

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{(x-1)g(x)}=k$에서

$x\to3$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to3}f(x)=f(3)=0$

따라서 $f(1)=0,\ f(3)=0$이고 함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=(x-1)(x-3)(x-a)$

$g(x)=(x-3)(x-5)(x-2-a)$ (a는 상수)

이다.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)g(x)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-3)(x-a)}{(x-1)(x-3)(x-5)(x-2-a)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x-a}{(x-5)(x-2-a)}$

$=\frac{1-a}{-4(-1-a)}$

$=\frac{1-a}{4(1+a)}$

이므로

$\frac{1-a}{4(1+a)}=-\frac{1}{2}$에서 $1-a=-2-2a$, $a=-3$

따라서

$f(x)=(x-1)(x-3)(x+3)$

$g(x)=(x-3)(x-5)(x+1)$

이므로

$k=\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{(x-1)g(x)}$

$=\lim_{x\to3}\frac{(x-1)(x-3)(x+3)}{(x-1)(x-3)(x-5)(x+1)}$

$=\lim_{x\to3}\frac{x+3}{(x-5)(x+1)}$

$=\frac{3+3}{-2\times4}=-\frac{3}{4}$

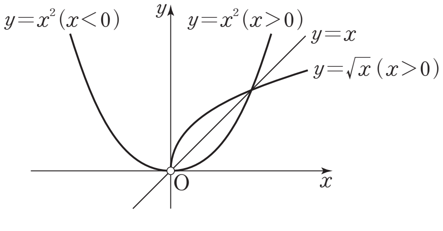
답 ⑤

3 두 점 C, D를 지나는 직선의 방정식은 $y=tx+t$이므로 점 Q의 x좌표는 x에 대한 이차방정식 $x^2=tx+t$, $x^2-tx-t=0$의 음의 실근이다.

이차방정식의 근의 공식에 의하여 $x=\frac{t\pm\sqrt{t^2+4t}}{2}$이므로 점 Q의 x좌표를 α라 하면

$\alpha=\frac{t-\sqrt{t^2+4t}}{2}$

이때 두 함수 $y=x^2\ (x<0)$, $y=x^2\ (x>0)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, 두 함수 $y=x^2\ (x>0)$, $y=\sqrt{x}\ (x>0)$은 서로 역함수 관계에 있으므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



선분 CD를 y축에 대하여 대칭이동한 후 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 선분 AB가 되므로 두 삼각형 OAP, OCQ는 서로 합동이다.

따라서 삼각형 OAP의 넓이 $S(t)$는

$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{OC}\times|\alpha|$

$=\frac{1}{2}\times t\times\frac{\sqrt{t^2+4t}-t}{2}$

$=\frac{t(\sqrt{t^2+4t}-t)}{4}$

(삼각형 OQD의 넓이)

=(삼각형 OCD의 넓이)−(삼각형 OCQ의 넓이)

이므로 삼각형 OQD의 넓이 $T(t)$는

$T(t)=\frac{1}{2}t-S(t)$

$=\frac{1}{2}t-\frac{t(\sqrt{t^2+4t}-t)}{4}$

$=\frac{t(t+2-\sqrt{t^2+4t})}{4}$

따라서

$\lim_{t\to\infty}\frac{tT(t)}{S(t)}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{t\times\frac{t(t+2-\sqrt{t^2+4t})}{4}}{\frac{t(\sqrt{t^2+4t}-t)}{4}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{t(t+2-\sqrt{t^2+4t})}{\sqrt{t^2+4t}-t}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{t(t+2-\sqrt{t^2+4t})(t+2+\sqrt{t^2+4t})(\sqrt{t^2+4t}+t)}{(\sqrt{t^2+4t}-t)(\sqrt{t^2+4t}+t)(t+2+\sqrt{t^2+4t})}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+4t}+t}{t+2+\sqrt{t^2+4t}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{4}{t}}+1}{1+\frac{2}{t}+\sqrt{1+\frac{4}{t}}}$

$=\frac{\sqrt{1}+1}{1+\sqrt{1}}$

$=1$

답 ④

02 함수의 연속

유제 본문 19~23쪽

1 ④ 2 ② 3 ④ 4 ② 5 ④

1 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이다.
즉,

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+a}-3}{x-1}=b$ …… ㉠

㉠에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to1}(\sqrt{x+a}-3)=\sqrt{1+a}-3=0$에서 $\sqrt{1+a}=3$, $a=8$

$a=8$을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}b&=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3}\\&=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

따라서 $ab=8\times\frac{1}{6}=\frac{4}{3}$

답 ④

2 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$

이어야 한다.

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(3x+a)=3+a$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x+7)=1+7=8$

$f(1)=1+7=8$

이므로

$3+a=8$

따라서 $a=8-3=5$

답 ②

3 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=f(1)g(1)$

이어야 한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-}f(x)g(x)&=\lim_{x\to1-}(x^2+2x)(2x^2+ax)\\&=3(2+a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1+}f(x)g(x)&=\lim_{x\to1+}(-2x+1)(2x^2+ax)\\&=-(2+a)\end{aligned}$$

$f(1)g(1)=-(2+a)$

이므로 $3(2+a)=-(2+a)$, $4(2+a)=0$

따라서 $a=-2$

답 ④

4 함수 $\{f(x)+1\}^2$이 $x=a$에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to a-}\{f(x)+1\}^2=\lim_{x\to a+}\{f(x)+1\}^2=\{f(a)+1\}^2$

이어야 한다.

$\lim_{x\to a-}\{f(x)+1\}^2=\lim_{x\to a-}(2x-3+1)^2=(2a-2)^2$

$\lim_{x\to a+}\{f(x)+1\}^2=\lim_{x\to a+}(-x+2+1)^2=(-a+3)^2$

$\{f(a)+1\}^2=(-a+2+1)^2=(-a+3)^2$

이므로

$(2a-2)^2=(-a+3)^2$, $3a^2-2a-5=0$

$(a+1)(3a-5)=0$

$a=-1$ 또는 $a=\frac{5}{3}$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $-1+\frac{5}{3}=\frac{2}{3}$

답 ②

5 $f(x)=x^3+2x-8$이라 하면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$f(-2)=-8-4-8=-20<0$

$f(-1)=-1-2-8=-11<0$

$f(0)=-8<0$

$f(1)=1+2-8=-5<0$

$f(2)=8+4-8=4>0$

$f(3)=27+6-8=25>0$

따라서 $f(1)f(2)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1, 2)$에서 실근 α를 갖는다.

답 ④

Level 1 기초 연습 본문 24~25쪽

1 ① 2 ④ 3 ② 4 ③ 5 15
6 ③ 7 5 8 ③

1 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1+} f(x)=f(1)$

이다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1+} g(x)&=\lim_{x\to1+}(x^2+1)f(x)\\&=\lim_{x\to1+}(x^2+1)\times\lim_{x\to1+}f(x)\\&=2f(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-} g(x)&=\lim_{x\to1-}\{3x^2+1-f(x)\}\\&=\lim_{x\to1-}(3x^2+1)-\lim_{x\to1-}f(x)\\&=4-f(1)\end{aligned}$$

이므로

$\lim_{x\to1+} g(x)-\lim_{x\to1-} g(x)=14$에서

$2f(1)-4+f(1)=3f(1)-4=14$

따라서 $f(1)=6$

답 ①

2 $\lim_{x\to0}|f(x)|=1$, $|f(0)|=0$이므로

$\lim_{x\to0}|f(x)|\neq|f(0)|$이다.

즉, 함수 $|f(x)|$는 $x=0$에서 불연속이다.

$\lim_{x\to1}|f(x)|=1$, $|f(1)|=|-1|=1$이므로

$\lim_{x\to1}|f(x)|=|f(1)|$이다.

즉, 함수 $|f(x)|$는 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to2}|f(x)|=0$, $|f(2)|=0$이므로

$\lim_{x\to2}|f(x)|=|f(2)|$이다.

즉, 함수 $|f(x)|$는 $x=2$에서 연속이다.

$\lim_{x\to3}|f(x)|=1$, $|f(3)|=1$이므로

$\lim_{x\to3}|f(x)|=|f(3)|$이다.

즉, 함수 $|f(x)|$는 $x=3$에서 연속이다.

$\lim_{x\to4-}|f(x)|=2$, $\lim_{x\to4+}|f(x)|=|-1|=1$에서

$\lim_{x\to4-}|f(x)|\neq\lim_{x\to4+}|f(x)|$이므로

$\lim_{x\to4}|f(x)|$의 값이 존재하지 않는다.

즉, 함수 $|f(x)|$는 $x=4$에서 불연속이다.

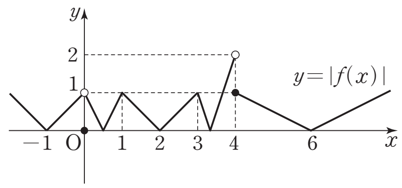
$\lim_{x\to5}|f(x)|=|f(5)|$이므로 함수 $|f(x)|$는 $x=5$에서 연속이다.

따라서 $-1<a<6$일 때, 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 연속이 되도록 하는 모든 정수 a의 값은 1, 2, 3, 5이고, 그 개수는 4이다.

답 ④

참고

$y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



3 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

이다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x)&=\lim_{x\to a} a(x-4)\\&=a(a-4)\\&=a^2-4a\end{aligned}$$

$f(a)=-4$

이므로

$a^2-4a=-4$, $a^2-4a+4=0$, $(a-2)^2=0$

따라서 $a=2$

답 ②

4 함수 $f(x)$가 $x=4$에서 연속이므로

$\lim_{x\to4} f(x)=f(4)$

이다. 즉,

$\lim_{x\to4}\frac{x+a}{\sqrt{x}-2}=b$ ······ ㉠

㉠에서 $x\to4$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to4}(x+a)=4+a=0$에서 $a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}b&=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}\\&=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}\\&=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}\\&=\lim_{x\to4}(\sqrt{x}+2)\\&=\sqrt{4}+2=4\end{aligned}$$

따라서 $a+b=-4+4=0$

답 ③

5 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1+} f(x)=f(1)$

이다.

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(ax+4)=a+4$

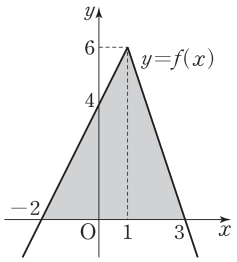
$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(-3x+b)=-3+b$

$f(1)=6$

이므로

$a+4=-3+b=6$에서 $a=2$, $b=9$

$f(x)=\begin{cases} 2x+4 & (x<1) \\ 6 & (x=1) \\ -3x+9 & (x>1) \end{cases}$ 이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 5\times 6=15$

답 15

6 함수 $\{f(x)-k\}^2$이 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-}\{f(x)-k\}^2=\lim_{x\to 0+}\{f(x)-k\}^2=\{f(0)-k\}^2$

이다.

$\lim_{x\to 0-} f(x)=2$, $\lim_{x\to 0+} f(x)=-1$

이므로

$\lim_{x\to 0-}\{f(x)-k\}^2=(2-k)^2$

$\lim_{x\to 0+}\{f(x)-k\}^2=(-1-k)^2=(1+k)^2$

$\{f(0)-k\}^2=(-1-k)^2=(1+k)^2$

따라서 $(2-k)^2=(1+k)^2$에서 $6k=3$이므로

$k=\frac{1}{2}$

답 ③

7 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1} f(x)g(x)=f(1)g(1)$

이다.

$\lim_{x\to 1} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1}(x^2-2x+3)(3x-a)$

$=2(3-a)$

$f(1)g(1)=a(3-a)$

이므로

$2(3-a)=a(3-a)$

$(a-2)(a-3)=0$

$a=2$ 또는 $a=3$

따라서 모든 실수 a의 합은 $2+3=5$

답 5

8 $f(x)=x^2+2x+a$라 하면 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이고, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이다.

닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$는 증가하므로 x에 대한 방정식 $f(x)=0$이 열린구간 $(-1, 2)$에서 오직 하나의 실근을 가지려면 $f(-1)f(2)<0$이어야 한다.

$f(-1)=1-2+a=a-1$

$f(2)=4+4+a=a+8$

이므로

$(a-1)(a+8)<0$

$-8<a<1$

따라서 정수 a의 최댓값 $M=0$이고, 최솟값 $m=-7$이므로 $M-m=0-(-7)=7$

답 ③

Level 2 기본 연습

본문 26~27쪽

1 ④	**2** 20	**3** ⑤	**4** ②	**5** 7
6 61	**7** ②			

1 $x\neq -1$일 때

$f(x)=\frac{(x^2+3x+2)(x+a)}{x+1}$

$=\frac{(x+1)(x+2)(x+a)}{x+1}$

$=(x+2)(x+a)$

이때 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=-1$에서도 연속이므로

$f(-1)=\lim_{x\to -1} f(x)$이다.

$f(-1)=\lim_{x\to -1} f(x)$

$=\lim_{x\to -1}(x+2)(x+a)$

$=-1+a$

따라서 $-1+a=7$에서 $a=8$

답 ④

2 조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=1$에서도 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이면

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)$

이다.

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}0=0$

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(ax^2+bx+c)=c$

$f(0)=0$

이므로 $c=0$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이면

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$

이다.

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(ax^2+bx)=a+b$

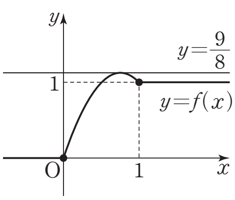
$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}1=1$

$f(1)=1$

이므로 $a+b=1$에서 $b=1-a$

따라서 $f(x)=\begin{cases}0 & (x\le0)\\ ax^2+(1-a)x & (0<x<1)\\ 1 & (x\ge1)\end{cases}$

조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{9}{8}$가 오직 한 점에서 만나려면 그림과 같이 $0<x<1$에서 이차함수 $y=ax^2+(1-a)x$의 그래프가 직선 $y=\frac{9}{8}$에 접해야 한다.



이차방정식 $ax^2+(1-a)x=\frac{9}{8}$, $ax^2+(1-a)x-\frac{9}{8}=0$의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 한다.

$D=(1-a)^2-4a\times\left(-\frac{9}{8}\right)=0$, $2a^2+5a+2=0$

$(a+2)(2a+1)=0$

따라서 $a=-2$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$

(ⅰ) $a=-2$일 때,

$$\begin{aligned}ax^2+(1-a)x-\frac{9}{8}&=-2x^2+3x-\frac{9}{8}\\&=-2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2\\&=0\end{aligned}$$

에서 $x=\frac{3}{4}$이므로

$0<x<1$에서 이차함수 $y=ax^2+(1-a)x$의 그래프와 직선 $y=\frac{9}{8}$가 접한다.

(ⅱ) $a=-\frac{1}{2}$일 때,

$$\begin{aligned}ax^2+(1-a)x-\frac{9}{8}&=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{9}{8}\\&=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\\&=0\end{aligned}$$

에서 $x=\frac{3}{2}$이므로

$0<x<1$에서 이차함수 $y=ax^2+(1-a)x$의 그래프가 직선 $y=\frac{9}{8}$에 접하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a=-2$

$f(x)=\begin{cases}0 & (x\le0)\\ -2x^2+3x & (0<x<1)\\ 1 & (x\ge1)\end{cases}$이므로

$f\left(\frac{1}{4}\right)=-2\times\frac{1}{16}+3\times\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$

따라서 $32\times f\left(\frac{1}{4}\right)=32\times\frac{5}{8}=20$

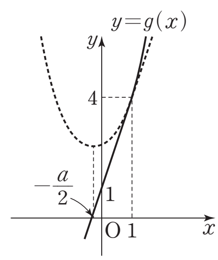
답 20

3 $f(x)=x^2+ax+b$

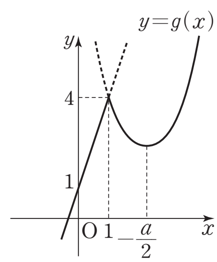
$=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}$ (a, b는 상수)

라 하자.

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이고, 함수 $g(x)$의 역함수가 존재하려면 $-\frac{a}{2}\le1$이어야 한다.



$\left[-\frac{a}{2}\le1\text{일 때}\right]$



$\left[-\frac{a}{2}>1\text{일 때}\right]$

(ⅰ) 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1+}g(x)=g(1)$

을 만족시켜야 한다.

$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1-}(3x+1)=4$

$\lim_{x\to1+} g(x)=\lim_{x\to1+} f(x)$
$=\lim_{x\to1+}(x^2+ax+b)=1+a+b$
$g(1)=f(1)=1+a+b$
이므로
$1+a+b=4$에서 $b=3-a$ …… ㉠

(ii) $-\frac{a}{2}\le1$에서 $a\ge-2$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여
$f(2)=4+2a+b$
$=4+2a+(3-a)$
$=a+7\ge5$
이므로 $f(2)$의 최솟값은 5이다.

답 ⑤

4 함수 $\frac{1}{f(x)}$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ne0$이어야 한다.

(i) 함수 $f(x)=\frac{x^2+(a-1)x+4}{x^2+ax+3a}$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+3a\ne0$이어야 한다.
이때 이차방정식 $x^2+ax+3a=0$의 판별식을 D_1이라 하면 $D_1=a^2-12a<0$이어야 하므로
$a^2-12a=a(a-12)<0$에서
$0<a<12$ …… ㉠

(ii) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=\frac{x^2+(a-1)x+4}{x^2+ax+3a}\ne0$이 되려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2+(a-1)x+4\ne0$이어야 한다.
이때 이차방정식 $x^2+(a-1)x+4=0$의 판별식을 D_2라 하면 $D_2=(a-1)^2-16<0$이어야 하므로
$a^2-2a-15=(a+3)(a-5)<0$에서
$-3<a<5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시켜야 하므로 $0<a<5$
따라서 모든 정수 a는 1, 2, 3, 4이고, 그 개수는 4이다.

답 ②

5 함수 $\frac{a-2x}{f(x)}$가 $x=2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to2-}\frac{a-2x}{f(x)}=\lim_{x\to2+}\frac{a-2x}{f(x)}=\frac{a-4}{f(2)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이다.

(i) $\lim_{x\to2-} f(x)=a+2$, $\lim_{x\to2-}(a-2x)=a-4$이므로
$a=-2$이면 $\lim_{x\to2-}\frac{a-2x}{f(x)}$의 값이 존재하지 않는다.
따라서 $a\ne-2$이고,

$$\lim_{x\to2-}\frac{a-2x}{f(x)}=\frac{\lim_{x\to2-}(a-2x)}{\lim_{x\to2-}f(x)}=\frac{a-4}{a+2}$$

(ii) $\lim_{x\to2+} f(x)=a^2-4$, $\lim_{x\to2+}(a-2x)=a-4$이므로
$a=-2$ 또는 $a=2$이면 $\lim_{x\to2+}\frac{a-2x}{f(x)}$의 값이 존재하지 않는다.
따라서 $a\ne-2$, $a\ne2$이고,

$$\lim_{x\to2+}\frac{a-2x}{f(x)}=\frac{\lim_{x\to2+}(a-2x)}{\lim_{x\to2+}f(x)}=\frac{a-4}{a^2-4}$$

(iii) $f(2)=a+2$이므로 $a=-2$이면 $\frac{a-4}{f(2)}$의 값이 존재하지 않는다.
따라서 $a\ne-2$이고, $\frac{a-4}{f(2)}=\frac{a-4}{a+2}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 ㉠을 만족시키려면 $a\ne-2$, $a\ne2$이고,
$\frac{a-4}{a+2}=\frac{a-4}{a^2-4}$이어야 한다.
$a\ne-2$, $a\ne2$이므로
$\frac{a-4}{a+2}=\frac{a-4}{a^2-4}$의 양변에 $a^2-4=(a+2)(a-2)$를 곱하면
$(a-2)(a-4)=a-4$
$(a-3)(a-4)=0$
따라서 a의 값은 3, 4이고, 그 합은
$3+4=7$

답 7

6 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=p$, $x=q$에서 연속이어야 한다.

(i) 함수 $|f(x)|$가 $x=p$에서 연속이면
$\lim_{x\to p-}|f(x)|=\lim_{x\to p+}|f(x)|=|f(p)|$
를 만족시킨다.

$$\lim_{x\to p-}|f(x)|=\lim_{x\to p-}\left|\frac{3}{x-5}\right|=\left|\frac{3}{p-5}\right|=-\frac{3}{p-5}$$

$\lim_{x\to p+}|f(x)|=\lim_{x\to p+}|a|=a$
$|f(p)|=a$
이므로

$$a=-\frac{3}{p-5} \quad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) 함수 $|f(x)|$가 $x=q$에서 연속이면
$\lim_{x\to q-}|f(x)|=\lim_{x\to q+}|f(x)|=|f(q)|$
를 만족시킨다.

