Ⅰ_6. 평행이동

[10공수2-01-06] 평행이동을 탐구하고,
실생활과 연결하여 문제를 해결할 수 있다.

A : 도형의 평행이동을 탐구하고 평행이동한 도형의 방정식을 구할 수 있으며, 실생활과 연결하여 문제를 해결할 수 있다.

B : 도형의 평행이동을 이해하고 평행이동한 도형의 방정식을 구할 수 있으며, 실생활과 연결할 수 있다.

C : 도형의 평행이동을 알고 평행이동한 도형의 방정식을 구할 수 있다.

D : 평행이동한 도형의 방정식을 구할 수 있다.

E : 평행이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.

Ⅰ_7. 대칭이동

[10공수2-01-07] 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동을 탐구하고, 실생활과 연결하여 문제를 해결할 수 있다.

A : 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동을 탐구하고 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있으며, 실생활과 연결하여 문제를 해결할 수 있다.

B : 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동을 이해하고 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있으며, 실생활과 연결할 수 있다.

C : 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구할 수 있다.

D : 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대하여
대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.
E : x축, y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.

1 점과 도형의 이동 ❶

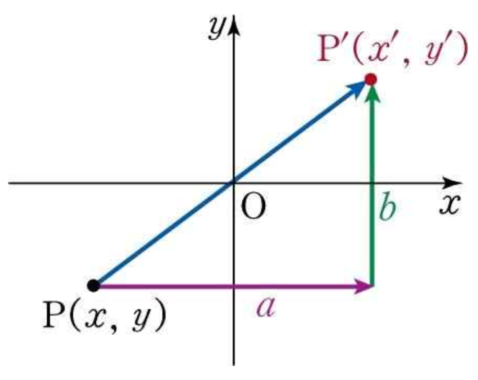
(1) 평행이동

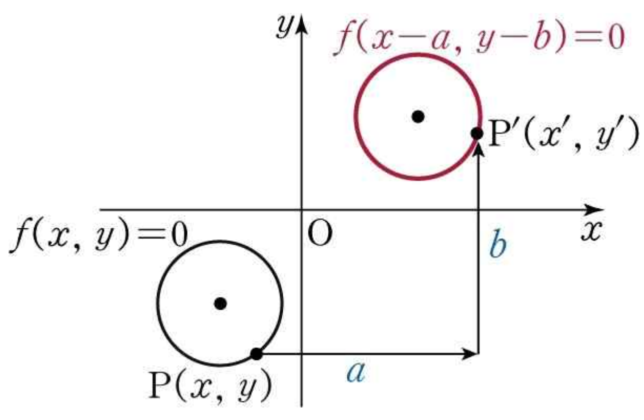
x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동
$(x, y) \to (x+a, y+b)$에 대하여

① 점 : $(x, y) \to (x+a, y+b)$

② 함수 : $y=f(x) \to y-b=f(x-a)$

③ 도형 : $f(x, y)=0 \to f(x-a, y-b)=0$





1 점과 도형의 이동 ❷

(2) 대칭이동

대칭이동	점 (x, y)	함수 $y=f(x)$	도형 $f(x, y)=0$
x축	$(x, -y)$	$y=-f(x)$	$f(x, -y)=0$
y축	$(-x, y)$	$y=f(-x)$	$f(-x, y)=0$
원점	$(-x, -y)$	$y=-f(-x)$	$f(-x, -y)=0$
직선 $y=x$	(y, x)	$x=f(y)$	$f(y, x)=0$
직선 $y=-x$	$(-y, -x)$	$x=-f(-y)$	$f(-y, -x)=0$

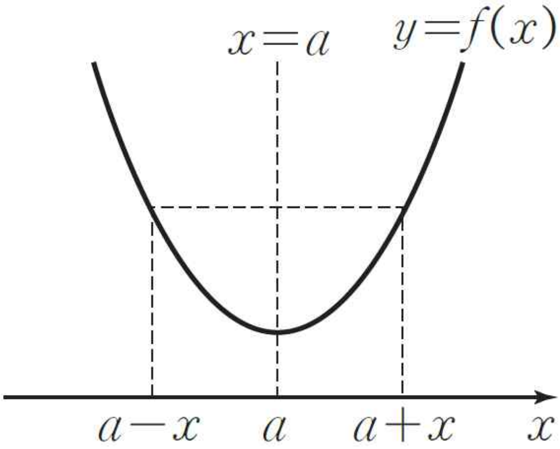
✡ 직선과 점에 대하여 대칭인 도형

대칭이동	점 (x, y)	함수 $y=f(x)$	도형 $f(x, y)=0$
직선 $x=a$	$(2a-x, y)$	$y=f(2a-x)$	$f(2a-x, y)=0$
직선 $y=b$	$(x, 2b-y)$	$y=2b-f(x)$	$f(x, 2b-y)=0$
점 (a, b)	$(2a-x, 2b-y)$	$y=2b-f(2a-x)$	$f(2a-x, 2b-y)=0$

