III 적분법

1 여러 가지 적분법

01 여러 가지 함수의 적분 137 ~ 142쪽

준비하기 (1) $\frac{1}{3}x^3-2x+C$ (2) 1

생각 열기 ❶ $y'=-x^{-2}$
❷ $-x^{-1}+C$

문제 1 (1) $-\frac{1}{3}x^{-3}+C$
(2) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$
(3) $(\sqrt{2}-1)x^{\sqrt{2}+1}+C$

문제 2 (1) $\frac{4x-1}{2x^2}+C$ (2) $\frac{2x\sqrt{x}}{3}+x+C$

문제 3 (1) $\frac{1}{2}+\ln 4$ (2) $\frac{24}{5}$

문제 4 (1) $e^{x-1}+\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+C$ (2) $\frac{3^x}{\ln 3}-x+C$

문제 5 (1) $\frac{12}{\ln 3}$ (2) $-1+e+\frac{1}{8\ln 2}$
(3) $1+\frac{2}{\ln 2}$ (4) $\frac{9}{4}$

함께하기 ❶ $-\sin x,\ \sec^2 x,\ -\csc^2 x$
❷ $-\cos x+C,\ \tan x+C,\ -\cot x+C$

문제 6 (1) $-\cos x+\sin x+C$
(2) $-2\cos x+\cot x+C$
(3) $\sec x+\tan x+C$
(4) $x+\csc x+C$

문제 7 (1) $3-\frac{\pi}{2}$ (2) $3-\sqrt{2}-\sqrt{3}$

문제 8 (1) $\tan x-x+C$ (2) $-\cot x+x+C$

문제 9 (1) 2 (2) $\frac{\pi}{2}-1$

생각 넓히기 ❶ $\frac{\pi}{4}$
❷ $\sin x-\cos x\geq 0$인 구간: 닫힌구간 $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$
$\sin x-\cos x\leq 0$인 구간: 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
❸ $2\sqrt{2}$

02 치환적분법 143 ~ 149쪽

준비하기 (1) $y'=3(x-1)^2$
(2) $y'=3\cos(3x+1)$

생각 열기 ❶ $\{f(g(x))\}'=20(2x-1)^9$
❷ $\frac{1}{20}(2x-1)^{10}+C$

문제 1 (1) $\frac{1}{12}(2x+3)^6+C$
(2) $2\sin\left(\frac{x}{2}-3\right)+C$
(3) $\frac{1}{6}(4x+1)\sqrt{4x+1}+C$
(4) $\frac{1}{3}e^{3x-1}+C$

문제 2 (1) $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$
(2) $\frac{1}{4}\sin^4 x+C$
(3) $\frac{1}{3}(x^2-1)\sqrt{x^2-1}+C$
(4) $\frac{2}{3}(e^x+1)\sqrt{e^x+1}+C$

문제 3 $ax+b=t$로 놓으면 $x=\frac{t-b}{a}$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{a}$이므로

$$\begin{aligned}\int f(ax+b)dx&=\int f(t)\times\frac{1}{a}dt\\&=\frac{1}{a}\int f(t)dt\\&=\frac{1}{a}F(t)+C\\&=\frac{1}{a}F(ax+b)+C\end{aligned}$$

함께하기 $f'(x)$, $\frac{1}{t}$, $|f(x)|$

문제 4 (1) $\ln|x^3-x+1|+C$
(2) $\ln|\sin x|+C$
(3) $\ln(e^x+e^{-x})+C$
(4) $\ln|\ln x|+C$

문제 5 (1) $x^2-5\ln|x+1|+C$
(2) $\frac{3}{2}x^2-5x+27\ln|x+5|+C$
(3) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+C$
(4) $\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

문제 6 (1) $\frac{6}{25}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\sqrt{2}-1$ (4) $e(e^3-1)$