$\lim_{x\to q-}|f(x)|=\lim_{x\to q-}|a|=a$

$\lim_{x\to q+}|f(x)|=\lim_{x\to q+}\left|\frac{3}{x-5}\right|=\left|\frac{3}{q-5}\right|=\frac{3}{q-5}$

$|f(q)|=a$

이므로

$a=\frac{3}{q-5}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{3}{p-5}=\frac{3}{q-5}$, $p-5=-q+5$

따라서 $q=10-p$이므로 $q-p=m$에서

$(10-p)-p=m$, $p=5-\frac{m}{2}$

㉠에서 $a=-\frac{3}{\left(5-\frac{m}{2}\right)-5}=\frac{6}{m}$이므로 $a_m=\frac{6}{m}$

$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{10}\frac{k}{6}=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{10}k$

$=\frac{1}{6}\times\frac{10\times 11}{2}$

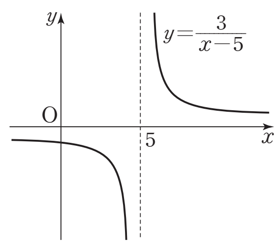
$=\frac{55}{6}$

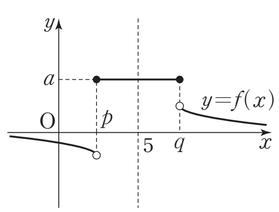
이므로 $s=6$, $t=55$이고 $s+t=6+55=61$

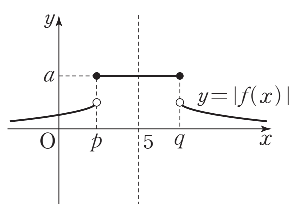
답 61

참고

함수 $y=\frac{3}{x-5}$의 그래프와 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프는 다음과 같다.







7 ㄱ. 함숫값 $\frac{1}{f(-1)}$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $\frac{1}{f(x)}$은 $x=-1$에서 불연속이다.

따라서 함수 $\frac{1}{f(x)}$은 열린구간 $(-2,\ 0)$에서 연속이 아니다. (거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to 0-}\frac{x}{f(x)}=\frac{\lim_{x\to 0-}x}{\lim_{x\to 0-}f(x)}=\frac{0}{1}=0$

$\lim_{x\to 0+}\frac{x}{f(x)}=\frac{\lim_{x\to 0+}x}{\lim_{x\to 0+}f(x)}=\frac{0}{2}=0$

$\frac{0}{f(0)}=\frac{0}{2}=0$

이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}=\frac{0}{f(0)}$, 즉 함수 $\frac{x}{f(x)}$는 $x=0$에서 연속이다.

한편, 두 열린구간 $(-1,\ 0)$, $(0,\ 1)$에서 함수 $f(x)$가 연속이고 $f(x)>0$이므로 이 두 열린구간에서 함수 $\frac{x}{f(x)}$는 연속이다. 따라서 함수 $\frac{x}{f(x)}$는 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $\lim_{x\to 1}f(x)\{f(x)-1\}=1\times(1-1)=0$

$f(1)\{f(1)-1\}=2\times(2-1)=2$

이므로 $\lim_{x\to 1}f(x)\{f(x)-1\}\neq f(1)\{f(1)-1\}$, 즉 함수 $f(x)\{f(x)-1\}$은 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 함수 $f(x)\{f(x)-1\}$은 열린구간 $(0,\ 2)$에서 연속이 아니다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ이다.

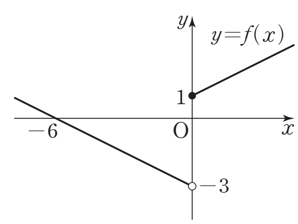
답 ②

Level 3 실력 완성

본문 28쪽

1 ⑤ **2** 9 **3** 12

1 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $g(x)=f(x)+|f(x)|+k$에서

$f(x)<0$, 즉 $-6<x<0$이면

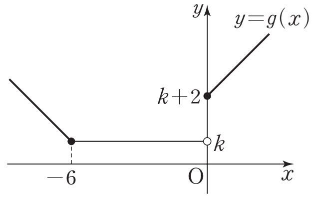
$g(x)=f(x)-f(x)+k=k$

$f(x)\ge 0$, 즉 $x\le -6$ 또는 $x\ge 0$이면

$g(x)=f(x)+f(x)+k=2f(x)+k$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.

(ⅰ) $k\ge 0$일 때,



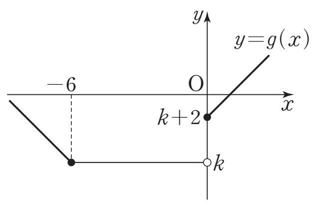
$\lim\limits_{x\to 0-}|g(x)|=|k|=k$

$\lim\limits_{x\to 0+}|g(x)|=|k+2|=k+2$

이므로 $\lim\limits_{x\to 0-}|g(x)|\ne\lim\limits_{x\to 0+}|g(x)|$

따라서 $k\ge 0$이면 함수 $|g(x)|$는 $x=0$에서 연속이 아니다.

(ⅱ) $k+2\le 0$, 즉 $k\le -2$일 때,



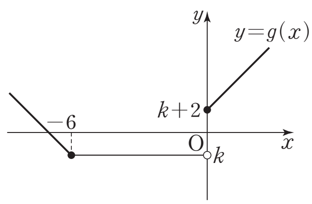
$\lim\limits_{x\to 0-}|g(x)|=|k|=-k$

$\lim\limits_{x\to 0+}|g(x)|=|k+2|=-(k+2)$

이므로 $\lim\limits_{x\to 0-}|g(x)|\ne\lim\limits_{x\to 0+}|g(x)|$

따라서 $k\le -2$이면 함수 $|g(x)|$는 $x=0$에서 연속이 아니다.

(ⅲ) $-2<k<0$일 때,



$\lim\limits_{x\to 0-}|g(x)|=|k|=-k$

$\lim\limits_{x\to 0+}|g(x)|=|k+2|=k+2$

$|g(0)|=|k+2|=k+2$

이므로 $-k=k+2$, 즉 $k=-1$일 때 함수 $|g(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $k=-1$일 때 함수 $|g(x)|$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

답 ⑤

2 조건 (가)에서 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=-3$, $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to -3-}|f(x)|=\lim\limits_{x\to -3+}|f(x)|=|f(-3)|$,

$\lim\limits_{x\to 0-}|f(x)|=\lim\limits_{x\to 0+}|f(x)|=|f(0)|$

을 모두 만족시켜야 한다.

$\lim\limits_{x\to -3-}|f(x)|=\lim\limits_{x\to -3-}|x+2|=|-3+2|=1$

$\lim\limits_{x\to -3+}|f(x)|=\lim\limits_{x\to -3+}|x^2+ax+b|=|9-3a+b|$

$|f(-3)|=|-3+2|=1$

이므로

$|9-3a+b|=1$에서 $9-3a+b=-1$ 또는 $9-3a+b=1$

$3a-b=10$ 또는 $3a-b=8$ …… ㉠

$\lim\limits_{x\to 0-}|f(x)|=\lim\limits_{x\to 0-}|x^2+ax+b|=|b|$

$\lim\limits_{x\to 0+}|f(x)|=\lim\limits_{x\to 0+}|x+2|=2$

$|f(0)|=2$

이므로 $|b|=2$에서

$b=-2$ 또는 $b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=\frac{8}{3}$, $b=-2$ 또는 $a=2$, $b=-2$ 또는

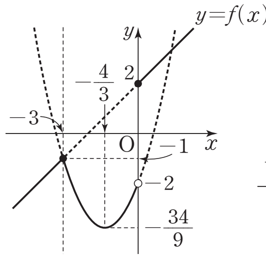
$a=4$, $b=2$ 또는 $a=\frac{10}{3}$, $b=2$

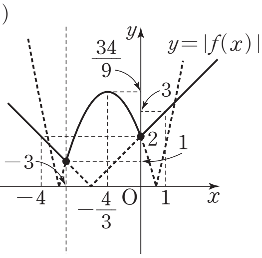
(ⅰ) $a=\frac{8}{3}$, $b=-2$일 때,

$-3<x<0$에서

$f(x)=x^2+\frac{8}{3}x-2=\left(x+\frac{4}{3}\right)^2-\frac{34}{9}$

이므로 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.





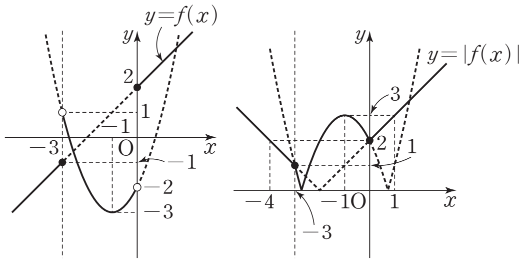
이때 $|f(-4)|=2$, $|f(1)|=3$이므로 $-4\le x\le 1$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 $\frac{34}{9}$이다.

따라서 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a=2$, $b=-2$일 때,

$-3<x<0$에서 $f(x)=x^2+2x-2=(x+1)^2-3$

이므로 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $|f(-4)|=2$, $|f(1)|=3$이므로 $-4\le x\le 1$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 3이다.

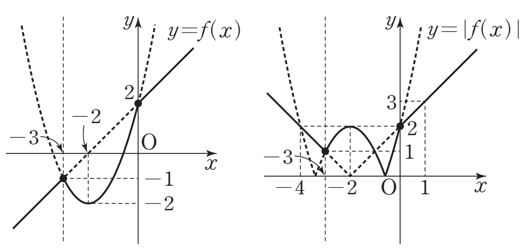
즉, 조건 (나)를 만족시킨다.

따라서 $\left|-\frac{1}{2}a+b\right|=\left|-\frac{1}{2}\times 2-2\right|=3$

(iii) $a=4$, $b=2$일 때,

$-3<x<0$에서 $f(x)=x^2+4x+2=(x+2)^2-2$

이므로 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $|f(-4)|=2$, $|f(1)|=3$이므로 $-4\le x\le 1$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 3이다.

즉, 조건 (나)를 만족시킨다.

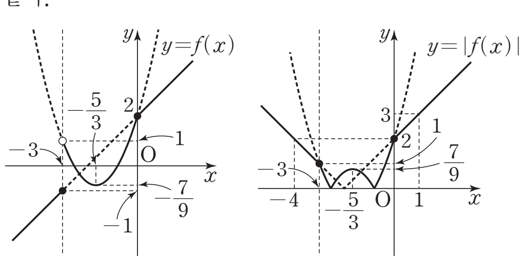
따라서 $\left|-\frac{1}{2}a+b\right|=\left|-\frac{1}{2}\times 4+2\right|=0$

(iv) $a=\frac{10}{3}$, $b=2$일 때,

$-3<x<0$에서

$f(x)=x^2+\frac{10}{3}x+2=\left(x+\frac{5}{3}\right)^2-\frac{7}{9}$

이므로 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $|f(-4)|=2$, $|f(1)|=3$이므로 $-4\le x\le 1$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 3이다.

즉, 조건 (나)를 만족시킨다.

따라서 $\left|-\frac{1}{2}a+b\right|=\left|-\frac{1}{2}\times\frac{10}{3}+2\right|=\frac{1}{3}$

(i)~(iv)에서 $\left|-\frac{1}{2}a+b\right|$의 최댓값 $M=3$이고 최솟값 $m=0$이므로

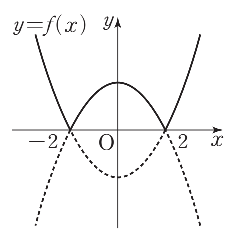
$3(M+m)=3\times(3+0)=9$

답 9

3 $f(x)=\left|\frac{1}{2}x^2-2\right|$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+2)(x-2) & (x\le -2 \text{ 또는 } x\ge 2)\\ -\frac{1}{2}(x+2)(x-2) & (-2<x<2)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



곡선 $y=\frac{1}{2}x^2-2$와 직선 $y=ax+t$가 점 $(2, 0)$에서 접할 때 a의 값을 구해 보자.

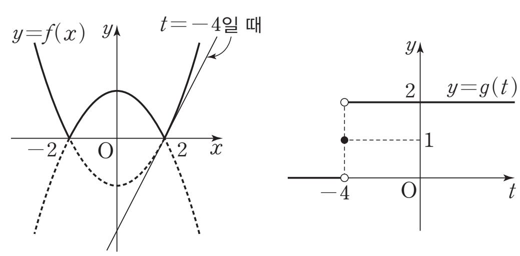
직선 $y=ax+t$가 점 $(2, 0)$을 지날 때 $0=2a+t$에서

$t=-2a$

방정식 $\frac{1}{2}x^2-2=ax-2a$, $x^2-2ax+4a-4=0$의 판별식을 D_1이라 하면 $D_1=0$이어야 하므로

$\frac{D_1}{4}=a^2-(4a-4)=(a-2)^2=0$에서 $a=2$

(i) $a=2$인 경우

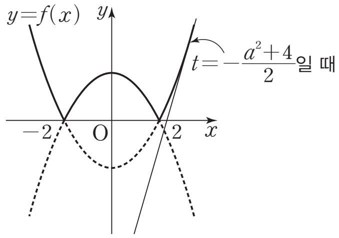


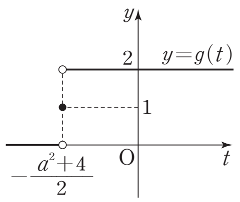
(ii) $a>2$인 경우

곡선 $y=\frac{1}{2}x^2-2$와 직선 $y=ax+t$가 접할 때 t의 값을 구해 보자.

방정식 $\frac{1}{2}x^2-2=ax+t$, $x^2-2ax-4-2t=0$의 판별식을 D_2라 하면 $D_2=0$이어야 하므로

$\frac{D_2}{4}=a^2+4+2t=0$에서 $t=-\frac{a^2+4}{2}$



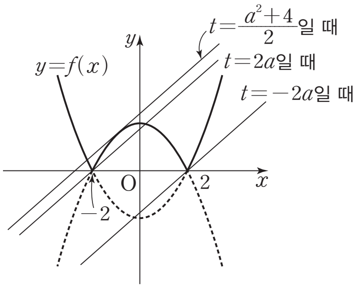


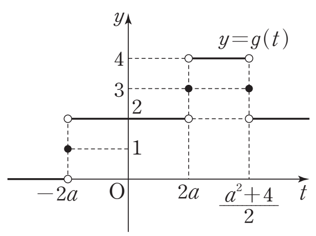
(iii) $0<a<2$인 경우

곡선 $y=-\frac{1}{2}x^2+2$와 직선 $y=ax+t$가 접할 때 t의 값을 구해 보자.

방정식 $-\frac{1}{2}x^2+2=ax+t$, $x^2+2ax+2t-4=0$의 판별식을 D_3이라 하면 $D_3=0$이어야 하므로

$\frac{D_3}{4}=a^2-(2t-4)=0$에서 $t=\frac{a^2+4}{2}$





(i), (ii), (iii)에 의하여

$0<k<2$이면 $N(k)=3$이고 $k\ge2$이면 $N(k)=1$이므로

$\sum_{k=1}^{10} N(k)=3+9\times1=12$

답 12

03 미분계수와 도함수

유제					본문 31~37쪽
1 4	**2** ③	**3** ①	**4** 28	**5** ④	
6 ②					

1 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)+3}{x-1}=7$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)+3\}=0$이고 다항함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$f(1)+3=0$에서

$f(1)=-3$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f'(1)=7$$

따라서 $f(1)+f'(1)=-3+7=4$

답 4

2 함수 $f(x)=x^2+1$에 대하여 x의 값이 1에서 4까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{17-2}{3}=5$$

$x=c$에서의 미분계수는

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$
$$=\lim_{x\to c}\frac{x^2-c^2}{x-c}$$
$$=\lim_{x\to c}\frac{(x-c)(x+c)}{x-c}$$
$$=\lim_{x\to c}(x+c)=2c$$

따라서 $2c=5$이므로

$c=\frac{5}{2}$

답 ③

3 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)$이다.

이때

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}(3x^2-x+2)=2$

$\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+}(ax+b)=b$

$f(0)=2$이므로

$b=2$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}&=\lim_{x\to0-}\frac{(3x^2-x+2)-2}{x}\\&=\lim_{x\to0-}\frac{x(3x-1)}{x}\\&=\lim_{x\to0-}(3x-1)=-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}&=\lim_{x\to0+}\frac{(ax+b)-2}{x}\\&=\lim_{x\to0+}\frac{ax}{x}=a\end{aligned}$$

이므로 $a=-1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}3x^2-x+2 & (x\le0)\\ -x+2 & (x>0)\end{cases}$이므로

$f(b)=f(2)=-2+2=0$

답 ①

4 $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=3x^2-x+4$에서

$f'(x)=3x^2-x+4$

따라서 $f'(3)=27-3+4=28$

답 28

5 $f(x)=(x^2-3)(x^2+ax-1)$에서

$f'(x)=2x\times(x^2+ax-1)+(x^2-3)\times(2x+a)$

이므로

$f'(0)=-3a=6$

$a=-2$

따라서 $f'(x)=2x\times(x^2-2x-1)+(x^2-3)\times(2x-2)$

이므로

$f'(2)=4\times(-1)+1\times2=-2$

답 ④

6 $g(x)=(x^2+1)f(x)$에서

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)$

따라서

$$\begin{aligned}g'(3)&=6f(3)+10f'(3)\\&=6\times(-1)+10\times2=-6+20=14\end{aligned}$$

답 ②

Level 1 기초 연습

본문 38~39쪽

1 ⑤	**2** ⑤	**3** ②	**4** ④	**5** 17
6 ④	**7** ③	**8** ①		

1 $$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{h}&=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\times3\\&=3f'(a)=6\end{aligned}$$

답 ⑤

2 함수 $f(x)=x^3-2x+6$에서 x의 값이 -1에서 3까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}&=\frac{(27-6+6)-(-1+2+6)}{4}\\&=\frac{27-7}{4}=\frac{20}{4}=5\end{aligned}$$

답 ⑤

3 $f(x)=(2x-3)(x^2-4x+1)$에서

$f'(x)=2\times(x^2-4x+1)+(2x-3)\times(2x-4)$이므로

$$\begin{aligned}f'(1)&=2\times(1-4+1)+(2-3)\times(2-4)\\&=-4+2=-2\end{aligned}$$

답 ②

4 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $h(x)=\begin{cases}2 & (x=0)\\ f(x) & (0<|x|\le2)\\ g(x) & (2<|x|<4)\end{cases}$는 $x\ne-2$, $x\ne0$, $x\ne2$인 열린구간 $(-4,\ 4)$의 모든 실수 x에서 미분가능하다.

(i) $x=-2$일 때,

그림에 의하여 $\lim_{x\to-2-}\frac{h(x)-h(-2)}{x+2}<0$,

$\lim_{x\to-2+}\frac{h(x)-h(-2)}{x+2}>0$이므로

$\lim_{x\to-2-}\frac{h(x)-h(-2)}{x+2}\ne\lim_{x\to-2+}\frac{h(x)-h(-2)}{x+2}$

즉, 함수 $h(x)$는 $x=-2$에서 미분가능하지 않다.

(ii) $x=0$일 때,
함수 $h(x)$가 불연속이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.
(iii) $x=2$일 때,
함수 $h(x)$가 불연속이므로 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.
따라서 함수 $h(x)$가 $x=k\ (-4<k<4)$에서 미분가능한 정수 k는 -3, -1, 1, 3으로 그 개수는 4이다.

답 ④

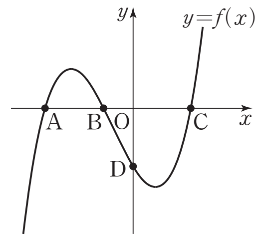
5 $f(x)=x^3+ax^2-5x+b$라 하면 곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1,\ 9)$를 지나므로
$f(-1)=-1+a+5+b=9$
$a+b=5$ …… ㉠
$f(x)=x^3+ax^2-5x+b$에서
$f'(x)=3x^2+2ax-5$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ 9)$에서의 접선의 기울기가 -10이므로
$f'(-1)=3-2a-5=-10$
$a=4$
㉠에서 $b=1$
따라서 $a^2+b^2=16+1=17$

답 17

6 $\lim_{x\to3}\frac{f(x)+4}{x-3}=2$에서 $x\to3$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to3}\{f(x)+4\}=0$이고 다항함수 $f(x)$는 연속함수이므로
$f(3)+4=0$에서
$f(3)=-4$
$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)+4}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=2$$
$g(x)=x^2f(x)$에서
$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$이므로
$$\begin{aligned}g'(3)&=6f(3)+9f'(3)\\&=6\times(-4)+9\times2\\&=-24+18=-6\end{aligned}$$

답 ④

7 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 네 점을 A, B, C, D라 하자.