☑ 두 점 $\mathrm{P}(x, y)$와 $\mathrm{P}'(x', y')$의 중점이 $\mathrm{M}(a, b)$

$$\Rightarrow \frac{x+x'}{2}=a, \ \frac{y+y'}{2}=b \quad \therefore \ x'=2a-x, \ y'=2b-y$$

2 대칭성을 가진 함수 ❶



(1) 선대칭함수

① 직선 $x=a$에 대하여 대칭인 함수는

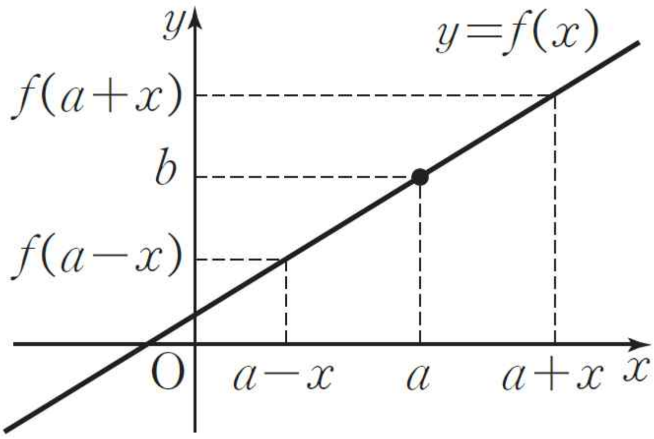
$$f(a-x)=f(a+x)$$
$$f(2a-x)=f(x)$$

② $x=0$에 대하여 대칭인 함수는 $f(-x)=f(x)$

즉, y축에 대하여 대칭인 함수

③ 직선 $x=a$를 축으로 하는 이차함수가 대표적인 예이다.

2 대칭성을 가진 함수 ❷



(2) 점대칭함수

① 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭인 함수는

$$f(a-x)+f(a+x)=2b$$
$$f(2a-x)+f(x)=2b$$

② 원점에 대하여 대칭인 함수는 $f(-x)=-f(x)$

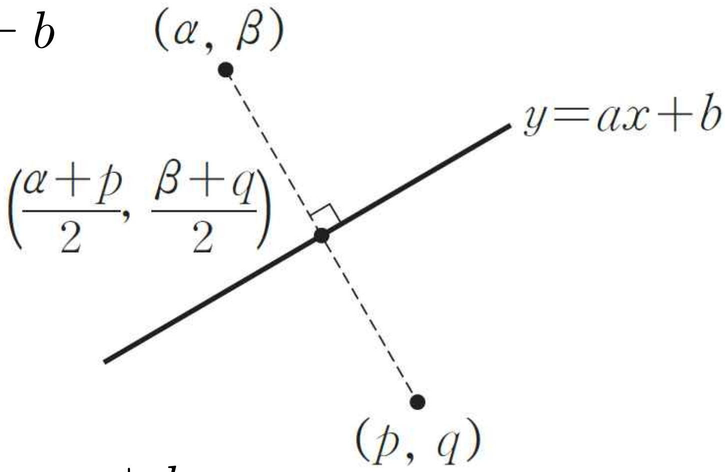
③ 점 $(a,\ b)$를 지나는 일차함수가 대표적인 예이다.

$\boxed{3}$ 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭이동

$\Leftrightarrow$ 대칭인 두 점의 수직이등분선이 $y=ax+b$

$\Leftrightarrow$ 두 점을 중심으로 하는 두 원의 공통현이 $y=ax+b$

(1) 점 $(\alpha,\ \beta)$를 직선 $y=ax+b$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $(p,\ q)$라 하자.



(2) 두 점 $(\alpha,\ \beta)$, $(p,\ q)$를 잇는 선분의 중점 $\left(\dfrac{\alpha+p}{2},\ \dfrac{\beta+q}{2}\right)$가 직선 $y=ax+b$

위에 있다. 즉, $\dfrac{\beta+q}{2}=a\left(\dfrac{\alpha+p}{2}\right)+b\ \cdots$ ①

(3) 두 점 $(\alpha,\ \beta)$, $(p,\ q)$를 연결한 직선은 직선 $y=ax+b$와

수직이다. 즉, $\dfrac{q-\beta}{p-\alpha}=-\dfrac{1}{a}\ \cdots$ ②

(4) ①, ②을 연립하여 점 $(p,\ q)$의 좌표를 구한다.