생각 넓히기 ❶ $\frac{\pi}{2}$ ❷ $\frac{\pi}{4}$ ❸ $\sqrt{3}-1$

탐구 & 융합 150쪽

탐구 ❶ $f(x)=\frac{24}{\pi}\cos\left\{\frac{\pi}{24}(x+18)\right\}$

$g(x)=\frac{24}{\pi}\sin\left\{\frac{\pi}{24}(x+18)\right\}$

❷ 50 %

03 부분적분법 151 ~ 154쪽

준비하기 (1) $y'=e^x(1+x)$ (2) $y'=\cos^2x-\sin^2x$

생각 열기 ❶ $(x\sin x)'-\sin x$

❷ $x\sin x-\int\sin x\,dx$

생각톡톡 계산이 복잡해진다.

문제 1 (1) $-e^{-x}(x-1)+C$
(2) $x^3\left(\ln x-\frac{1}{3}\right)+C$

문제 2 (1) $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$
(2) $x\{(\ln x)^2-2\ln x+2\}+C$

문제 3 $f(t)=e^{-t}\sin t+C$

문제 4 (1) $1-\frac{2}{e}$ (2) $\frac{2}{e}-\frac{3}{e^2}$

생각 넓히기 결과는 모두 $\frac{1}{4}$로 같다.

탐구 & 융합 155쪽

(1) $\frac{1}{9}e^{3x}(3x-7)+C$
(2) $(x^2-2)\sin x+2x\cos x+C$
(3) $\frac{1}{9}x^3(3\ln x-1)+C$

Ⅲ-1 중단원 마무리하기 156~159쪽

01 (1) $-\frac{1}{2x^2}+C$ (2) $2\sqrt{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$
(3) $\frac{96}{5}$ (4) $\frac{2}{3}e\sqrt{e}-\frac{2}{3}$

02 (1) $\frac{2^{x+2}}{\ln 2}+C$ (2) $-\cot x-x+C$
(3) $e-2$ (4) $2+\frac{\pi}{4}$

03 (1) $-\frac{1}{2}e^{1-2x}+C$ (2) $\frac{1}{4}(x^2-1)^4+C$
(3) $-2\sqrt{1-x^2}+C$ (4) $\ln(1+\sin x)+C$

04 (1) $\frac{e^5-e}{2}$ (2) $\frac{26}{15}$

05 (1) $\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}+C$

(2) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x-\frac{4}{9}x\sqrt{x}+C$

(3) 1

(4) 1

06 (1) $\ln|x-3|-\ln|x+1|+C$

(2) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+x+C$

07 $2+\ln 2$

08 (1) $2\sqrt{3}+\frac{\pi^2}{18}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) -2π

09 해결 과정 $\int f(x)dx=xf(x)-x^2e^{-x}$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+xf'(x)+x(x-2)e^{-x}$$ ▶ 30 %

이므로 $f'(x)=(2-x)e^{-x}$

즉,

$$f(x)=\int(2-x)e^{-x}dx$$
$$=-(2-x)e^{-x}-\int e^{-x}dx$$
$$=(x-1)e^{-x}+C$$ ▶ 40 %

$f(1)=0$이므로 $0=0+C$, $C=0$

답 구하기 따라서 $f(x)=(x-1)e^{-x}$이므로

$$f(4)=3e^{-4}$$ ▶ 30 %

10 $\ln 3$

11 $e^3+\frac{1}{e}-4$

12 $\frac{2e-5}{e-2}$

13 $f(x)=x-\frac{\pi}{4}$

14 $-\frac{5}{2}$

15 $f'(x)=(x\ln x-x)'$

$$=\ln x+x\times\frac{1}{x}-1$$
$$=\ln x$$

이때 $g(x)$는 $f'(x)$의 역함수이므로

$$g(x)=e^x$$

즉, $\int g(x-1)dx=\int e^{x-1}dx=e^{x-1}+C$이고,

$h(1)=1$이므로

$$h(x)=e^{x-1}$$

따라서 $h(2)=e$

16 $f(x)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$이고,

$x=a$일 때 $t=f(a)$, $x=b$일 때 $t=f(b)$이므로

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b f(x)f'(x)dx$$
$$=\int_{f(a)}^{f(b)} t\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{f(a)}^{f(b)}$$
$$=\frac{1}{2}[\{f(b)\}^2-\{f(a)\}^2]$$