네 점은 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$, $\mathrm{C}(\gamma,\ f(\gamma))$, $\mathrm{D}(0,\ f(0))$이고, 함수 $f(x)$에서 미분계수 $f'(t)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기와 같으므로
$f'(\alpha)>0$, $f'(\beta)<0$, $f'(\gamma)>0$, $f'(0)<0$
ㄱ. $f'(\beta)<0$ (참)
ㄴ. $f'(\alpha)>0$, $f'(\gamma)>0$이므로
$f'(\alpha)+f'(\gamma)>0$ (참)
ㄷ. $f'(\alpha)>0$, $-f'(\beta)>0$이므로
$f'(\alpha)-f'(\beta)=f'(\alpha)+\{-f'(\beta)\}>0$ …… ㉠
$f'(0)<0$, $-f'(\gamma)<0$이므로
$f'(0)-f'(\gamma)=f'(0)+\{-f'(\gamma)\}<0$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$\{f'(\alpha)-f'(\beta)\}\{f'(0)-f'(\gamma)\}<0$ (거짓)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

8 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하므로 $x=a$에서 연속이다.
즉, $\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)$이다.
이때
$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a-}(x^2-6x)=a^2-6a$
$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}k=k$
$f(a)=a^2-6a$
이므로
$a^2-6a=k$ …… ㉠
함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하므로
$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
이때
$$\begin{aligned}\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}&=\lim_{x\to a-}\frac{(x^2-6x)-(a^2-6a)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a-}\frac{(x-a)(x+a-6)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a-}(x+a-6)\\&=2a-6\end{aligned}$$

$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{k-(a^2-6a)}{x-a}=0$

이므로 $2a-6=0$

$a=3$

㉠에서 $k=9-18=-9$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^2-6x & (x\le 3) \\ -9 & (x>3) \end{cases}$이므로

$f(-4)+f(4)=\{(-4)^2-6\times(-4)\}+(-9)$

$=40-9=31$

답 ①

Level 2 기본 연습 본문 40~41쪽

1 ②	2 ②	3 ⑤	4 ③	5 ④
6 ③	7 ①	8 3		

1 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-5}{x^2+x-2}=3$에서 $x\to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}\{f(x)-5\}=0$이고 다항함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$f(1)-5=0$에서 $f(1)=5$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-5}{x^2+x-2}=3$에서

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-5}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x+2)}$

$=\frac{f'(1)}{3}=3$

$f'(1)=9$

$\lim_{x\to -1}\frac{f(x^2)-5}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x+1}$

$=\lim_{x\to -1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{(x+1)(x-1)}\times(x-1)\right\}$

$=\lim_{x\to -1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(-2)$

$=-2f'(1)$

$=-18$

답 ②

2 곡선 $y=(2x+1)f(x)$ 위의 점 $(2, 5)$에서의 접선의 기울기가 3이므로 $g(x)=(2x+1)f(x)$라 하면

$g(2)=5$, $g'(2)=3$

$g(2)=5f(2)=5$에서

$f(2)=1$ …… ㉠

$g'(x)=2f(x)+(2x+1)f'(x)$에서

$g'(2)=2f(2)+5f'(2)=3$

㉠을 대입하면

$f'(2)=\frac{1}{5}$

따라서 $a=1$, $b=\frac{1}{5}$이므로

$a+b=1+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$

답 ②

3 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 기울기가 양수이므로 $f(0)=0$, $f'(0)>0$이다.

$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}\times\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=x^2+4$에서

$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$

즉, $f'(0)\times f'(x)=x^2+4$

양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)\times f'(0)=4$

$f'(0)>0$이므로

$f'(0)=2$

$f'(x)=\frac{x^2}{2}+2$

따라서 $f'(4)=8+2=10$

답 ⑤

4 조건 (가)에서 $f(-1)=5$, $f'(-1)=2$이다.

조건 (나)에서 $g(1)=f(-1)=5$

$g'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1-h)-f(-1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1-h)-f(-1)}{-h}\times(-1)$

$=-f'(-1)=-2$

따라서 $g(1)+g'(1)=5+(-2)=3$

답 ③

5 $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=2$에서 $x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}g(x)=0$이고 함수 $g(x)=|x+1|f(x)$는 연속함수이므로 $g(0)=0$에서 이차함수 $f(x)=ax^2+bx$ (a, b는 상수)라 할 수 있다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{|x+1|(ax^2+bx)}{x}\\&=\lim_{x\to0}|x+1|(ax+b)\\&=b\end{aligned}$$

이므로 $b=2$

함수 $g(x)=\begin{cases}-(x+1)(ax^2+2x) & (x\le-1)\\(x+1)(ax^2+2x) & (x>-1)\end{cases}$이

$x=-1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to-1-}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1+}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1-}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}&=\lim_{x\to-1-}\frac{-(x+1)(ax^2+2x)}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1-}(-ax^2-2x)\\&=-a+2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1+}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}&=\lim_{x\to-1+}\frac{(x+1)(ax^2+2x)}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1+}(ax^2+2x)\\&=a-2\end{aligned}$$

이므로 $-a+2=a-2$에서

$a=2$

따라서 함수 $g(x)=\begin{cases}-(x+1)(2x^2+2x) & (x\le-1)\\(x+1)(2x^2+2x) & (x>-1)\end{cases}$

에서

$g(1)=2\times4=8$

답 ④

6 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에서 $f(0)=2$이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ (a, b는 상수)라 하자.

$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서

$f'(0)=b=0$

방정식 $f(x)=2$에서

$f(x)-2=0$

$x^3+ax^2=0$

$x^2(x+a)=0$

$x=0$ 또는 $x=-a$

방정식 $f(x)=2$의 실근이 0, $-a$이므로

$-a=5$

$a=-5$

따라서 $f(x)=x^3-5x^2+2$이므로

$f(3)=27-45+2=-16$

답 ③

7 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=1$에서도 미분가능하다.

즉, $x=1$에서 연속이므로 $g(1)=\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1+}g(x)$이다.

$f(x)=x^2+bx+c$ (b, c는 상수)라 하면

$g(1)=f(1)=1+b+c$

$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1-}(x^2+bx+c)=1+b+c$

이므로

$\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1+}\frac{2x+a}{x-1}=1+b+c$

$x\to1+$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1+}(2x+a)=0$이므로

$2+a=0$에서 $a=-2$

이때 $\lim_{x\to1+}\frac{2x-2}{x-1}=2$이므로

$1+b+c=2$

$b+c=1$ …… ㉠

함수 $g(x)=\begin{cases}x^2+bx+c & (x\le1)\\2 & (x>1)\end{cases}$은 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1-}\frac{(x^2+bx+c)-(1+b+c)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x+1+b)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}(x+1+b)\\&=2+b\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{2-(1+b+c)}{x-1}=0$$

이므로 $2+b=0$

$b=-2$

㉠에 대입하면 $c=3$

따라서 $g(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 & (x\le1)\\2 & (x>1)\end{cases}$이므로

$g(a)=g(-2)=4+4+3=11$

답 ①

8 $f(x+y)=f(x)+f(y)+ax^2y+axy^2+bxy-1$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1$에서 $f(0)=1$

$f'(x)$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\{f(x)+f(h)+ax^2h+axh^2+bxh-1\}-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-1+ax^2h+axh^2+bxh}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\left\{\dfrac{f(h)-f(0)}{h}+ax^2+axh+bx\right\}$

$=f'(0)+ax^2+bx$

함수 $f'(x)=f'(0)+ax^2+bx$가 이차함수이므로

조건 (나)에서 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 15)$인 포물선이다.

$f'(x)=a(x-1)^2+15$

$f'(0)+f'(-2)=(a+15)+(9a+15)=0$

$10a+30=0$

$a=-3$

$f'(x)=-3(x-1)^2+15=-3x^2+6x+12$

따라서 $b=6$이므로

$f'(a+b)=f'(3)=-12+15=3$

답 3

Level 3 실력 완성 본문 42쪽

1 4 **2** ① **3** 22

1 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f(x)}{h}\times\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g\left(x-\frac{h}{3}\right)-g(x)}{h}$

$=-x^3-x^2+2$

에서

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f\left(x+\frac{h}{2}\right)-f(x)}{\frac{h}{2}}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{f'(x)}{2}$

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g\left(x-\frac{h}{3}\right)-g(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g\left(x-\frac{h}{3}\right)-g(x)}{-\frac{h}{3}}\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{g'(x)}{3}$

$-x^3-x^2+2=-(x-1)(x^2+2x+2)$

이므로

$f'(x)g'(x)=6(x-1)(x^2+2x+2)$ …… ㉠

최고차항의 계수가 정수인 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 $3\times$(정수)인 이차함수이고, 최고차항의 계수가 정수인 이차함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$는 최고차항의 계수가 $2\times$(정수)인 일차함수이다.

또, 이차함수 $f'(x)$가 최솟값을 가지므로 이차항의 계수는 0보다 크다. 즉, $f'(x)$의 이차항의 계수는 3의 배수인 자연수이다.

㉠에서

$f'(x)=3(x^2+2x+2)=3(x+1)^2+3$

$g'(x)=2(x-1)$

따라서 함수 $f'(x)$의 최솟값은 $m=3$이므로

$g'(m)=g'(3)=2\times2=4$

답 4

2 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=-2$, $x=2$에서도 미분가능하다.

즉, $x=-2$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to-2}g(x)=g(-2)$이고, $x=2$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to2}g(x)=g(2)$이다.

(i) $\lim\limits_{x\to-2}g(x)=g(-2)$에서

$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)}{x^2-4}=2+a$

$x\to-2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=0$이고 사차함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$f(-2)=0$

따라서 $f(x)$는 $x+2$를 인수로 갖는다.

(ii) $\lim\limits_{x\to2}g(x)=g(2)$에서

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{x^2-4}=-2+a$

$x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to2}f(x)=0$이고 사차함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$f(2)=0$

따라서 $f(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(x)=(px^2+qx+r)(x+2)(x-2)$ (p, q, r는 상수)로 놓을 수 있다.

$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-3}{f(x)}=\frac{1}{4}$에서 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{g(x)-3\}=0$이고 함수 $g(x)$는 연속함수이므로

$g(2)-3=0$에서

$g(2)=3$

$-2+a=3$

$a=5$

따라서 $g(x)=\begin{cases} px^2+qx+r & (|x|\neq 2) \\ -x+5 & (|x|=2) \end{cases}$

$\lim_{x\to -2}g(x)=g(-2)$에서

$\lim_{x\to -2}(px^2+qx+r)=7$

$4p-2q+r=7$ …… ㉠

$\lim_{x\to 2}g(x)=g(2)$에서

$\lim_{x\to 2}(px^2+qx+r)=3$

$4p+2q+r=3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$q=-1$

$4p+r=5$

$g(x)=px^2+qx+r$에 $q=-1$, $r=5-4p$를 대입하면

$g(x)=px^2-x+5-4p$

$g'(x)=2px-1$

$f(x)=(px^2-x+5-4p)(x^2-4)$에서

$f'(x)=(2px-1)(x^2-4)+(px^2-x+5-4p)\times 2x$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-3}{f(x)}&=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{g(x)-3}{x-2}\times\frac{x-2}{f(x)}\right\}\\&=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{g(x)-g(2)}{x-2}\times\frac{1}{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}}\right\}\\&=g'(2)\times\frac{1}{f'(2)}\\&=(4p-1)\times\frac{1}{12}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$p=1$, $r=1$

따라서 $|x|\neq 2$일 때, $g(x)=x^2-x+1$이므로

$g(a)=g(5)=25-5+1=21$

답 ①

3 조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 임의의 두 점을 지나는 직선의 기울기가 2로 일정하므로 함수 $f(x)$는 기울기가 2인 일차함수이다.

또 조건 (나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$f(x)=2(x-1)+3=2x+1$

함수 $h(x)=g(x)-(2x+1)$이라 하자.

함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$h(\alpha)=0$이고, $x\to\alpha+$일 때 $h(x)$가 0보다 큰 값에서 0에 가까워지며 $x\to\alpha-$일 때 $h(x)$가 0보다 작은 값에서 0에 가까워지는 실수 α가 존재한다.

즉, $\lim_{x\to\alpha+}\frac{h(x)}{x-\alpha}\geq 0$, $\lim_{x\to\alpha-}\frac{h(x)}{x-\alpha}\geq 0$

함수 $|h(x)|$에 대하여 $|h(\alpha)|=0$이고, $x\to\alpha+$일 때와 $x\to\alpha-$일 때 모두 $|h(x)|$가 0보다 큰 값에서 0에 가까워진다.

즉, $\lim_{x\to\alpha+}\frac{|h(x)|}{x-\alpha}\geq 0$, $\lim_{x\to\alpha-}\frac{|h(x)|}{x-\alpha}\leq 0$

함수 $|h(x)|=|f(x)-g(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=\alpha$에서 미분가능하다.

$\lim_{x\to\alpha+}\frac{|h(x)|}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha-}\frac{|h(x)|}{x-\alpha}=0$

이므로 $h'(\alpha)=0$

즉, $h(\alpha)=0$이면 $h'(\alpha)=0$ …… ㉠

조건 (나)에서 $g(1)=3$이므로

$h(1)=0$

그러므로 $h'(1)=0$이므로 $h(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다.

$h(x)=(x-1)^2(x+k)$ (k는 상수)

이때 $h(-k)=0$이므로 ㉠에 의하여 $h'(-k)=0$이어야 한다. 즉, $h(x)$가 $(x+k)^2$을 인수로 가져야 하므로 k의 값은 -1만 가능하다.

따라서 $h(x)=(x-1)^3$이므로

$g(x)=(x-1)^3+2x+1$

$f(3)+g(3)=(6+1)+(8+6+1)=22$

답 22

04 도함수의 활용 (1)

유제 본문 45~51쪽

1 ⑤	2 ⑤	3 14	4 21	5 ⑤
6 12	7 ②			

1 점 $(2, 3)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(2)=16+2a+3=3$

$a=-8$

$f(x)=x^4-8x+3$에서

$f'(x)=4x^3-8$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선의 기울기가

$f'(2)=32-8=24$

이므로 접선의 방정식은

$y=24(x-2)+3$, 즉 $y=24x-45$

따라서 y절편은 -45이다.

답 ⑤

2 함수 $f(x)=-x^4+x^2+3$에서

$f'(x)=-4x^3+2x$이므로

$f'(c)=0$에서

$-4c^3+2c=0$

$c(2c^2-1)=0$

$c=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $c=0$ 또는 $c=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0<c<1$이므로

$c=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 ⑤

참고

함수 $f(x)=-x^4+x^2+3$은 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$에서 미분가능하다.

또한, $f(0)=f(1)=3$이므로 롤의 정리에 의하여

$f'(c)=0$인 상수 c가 열린구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

3 다항함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[1, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(c)$

를 만족시키는 상수 c가 열린구간 $(1, 4)$에 적어도 하나 존재한다.

$1<x<4$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 3$이므로

$f'(c)\le 3$

이때 $f'(c)=\frac{f(4)-5}{3}$이므로

$\frac{f(4)-5}{3}\le 3$

$f(4)\le 14$

따라서 $f(4)$의 최댓값은 14이다.

답 14

참고

$f(x)=3x+2$이면 함수 $f(x)$는 주어진 조건을 만족시키고 $f(4)=14$이다.

4 $f(x)=x^3-x^2+ax+2$에서

$f'(x)=3x^2-2x+a$

함수 $f(x)$가 일대일대응이고 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이므로 이차방정식 $3x^2-2x+a=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이다.

$\frac{D}{4}=1-3a\le 0$

$a\ge\frac{1}{3}$

$$f(3)=27-9+3a+2 \\ \ge 20+3\times\frac{1}{3} \\ =21$$

따라서 $f(3)$의 최솟값은 21이다.

답 21

5 $f(x)=(x^2-a)(x-a)$에서

$f'(x)=2x(x-a)+(x^2-a)=3x^2-2ax-a$

함수 $f(x)$가 $x_1<x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$를 만족시키므로 실수 전체의 집합에서 증가한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이므로 이차방정식 $3x^2-2ax-a=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le 0$이다.

$\frac{D}{4}=a^2+3a\le 0$

$-3\le a\le 0$

따라서 구하는 정수 a는 -3, -2, -1, 0이므로 그 합은

$(-3)+(-2)+(-1)+0=-6$

답 ⑤

6 $f(x)=x^4+ax+b$에서

$f'(x)=4x^3+a$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극솟값 5를 가지므로

$f'(-1)=0$에서

$-4+a=0$

$a=4$

$f(-1)=5$에서

$1-4+b=5$

$b=8$

따라서 $a+b=12$

답 12

7 $f(x)=x^3-3x^2-9x+k$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 접하려면 극댓값 또는 극솟값이 0이어야 하므로

$f(-1)=-1-3+9+k=0$에서 $k=-5$

$f(3)=27-27-27+k=0$에서 $k=27$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-5+27=22$

답 ②

Level 1 기초 연습 본문 52~53쪽

1 ①	2 ④	3 ④	4 ①	5 ②
6 2	7 ②	8 ①		

1 $f(x)=2x^3-x^2$이라 하면

$f'(x)=6x^2-2x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기가

$f'(1)=6-2=4$

이므로 접선의 방정식은

$y=4(x-1)+1$

$y=4x-3$

따라서 접선의 x절편이 $\frac{3}{4}$이고 y절편이 -3이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times3=\frac{9}{8}$

답 ①

2 $f(x)=4x^2-x+1$에서

$f'(x)=8x-1$

$f(1)-f(0)=4-1=8c-1$

따라서 $c=\frac{1}{2}$

답 ④

참고

함수 $f(x)=4x^2-x+1$은 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$

인 상수 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

3 $f(x)=x^3-3x+2$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 $a=-1$, $b=1$이므로

$f(a)-f(b)=f(-1)-f(1)$

$=(-1+3+2)-(1-3+2)$

$=4$

답 ④

4 $f(x)=-2x^3+5x^2+ax$에서

$f'(x)=-6x^2+10x+a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le0$이다.

이차방정식 $-6x^2+10x+a=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=25+6a\le0$

$a\le-\frac{25}{6}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $-\frac{25}{6}$이다.

답 ①

5 $f(x)=x^4-x+5$라 하면

$f'(x)=4x^3-1$

직선 $y=-\frac{x}{3}+1$과 수직인 직선의 기울기는 3이므로 접점의 x좌표를 t라 하면

$f'(t)=3$

$4t^3-1=3$

$t^3-1=0$

$(t-1)(t^2+t+1)=0$

$t=1$

접점의 좌표가 $(1, 5)$이므로 접선의 방정식은

$y=3(x-1)+5$

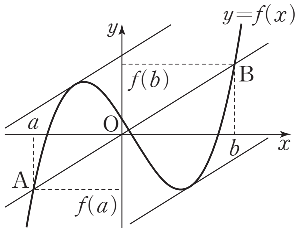
$y=3x+2$

따라서 구하는 y절편은 2이다.

답 ②

6 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$에서 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 두 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$, $\mathrm{B}(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기와 같고, $f'(c)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(c, f(c))$에서의 접선의 기울기와 같다.

그림과 같이 직선 AB의 기울기와 같고 곡선 $y=f(x)$와 접하는 직선의 개수가 2이다.



따라서 구하는 상수 c의 개수는 접점의 개수와 같으므로 2이다.

답 2

참고

삼차함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

인 상수 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

7 $f(x)=x^4-8x^3+1$에서

$f'(x)=4x^3-24x^2$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하고 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$는 구간 $[k, \infty)$에서 증가한다.

즉, $x\geq k$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이다.

$4x^3-24x^2\geq 0$

$x^2(x-6)\geq 0$

모든 실수 x에 대하여 $x^2\geq 0$이므로

$x-6\geq 0$

$x\geq 6$

$x\geq 6$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이므로 $k\geq 6$이다.

따라서 실수 k의 최솟값은 6이다.

답 ②

8 함수 $f(x)=x^3+x+1$에서

$f'(x)=3x^2+1$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(1, 3)$에서의 접선 l의 방정식은

$y=4(x-1)+3$

$y=4x-1$

곡선 $y=2x^3+ax^2+b$가 직선 $y=4x-1$과 점 $\mathrm{A}(1, 3)$에서 접하므로 $g(x)=2x^3+ax^2+b$라 하면

$g'(1)=4$, $g(1)=3$

$g'(x)=6x^2+2ax$에서

$g'(1)=6+2a=4$

$a=-1$

또, $g(1)=2+a+b=3$에서

$b=2$

따라서 $ab=-2$이므로

$f(ab)=f(-2)$

$\quad=-8-2+1=-9$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 54~55쪽

1 ①	2 ⑤	3 ①	4 24	5 ⑤
6 ③	7 ③	8 ④		

1 $f(x)=x^3+ax+b$에서

$f'(x)=3x^2+a$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극소이므로

$f'(2)=0$

$12+a=0$

$a=-12$

$f'(x)=3x^2-12=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(-2)=9$이므로

$-8+24+b=9$, $b=-7$

따라서 $a+b=-19$

답 ①

2 $y=x^3-3tx^2+tx$에서

$y'=3x^2-6tx+t$

$=3(x^2-2tx+t^2)-3t^2+t$

$=3(x-t)^2-3t^2+t$

곡선 $y=x^3-3tx^2+tx$에 접하는 직선의 기울기는 $x=t$일 때 최솟값 $-3t^2+t$를 갖고, 이때 접점의 좌표는

$(t, -2t^3+t^2)$이므로 접선의 방정식은

$y=(-3t^2+t)(x-t)-2t^3+t^2$

$=(-3t^2+t)x+t^3$

이 직선의 y절편은 t^3이므로

$f(t)=t^3$

$f'(t)=3t^2$

따라서

$f(2)+f'(2)=8+12=20$

답 ⑤

3 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x가 모두 양수이므로 이차방정식 $3x^2+2ax+b=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha>0$, $\beta>0$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{2a}{3}>0$, $\alpha\beta=\dfrac{b}{3}>0$

이므로

$a<0$, $b>0$

한편, $f(0)=c>0$

ㄱ. $b>0$ (참)

ㄴ. $a<0$, $c>0$이므로

$ac<0$ (거짓)

ㄷ. $f(-1)=-1+a-b+c=0$

$b-c=a-1<0$

$ac+b^2>ab+bc$에서

$b^2-(a+c)b+ac>0$

$(b-a)(b-c)>0$인지를 확인하면 된다.