✡ 기울기가 ± 1인 직선에 대한 대칭이동

(1) 직선 $y=x+k \Leftrightarrow x=y-k$에 대하여 대칭이동

① 점 : $(x,\ y) \rightarrow (y-k,\ x+k)$

② 도형 : $f(x,\ y)=0 \rightarrow f(y-k,\ x+k)=0$

(2) 직선 $y=-x+k \Leftrightarrow x=-y+k$에 대하여 대칭이동

① 점 : $(x,\ y) \rightarrow (-y+k,\ -x+k)$

② 도형 : $f(x,\ y)=0 \rightarrow f(-y+k,\ -x+k)=0$

$\boxed{4}$ 절댓값을 포함한 함수의 대칭성

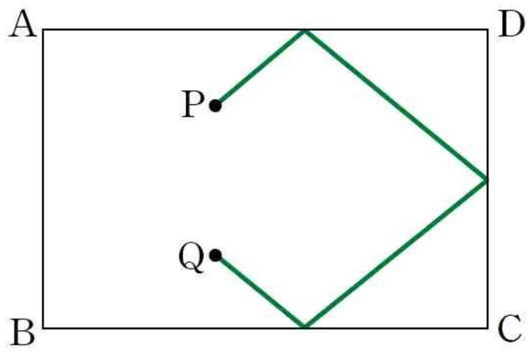
(1) $y=f(|x|)$: $x\geq 0$인 부분은 그대로 하고 y축에 대하여 대칭이동, $x<0$인 부분은 삭제

(2) $y=|f(x)|$: $f(x)\geq 0$인 부분은 그대로, $f(x)<0$인 부분은 x에 대하여 대칭이동

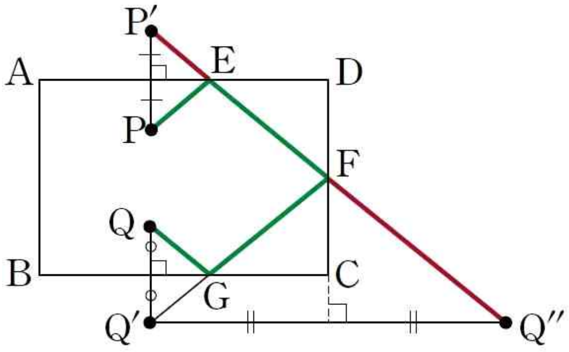
(3) $|y|=f(x)$: $f(x)\geq 0$인 부분은 그대로 하고 x축에 대하여 대칭이동, $f(x)<0$인 부분은 삭제

(4) $|y|=f(|x|)$: $x>0$, $y>0$인 부분(제1사분면)만 그대로 하고 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동

✡ 최단 경로 ❶



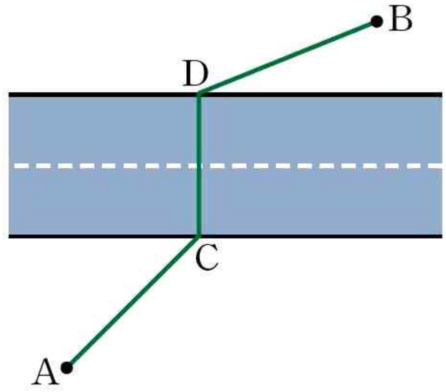
(1) 오른쪽 그림과 같이 직사 각형 ABCD의 내부에 두 점 P, Q가 있다. 점 P에서 출발하여 변 AD, DC, CB 위의 점을 지나 점 Q에 이르는 최단 경로를 구하는 방법을 말하시오.



⇨ 점 P를 $\overline{AD}$에 대하여 대칭이동한 점을 P′, 점 Q를 $\overline{BC}$에 대하여 대칭이동한 점을 Q′, 점 Q′를 $\overline{DC}$의 연장선에 대하여 대칭이동한 점을 Q″이라고 하자. ∴ 최단 경로 : P − E − F − G − Q

✡ 최단 경로 ❷

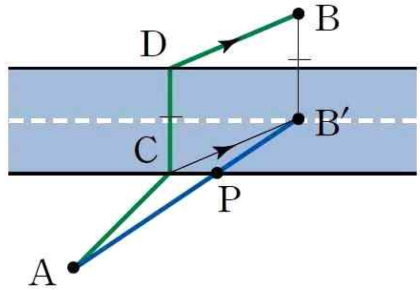
(2) 오른쪽 그림에서 도로를 사이에 두고 양쪽에 있는 두 지점 A, B를 연결하기 위해 횡단보도를 도로와 수직이 되게 놓으려고 한다. 이때, 두 지점 A, B를 연결하는 경로 A − C − D − B의 거리가 최소가 되도록 횡단보도의 위치를 정하시오. (단, 횡단보도의 폭은 무시)