이때 $f(b)=4$, $f(a)=2$이므로

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\frac{1}{2}(4^2-2^2)=6$$

17 문제 이해 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt=a$ (a는 상수)로 놓으면

$$f(x)=5x\cos x+a$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(5x\cos x+a)dx=a$에서

$$5\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx+a\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx=a \quad \cdots\cdots ㉠$$

▶ 30 %

해결 과정 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$에서

$u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\sin x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx=\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$
$$=\frac{\pi}{2}-\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{2}-1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

▶ 40 %

㉡을 ㉠에 대입하면

$$5\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+a\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=a,$$

$$\frac{5}{2}\pi-5+\frac{a}{2}\pi=a$$

즉, $a=-5$ ▶ 20 %

답 구하기 따라서 $f(x)=5x\cos x-5$이므로

$f(0)=-5$ ▶ 10 %

18 $y=e^x-1$로 놓으면 $y+1=e^x$

이 식의 양변에 로그를 취하면 $x=\ln(y+1)$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\ln(x+1)$

따라서 $f^{-1}(x)=\ln(x+1)$이므로

$$g(x)=\int \ln(x+1)dx$$

이때 $x+1=t$로 놓으면 $1=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$$g(x)=\int \ln(x+1)dx=\int \ln t\,dt$$

$\int \ln t\,dt$에서

$u(t)=\ln t$, $v'(t)=1$로 놓으면

$u'(t)=\dfrac{1}{t}$, $v(t)=t$이므로

$$\begin{aligned}g(x)&=\int \ln t\,dt\\&=t\ln t-\int 1\,dt\\&=(x+1)\ln(x+1)-(x+1)+C\end{aligned}$$

이때 $g(0)=1$이므로

$-1+C=1$, 즉 $C=2$

따라서 $g(x)=(x+1)\ln(x+1)-x+1$이므로

$g(e-1)=e-(e-1)+1=2$

2 정적분의 활용

01 정적분과 급수의 합 사이의 관계 161 ~ 164쪽

준비하기 (1) $\dfrac{3}{4}$ (2) 6

생각 열기 ❶ [그림 3]

❷ 예시 모눈의 크기를 작게 한다.

함께하기 ❶ $M_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{n}\times\dfrac{2k}{n}\right)=\dfrac{n+1}{n}$

❷ $m_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{1}{n}\times\dfrac{2k}{n}\right)=\dfrac{n-1}{n}$

❸ $\lim_{n\to\infty}M_n=\lim_{n\to\infty}m_n=1$이고 $\int_0^1 2x\,dx=1$이므로 같다.

문제 1 (1) -4 (2) $\dfrac{1}{4}$

문제 2 (1) $\dfrac{1}{5}$ (2) 2

생각 넓히기 (가)—ㄷ, (나)—ㄱ, (다)—ㄴ

(가) $x_k=\dfrac{k}{n}$이면 $k=1, 2, \cdots, n$에서

$\dfrac{1}{n}\le x_k\le\dfrac{n}{n}$, $\Delta x=\dfrac{1}{n}$,

$f(x_k)=(1+2x_k)^2$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\int_0^1(1+2x)^2dx$$

(나) $x_k=\dfrac{2k}{n}$이면 $k=1, 2, \cdots, n$에서

$\dfrac{2}{n}\le x_k\le\dfrac{2n}{n}$, $\Delta x=\dfrac{2}{n}$,

$f(x_k)=(1+x_k)^2$

이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\frac{1}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\times\frac{2}{n}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}\int_0^2(1+x)^2dx\end{aligned}$$