이때 $b-a>0$, $b-c<0$이므로

$(b-a)(b-c)<0$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

답 ①

4 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로 $f(0)=0$이다.

다항함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$

인 상수 c가 열린구간 $(0, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

모든 실수 x에 대하여 $|f'(x)|\le 4$이므로 $|f'(c)|\le 4$

이때 $f'(c)=\dfrac{f(3)}{3}$이므로

$\left|\dfrac{f(3)}{3}\right|\le 4$

$-4\le\dfrac{f(3)}{3}\le 4$

$-12\le f(3)\le 12$

따라서 $f(3)$의 최댓값은 $M=12$, 최솟값은 $m=-12$이므로

$M-m=24$

답 24

참고

$f(x)=4x$이면 함수 $f(x)$는 주어진 조건을 만족시키고 $f(3)=12$이다.

또 $f(x)=-4x$이면 함수 $f(x)$는 주어진 조건을 만족시키고 $f(3)=-12$이다.

5 삼각형 ABP에서 선분 AB를 밑변으로 하면 높이가 최소일 때 넓이가 최소가 된다.

즉, 점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발까지의 거리가 최소일 때이므로 직선 AB와 평행하고 곡선

$y=\dfrac{-3x^4+2x^2+7}{6}$에 접하는 직선의 접점이 점 P일 때 삼각형 ABP의 넓이는 최소가 된다.

$f(x)=\dfrac{-3x^4+2x^2+7}{6}$이라 하면

$f'(x)=\dfrac{-12x^3+4x}{6}=\dfrac{-6x^3+2x}{3}$

접점 P의 x좌표를 t라 하면 직선 AB의 기울기가 $\frac{4}{3}$이므로

$f'(t)=\frac{4}{3}$

$\frac{-6t^3+2t}{3}=\frac{4}{3}$

$3t^3-t+2=0$

$(t+1)(3t^2-3t+2)=0$

이때 $3t^2-3t+2=0$은 허근을 가지므로 $t=-1$

따라서 접점 P의 좌표는 $(-1, 1)$이다.

직선 AB의 방정식은 $y=\frac{4}{3}x+4$

$4x-3y+12=0$

따라서 삼각형 ABP의 높이의 최솟값은 점 $(-1, 1)$과 직선 $4x-3y+12=0$ 사이의 거리와 같으므로 삼각형 ABP의 넓이의 최솟값은

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\frac{|4\times(-1)-3\times1+12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$

$=\frac{1}{2}\times5\times\frac{5}{5}$

$=\frac{5}{2}$

답 ⑤

6 $f(x)=x^3+ax^2-1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax$

함수 $f(x)$가 감소할 때 $f'(x)\le0$이므로

$3x^2+2ax\le0$

$x(3x+2a)\le0$

이때 $a>0$이므로

$-\frac{2a}{3}\le x\le0$

함수 $f(x)$가 열린구간 $(k, k+2)$에서 감소하므로

$-\frac{2a}{3}\le k$, $k+2\le0$

$-\frac{2a}{3}\le k\le-2$를 만족시키는 k의 값이 존재해야 하므로

$-\frac{2a}{3}\le-2$

$a\ge3$

$f(1)=1+a-1=a$

이므로 $f(1)$의 값이 최소가 되는 a의 값은 3이다.

이때 $f(x)=x^3+3x^2-1$이고, $k=-2$이므로

$f(k)=f(-2)$

$\quad=-8+12-1=3$

답 ③

7 다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 $n=2, 4, 6, 8$일 때,

$f(n)f(n+2)<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여

$f(k_n)=0\ (n<k_n<n+2)$

인 상수 $k_n\ (n=2, 4, 6, 8)$이 존재한다.

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고

$f(k_2)=f(k_4)$, $f(k_4)=f(k_6)$, $f(k_6)=f(k_8)$

이므로 롤의 정리에 의하여

$f'(c_1)=0\ (k_2<c_1<k_4)$

$f'(c_2)=0\ (k_4<c_2<k_6)$

$f'(c_3)=0\ (k_6<c_3<k_8)$

인 상수 c_1, c_2, c_3이 적어도 하나씩 존재한다.

따라서 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수의 최솟값은 3이다.

답 ③

8 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, f(0))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(0)\times x+f(0)$

이고, 이 직선이 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$0=-f'(0)+f(0)$

즉, $f(0)=f'(0)$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 실수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서

$f(0)=c$, $f'(0)=b$이므로

$c=b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

함수 $f(x)$가 일대일함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이므로 이차방정식 $3x^2+2ax+b=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=a^2-3b\le0$

$b\ge\frac{a^2}{3}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$f(2)=8+4a+2b+c$

$\quad\ge8+4a+a^2$

$\quad=(a+2)^2+4$

$\quad\ge4$

따라서 $f(2)$의 최솟값은 4이다.

답 ④

Level 3 실력 완성

본문 56~57쪽

1 ② 2 ⑤ 3 ④ 4 11 5 ⑤

1 점 P(2, 1)이 곡선 $y=(-2x+5)f(x)$ 위의 점이므로

$(-4+5)f(2)=1$

$f(2)=1$

$g(x)=(-2x+5)f(x)$라 하면

$g'(x)=-2f(x)+(-2x+5)f'(x)$

곡선 $y=(-2x+5)f(x)$ 위의 점 P(2, 1)에서의 접선 l의 기울기는

$g'(2)=-2f(2)+(-4+5)f'(2)=-2+3=1$

원 C_1은 중심이 점 A이고, 직선 l과 점 P에서 접하므로 직선 AP가 직선 l과 수직이다.

즉, 직선 AP는 기울기가 -1이고, 점 P(2, 1)을 지나므로 직선 AP의 방정식은

$y=-(x-2)+1$

$y=-x+3$

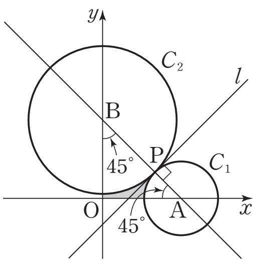
직선 AP와 x축의 교점이 점 A이므로 원 C_1은 중심이 A(3, 0)이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{2}$이다.

또 원 C_2는 중심이 점 B이고, 직선 l과 점 P에서 접하므로 직선 BP가 직선 l과 수직이다.

즉, 직선 BP는 기울기가 -1이고, 점 P(2, 1)을 지나므로 직선 AP와 같다.

직선 $y=-x+3$과 y축의 교점이 점 B이므로 원 C_2는 중심이 B(0, 3)이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{BP}}=2\sqrt{2}$이다.

직선 $y=-x+3$이 x축, y축과 이루는 예각의 크기가 각각 45°이므로 두 원 C_1, C_2의 외부와 삼각형 OAB의 내부의 공통부분은 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}-\left(\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}}^2\times\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BP}}^2\times\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{1}{2}\times3\times3-\left\{\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2})^2\times\frac{\pi}{4}\right\}$

$=\frac{9}{2}-\frac{5\pi}{4}$

$=\frac{18-5\pi}{4}$

답 ②

2 $h(x)=f(x)g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

ㄱ. 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(0, h(0))$에서의 접선의 기울기는

$h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$
$=f'(0)g(0)+0\times g'(0)$
$=f'(0)g(0)$

이때 $f'(0)<0$, $g(0)<0$이므로 $h'(0)=f'(0)g(0)>0$

따라서 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(0, h(0))$에서의 접선의 기울기는 양수이다. (참)

ㄴ. $h'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$
$=0\times g(a)+f(a)g'(a)$
$=f(a)g'(a)$

이때 $f(a)<0$, $g'(a)>0$이므로

$h'(a)=f(a)g'(a)<0$ …… ㉠

$h'(c)=f'(c)g(c)+f(c)g'(c)$
$=f'(c)g(c)+0\times g'(c)$
$=f'(c)g(c)$

이때 $f'(c)>0$, $g(c)>0$이므로

$h'(c)=f'(c)g(c)>0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $h'(x)$의 부호가 음(−)에서 양(+)으로 바뀌므로 함수 $h(x)$가 극소인 실수 x는 열린구간 (a, c)에 존재한다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 $h'(0)>0$이고, ㄴ의 ㉠에 의하여 $h'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $h(x)$가 극대인 실수 x가 열린구간 $(0, a)$에 존재한다.

함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 음수인 사차함수이므로 극값을 갖는 실수 x는 최대 3개이다. 이때 열린구간 $(0, a)$에 극대인 실수 x가 존재하고, 열린구간 (a, c)에 극소인 실수 x가 존재하므로 ㉡에 의하여 구간 (c, ∞)에 극대인 실수 x가 존재한다.

$h'(e)=f'(e)g(e)+f(e)g'(e)$
$=f'(e)\times0+f(e)g'(e)$
$=f(e)g'(e)$

이때 $f(e)>0$, $g'(e)<0$이므로

$h'(e)=f(e)g'(e)<0$ …… ㉢

㉡, ㉢에 의하여 $h'(x)$의 부호가 양(+)에서 음(−)으로 바뀌므로 함수 $h(x)$가 극대인 실수 x는 열린구간 (c, e)에 존재한다.

따라서 함수 $h(x)$가 극값을 갖는 실수 x는 모두 열린구간 $(0,\ e)$에 존재한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

3 $g(x)=-x^2+ax+b$, $h(x)=x^3+cx-2|x-c|$라 하자.

두 함수 $g(x)$, $h(x)$가 모두 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0+} f(x)=f(0)$이다.

이때

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-} (-x^2+ax+b)=b$

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+} h(x)$

$=\lim_{x\to 0+} (x^3+cx-2|x-c|)=-2c$

$f(0)=g(0)=b$

이므로

$b=-2c$

조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하므로 $x<0$, $0<x<c$, $x>c$일 때 각각 $f'(x)\ge 0$이다.

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+ax+b & (x\le 0) \\ x^3+(c+2)x-2c & (0<x\le c) \\ x^3+(c-2)x+2c & (x>c) \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} -2x+a & (x<0) \\ 3x^2+(c+2) & (0<x<c) \\ 3x^2+(c-2) & (x>c) \end{cases}$$

(i) $x<0$일 때,

$f'(x)=-2x+a$에서 $f'(x)=-2x+a>a$이므로 $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이려면

$a\ge 0$

(ii) $0<x<c$일 때,

$f'(x)=3x^2+(c+2)$에서 $c>0$이므로 $0<x<c$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이다.

(iii) $x>c$일 때,

$f'(x)=3x^2+(c-2)$에서 $x>c$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이려면 $c>0$이므로

$f'(c)\ge 0$

$3c^2+c-2\ge 0$

$(c+1)(3c-2)\ge 0$

$c\le -1$ 또는 $c\ge \frac{2}{3}$

이때 $c>0$이므로 $c\ge \frac{2}{3}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $a\ge 0$, $c\ge \frac{2}{3}$이므로

$f(-1)=-1-a-2c$

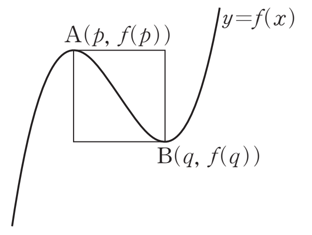
$\le -1-0-\frac{4}{3}$

$=-\frac{7}{3}$

따라서 $f(-1)$의 최댓값은 $-\frac{7}{3}$이다.

답 ④

4 $p<q$이고, $x=p$에서 극대이고 $x=q$에서 극소이므로 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



정사각형의 넓이가 4이므로

$p=q-2$ …… ㉠

$f(p)=f(q)+2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$f(q-2)=f(q)+2$

$a(q-2)^3+b(q-2)^2+c(q-2)+2$

$=aq^3+bq^2+cq+2+2$

$a(-6q^2+12q-8)+b(-4q+4)-2c=2$ …… ㉢

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$에서

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(p)=0$, $f'(q)=0$이므로 p, q가 이차방정식 $3ax^2+2bx+c=0$의 두 실근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$p+q=-\frac{2b}{3a}$ …… ㉣

$pq=\frac{c}{3a}$ …… ㉤

㉠, ㉣, ㉤에 의하여

$b=-3a(q-1)$, $c=3aq(q-2)$

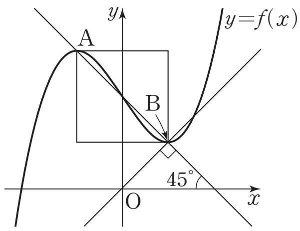
이므로 ㉢에 대입하면

$a(-6q^2+12q-8)-3a(q-1)(-4q+4)-2\times 3aq(q-2)$
$=2$

$a\{(-6q^2+12q-8)+12(q^2-2q+1)-6(q^2-2q)\}=2$

$4a=2$

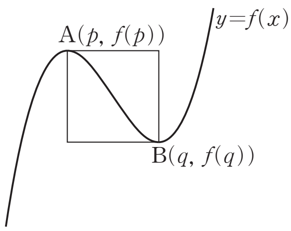
$a=\frac{1}{2}$



그림의 사각형은 네 변이 각각 x축 또는 y축과 평행한 정사각형이므로 직선 AB의 기울기가 -1이다.
즉, 점 B$(q,\ f(q))$를 지나고 직선 AB에 수직인 직선의 방정식은
$y=(x-q)+f(q)$
이고, 원점을 지나므로
$f(q)=q$
$aq^3+bq^2+cq+2=q$
$\frac{1}{2}q^3-\frac{3}{2}(q-1)\times q^2+\frac{3}{2}q(q-2)\times q+2=q$
$\frac{1}{2}q^3-\frac{3}{2}q^2-q+2=0$
$\frac{1}{2}(q-1)(q^2-2q-4)=0$
이때 q는 유리수이므로 $q=1$
$b=0,\ c=-\frac{3}{2}$
따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x+2$이므로
$f(3)=11$

답 11

다른 풀이
$p<q$이고, $x=p$에서 극대이고 $x=q$에서 극소이므로 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



정사각형의 넓이가 4이므로
$p=q-2,\ f(p)=f(q)+2$ …… ㉠
점 B$(q,\ f(q))$를 지나고 직선 AB에 수직인 직선의 방정식은
$y=(x-q)+f(q)$
이 직선은 원점을 지나므로
$f(q)=q$ …… ㉡

함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-q$만큼, y축의 방향으로 $-q$만큼 평행이동한 함수의 그래프를 $y=g(x)$라 하자.
㉡에 의하여 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 극솟값 0을 가지므로
$g(0)=0,\ g'(0)=0$
$g(x)=ax^2(x+k)$ (k는 상수)로 놓을 수 있다.
$g'(x)=2ax(x+k)+ax^2$
또 ㉠에 의하여 함수 $g(x)$가 $x=-2$에서 극댓값 2를 가지므로
$g(-2)=2$에서 $g(-2)=4a(-2+k)$이므로
$4a(-2+k)=2$ …… ㉢
$g'(-2)=0$에서 $g'(-2)=-4a(-2+k)+4a$이므로
$4a(3-k)=0$ …… ㉣
㉢, ㉣을 연립하면
$a=\frac{1}{2},\ k=3$
이므로
$g(x)=\frac{1}{2}x^2(x+3)$
이때 $f(x)=g(x-q)+q$이므로
$f(x)=\frac{1}{2}(x-q)^2(x-q+3)+q$
또 $f(0)=2$이므로
$f(0)=\frac{1}{2}q^2(3-q)+q=2$
$q^3-3q^2-2q+4=0$
$(q-1)(q^2-2q-4)=0$
이때 q는 유리수이므로
$q=1$
따라서 $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2(x+2)+1$이므로
$f(3)=\frac{1}{2}\times 2^2\times 5+1=11$

5 ㄱ. 다항함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여
$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=f'(c_1)$, 즉 $f'(c_1)=-\frac{5}{2}$
인 상수 c_1이 열린구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.
또, 다항함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(1,\ 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여
$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f'(c_2)$, 즉 $f'(c_2)=1$
인 상수 c_2가 열린구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(c_1)<0$, $f'(c_2)>0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f'(x)=0$인 실수 x가 열린구간 (c_1, c_2)에 적어도 하나 존재한다.

방정식 $f'(x)=0$의 실근은 a뿐이므로 $c_1<a<c_2$이다.

이때 $-1<c_1<1$, $1<c_2<2$이므로

$-1<a<2$ (참)

ㄴ. 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{g(1)-g(-1)}{1-(-1)}=g'(c_3)$, 즉

$g'(c_3)=\dfrac{2f(1)-2f(-1)}{2}=-5$

인 상수 c_3이 열린구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

또, 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{g(2)-g(1)}{2-1}=g'(c_4)$, 즉

$g'(c_4)=\dfrac{5f(2)-2f(1)}{1}=5$

인 상수 c_4가 열린구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $|g'(c)|=5$를 만족시키는 실수 c가 두 열린구간 $(-1, 1)$, $(1, 2)$에 적어도 하나씩 존재하므로 열린구간 $(-1, 2)$에 적어도 2개 존재한다. (참)

ㄷ. $g(x)=(x^2+1)f(x)$에서

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)$

$a>1$이면 ㄱ에 의하여 $1<a<2$이고, 구간 $(-\infty, a)$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 감소하고, 구간 (a, ∞)에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

구간 $(-\infty, 0]$에서 $2x\le 0$, $f(x)\ge f(0)>f(1)=0$, $f'(x)<0$이므로

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)<0$

구간 $[2, \infty)$에서 $2x>0$, $f(x)\ge f(2)=1$, $f'(x)>0$이므로

$g'(x)=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)>0$

사잇값의 정리에 의하여 $g'(x)=0$인 x가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재하고, 좌우로 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀐다.

따라서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x가 열린구간 $(0, 2)$에 존재한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

05 도함수의 활용 (2)

유제 본문 61~65쪽

1 ① **2** ⑤ **3** ② **4** ④ **5** ③ **6** ①

1 $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x+a$에서

$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$a-2$	↗	$a+\dfrac{7}{2}$	↘	$a-10$

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 $a+\dfrac{7}{2}$을 갖고, $x=2$에서 최솟값 $a-10$을 갖는다.

$a-10=-8$에서 $a=2$이므로 $M=2+\dfrac{7}{2}=\dfrac{11}{2}$

답 ①

2 $f(x)=x^3-3x+1$에서 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

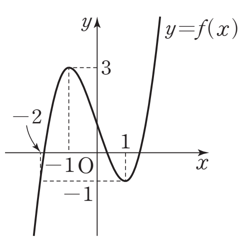
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

또한, $f(x)=-1$에서

$x^3-3x+2=0$, $(x+2)(x-1)^2=0$

$x=-2$ 또는 $x=1$

즉, $f(-2)=-1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 닫힌구간 $[a,\ a+1]$에서 함수 $f(x)=x^3-3x+1$의 최솟값이 -1이 되려면

$a=-2$ 또는 $a\le 1\le a+1$

$a=-2$ 또는 $0\le a\le 1$

을 만족시켜야 하므로 모든 정수 a의 값은 $-2,\ 0,\ 1$이고, 그 합은 -1이다.

답 ⑤

3 $g(x)=x^3-6x^2$이라 하면

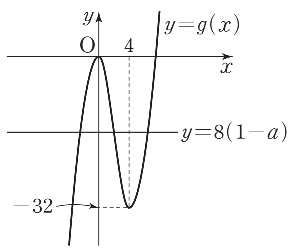
$g'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	0	↘	-32	↗

함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



x에 대한 방정식 $x^3-6x^2=8(1-a)$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=8(1-a)$가 만나는 서로 다른 점의 개수와 같으므로 a의 값의 범위에 따라 $f(a)$는 다음과 같다.