⇨ $\overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DB}$

$= \overline{AC} + \overline{CB'} + \overline{B'B}$

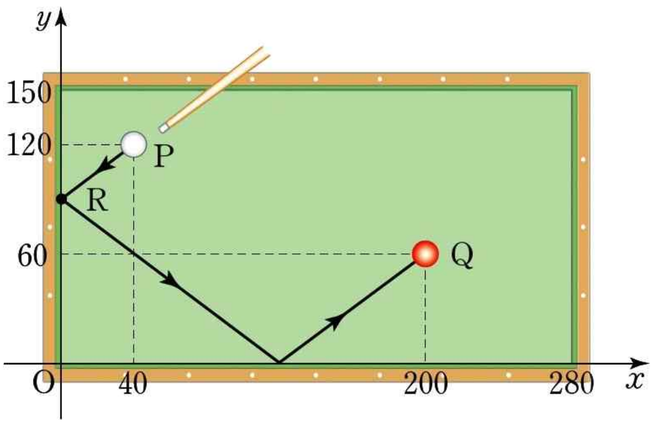
$\geq \overline{AB'} + \overline{B'B}$



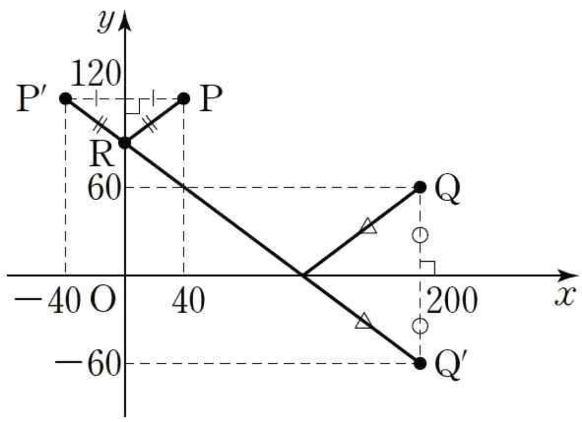
∴ 직선 AB′와 도로의 아래쪽면이 만나는 점 P에 횡단보도를 설치하면 된다.

✡ 당구에서 조준점 R의 좌표 구하기 ❶

(1)



⇒



⇨ 점 P를 y축에 대하여 대칭이동한 점 : P′$(-40,\ 120)$

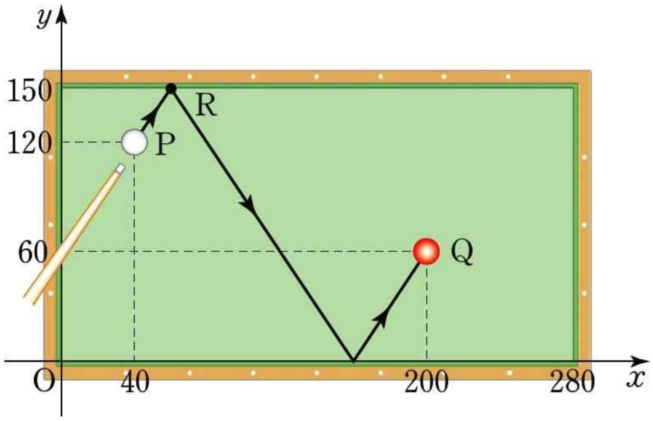
점 Q를 x축에 대하여 대칭이동한 점 : Q′$(200,\ -60)$

$\overline{P'Q'}$: $y = \dfrac{-60-120}{200+40}(x+40)+120 = -\dfrac{3}{4}x+90$

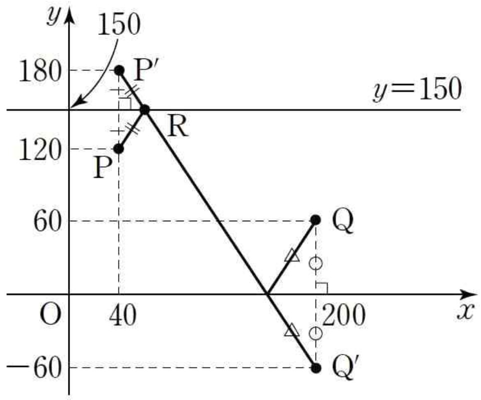
∴ 점 R의 좌표 : $(0,\ 90)$

✡ 당구에서 조준점 R의 좌표 구하기 ❷

(2)



$\Rightarrow$



⇨ 점 P를 직선 $y = 150$에 대하여 대칭이동 : $P'(40,\ 180)$

점 Q를 x축에 대하여 대칭이동한 점 : $Q'(200,\ -60)$

$\overline{P'Q'}$: $y = \dfrac{-60-180}{200-40}(x-40)+180 = -\dfrac{3}{2}x+240$

∴ 점 R의 좌표 : $(60,\ 150)$