(다) $x_k=1+\dfrac{2k}{n}$이면 $k=1, 2, \cdots, n$에서

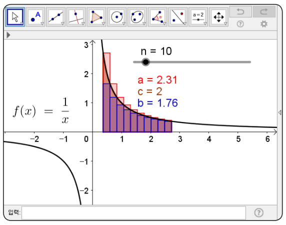
$1+\dfrac{2}{n}\le x_k\le 1+\dfrac{2n}{n}$, $\Delta x=\dfrac{2}{n}$,

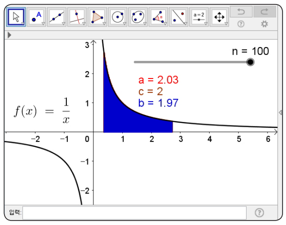
$f(x_k)=x_k^2$

이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\frac{1}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\times\frac{2}{n}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}\int_1^3 x^2dx\end{aligned}$$

공학적 도구 165쪽





컴퓨터 프로그램을 이용하여 구한 도형의 넓이의 어림값은 n의 값이 커질수록 정적분 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x}dx$의 값 2에 가까워진다.

02 넓이 166~167쪽

준비하기 $\frac{4}{3}$

생각 열기 $\int_0^2 (-x+2)dx + \int_2^3 (x-2)dx$

문제 1 (1) 1 (2) $e+\frac{1}{e}-2$

문제 2 (1) $e^2+e+\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}-4$ (2) $\frac{49}{12}$

03 부피 168~170쪽

준비하기 $\pi x^2 h$

생각 열기 ❶ $\frac{2000}{3}\pi\ \mathrm{cm}^3$

❷ $\frac{2000}{3}\pi$로 같다.

문제 1 $(18900\ln 21-18000)\ \mathrm{cm}^3$

문제 2 $\frac{4\sqrt{3}}{15}$

생각 넓히기 ❶ $S(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2-x^2)$

❷ $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$

탐구 & 융합 171쪽

탐구 ❶ (1) $S(x)=\pi(r^2-x^2)$

(2) $\int_0^r \pi(r^2-x^2)dx$

(3) $\frac{4}{3}\pi r^3$

❷ [방법 1] (1) $\frac{2}{3}\pi r^3$

(2) $\frac{2}{3}\pi r^3$으로 같다.

[방법 2] (1) $S(x)=\pi(r^2-x^2)$

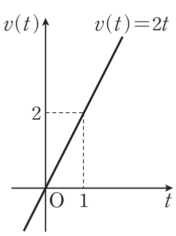
(2) $\frac{2}{3}\pi r^3$

(3) $\frac{2}{3}\pi r^3$으로 같다.

04 속도와 거리 172~175쪽

준비하기 16

생각 열기 ❶



❷ 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리

문제 1 (1) $\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}t$ (2) $\frac{6}{\pi}$

문제 2 $\frac{4}{3}$

문제 3 $\frac{1}{4}(1+e^2)$

생각 넓히기 12

Ⅲ-2 중단원 **마무리하기** 176~179쪽

01 $1,\ k,\ n^2,\ n^2,\ -\frac{1}{2}$

02 (1) 1 (2) $\ln 3$

03 $2\sqrt{2}$

04 $(e^4+11)\ \mathrm{cm}^3$

05 (1) $(t-2)e^t+2$ (2) e^3+2e-2

06 (1) $\frac{16}{5}$ (2) $\frac{2}{3}$

07 $2\ln 5$

08 $\sqrt{3}$

09 해결 과정 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면 단면은 반지름의 길이가 $\sqrt{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$인 원이므로

$$S(x)=\pi\left\{\sqrt{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\right\}^2$$
$$=\pi\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

▶ 40 %

답 구하기 따라서 구하는 부피 V는

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{3}} S(x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)dx$$
$$=\pi\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