(i) $8(1-a)>0$, 즉 $a<1$이면 $f(a)=1$

(ii) $8(1-a)=0$, 즉 $a=1$이면 $f(a)=2$

(iii) $-32<8(1-a)<0$, 즉 $1<a<5$이면 $f(a)=3$

(iv) $8(1-a)=-32$, 즉 $a=5$이면 $f(a)=2$

(v) $8(1-a)<-32$, $a>5$이면 $f(a)=1$

$f(0)=1,\ f(1)=2$이므로

$f(0)+f(1)+f(a)=3+f(a)=6$에서 $f(a)=3$

따라서 $1<a<5$이어야 하므로 정수 a의 최댓값은 4이다.

답 ②

4 $f(x)=3x^4+4x^3+5$라 하면

$f'(x)=12x^3+12x^2=12x^2(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	4	↗	5	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 4를 갖는다.

모든 실수 x에 대하여 부등식 $3x^4+4x^3+5\ge a$가 성립하려면 $a\le 4$이어야 한다.

따라서 실수 a의 최댓값은 4이다.

답 ④

5 점 P의 시각 t에서의 속도 v는

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-4t-2$

점 P의 속도가 2인 시각은

$3t^2-4t-2=2,\ (3t+2)(t-2)=0$

$t\ge 0$이므로 $t=2$

점 P의 시각 t에서의 가속도 a는

$a=\dfrac{dv}{dt}=6t-4$

이므로 $t=2$일 때 점 P의 가속도는

$6\times 2-4=8$

답 ③

6 시각 $t\ (t\ge 0)$에서 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 하면

$f(t)=|(t^3-4t^2+5t)-(2t^2-7t)|$

$\quad=|t^3-6t^2+12t|$

$f(t)=8$에서 $|t^3-6t^2+12t|=8$

(i) $t^3-6t^2+12t=-8$일 때

$g(t)=t^3-6t^2+12t+8$이라 하면

$g'(t)=3t^2-12t+12=3(t-2)^2$

$g'(t)\ge 0$이고, $g(0)=8>0$이므로 방정식 $g(t)=0$은 $t\ge 0$을 만족시키는 실근을 갖지 않는다.

즉, 방정식 $t^3-6t^2+12t=-8$은 $t\ge 0$을 만족시키는 실근을 갖지 않는다.

(ii) $t^3-6t^2+12t=8$일 때

$t^3-6t^2+12t-8=(t-2)^3=0$

따라서 $t=2$일 때 두 점 P, Q 사이의 거리가 8이다.

한편, 점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx_1}{dt}=3t^2-8t+5$이므로 $t=2$일 때 점 P의 속도는

$3\times 2^2-8\times 2+5=1$

답 ①

Level 1 기초 연습

본문 66~67쪽

1 ③ 2 ⑤ 3 ④ 4 ② 5 18
6 ② 7 ⑤ 8 ④

1 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+4x^2-15x+10$에서

$f'(x)=-x^2+8x-15=-(x-3)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=3$ 또는 $x=5$

닫힌구간 $[0, 5]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$	5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	10	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$-\frac{20}{3}$

닫힌구간 $[0, 5]$에서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최솟값 -8을 갖는다.

답 ③

2 $f(x)=x^3-2x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-4x=3x\left(x-\frac{4}{3}\right)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

닫힌구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$a-3$	$\nearrow$	a	$\searrow$	$a-\frac{32}{27}$	$\nearrow$	$a+9$

닫힌구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 $a-3$을 갖는다.

따라서 $a-3=2$에서 $a=5$

답 ⑤

3 (i) $x<0$일 때,

$g(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x-2$에서

$g'(x)=x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

$g'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

구간 $[-4, 0)$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

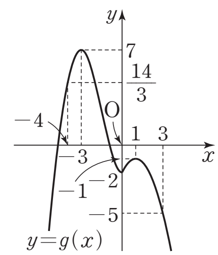
x	-4	$\cdots$	-3	$\cdots$	(0)
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\frac{14}{3}$	$\nearrow$	7	$\searrow$	-2

(ii) $x\geq 0$일 때,

$g(x)=4x-5-f'(x)$

$=4x-5-(x^2+2x-3)=-(x-1)^2-1$

(i), (ii)에 의하여 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 닫힌구간 $[-4, 3]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 $g(-3)=7$이고 최솟값은 $g(3)=-5$이다.

즉, $M=7$, $m=-5$이므로 $M+m=7+(-5)=2$

답 ④

4 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$이라 하면

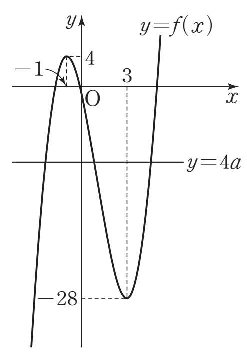
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-28	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



x에 대한 방정식 $x^3-3x^2-9x-1=4a$가 서로 다른 세 개의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4a$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

따라서 $-28<4a<4$에서 $-7<a<1$이므로 모든 정수 a의 값은 -6, -5, -4, $\cdots$, 0이고, 그 개수는 7이다.

답 ②

5 곡선 $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2+10x+\frac{1}{3}$과 직선 $y=2x+a$가 서로 다른 두 점에서 만나려면 x에 대한 방정식

$-\frac{1}{3}x^3+x^2+10x+\frac{1}{3}=2x+a$, 즉

$\frac{1}{3}x^3-x^2-8x-\frac{1}{3}=-a$가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-8x-\frac{1}{3}$이라 하면

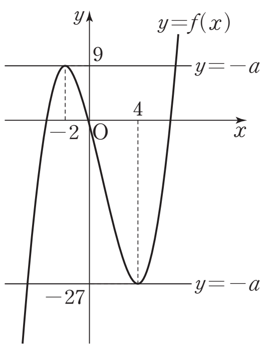
$f'(x)=x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	9	↘	-27	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



x에 대한 방정식 $\frac{1}{3}x^3-x^2-8x-\frac{1}{3}=-a$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-a$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

따라서 $-a=-27$ 또는 $-a=9$, 즉 $a=-9$ 또는 $a=27$이므로 모든 실수 a의 값의 합은

$-9+27=18$

답 18

6 $f(x)=3x^3-9x^2+a$라 하면

$f'(x)=9x^2-18x=9x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-12+a$	↗

$x>0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $-12+a$를 갖는다.

따라서 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $3x^3-9x^2+a\ge0$이 성립하려면 $-12+a\ge0$, $a\ge12$이어야 한다.

따라서 실수 a의 최솟값은 12이다.

답 ②

7 점 P의 시각 t에서의 속도 v는 $v=\frac{dx}{dt}=-4t+8$

점 P의 속도가 0일 때의 시각은

$-4t+8=0$에서 $t=2$

따라서 시각 $t=2$일 때 점 P의 위치는 $-8+16+1=9$

답 ⑤

8 점 P의 시각 t에서의 속도 v는

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-4t-2$

점 P의 시각 t에서의 가속도 a는

$a=\frac{dv}{dt}=6t-4$

점 P의 위치가 3일 때의 시각은

$t^3-2t^2-2t=3$, $t^3-2t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t^2+t+1)=0$

이때 $t^2+t+1=0$이 허근을 가지므로 $t=3$

따라서 $t=3$일 때 점 P의 가속도는 $6\times3-4=14$

답 ④

Level 2 기본 연습

본문 68~69쪽

1 ④	2 ①	3 ③	4 ②	5 31
6 ⑤	7 ④	8 ⑤		

1 $f(x)=x^3-3x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x$

$f'(x)=0$에서 $3x^2-6x=0$

$3x(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

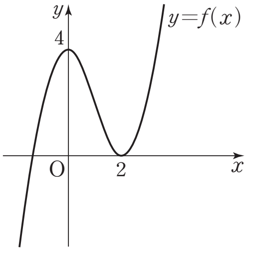
닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	a	↘	$-4+a$	↗	$16+a$

닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $16+a$, 최솟값은 $-4+a$이므로

$(16+a)+(-4+a)=20$에서 $a=4$

$f(x)=x^3-3x^2+4$



따라서 $a+f(1)=4+2=6$

답 ④

2 $f(x)=x^2-2x+1$에서

$f'(x)=2x-2$

점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

$y-(a^2-2a+1)=(2a-2)(x-a)$

$y=2(a-1)x+1-a^2$

이때 $\mathrm{P}\left(\dfrac{a+1}{2}, 0\right)$, $\mathrm{Q}(0, 1-a^2)$이므로

삼각형 OPQ의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\dfrac{1}{4}(a+1)(1-a^2)$

$S'(a)=-\dfrac{1}{4}(a+1)(3a-1)$

$0<a<1$이므로

$S'(a)=0$에서 $a=\dfrac{1}{3}$

함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	(0)	$\cdots$	$\dfrac{1}{3}$	$\cdots$	(1)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	$\dfrac{8}{27}$	↘	

$S(a)$는 $a=\dfrac{1}{3}$에서 극대이면서 최댓값을 갖는다.

따라서 구하는 최댓값은 $S\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{8}{27}$

답 ①

3 $f(x)=x^3-kx^2-k^2x$에서

$f'(x)=3x^2-2kx-k^2$

$\quad=(3x+k)(x-k)$

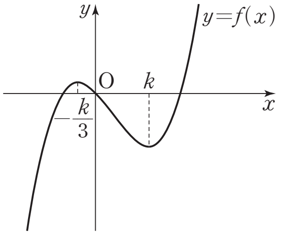
$f'(x)=0$에서

$x=-\dfrac{k}{3}$ 또는 $x=k$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\dfrac{k}{3}$	$\cdots$	k	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{5}{27}k^3$	↘	$-k^3$	↗

함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{k}{3}$에서 극댓값을 갖고, $x=k$에서 극솟값을 갖는다.



(i) $0<k\le 2$일 때,

닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 최솟값 $-2k^2-2k+3$을 가지므로

$f(k)=-2k^2-2k+3$에서

$-k^3=-2k^2-2k+3$

$k^3-2k^2-2k+3=0$

$(k-1)(k^2-k-3)=0$

$0<k\le 2$이므로 $k=1$

(ii) $k>2$일 때,

닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $-2k^2-2k+3$을 가지므로

$f(2)=-2k^2-2k+3$에서

$-2k^2-4k+8=-2k^2-2k+3$

$2k=5$

$k=\dfrac{5}{2}$

(i), (ii)에서 $k=1$ 또는 $k=\dfrac{5}{2}$

따라서 모든 양수 k의 값의 합은

$1+\dfrac{5}{2}=\dfrac{7}{2}$

답 ③

4 $f(x)=x^4-4x^3-8x^2+a$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2-16x$

$\quad =4x(x+1)(x-4)$

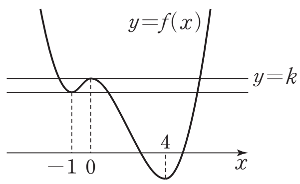
$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-3+a$	$\nearrow$	a	$\searrow$	$-128+a$	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=4$에서 극솟값을 갖고, $x=0$에서 극댓값을 갖는다.



$f(-1)>f(4)$이므로

함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최솟값을 갖는다.

$-128+a=-119$에서 $a=9$

이때 $f(-1)=6$, $f(0)=9$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 3이 되도록 하는 상수 k의 값은 6 또는 9이다.

따라서 $p=6+9=15$이므로

$a+p=9+15=24$

답 ②

5 조건 (가)에 의하여

$f(x)=x^3+ax$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

$f'(x)=3x^2+a$

조건 (나)에 의하여

함수 $y=f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.

$f'(2)=0$에서

$3\times 2^2+a=0$

$a=-12$

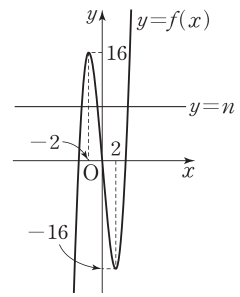
$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16	$\nearrow$

함수 $f(x)=x^3-12x$는 $x=-2$에서 극댓값 16을 갖고 $x=2$에서 극솟값 -16을 갖는다.



방정식 $f(x)=n$이 서로 다른 3개의 실근을 갖도록 하는 n의 값의 범위는 $-16<n<16$이다.

따라서 정수 n의 값은 -15, -14, -13, $\cdots$, 15이고, 그 개수는 31이다.

답 31

6 $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$에서

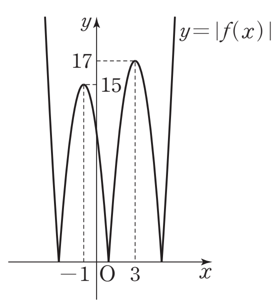
$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

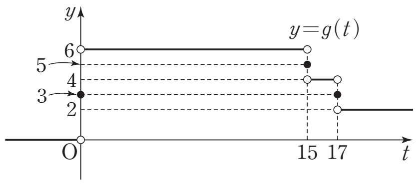
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	15	$\searrow$	-17	$\nearrow$

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=g(t)$는 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ 3 & (t=0) \\ 6 & (0<t<15) \\ 5 & (t=15) \\ 4 & (15<t<17) \\ 3 & (t=17) \\ 2 & (t>17) \end{cases}$$



이때 함수 $h(t)=g(t)-g(t-2)$는 다음과 같다.

$$h(t)=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ 3 & (t=0) \\ 6 & (0<t<2) \\ 3 & (t=2) \\ 0 & (2<t<15) \\ -1 & (t=15) \\ -2 & (15<t<19) \\ -1 & (t=19) \\ 0 & (t>19) \end{cases}$$

함수 $y=h(t)$는 $t=0,\ 2,\ 15,\ 19$에서 불연속이다.
따라서 a의 값은 $0,\ 2,\ 15,\ 19$이고, 그 합은
$0+2+15+19=36$

답 ⑤

7 부등식 $f(2\sin x)\geq 16\sin^2 x$에서
$t=2\sin x$로 놓으면
$-2\leq t\leq 2$
$f(t)\geq 4t^2$에서
$\frac{1}{2}t^4-2t^3+k\geq 4t^2$
$\frac{1}{2}t^4-2t^3-4t^2+k\geq 0$
$g(t)=\frac{1}{2}t^4-2t^3-4t^2+k$로 놓으면
$g'(t)=2t^3-6t^2-8t=2t(t+1)(t-4)$
$g'(t)=0$에서
$t=-1$ 또는 $t=0$ 또는 $t=4$
$-2\leq t\leq 2$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	$8+k$	↘	$-\frac{3}{2}+k$	↗	k	↘	$-24+k$

$-2\leq t\leq 2$에서 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 최솟값 $-24+k$를 가지므로
$-24+k\geq 0$
$k\geq 24$
따라서 k의 최솟값은 24이다.

답 ④

8 시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_1(t)$, $v_2(t)$라 하면
$v_1(t)=f'(t)=t^2-16$
$v_2(t)=g'(t)=4t-4$
$v_1(t)=v_2(t)$에서
$t^2-16=4t-4$
$(t+2)(t-6)=0$
$t\geq 0$이므로 $t=6$
시각 t에서의 두 점 P, Q의 가속도를 각각 $a_1(t)$, $a_2(t)$라 하면
$a_1(t)=2t$, $a_2(t)=4$
시각 $t=6$에서의 두 점 P, Q의 가속도는 각각
$p=a_1(6)=2\times 6=12$, $q=a_2(6)=4$
따라서 $p-q=12-4=8$

답 ⑤

Level 3 실력 완성

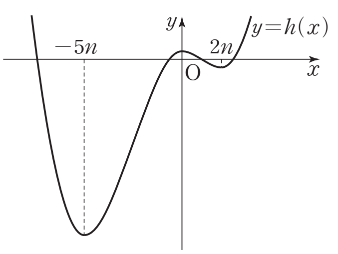
본문 70쪽

1 ③ **2** 32 **3** ④

1 $h(x)=\frac{1}{4}x^4+nx^3-5n^2x^2+\frac{15}{4}n^4$이라 하면
$h'(x)=x^3+3nx^2-10n^2x=x(x+5n)(x-2n)$
$h'(x)=0$에서 $x=-5n$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2n$
n이 자연수이므로 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-5n$	$\cdots$	0	$\cdots$	$2n$	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$-90n^4$	↗	$\frac{15}{4}n^4$	↘	$-\frac{17}{4}n^4$	↗

함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



그림에서 함수 $y=h(x)$의 그래프가 직선 $y=k$와 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이 되는 실수 k의 값은

$k=h(0)=\frac{15}{4}n^4$ 또는 $k=h(2n)=-\frac{17}{4}n^4$

이므로

$f(n)=\frac{15}{4}n^4,\ g(n)=-\frac{17}{4}n^4$

따라서

$$\sum_{n=1}^{4}\frac{f(n)-g(n)}{n}=\sum_{n=1}^{4}\frac{\frac{15}{4}n^4-\left(-\frac{17}{4}n^4\right)}{n}$$
$$=\sum_{n=1}^{4}8n^3$$
$$=8\times\left(\frac{4\times5}{2}\right)^2=800$$

답 ③

참고

곡선 $y=\frac{1}{4}x^4+nx^3-5n^2x^2+\frac{15}{4}n^4$이 직선 $y=k$와 만나는 서로 다른 점의 개수는 다음과 같다.

(i) $k>\frac{15}{4}n^4$일 때, 2

(ii) $k=\frac{15}{4}n^4$일 때, 3

(iii) $-\frac{17}{4}n^4<k<\frac{15}{4}n^4$일 때, 4

(iv) $k=-\frac{17}{4}n^4$일 때, 3

(v) $-90n^4<k<-\frac{17}{4}n^4$일 때, 2

(vi) $k=-90n^4$일 때, 1

(vii) $k<-90n^4$일 때, 0

2 시각 $t=8$일 때 두 점 P, Q의 위치가 같으므로

$8^3+a\times8^2-25=3\times8^2+b\times8+7$

$b=8a+36$ ...... ㉠

점 Q의 속도를 v_2라 하면

$v_2=\frac{dx_2}{dt}=6t+b$

점 Q가 운동 방향을 바꾸는 시각에서 속도는 0이므로

$t=\alpha$일 때 $v_2=0$이다.

즉, $6\alpha+b=0$

$b=-6\alpha$ ...... ㉡

$f(t)=x_1-x_2$라 하면 $0<t<8$에서 두 점 P, Q 사이의 거리가 시각 $t=\alpha$일 때 최대이므로

$f'(\alpha)=0$

$f(t)=t^3+(a-3)t^2-bt-32$에서

$f'(t)=3t^2+2(a-3)t-b$

$f'(\alpha)=3\alpha^2+2(a-3)\alpha+6\alpha=0$

$3\alpha^2+2a\alpha=0,\ \alpha(3\alpha+2a)=0$

$0<\alpha<8$이므로 $\alpha=-\frac{2a}{3}$

㉡에서 $b=4a$이고, ㉠과 연립하면

$a=-9,\ b=-36$

㉡에서 $\alpha=6$

따라서 $x_1=t^3-9t^2-25,\ x_2=3t^2-36t+7$이므로 시각 $t=6$일 때 두 점 P, Q 사이의 거리는

$|(6^3-9\times6^2-25)-(3\times6^2-36\times6+7)|$

$=|-133-(-101)|=32$

답 32

3 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+c$에서

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx=x(4x^2+3ax+2b)$

$\alpha\beta=-4$인 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$는 $\alpha<0,\ \beta>0$이고

$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$이다.

$f'(x)=0$에서 $x=\alpha$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\beta$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

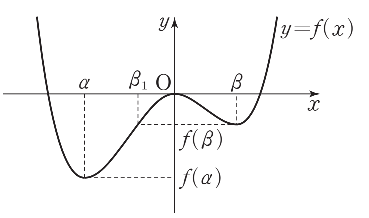
x	$\cdots$	α	$\cdots$	0	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극대이고 극댓값이 0이므로

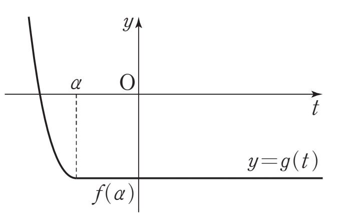
$f(0)=c=0$

(i) $f(\alpha)<f(\beta)$인 경우

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같고, 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=f(\beta)$와 만나는 점 중 x좌표가 α와 β 사이인 점의 x좌표를 β_1이라 하자.

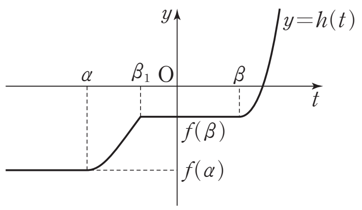


함수 $y=g(t)$의 그래프의 개형은 그림과 같으므로 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



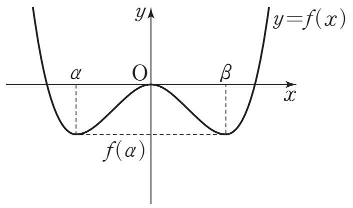
함수 $y=h(t)$의 그래프의 개형이 그림과 같으므로 함수

$h(t)$는 $t=\beta_1$에서 미분가능하지 않다.

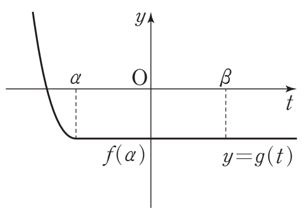


(ii) $f(\alpha)=f(\beta)$인 경우

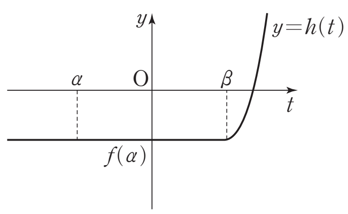
함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $y=g(t)$의 그래프의 개형은 그림과 같으므로 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

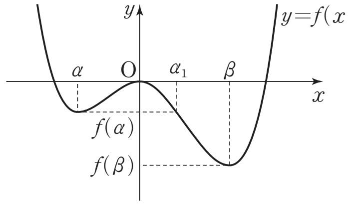


함수 $y=h(t)$의 그래프의 개형은 그림과 같으므로 함수 $h(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

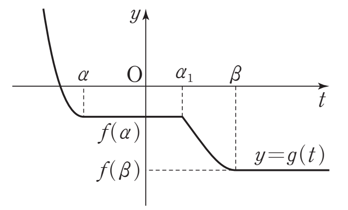


(iii) $f(\alpha)>f(\beta)$인 경우

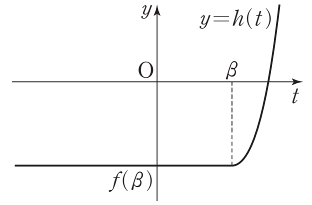
함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같고, 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=f(\alpha)$와 만나는 점 중 x좌표가 α와 β 사이인 점의 x좌표를 α_1이라 하자.



함수 $y=g(t)$의 그래프의 개형은 그림과 같으므로 함수 $g(t)$는 $t=\alpha_1$에서 미분가능하지 않다.



함수 $y=h(t)$의 그래프의 개형은 그림과 같으므로 함수 $h(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



(i), (ii), (iii)에 의하여 두 함수 $g(t)$, $h(t)$가 모두 실수 전체의 집합에서 미분가능하면

$f(\alpha)=f(\beta)$

$\alpha^4+a\alpha^3+b\alpha^2+c=\beta^4+a\beta^3+b\beta^2+c$

$\alpha\neq\beta$이므로

$(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)+a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+b(\alpha+\beta)=0$ …… ㉠

이차방정식 $4x^2+3ax+2b=0$의 두 실근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{3a}{4}$

$\alpha\beta=\dfrac{2b}{4}=\dfrac{b}{2}$

이때 $\alpha\beta=-4$이므로

$\dfrac{b}{2}=-4$, $b=-8$

㉠에 대입하여 정리하면

$a\left(\dfrac{9}{64}a^2+4\right)=0$

$a=0$

즉, $\alpha+\beta=0$이므로

$\alpha=-2$, $\beta=2$

따라서 $f(x)=x^4-8x^2$이므로

$f(\alpha)+f(\beta)=f(-2)+f(2)$

$=-16+(-16)=-32$

답 ④

06 부정적분과 정적분

유제 본문 73~79쪽

1 ④	2 ②	3 ①	4 84	5 ③
6 ④	7 48	8 ⑤		

1 $f'(x)=x(3x+4)$에서

$$f(x)=\int x(3x+4)dx$$
$$=\int (3x^2+4x)dx$$
$$=x^3+2x^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$f(0)=C=-1$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-1$이므로

$f(2)=2^3+2\times 2^2-1=15$

답 ④

2 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수이고, $a\neq 0$)으로 놓으면

$f'(x)=2ax+b$

$f'(x)=x^2+g(x)$에서

$g(x)=-x^2+f'(x)=-x^2+2ax+b$

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int \{f(x)+g(x)\}dx=-2x$에서

$f(x)+g(x)=-2x$이므로

$(ax^2+bx+c)+(-x^2+2ax+b)=-2x$

$(a-1)x^2+(2a+b+2)x+b+c=0$ …… ㉠

㉠이 x에 대한 항등식이므로

$a=1$, $b=-4$, $c=4$

$f(x)=x^2-4x+4$, $g(x)=-x^2+2x-4$

따라서

$f(1)-g(1)=1-(-3)=4$

답 ②

3 $\displaystyle\int_1^x f(t)dt=2x^3-x^2+ax$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=2\times 1^3-1^2+a\times 1$

$a=-1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x^2-2x-1$

따라서

$f(a)=f(-1)=6\times(-1)^2-2\times(-1)-1=7$

답 ①

4 $\displaystyle xf(x)=\int_2^x f(t)dt+3x^4-4x^2$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=f(x)+12x^3-8x$

$xf'(x)=x(12x^2-8)$

$f(x)$가 다항함수이므로

$f'(x)=12x^2-8$

$f(x)=\displaystyle\int (12x^2-8)dx=4x^3-8x+C$

(단, C는 적분상수) …… ㉡

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2f(2)=32$, 즉 $f(2)=16$

㉡에서 $f(2)=16+C=16$, $C=0$

따라서 $f(x)=4x^3-8x$이므로

$f(3)=4\times 3^3-8\times 3=84$

답 84

5 $$9\int_1^3\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)dx-2\int_3^1\left(-\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{2}x\right)dx$$
$$=9\int_1^3\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)dx+2\int_1^3\left(-\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{2}x\right)dx$$
$$=\int_1^3\left(\frac{9}{2}x^2-9x\right)dx+\int_1^3\left(-\frac{3}{2}x^2+5x\right)dx$$
$$=\int_1^3\left\{\left(\frac{9}{2}x^2-9x\right)+\left(-\frac{3}{2}x^2+5x\right)\right\}dx$$
$$=\int_1^3(3x^2-4x)dx$$
$$=\Big[x^3-2x^2\Big]_1^3$$
$$=9-(-1)$$
$$=10$$

답 ③

6 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to -1-}f(x)=\lim_{x\to -1+}f(x)=f(-1)$

이어야 한다.

이때

$\displaystyle\lim_{x\to -1-}ax=-a$,

$\displaystyle\lim_{x\to -1+}(6x^2-2ax)=6+2a$,

$f(-1)=6+2a$

이므로

$-a=6+2a$에서

$a=-2$

$$f(x)=\begin{cases} -2x & (x<-1) \\ 6x^2+4x & (x\ge -1) \end{cases}$$

따라서

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{2} f(x)dx &= \int_{-3}^{-1} f(x)dx+\int_{-1}^{2} f(x)dx \\ &= \int_{-3}^{-1}(-2x)dx+\int_{-1}^{2}(6x^2+4x)dx \\ &= \Big[-x^2\Big]_{-3}^{-1}+\Big[2x^3+2x^2\Big]_{-1}^{2} \\ &= 8+24 \\ &= 32\end{aligned}$$

답 ④

7 $$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}\{f(x)\}^2dx &= \int_{-2}^{2}(x^2-ax)^2dx \\ &= \int_{-2}^{2}(x^4-2ax^3+a^2x^2)dx \\ &= 2\int_{0}^{2}(x^4+a^2x^2)dx \\ &= 2\Big[\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}a^2x^3\Big]_0^2 \\ &= \frac{64}{5}+\frac{16}{3}a^2\end{aligned}$$

이므로

$\frac{64}{5}+\frac{16}{3}a^2=8a^2$에서

$a^2=\frac{24}{5}$

따라서 $10a^2=10\times\frac{24}{5}=48$

답 48

8 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키므로

$f(x)=ax^3+bx$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)으로 놓을 수 있다.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\{f(x)+f'(x)\}dx &= 2\int_0^1 f'(x)dx \\ &= 2\Big[f(x)\Big]_0^1 \\ &= 2\{f(1)-f(0)\} \\ &= 2(a+b)\end{aligned}$$

이므로

$2(a+b)=12$에서

$a+b=6$ ...... ㉠

$f'(x)=3ax^2+b$

$f'(1)=3a+b=14$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4$, $b=2$

따라서 $f(x)=4x^3+2x$이므로 $f(2)=4\times 2^3+2\times 2=36$

답 ⑤

Level 1 기초 연습

본문 80~81쪽

1 ②	2 ①	3 ①	4 ③	5 ⑤
6 ④	7 ④	8 ④	9 ②	10 ①

1 $f(x)=\int(-4x+8)dx$

$=-2x^2+8x+C$

$=-2(x-2)^2+8+C$ (단, C는 적분상수)

$f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $8+C$를 가지므로

$8+C=9$, $C=1$

따라서 $f(x)=-2x^2+8x+1$이므로

$f(1)=-2+8+1=7$

답 ②

2 $f(x)=\int(3x^2+ax)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+ax$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$f'(1)=3+a=-1$, $a=-4$

한편, $f(x)=\int(3x^2-4x)dx=x^3-2x^2+C$

(단, C는 적분상수)

$f(1)=1-2+C=2$

$C=3$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+3$이므로

$f(a)=f(-4)=(-4)^3-2\times(-4)^2+3=-93$

답 ①

3 $F'(x)=f(x)$

$F(x)=f(x)+2x^3-7x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f'(x)+6x^2-14x$ ...... ㉠

$f(x)=6x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

$f'(x)=12x+a$

㉠에서

$6x^2+ax+b=6x^2-2x+a$

이므로

$a=-2,\ b=-2$

방정식 $f(x)=5x^2$에서

$6x^2-2x-2=5x^2$

$x^2-2x-2=0$ ······ ㉡

이차방정식 ㉡의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2+2>0$

이므로 방정식 ㉡은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 구하는 모든 실근의 합은 2이다.

답 ①

4 $f(x)=\int(4x^3+a)dx$

$=x^4+ax+C$ (단, C는 적분상수)

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$에서

$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$에서

$f(1)=1+a+C=0$

$a+C=-1$ ······ ㉠

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2$이므로

$f'(x)=4x^3+a$에서

$f'(1)=4+a=2$

$a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$-2+C=-1,\ C=1$

따라서 $f(x)=x^4-2x+1$이므로

$f(a)=f(-2)=(-2)^4-2\times(-2)+1=21$

답 ③

5 $\int_{-3}^{1}(2x^2+5x)dx-\int_{3}^{1}(2x^2+5x)dx$

$=\int_{-3}^{1}(2x^2+5x)dx+\int_{1}^{3}(2x^2+5x)dx$

$=\int_{-3}^{3}(2x^2+5x)dx=2\int_{0}^{3}2x^2dx$

$=4\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3$

$=36$

답 ⑤

6 $\int_{0}^{a}|2x-6|dx=4a+2$

(i) $a\le3$일 때,

$\int_{0}^{a}|2x-6|dx$

$=\int_{0}^{a}(-2x+6)dx$

$=\left[-x^2+6x\right]_0^a$

$=-a^2+6a$

이므로

$-a^2+6a=4a+2$에서 $a^2-2a+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-2<0$

이므로 주어진 조건을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a>3$일 때,

$\int_{0}^{a}|2x-6|dx$

$=\int_{0}^{3}(-2x+6)dx+\int_{3}^{a}(2x-6)dx$

$=\left[-x^2+6x\right]_0^3+\left[x^2-6x\right]_3^a$

$=9+(a^2-6a+9)$

$=a^2-6a+18$

이므로

$a^2-6a+18=4a+2$에서

$a^2-10a+16=0$

$(a-2)(a-8)=0$

$a>3$이므로 $a=8$

(i), (ii)에서

$a=8$

답 ④

7 $\int_{-1}^{3}f(x)dx=\int_{1}^{3}f(x)dx+8$에서

$\int_{-1}^{3}f(x)dx-\int_{1}^{3}f(x)dx=8$

이때

$\int_{-1}^{3}f(x)dx-\int_{1}^{3}f(x)dx$

$=\int_{-1}^{1}f(x)dx$

$=\int_{-1}^{1}(4x^3+ax^2+1)dx$

$=2\int_0^1 (ax^2+1)dx$

$=2\left[\frac{a}{3}x^3+x\right]_0^1$

$=\frac{2}{3}a+2$

이므로

$\frac{2}{3}a+2=8$

따라서 $a=9$

답 ④

8 $f(x)=6x^2+2x\int_0^1 f'(x)dx$에서

$\int_0^1 f'(x)dx=a$ (a는 상수)로 놓으면

$f(x)=6x^2+2ax$

$\int_0^1 f'(x)dx=\Big[f(x)\Big]_0^1$

$=\Big[6x^2+2ax\Big]_0^1$

$=6+2a$

이므로

$6+2a=a$에서

$a=-6$

따라서 $f(x)=6x^2-12x$이므로

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (6x^2-12x)dx$

$=\Big[2x^3-6x^2\Big]_0^2$

$=-8$

답 ④

9 $\int_a^x f(t)dt=x^3+5x^2-6x$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=a$를 대입하면

$0=a^3+5a^2-6a$

$a(a+6)(a-1)=0$

이때 $a>0$이므로

$a=1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+10x-6$

따라서

$f(a)=f(1)$

$=3\times1^2+10\times1-6=7$

답 ②

10 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x f(t)dt$

$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{1}{x+2}\times\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\right\}$

$=\frac{1}{4}F'(2)$

$=\frac{1}{4}f(2)$

$=\frac{1}{4}\times(2^3+7\times2^2-4)$

$=8$

답 ①

Level 2 기본 연습 본문 82~83쪽

1 ②	2 ⑤	3 ①	4 ③	5 ④
6 11	7 ②	8 ①		

1 $g(x)=\int xf(x)dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=xf(x)$

$f'(x)=g'(x)-3x^3+4x$에서

$f'(x)=xf(x)-3x^3+4x$

$xf(x)=f'(x)+3x^3-4x$ …… ㉠

따라서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.

$f(x)=3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=6x+a$

㉠에서

$x(3x^2+ax+b)=(6x+a)+3x^3-4x$

$3x^3+ax^2+bx=3x^3+2x+a$ …… ㉡

㉡은 x에 대한 항등식이므로

$a=0$, $b=2$

$f(x)=3x^2+2$

$g(x)=\int xf(x)dx$

$=\int(3x^3+2x)dx=\frac{3}{4}x^4+x^2+C$

(단, C는 적분상수)

$g(0)=C=-1$이므로

$g(x)=\frac{3}{4}x^4+x^2-1$

따라서 $f(2)+g(2)=14+15=29$

답 ②

2 $f'(x)=x^2-2x$

$f(x)=\int(x^2-2x)dx$

$=\frac{1}{3}x^3-x^2+C$ (단, C는 적분상수)

한편, $f'(x)=0$에서

$x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$의 극댓값이 3이므로

$f(0)=C=3$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+3$이므로 $f(x)$의 극솟값은

$f(2)=\frac{1}{3}\times 2^3-2^2+3=\frac{5}{3}$

답 ⑤

3 조건 (나)에서

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+3}{x-1}=2$

$x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1}\{f(x)+3\}=f(1)+3=0$에서

$f(1)=-3$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2$

조건 (가)에서

$f'(1)=6\times 1^2+a\times 1=6+a=2$

$a=-4$

$f(x)=\int(6x^2-4x)dx$

$=2x^3-2x^2+C$ (단, C는 적분상수) ······ ㉠

㉠에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2\times 1^3-2\times 1^2+C=-3$, $C=-3$

$f(x)=2x^3-2x^2-3$이므로

$f(0)=-3$

따라서

$a+f(0)=-4+(-3)=-7$

답 ①

4 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모두 상수함수이면

$g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx$를 만족시키지 않는다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=-1$이므로

함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 a (a는 0이 아닌 상수)인 n차함수 (n은 자연수)이면 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 $-a$인 n차함수이다.

$g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx$이므로 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 -1인 이차함수이고, 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$f(0)=0$이므로 $f(x)=-x^2+bx$ (b는 상수)로 놓을 수 있다.

이때

$g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx=\int bx\,dx=\frac{1}{2}bx^2+C$

(C는 적분상수)

이므로

$\frac{1}{2}b=1$에서

$b=2$

$g(0)=0$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=-x^2+2x$, $g(x)=x^2$이므로

$\int_0^1 f(x)g(x)dx=\int_0^1\{(-x^2+2x)\times x^2\}dx$

$=\int_0^1(-x^4+2x^3)dx$

$=\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4\right]_0^1$

$=-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$

답 ③

다른 풀이

$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=-1$ ······ ㉠

이므로 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모두 상수함수이거나 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 최고차항의 차수가 같다.

$g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=x^2+f(x)$ ······ ㉡

(i) 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모두 상수함수일 때,

$g'(x)=0$

$x^2+f(x)$는 이차함수이므로

㉡을 만족시키는 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$는 존재하지 않는다.

(ii) 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 최고차항의 차수가 같을 때,
함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^n (n은 자연수, a는 0이 아닌 상수)라 하면
$g(x)$의 최고차항은 $-ax^n$이다.
㉡에서 $g'(x)$의 최고차항은 $-anx^{n-1}$이므로
함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 -1인 이차함수이어야 한다.
$f(0)=g(0)=0$이므로
$f(x)=-x^2+bx$, $g(x)=x^2+cx$ (b, c는 상수)
로 놓을 수 있다.
이때 $g'(x)=2x+c$이므로 ㉡에서
$2x+c=x^2+(-x^2+bx)$
$b=2$, $c=0$

따라서 $f(x)=-x^2+2x$, $g(x)=x^2$이므로

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx=\int_0^1\{(-x^2+2x)\times x^2\}dx$$
$$=\int_0^1(-x^4+2x^3)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$$

5 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로
$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$
이다.
$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(x^2+a)=1+a$,
$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(-2x+8)=-2+8=6$,
$f(1)=1+a$
이므로
$1+a=6$에서
$a=5$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^2+5 & (x\le1) \\ -2x+8 & (x>1)\end{cases}$이므로

$$\int_0^3 f(x)dx-\int_2^3 f(x)dx$$
$$=\int_0^2 f(x)dx$$
$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$$
$$=\int_0^1(x^2+5)dx+\int_1^2(-2x+8)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+5x\right]_0^1+\left[-x^2+8x\right]_1^2$$
$$=\frac{16}{3}+(12-7)$$
$$=\frac{31}{3}$$

답 ④

6 조건 (가)에서

$$\int_{-2}^0 f(x)dx=\int_0^2\{f(x)-2\}dx$$
$$\int_2^4 f(x)dx=\int_0^2\{f(x)+2\}dx$$
$$\int_4^6 f(x)dx=\int_0^2\{f(x)+4\}dx$$

조건 (나)에서

$$\int_0^2 f(x)dx=-\frac{4}{3}$$

이므로

$$\int_{-2}^6 f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^0 f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx+\int_4^6 f(x)dx$$
$$=\int_0^2\{f(x)-2\}dx+\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2\{f(x)+2\}dx+\int_0^2\{f(x)+4\}dx$$
$$=\int_0^2\{4f(x)+4\}dx$$
$$=4\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 4dx$$
$$=4\times\left(-\frac{4}{3}\right)+\left[4x\right]_0^2$$
$$=-\frac{16}{3}+8$$
$$=\frac{8}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=8$이므로
$p+q=3+8=11$

답 11

7 $f(x)=x^2+px+q$ (p, q는 상수)로 놓으면

$$\int_{-a}^a xf(x)dx=\int_{-a}^a x(x^2+px+q)dx$$
$$=2p\int_0^a x^2dx$$
$$=2p\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a$$

$=\dfrac{2pa^3}{3}$

모든 실수 a에 대하여 $\dfrac{2pa^3}{3}=0$이므로

$p=0$

$$\int_{-1}^{1} x^2f(x)dx=\int_{-1}^{1} x^2(x^2+q)dx$$
$$=2\int_0^1 (x^4+qx^2)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{q}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=\frac{6+10q}{15}$$

이므로

$\dfrac{6+10q}{15}=\dfrac{12}{5}$에서

$q=3$

따라서 $f(x)=x^2+3$이므로 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=F'(1)$$
$$=f(1)$$
$$=4$$

답 ②

다른 풀이

모든 실수 a에 대하여

$$\int_{-a}^{a} xf(x)dx=0$$

이므로 $f(x)=x^2+b$ (b는 상수)로 놓을 수 있다.

이때

$$\int_{-1}^{1} x^2f(x)dx=\int_{-1}^{1} x^2(x^2+b)dx$$
$$=2\int_0^1 (x^4+bx^2)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{b}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=\frac{6+10b}{15}$$

이므로

$\dfrac{6+10b}{15}=\dfrac{12}{5}$에서

$b=3$

따라서 $f(x)=x^2+3$이므로 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=F'(1)$$
$$=f(1)=4$$

8 $f(x)=3x^2+x\int_0^2 g(t)dt$에서

$\int_0^2 g(t)dt=a$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=3x^2+ax$

$$\int_0^2 f(t)dt=\int_0^2 (3t^2+at)dt$$
$$=\left[t^3+\frac{1}{2}at^2\right]_0^2=8+2a$$

이므로

$g(x)=-5x+8+2a$

$$\int_0^2 g(t)dt=\int_0^2 (-5t+8+2a)dt$$
$$=\left[-\frac{5}{2}t^2+(8+2a)t\right]_0^2$$
$$=4a+6$$

이므로

$4a+6=a$

$a=-2$

$f(x)=3x^2-2x$

$g(x)=-5x+4$

방정식 $f(x)=g(x)$에서

$3x^2-2x=-5x+4$

$3x^2+3x-4=0$

이차방정식 $3x^2+3x-4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\times3\times(-4)>0$

이므로 이차방정식 $3x^2+3x-4=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실근의 합은 -1이다.