▶ 60 %

10 32

11 $\frac{5\sqrt{3}}{3}\pi+2$

12 $e-\frac{1}{e}$

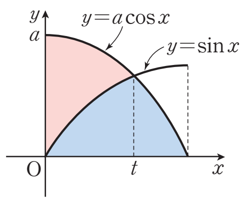
13 $x_k=\frac{k\pi}{4n}$로 놓으면 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$에서

$$0\le x_k\le\frac{\pi}{4},\ \Delta x=\frac{\pi}{4n},\ f(x_k)=\tan^2 x_k$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\tan^2\frac{k\pi}{4n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)dx$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x-1)dx$$
$$=4\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=4-\pi$$

14 두 곡선 $y=a\cos x$와 $y=\sin x$의 교점의 x좌표를 $t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면



$$a\cos t=\sin t$$

이고 $\sin^2 t+\cos^2 t=1$이므로

$$\sin t=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}},\ \cos t=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \quad \cdots\cdots ①$$

곡선 $y=\sin x$가 주어진 도형의 넓이를 이등분하므로

$$2\int_0^t(a\cos x-\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos x\,dx,$$
$$2\Big[a\sin x+\cos x\Big]_0^t=\Big[a\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}},$$
$$2(a\sin t+\cos t-1)=a \quad \cdots\cdots ②$$

②에 ①을 대입하여 정리하면

$$2(\sqrt{1+a^2}-1)=a, \quad a(3a-4)=0$$
$$a=0 \text{ 또는 } a=\frac{4}{3}$$

그런데 a는 양수이므로 $a=\frac{4}{3}$

15 해결 과정 수면의 높이가 x일 때, 수면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{4x+2}{(2x+1)^2+4}\pi\ (0\le x\le 2)$$
$$S'(x)=\frac{-4(2x+1)^2+16}{\{(2x+1)^2+4\}^2}\pi$$

$S'=0$에서

$$-4(2x+1)^2=-16, \quad (2x+1)^2=4$$
$$x=-\frac{3}{2} \text{ 또는 } x=\frac{1}{2}$$

그런데 $0\le x\le 2$이므로 $x=\frac{1}{2}$

$0 \le x \le 2$에서 함수 $S(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	2
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	$\frac{2}{5}\pi$	↗	$\frac{1}{2}\pi$ (극댓값)	↘	$\frac{10}{29}\pi$

따라서 수면의 넓이 $S(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극대이면서 최대이다. ▶ 40 %

답 구하기 이때 채워진 물의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^{\frac{1}{2}} S(x)dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4x+2}{(2x+1)^2+4}dx$$

$(2x+1)^2+4=t$로 놓으면

$$8x+4=\frac{dt}{dx}$$

이고, $x=0$일 때 $t=5$, $x=\frac{1}{2}$일 때 $t=8$이므로

$$V=\frac{\pi}{2}\int_5^8 \frac{1}{t}dt$$
$$=\frac{\pi}{2}\Big[\ln|t|\Big]_5^8$$
$$=\frac{\pi}{2}\ln\frac{8}{5}$$ ▶ 60 %

16 $\frac{dx}{dt}=-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t$

$=-e^{-t}(\cos t+\sin t)$

$\frac{dy}{dt}=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t$

$=-e^{-t}(\sin t-\cos t)$

시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리 $s(a)$는

$s(a)$

$=\int_0^a \sqrt{\{-e^{-t}(\cos t+\sin t)\}^2+\{e^{-t}(\cos t-\sin t)\}^2}dt$

$=\int_0^a \sqrt{2}e^{-t}dt$

$=\sqrt{2}\Big[-e^{-t}\Big]_0^a$

$=-\sqrt{2}(e^{-a}-1)$

따라서 구하는 극한값은

$$\lim_{a\to\infty} s(a)=\lim_{a\to\infty}\{-\sqrt{2}(e^{-a}-1)\}$$
$$=\sqrt{2}$$