답 ①

Level 3 실력 완성

본문 84~85쪽

1 ②	2 ⑤	3 ③	4 6	5 ④

1 함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F'(x)=f(x)$

$x\left\{4x+\dfrac{d}{dx}F(x)\right\}=-x^3+\dfrac{1}{9}\{f'(x)\}^2+xf(0)$에서

$4x^2+xf(x)=-x^3+\frac{1}{9}\{f'(x)\}^2+xf(0)$ ······ ㉠

$f(x)$가 상수함수일 때,

$4x^2+xf(x)$의 최고차항의 차수는 2이고

$-x^3+\frac{1}{9}\{f'(x)\}^2+xf(0)$의 최고차항의 차수는 3이므로

㉠을 만족시키는 $f(x)$는 존재하지 않는다.

$f(x)$의 최고차항을 x^n (n은 자연수)라 하자.

(i) $1\le n\le 2$일 때,

$4x^2+xf(x)$의 최고차항의 차수는 $n+1$이고

$-x^3+\frac{1}{9}\{f'(x)\}^2+xf(0)$의 최고차항의 차수는 3이므로 $n+1=3$에서 $n=2$

이때 $4x^2+xf(x)$의 최고차항은 x^3이고,

$-x^3+\frac{1}{9}\{f'(x)\}^2+xf(0)$의 최고차항은 $-x^3$이므로

㉠을 만족시키는 $f(x)$는 존재하지 않는다.

(ii) $n\ge 3$일 때,

$4x^2+xf(x)$의 최고차항의 차수는 $n+1$이고

$-x^3+\frac{1}{9}\{f'(x)\}^2+xf(0)$의 최고차항의 차수는 $2n-2$이므로 $n+1=2n-2$

$n=3$

(i), (ii)에서

$n=3$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=3$에서

$f(x)=x^3+ax^2$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

이때 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+ax^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}(x+a)=a=3$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2$이므로

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (x^3+3x^2)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_0^2=12$

답 ②

2 조건 (가)에서

$f(x)+f(-x)=0$, 즉 $f(x)=-f(-x)$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

조건 (나)에서

$\int_{-1}^2 f(x)dx=\int_{-1}^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$

$=\int_1^2 f(x)dx$

이므로

$\int_1^2 f(x)dx=4$ ······ ㉠

조건 (다)에서

$\int_{-4}^{-1} f(x)dx=-\int_1^4 f(x)dx$이므로

$\int_1^4 f(x)dx=10$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서

$\int_1^4 f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx=6$

$\int_2^4 f(x)dx=6$

따라서

$\int_{-2}^4 \{6x+f(x)\}dx$

$=\int_{-2}^2 \{6x+f(x)\}dx+\int_2^4 \{6x+f(x)\}dx$

$=0+\int_2^4 6xdx+\int_2^4 f(x)dx$

$=\left[3x^2\right]_2^4+6$

$=36+6$

$=42$

답 ⑤

3 ㄱ. $g(1)=\int_{-1}^1 tf(t)dt=\int_{-1}^1 t(t^2+1)dt=0$ (참)

ㄴ. $g(x)=\int_{-1}^x tf(t)dt$에서

$g'(x)=xf(x)=\begin{cases} x^3+x & (x\le 1) \\ 2x^2 & (x>1)\end{cases}$

$g'(x)=0$에서

$x=0$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다. (거짓)

ㄷ. 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖고, 동시에 최솟값을 갖는다.

이때

$g(0)=\int_{-1}^0 tf(t)dt=\int_{-1}^0 (t^3+t)dt$

$=\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^0=-\frac{3}{4}$

이므로 함수 $g(x)$의 최솟값은 $-\frac{3}{4}$이다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 방정식 $g(x)=n$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

참고

(i) $x\le 1$일 때,

$$g(x)=\int_{-1}^{x} tf(t)dt=\int_{-1}^{x} t(t^2+1)dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{x}=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}$$

(ii) $x>1$일 때,

$$g(x)=\int_{-1}^{x} tf(t)dt$$
$$=\int_{-1}^{1} tf(t)dt+\int_{1}^{x} tf(t)dt$$
$$=0+\int_{1}^{x} 2t^2\,dt=\left[\frac{2}{3}t^3\right]_{1}^{x}$$
$$=\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}$$

4 함수 $f(x)$가 $x=1$, $x=\frac{5}{2}$에서 극값을 가지므로

$f'(1)=f'\left(\frac{5}{2}\right)=0$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 2이므로

$f'(x)=6(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)=3(x-1)(2x-5)$ ...... ㉠

$g(x)=(1-x)f(x)+\int_{1}^{x} f(t)dt$ ...... ㉡

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=-f(x)+(1-x)f'(x)+f(x)$

$=(1-x)f'(x)$ ...... ㉢

㉠, ㉢에서

$g'(x)=-3(x-1)^2(2x-5)$

$g(x)=\int\{-3(x-1)^2(2x-5)\}dx$

$=\int(-6x^3+27x^2-36x+15)dx$

$=-\frac{3}{2}x^4+9x^3-18x^2+15x+C$ (단, C는 적분상수)

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g(1)=0$이므로

$g(1)=-\frac{3}{2}+9-18+15+C=0$에서

$C=-\frac{9}{2}$

$g(x)=-\frac{3}{2}x^4+9x^3-18x^2+15x-\frac{9}{2}$

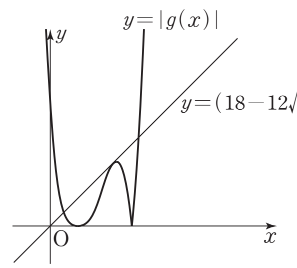
$g'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	0	↗	극대	↘

함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(t, g(t))$ $(t>0)$에서의 접선의 방정식은

$y-g(t)=g'(t)(x-t)$

이 직선이 원점을 지날 때,

$-g(t)=-tg'(t)$

$-\frac{3}{2}t^4+9t^3-18t^2+15t-\frac{9}{2}=t(-6t^3+27t^2-36t+15)$

$\frac{9}{2}(t-1)^2(t^2-2t-1)=0$

$t=1$ 또는 $t=1+\sqrt{2}$

$g'(1)=0$

$g'(1+\sqrt{2})=18-12\sqrt{2}$

곡선 $y=|g(x)|$와 직선 $y=mx$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위는

$0<m<18-12\sqrt{2}$

$\alpha=0$, $\beta=18-12\sqrt{2}$이므로

$\alpha+\beta=0+(18-12\sqrt{2})=18-12\sqrt{2}$

따라서 $p=18$, $q=-12$이므로

$p+q=18+(-12)=6$

답 6

5 조건 (나)에서

모든 실수 a에 대하여

$\int_{1}^{-a} f'(x)dx+\int_{1}^{a+2} f'(x)dx=0$

이므로

$-\int_{-a}^{1} f'(x)dx+\int_{1}^{a+2} f'(x)dx=0$

$\int_{-a}^{1} f'(x)dx=\int_{1}^{a+2} f'(x)dx$

이때 $f'(x)$가 이차함수이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

조건 (가)에서

$f'(-1)=0$이므로 $f'(3)=0$이다.

즉, $f'(x)=3(x+1)(x-3)$이므로

$f(x)=\int 3(x+1)(x-3)dx$

$=\int (3x^2-6x-9)dx$

$=x^3-3x^2-9x+C$ (단, C는 적분상수)

한편, $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖고 $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

조건 (다)에서

함수 $g(t)$는 $t=0$과 $t=p$에서만 연속이 아니므로

$f(-1)=p$, $f(3)=0$ 또는 $f(-1)=0$, $f(3)=p$

이어야 한다.

(ⅰ) $f(-1)=p$, $f(3)=0$일 때,

$f(3)=27-27-27+C=0$에서 $C=27$

이때 $p=f(-1)=-1-3+9+27=32$

(ⅱ) $f(-1)=0$, $f(3)=p$일 때,

$f(-1)=-1-3+9+C=0$에서 $C=-5$

이때 $p=f(3)=27-27-27-5=-32$

조건에서 p는 양수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서

$p=32$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2-9x+27$이므로

$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1} (x^3-3x^2-9x+27)dx$

$=2\int_{0}^{1} (-3x^2+27)dx$

$=2\Big[-x^3+27x\Big]_{0}^{1}$

$=52$

답 ④

07 정적분의 활용

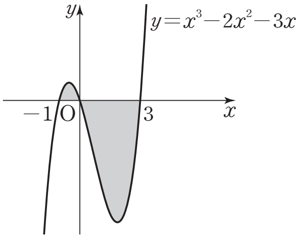
유제				본문 89~95쪽
1 ⑤	2 ②	3 54	4 ①	5 ⑤
6 ④	7 ③	8 8		

1 $x^3-2x^2-3x=0$에서

$x(x+1)(x-3)=0$

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

곡선 $y=x^3-2x^2-3x$는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{3} |x^3-2x^2-3x|dx$

$=\int_{-1}^{0} (x^3-2x^2-3x)dx+\int_{0}^{3} (-x^3+2x^2+3x)dx$

$=\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\Big]_{-1}^{0}+\Big[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\Big]_{0}^{3}$

$=\frac{7}{12}+\frac{45}{4}$

$=\frac{71}{6}$

답 ⑤

2 $f'(x)=2x-2$

$f(x)=\int (2x-2)dx=x^2-2x+C$ (단, C는 적분상수)

$f'(x)=0$에서

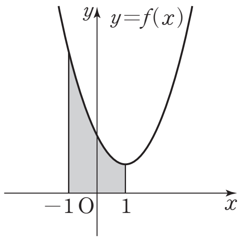
$2x-2=0$, $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 1을 갖는다.

$f(1)=1$에서 $1-2+C=1$, $C=2$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{1}(x^2-2x+2)dx=2\int_{0}^{1}(x^2+2)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_0^1=\frac{14}{3}$$

답 ②

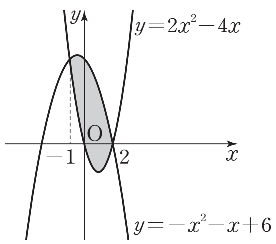
3 두 곡선 $y=2x^2-4x$, $y=-x^2-x+6$의 교점의 x좌표는

$2x^2-4x=-x^2-x+6$에서 $3x^2-3x-6=0$

$3(x+1)(x-2)=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$

두 곡선 $y=2x^2-4x$, $y=-x^2-x+6$은 그림과 같다.



$$S=\int_{-1}^{2}\{(-x^2-x+6)-(2x^2-4x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-3x^2+3x+6)dx$$
$$=\left[-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x\right]_{-1}^{2}$$
$$=10-\left(-\frac{7}{2}\right)$$
$$=\frac{27}{2}$$

따라서 $4S=4\times\frac{27}{2}=54$

답 54

4 $f(x)=(x+2)(x-1)^2=x^3-3x+2$이므로

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

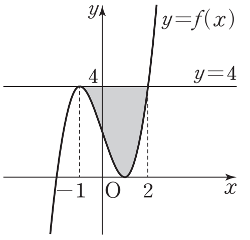
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 4를 갖고, $x=1$에서 극솟값 0을 갖는다.

함수 $f(x)=(x+2)(x-1)^2$의 그래프와 직선 $y=k\ (k>0)$이 서로 다른 두 점에서 만나므로 $k=4$이다.

$f(x)=4$에서 $(x+1)^2(x-2)=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{2}|4-(x+2)(x-1)^2|dx=\int_{-1}^{2}(-x^3+3x+2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$
$$=6-\left(-\frac{3}{4}\right)$$
$$=\frac{27}{4}$$

답 ①

5 곡선 $y=2x^2-4x$와 x축이 만나는 점의 x좌표는

$2x^2-4x=0$에서

$2x(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

곡선 $y=2x^2-4x$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{0}^{2}|2x^2-4x|dx=\int_{0}^{2}(-2x^2+4x)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

두 곡선 $y=2x^2-4x$, $y=-x^2+ax$가 만나는 점의 x좌표는

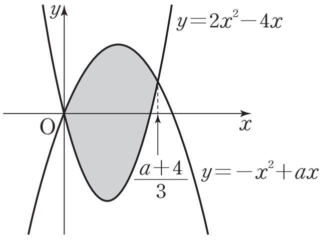
$2x^2-4x=-x^2+ax$에서

$x\{3x-(a+4)\}=0$

$x=0$ 또는 $x=\frac{a+4}{3}$

이때 $\frac{a+4}{3}>2$이므로 두 곡선 $y=2x^2-4x$, $y=-x^2+ax$

는 그림과 같다.



두 곡선 $y=2x^2-4x$와 $y=-x^2+ax$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^{\frac{a+4}{3}} |(2x^2-4x)-(-x^2+ax)|dx$

$=\int_0^{\frac{a+4}{3}} \{-3x^2+(a+4)x\}dx$

$=\left[-x^3+\frac{a+4}{2}x^2\right]_0^{\frac{a+4}{3}}$

$=\frac{(a+4)^3}{54}$

두 곡선 $y=2x^2-4x$와 $y=-x^2+ax$로 둘러싸인 도형의 넓이가 x축에 의하여 이등분되므로

$2\times\frac{8}{3}=\frac{(a+4)^3}{54}$

따라서 $(a+4)^3=288$

답 ⑤

6 함수 $f(x)=x^2+3x+1\left(x\geq-\frac{3}{2}\right)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표는

$x^2+3x+1=x$에서

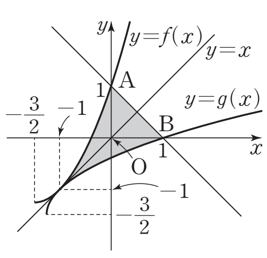
$(x+1)^2=0$

$x=-1$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 점 $(-1,\ -1)$에서 접하므로 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=x$도 점 $(-1,\ -1)$에서 접한다.

한편, 점 A의 좌표는 $(0,\ 1)$이므로 점 B의 좌표는 $(1,\ 0)$이다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 직선 AB는 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_{-1}^{0} |f(x)-x|dx=\int_{-1}^{0} (x^2+2x+1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{0}$

$=\frac{1}{3}$

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=x$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로 $\frac{1}{3}$이다.

원점 O에 대하여 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$

답 ④

7 $v(t)=t^3-3t^2-4t=t(t+1)(t-4)$

따라서 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^6 |v(t)|dt$

$=\int_0^4 (-t^3+3t^2+4t)dt+\int_4^6 (t^3-3t^2-4t)dt$

$=\left[-\frac{1}{4}t^4+t^3+2t^2\right]_0^4+\left[\frac{1}{4}t^4-t^3-2t^2\right]_4^6$

$=32+68$

$=100$

답 ③

8 $v(t)=0$에서

$-\frac{1}{2}t^2+2t=0$

$-\frac{1}{2}t(t-4)=0$

$t=0$ 또는 $t=4$

점 P가 시각 $t=1$에서 $t=4$까지 움직인 거리는

$\int_1^4 \left|-\frac{1}{2}t^2+2t\right|dt=\int_1^4 \left(-\frac{1}{2}t^2+2t\right)dt$

$=\left[-\frac{1}{6}t^3+t^2\right]_1^4$

$=\frac{16}{3}-\frac{5}{6}=\frac{9}{2}$

점 P가 시각 $t=1$에서 $t=k\ (k>1)$까지 움직인 거리가 $\frac{187}{6}$이므로 $k>4$이다.

점 P가 시각 $t=1$에서 $t=k$까지 움직인 거리는

$$\int_1^k \left|-\frac{1}{2}t^2+2t\right|dt$$
$$=\int_1^4\left(-\frac{1}{2}t^2+2t\right)dt+\int_4^k\left(\frac{1}{2}t^2-2t\right)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{6}t^3+t^2\right]_1^4+\left[\frac{1}{6}t^3-t^2\right]_4^k$$
$$=\frac{9}{2}+\left\{\left(\frac{1}{6}k^3-k^2\right)-\left(-\frac{16}{3}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{6}k^3-k^2+\frac{59}{6}$$
이므로
$$\frac{1}{6}k^3-k^2+\frac{59}{6}=\frac{187}{6}$$
$$\frac{1}{6}(k^3-6k^2-128)=0$$
$$\frac{1}{6}(k-8)(k^2+2k+16)=0$$
따라서 $k^2+2k+16=0$은 허근을 가지므로 $k=8$

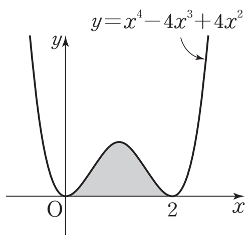
답 8

Level 1 기초 연습 본문 96~97쪽

1 ③	2 ④	3 ⑤	4 ①	5 ②
6 ①	7 ②	8 6		

1 $y=x^4-4x^3+4x^2=x^2(x-2)^2$

곡선 $y=x^4-4x^3+4x^2$은 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는
$$\int_0^2 |x^4-4x^3+4x^2|dx$$
$$=\int_0^2 (x^4-4x^3+4x^2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{5}x^5-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_0^2$$
$$=\frac{16}{15}$$

답 ③

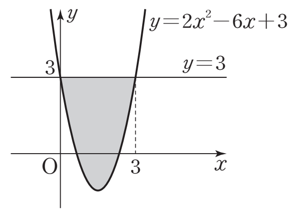
2 곡선 $y=2x^2-6x+3$과 직선 $y=3$이 만나는 점의 x좌표는

$2x^2-6x+3=3$에서

$2x(x-3)=0$

$x=0$ 또는 $x=3$

곡선 $y=2x^2-6x+3$과 직선 $y=3$은 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는
$$\int_0^3 |(2x^2-6x+3)-3|dx$$
$$=\int_0^3 (-2x^2+6x)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right]_0^3$$
$$=9$$

답 ④

3 $f(x)=x^3-2x^2$에서

$f'(x)=3x^2-4x$

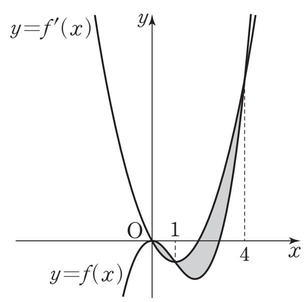
두 곡선 $y=f(x)$, $y=f'(x)$가 만나는 점의 x좌표는

$x^3-2x^2=3x^2-4x$에서

$x(x-1)(x-4)=0$

$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=4$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=f'(x)$는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는
$$\int_0^4 |f(x)-f'(x)|dx$$
$$=\int_0^1 \{(x^3-2x^2)-(3x^2-4x)\}dx$$
$$+\int_1^4 \{(3x^2-4x)-(x^3-2x^2)\}dx$$

$=\int_0^1 (x^3-5x^2+4x)dx+\int_1^4 (-x^3+5x^2-4x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+2x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3-2x^2\right]_1^4$

$=\frac{7}{12}+\frac{45}{4}=\frac{71}{6}$

답 ⑤

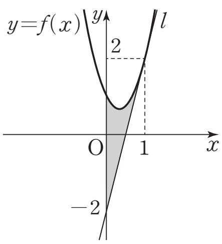
4 $f'(x)=6x-2$이므로

$f'(1)=4$

접선 l의 방정식은

$y-2=4(x-1)$, 즉 $y=4x-2$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 l은 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$\int_0^1 |(3x^2-2x+1)-(4x-2)|dx$

$=\int_0^1 (3x^2-6x+3)dx$

$=\left[x^3-3x^2+3x\right]_0^1$

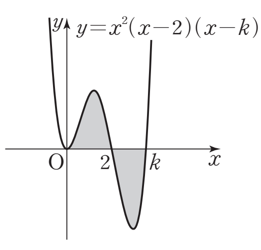
$=1$

답 ①

5 $y=x^4-(2+k)x^3+2kx^2$

$=x^2(x-2)(x-k)$

곡선 $y=x^2(x-2)(x-k)$는 그림과 같다.



곡선 $y=x^4-(2+k)x^3+2kx^2$과 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$\int_0^k \{x^4-(2+k)x^3+2kx^2\}dx$

$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2+k}{4}x^4+\frac{2}{3}kx^3\right]_0^k$

$=\frac{1}{5}k^5-\frac{2+k}{4}k^4+\frac{2}{3}k^4$

$=k^4\left(-\frac{k}{20}+\frac{1}{6}\right)=0$

$k>2$이므로

$k=\frac{10}{3}$

답 ②

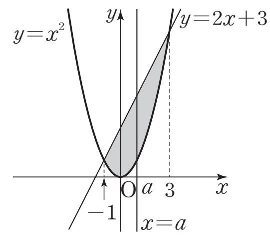
6 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=2x+3$이 만나는 점의 x좌표는

$x^2=2x+3$에서

$(x+1)(x-3)=0$

$x=-1$ 또는 $x=3$

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=2x+3$은 그림과 같다.