Ⅲ 대단원 평가하기 180 ~ 183쪽

01 ④ **02** ②

03 ③ **04** 0

05 ② **06** ④

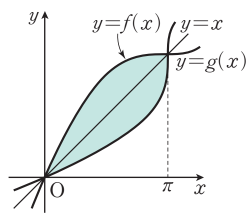
07 $\frac{\pi}{6}$ **08** ⑤

09 0 **10** 1

11 ① **12** ②

13 ①

14 $f'(x)=1+\cos x\ge 0$



이므로 $f(x)$는 증가함수이고, $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이때 두 곡선의 교점의 x좌표는 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점의 x좌표와 같으므로

$x+\sin x=x$, $\sin x=0$

$x=0$ 또는 $x=\pi$

이때 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$ $(0\le x\le \pi)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\pi}\{f(x)-g(x)\}dx=2\int_0^{\pi}\{f(x)-x\}dx$$
$$=2\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$
$$=2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$
$$=4$$

15 ③ **16** $1-\frac{\pi}{4}$

17 ④ **18** 2

19 해결 과정 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt=k$ (k는 상수)라 하면

$f(x)=x\cos x+k$ ······ ①

①의 양변을 $t=0$부터 $t=\frac{\pi}{2}$까지 적분하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(t\cos t+k)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}} k\,dt$$
$$=\Big[t\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt+\Big[kt\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{2}-\Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}k$$
$$=\frac{\pi}{2}k+\frac{\pi}{2}-1$$

이때 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt=k$이므로

$\frac{\pi}{2}k+\frac{\pi}{2}-1=k$에서 $k=-1$ ▶ 80 %

답 구하기 $k=-1$이고 $f(x)=x\cos x-1$이므로

$f(0)=-1$ ▶ 20 %

20 해결 과정 (주어진 식)

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{n\pi}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}$$ ▶ 20 %

이때 $f(x)=\cos x$, $a=0$, $b=\pi$로 놓으면

$\varDelta x=\frac{\pi-0}{n}=\frac{\pi}{n}$, $x_k=\frac{k\pi}{n}$ ▶ 40 %

답 구하기 따라서 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\Big[\sin x\Big]_0^{\pi}$$
$$=0$$ ▶ 40 %

21 문제 이해 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서

$$\sin x-\sin^3 x=\sin x(1-\sin^2 x)$$
$$=\sin x\cos^2 x\geq 0$$

이므로 이 구간에서 $\sin x\geq\sin^3 x$이다. ▶ 30 %

해결 과정 두 곡선 $y=\sin x$와 $y=\sin^3 x$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\sin^3 x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x(1-\sin^2 x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin x\,dx$$ ▶ 30 %

답 구하기 $\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이고,

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin x\,dx=\int_1^0(-t^2)dt$$
$$=\int_0^1 t^2dt=\frac{1}{3}$$ ▶ 40 %

22 문제 이해 $\frac{dx}{dt}=t-2$, $\frac{dy}{dt}=2\sqrt{2t}$ ▶ 30 %

해결 과정 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리가 6이라 하면

$$\int_0^a\sqrt{(t-2)^2+(2\sqrt{2t})^2}dt=6,$$
$$\int_0^a\sqrt{t^2+4t+4}dt=6,$$
$$\int_0^a\sqrt{(t+2)^2}dt=6,$$
$$\int_0^a(t+2)dt=6,$$
$$\left[\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^a=6,$$
$$\frac{1}{2}a^2+2a=6,$$
$$a^2+4a-12=0,$$
$$(a+6)(a-2)=0$$

그런데 $a>0$이므로 $a=2$ ▶ 50 %

답 구하기 따라서 점 P가 원점을 출발하여 움직인 거리가 6일 때의 시각은 $t=2$이다. ▶ 20 %