곡선 $y=x^2$과 직선 $y=2x+3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_{-1}^3 |(2x+3)-x^2|dx$

$=\int_{-1}^3 (-x^2+2x+3)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^3$

$=9-\left(-\frac{5}{3}\right)$

$=\frac{32}{3}$

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=2x+3$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 직선 $x=a$에 의하여 이등분되므로

$-1<a<3$이고

$\int_{-1}^a |(2x+3)-x^2|dx=\frac{16}{3}$

이때

$\int_{-1}^a |(2x+3)-x^2|dx$

$=\int_{-1}^a (-x^2+2x+3)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x\right]_{-1}^a$

$=\left(-\frac{1}{3}a^3+a^2+3a\right)-\left(-\frac{5}{3}\right)$

$=-\frac{1}{3}a^3+a^2+3a+\frac{5}{3}$

이므로

$-\frac{1}{3}a^3+a^2+3a+\frac{5}{3}=\frac{16}{3}$에서

$(a-1)(a^2-2a-11)=0$

$-1<a<3$이므로

$a=1$

답 ①

7 점 P의 시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 가속도를 $a(t)$라 하면

$a(t)=v'(t)=6t-4$

$a(t)=14$에서

$6t-4=14,\ t=3$

따라서 시각 $t=3$에서 점 P의 위치는

$\int_0^3 (3t^2-4t)\,dt=\Big[t^3-2t^2\Big]_0^3=9$

답 ②

8 $v(t)=-\frac{1}{2}t^2+pt$이므로

$v(t)=0$에서

$-\frac{1}{2}t^2+pt=0$

$-\frac{1}{2}t(t-2p)=0$

$t=0$ 또는 $t=2p$

점 P가 시각 $t=p$에서 $t=4p$까지 움직인 거리가 22이므로

$\int_p^{4p} |v(t)|\,dt=22$

이때

$\int_p^{4p} |v(t)|\,dt$

$=\int_p^{2p}\left(-\frac{1}{2}t^2+pt\right)dt+\int_{2p}^{4p}\left(\frac{1}{2}t^2-pt\right)dt$

$=\left[-\frac{1}{6}t^3+\frac{p}{2}t^2\right]_p^{2p}+\left[\frac{1}{6}t^3-\frac{p}{2}t^2\right]_{2p}^{4p}$

$=\frac{1}{3}p^3+\frac{10}{3}p^3$

$=\frac{11}{3}p^3$

이므로

$\frac{11}{3}p^3=22$에서

$p^3=6$

답 6

Level 2 기본 연습

본문 98~99쪽

1 ④	**2** 151	**3** ②	**4** ⑤	**5** ③
6 ①	**7** 4	**8** 64		

1 조건 (가)에서

$f'(x)=4x^3-8x$

$f'(x)=0$에서

$4x^3-8x=0,\ 4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$

$x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-\sqrt{2},\ x=\sqrt{2}$에서 극솟값을 갖고, $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

한편, $f(x)=\int(4x^3-8x)\,dx=x^4-4x^2+C$

(단, C는 적분상수)

$f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

조건 (나)에서

곡선 $y=f(x)$는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로

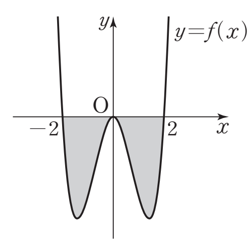
$f(0)=0$이어야 한다.

즉, $f(0)=C=0$이므로 $f(x)=x^4-4x^2$

곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 x좌표는

$x^4-4x^2=0$에서 $x^2(x+2)(x-2)=0$

$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

$\int_{-2}^{2}|f(x)|\,dx=\int_{-2}^{2}(-x^4+4x^2)\,dx$

$=2\int_0^2(-x^4+4x^2)\,dx$

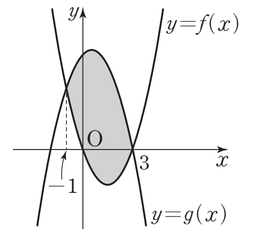
$=2\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{4}{3}x^3\right]_0^2=\frac{128}{15}$

답 ④

2 $f(-2)=f(0)=f(a)=k$ (k는 상수)라 하면
$f(x)-k=x(x+2)(x-a)$로 놓을 수 있다.
$f'(x)=(x+2)(x-a)+x(x-a)+x(x+2)$
$f'(a)=a(a+2)$
$f'(a)=24$에서
$a(a+2)=24$
$(a+6)(a-4)=0$
$a>0$이므로 $a=4$
이때
$f(x)=x(x+2)(x-4)+k$
$f(0)=k$
이므로
$g(x)=f(x)-f(0)=x(x+2)(x-4)$
$g(x)=0$에서
$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=4$
곡선 $y=g(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는
$\int_{-2}^{4}|g(x)|dx$
$=\int_{-2}^{0}g(x)dx+\int_{0}^{4}\{-g(x)\}dx$
$=\int_{-2}^{0}x(x+2)(x-4)dx+\int_{0}^{4}\{-x(x+2)(x-4)\}dx$
$=\int_{-2}^{0}(x^3-2x^2-8x)dx+\int_{0}^{4}(-x^3+2x^2+8x)dx$
$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-4x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+4x^2\right]_{0}^{4}$
$=\frac{20}{3}+\frac{128}{3}$
$=\frac{148}{3}$
따라서 $p=3$, $q=148$이므로
$p+q=3+148=151$

답 151

3 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동시키면
$-y=f(x)$이므로
$y=-x^2+3x$
이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동시키면
$y-4=-(x+1)^2+3(x+1)$
$y=-x^2+x+6$
즉, $g(x)=-x^2+x+6$
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표는
$x^2-3x=-x^2+x+6$에서
$2(x+1)(x-3)=0$
$x=-1$ 또는 $x=3$
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 그림과 같다.



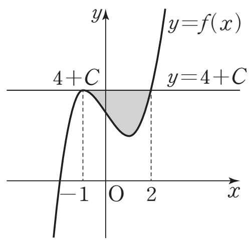
따라서 구하는 넓이는
$\int_{-1}^{3}|f(x)-g(x)|dx$
$=\int_{-1}^{3}\{g(x)-f(x)\}dx$
$=\int_{-1}^{3}\{(-x^2+x+6)-(x^2-3x)\}dx$
$=\int_{-1}^{3}(-2x^2+4x+6)dx$
$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x\right]_{-1}^{3}$
$=\frac{64}{3}$

답 ②

4 $f(x)=\int(6x^2-6)dx$
$=2x^3-6x+C$ (단, C는 적분상수)
$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$에서
$x=-1$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$4+C$	↘	$-4+C$	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $4+C$를 가지므로
$k=4+C$
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 점의 x좌표는
$2x^3-6x+C=k$에서
$2x^3-6x+C=4+C$
$2(x+1)^2(x-2)=0$
$x=-1$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^{2}|(4+C)-(2x^3-6x+C)|dx$

$=\int_{-1}^{2}(-2x^3+6x+4)dx$

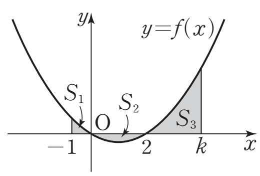
$=\left[-\frac{1}{2}x^4+3x^2+4x\right]_{-1}^{2}$

$=12-\left(-\frac{3}{2}\right)$

$=\frac{27}{2}$

답 ⑤

5



$S_1=\int_{-1}^{0}|f(x)|dx$

$=\int_{-1}^{0}(3x^2-6x)dx$

$=\left[x^3-3x^2\right]_{-1}^{0}$

$=4$

곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점의 x좌표는

$3x^2-6x=0$에서

$3x(x-2)=0$

$x=0$ 또는 $x=2$

$S_2=\int_{0}^{2}|f(x)|dx$

$=\int_{0}^{2}(-3x^2+6x)dx$

$=\left[-x^3+3x^2\right]_{0}^{2}$

$=4$

$S_3=\int_{2}^{k}|f(x)|dx$

$=\int_{2}^{k}(3x^2-6x)dx$

$=\left[x^3-3x^2\right]_{2}^{k}$

$=k^3-3k^2+4$

$\frac{S_1}{2}$, S_2, $\frac{S_3}{9}$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\frac{S_1}{2}+\frac{S_3}{9}=2S_2$

$2+\frac{k^3-3k^2+4}{9}=8$

$k^3-3k^2-50=0$

$(k-5)(k^2+2k+10)=0$

따라서 $k^2+2k+10=0$은 허근을 가지므로 $k=5$

답 ③

6 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+ax$가 역함수를 가져야 하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=3x^2+2ax+a\geq 0$이어야 한다.

이차방정식 $3x^2+2ax+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a\leq 0$에서

$0\leq a\leq 3$

실수 a의 최댓값이 3이므로 $p=3$이다.

함수 $g(x)=x^3+3x^2+3x$의 그래프와 $g(x)$의 역함수 $y=g^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

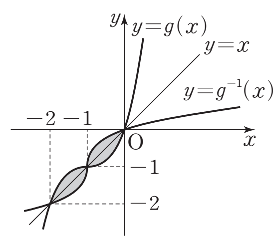
함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표는

$x^3+3x^2+3x=x$에서

$x(x+2)(x+1)=0$

$x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=0$

함수 $y=g(x)$의 그래프와 $g(x)$의 역함수 $y=g^{-1}(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_{-2}^{-1}|(x^3+3x^2+3x)-x|dx$

$+\int_{-1}^{0}|(x^3+3x^2+3x)-x|dx$

$=\int_{-2}^{-1}(x^3+3x^2+2x)dx+\int_{-1}^{0}(-x^3-3x^2-2x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3+x^2\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3-x^2\right]_{-1}^{0}$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 넓이는

$2\times\frac{1}{2}=1$

답 ①

7 세 점 B, C, D의 좌표는 각각

$(a-1,\ a^2),\ (a-1,\ 0),\ (a,\ 0)$

$\overline{AB}=1,\ \overline{AD}=a^2$이므로

사각형 ABCD의 넓이는 a^2이다.

곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=a-1,\ x=a$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{a-1}^{a}|f(x)|dx=\int_{a-1}^{a}x^2dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{a-1}^{a}$$
$$=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{3}(a-1)^3$$
$$=a^2-a+\frac{1}{3}$$

사각형 ABCD의 넓이가 곡선 $y=f(x)$에 의하여 이등분되므로

$a^2-a+\frac{1}{3}=\frac{a^2}{2}$

$3a^2-6a+2=0$

$a>1$이므로 $a=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

따라서

$$12\times(a-1)^2=12\times\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}-1\right)^2$$
$$=12\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=4$$

답 4

8 점 P의 시각 $t=a$에서의 위치는

$\int_0^a(3t^2-12t)dt=\left[t^3-6t^2\right]_0^a=a^3-6a^2$

점 Q의 시각 $t=a$에서의 위치는

$\int_0^a 2tdt=\left[t^2\right]_0^a=a^2$

두 점 P, Q가 시각 $t=a$에서 만나므로

$a^3-6a^2=a^2,\ a^2(a-7)=0$

$a>0$이므로 $a=7$

점 P가 시각 $t=0$에서 $t=7$까지 움직인 거리 s_1은

$$s_1=\int_0^7|v_1(t)|dt$$
$$=\int_0^7|3t^2-12t|dt$$
$$=\int_0^4(-3t^2+12t)dt+\int_4^7(3t^2-12t)dt$$
$$=\left[-t^3+6t^2\right]_0^4+\left[t^3-6t^2\right]_4^7$$
$$=32+81$$
$$=113$$

점 Q가 시각 $t=0$에서 $t=7$까지 움직인 거리 s_2는

$$s_2=\int_0^7|v_2(t)|dt$$
$$=\int_0^7|2t|dt$$
$$=\int_0^7 2tdt$$
$$=\left[t^2\right]_0^7$$
$$=49$$

따라서 $|s_1-s_2|=|113-49|=64$

답 64

Level 3 실력 완성 본문 100~101쪽

1 ② 2 ③ 3 ⑤ 4 48 5 ①

1 $f(x)=\int(3x^2-6)dx=x^3-6x+C_1$ (단, C_1은 적분상수)

$g(x)=\int(2x-5)dx=x^2-5x+C_2$ (단, C_2는 적분상수)

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^3-x^2-x+C_1-C_2$

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

$h'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$h'(x)=0$에서

$x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $y=h(x)$는 $x=-\frac{1}{3}$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$h\left(-\frac{1}{3}\right)=0$ 또는 $h(1)=0$

(i) $h\left(-\frac{1}{3}\right)=0$일 때,

$h\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{27}+C_1-C_2=0$이므로

$C_1-C_2=-\frac{5}{27}$

$h(x)=x^3-x^2-x-\frac{5}{27}$

이때 $f(0)-g(0)=h(0)=-\frac{5}{27}<0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $h(1)=0$일 때,

$h(1)=1-1-1+C_1-C_2=0$이므로

$C_1-C_2=1$

$h(x)=x^3-x^2-x+1$

이때 $f(0)-g(0)=h(0)=1>0$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서

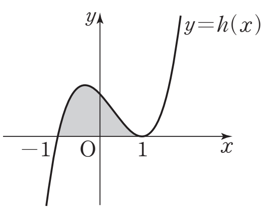
$h(x)=x^3-x^2-x+1$

$h(x)=0$에서

$x^3-x^2-x+1=0$

$(x+1)(x-1)^2=0$

$x=-1$ 또는 $x=1$



따라서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|dx=\int_{-1}^{1}|h(x)|dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^3-x^2-x+1)dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$$
$$=\frac{4}{3}$$

답 ②

2 조건 (가)에서

$f(x)-g(x)=ax(x+2)(x-2)$ (a는 0이 아닌 상수) …… ㉠

로 놓을 수 있다.

조건 (다)에서

$\int_{0}^{-1}g(x)dx=\frac{34}{15}$

이므로 조건(나)에 의하여

$\int_{0}^{1}g(x)dx=\int_{-1}^{0}g(x)dx=-\int_{0}^{-1}g(x)dx=-\frac{34}{15}$

이때

$$\int_{0}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{0}^{1}f(x)dx-\int_{0}^{1}g(x)dx$$
$$=\frac{37}{30}-\left(-\frac{34}{15}\right)$$
$$=\frac{7}{2}$$

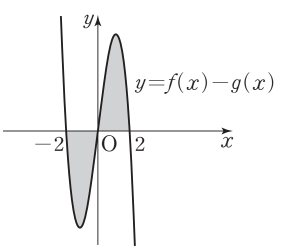
㉠에서

$$\int_{0}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx=\int_{0}^{1}ax(x+2)(x-2)dx$$
$$=\int_{0}^{1}a(x^3-4x)dx$$
$$=a\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_0^1$$
$$=-\frac{7}{4}a$$

이므로

$-\frac{7}{4}a=\frac{7}{2}$

$a=-2$



따라서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-2}^{2}|f(x)-g(x)|dx=\int_{-2}^{2}|-2x(x+2)(x-2)|dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(-2x^3+8x)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{2}x^4+4x^2\right]_0^2$$
$$=16$$

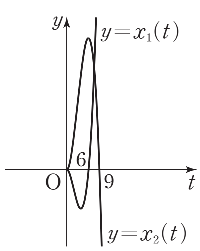
답 ③

3 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면 $x_1(0)=0$, $x_2(0)=0$이므로

$$x_1(t)=\int_0^t v_1(t)dt$$
$$=\int_0^t (t^2-4t)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2\right]_0^t$$
$$=\frac{1}{3}t^3-2t^2$$
$$=\frac{1}{3}t^2(t-6)$$

$$x_2(t)=\int_0^t v_2(t)dt$$
$$=\int_0^t (-t^2+6t)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+3t^2\right]_0^t$$
$$=-\frac{1}{3}t^3+3t^2$$
$$=-\frac{1}{3}t^2(t-9)$$

$t\ge0$에서 두 함수 $y=x_1(t)$, $y=x_2(t)$의 그래프는 그림과 같다.



출발 후 처음으로 두 점 P, Q가 만나는 시각은

$\frac{1}{3}t^2(t-6)=-\frac{1}{3}t^2(t-9)$에서

$\frac{1}{3}t^2(2t-15)=0$

$t>0$이므로

$t=\frac{15}{2}$

$0<t\le\frac{15}{2}$에서 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 하면

$$f(t)=|x_1(t)-x_2(t)|=x_2(t)-x_1(t)$$
$$=-\frac{1}{3}t^2(t-9)-\frac{1}{3}t^2(t-6)$$
$$=-\frac{1}{3}t^2(2t-15)$$

$$f'(t)=-\frac{2}{3}t(2t-15)-\frac{2}{3}t^2$$
$$=-2t(t-5)$$

$f'(t)=0$에서

$t=5$

따라서 $f(t)$는 $t=5$에서 극대이면서 최대이므로

$f(t)$의 최댓값은

$f(5)=\frac{125}{3}$

답 ⑤

4 $\int_0^x\{f(t)-12\}dt=x^3-\frac{3}{13}x^2\int_{-1}^1 f(t)dt$ ······ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)-12=3x^2-\frac{6}{13}x\int_{-1}^1 f(t)dt$

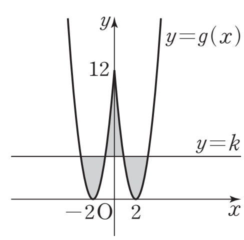
$\int_{-1}^1 f(t)dt=a$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=3x^2-\frac{6}{13}ax+12$

$$a=\int_{-1}^1 f(t)dt$$
$$=\int_{-1}^1\left(3t^2-\frac{6}{13}at+12\right)dt$$
$$=2\int_0^1(3t^2+12)dt$$
$$=2\left[t^3+12t\right]_0^1$$
$$=2\times13$$
$$=26$$

따라서 $f(x)=3x^2-12x+12=3(x-2)^2$이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나므로 $0<k<12$이어야 한다.

한편, 곡선 $y=g(x)$는 y축에 대하여 대칭이고, 곡선 $y=3(x-2)^2$은 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다. 이때 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$로 둘러싸인 세 부분의 넓이가 모두 같으므로 $\int_0^2 \{g(x)-k\}dx=0$이어야 한다.

$$\int_0^2 \{g(x)-k\}dx=\int_0^2 (3x^2-12x+12-k)dx$$
$$=\left[x^3-6x^2+(12-k)x\right]_0^2$$
$$=8-2k$$

이므로

$8-2k=0$

$k=4$

따라서 $k\times f(k)=4\times f(4)=4\times 12=48$

답 48

5 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=2$이므로

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이다.

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-1}{(x-3)^2}=6$이므로

$f(x)-1=(2x+a)(x-3)^2$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-1}{(x-3)^2}=\lim_{x\to3}\frac{(2x+a)(x-3)^2}{(x-3)^2}$$
$$=\lim_{x\to3}(2x+a)=6+a$$

이므로

$6+a=6$에서

$a=0$

$f(x)-1=2x(x-3)^2$

즉, $f(x)=2x(x-3)^2+1$

$f'(x)=6(x-1)(x-3)$

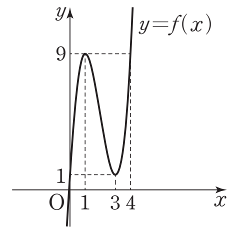
$f'(x)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

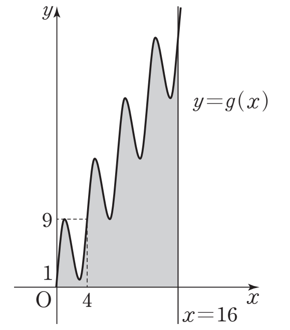
x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	9	↘	1	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 9를 갖고, $x=3$에서 극솟값 1을 갖는다.



한편, 닫힌구간 $[4n, 4n+4]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $4n$만큼, y축의 방향으로 $8n$만큼 평행이동한 것과 일치하므로

$$\int_{4n}^{4n+4} g(x)dx=4\times 8n+\int_0^4 f(x)dx$$
$$=32n+\int_0^4 f(x)dx$$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{16} g(x)dx$$
$$=\int_0^4 g(x)dx+\int_4^8 g(x)dx+\int_8^{12} g(x)dx+\int_{12}^{16} g(x)dx$$
$$=\int_0^4 f(x)dx+\left\{32+\int_0^4 f(x)dx\right\}$$
$$+\left\{64+\int_0^4 f(x)dx\right\}+\left\{96+\int_0^4 f(x)dx\right\}$$
$$=192+4\int_0^4 f(x)dx$$
$$=192+4\int_0^4 \{2x(x-3)^2+1\}dx$$
$$=192+4\int_0^4 (2x^3-12x^2+18x+1)dx$$
$$=192+4\times\left[\frac{1}{2}x^4-4x^3+9x^2+x\right]_0^4$$
$$=192+4\times 20$$
$$=272$$

답 ①